

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR
TÉRKÉPTUDOMÁNYI ÉS GEOINFORMATIKAI TANSZÉK

Pillangó típusú oktaéder vetületek a Föld geokartográfiai ábrázolásához

TDK-DOLGOZAT
TÉRKÉPÉSZ MESTERSZAK

Készítette:

Kerkovits Krisztián András
térképész mesterszakos hallgató

Témavezető:

Dr. Györffy János
docens

ELTE Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék



Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

	oldal
Előszó	3
1. fejezet Alapfogalmak.....	4
2. fejezet A felhasználható vetületek	6
2.1 A gnomonikus vetület.....	6
2.2 A szögtartó Cahill-vetület.....	7
2.3 Cahill kvázi-területtartó vetülete	9
2.4 A Cahill–Keyes-vetület.....	12
2.5 Snyder területtartó vetülete	15
2.6 Módosított Collignon-vetület.....	16
2.7 A Waterman-vetület.....	18
3. fejezet Az oktaéder vetületeket ábrázoló programról	21
3.1 Bevezető.....	21
3.2 Jelölések.....	22
3.3 Általános számítási feladatok	22
3.4 Vetületi egyenletek	24
4. fejezet Cahill kvázi-területtartó vetületének felújítása	30
4.1 A kutatás célja.....	30
4.2 A vetületi egyenletek	30
4.3 Az elkészült vetület jellemzése.....	33
5. fejezet A pillangó-vetületek mai lehetséges alkalmazásai	34
Összefoglalás	36
Köszönetnyilvánítás.....	37
Forrásjegyzék.....	38
Ábrák forrásai	39

Előszó

Dolgozatom célja, hogy a kevésbé elterjedt pillangó típusú vetületeket, és az ebben készült térképeket bemutassa. Ezek a térképek esztétikai értékükkel, kedvező torzulási viszonyaikkal sokkal nagyobb népszerűségnek is örvendhetnének. A dolgozatban bemutatom Cahill egyik vetületváltozatának felújítását is, melynek célja, hogy a leképezés a vetülettan mai igényeinek is megfeleljen.

A dolgozat elkészítése során nehézséget okozott, hogy a témában kevés tudományos munka született, és azok is szinte mind angol nyelvűek voltak. Ezzel szemben hatalmas segítség volt, hogy Gene Keyes a honlapján összegyűjtötte a legtöbb ilyen tárgyú publikációt, így a kutatáshoz komoly alapot biztosított.

A munka elején leírom a téma szempontjából fontos geometriai és vetülettani fogalmakat. A dolgozat második részében ismertetem az egyes leképezéseket, előnyös és hátrányos tulajdonságaikat. A harmadik rész ezen leképezések vetületi koordinátáinak kiszámításához szükséges összefüggéseket mutatja be. Ezek alapján készült az a PHP-nyelvű program, mellyel a kiválasztott vetületű térkép könnyen megrajzoltatható. Ezt követi Cahill vetületének korábban említett felújítása, és a megalkotott leképezés vetületi egyenleteinek ismertetése. További két oldalt szenteltem mai lehetséges alkalmazások bemutatásának.

1. fejezet

Alapfogalmak

Poliéderek és vetülettani vonatkozásai

Azokat a testeket, melyeket csak sokszöglapok határolnak, poliédereknek nevezzük, a határoló felületet pedig poliéder felületnek, vagy ezt is egyszerűen poliédernek hívjuk. A térképészet egyik célja, hogy a Földet síkban ábrázolja. A poliéderek ehhez nyújtanak segítséget. A poliéderek mint felületek lapjai egymás mellé síkban kiteríthetők, így ha egy térképvetület képfelületként poliédert alkalmazunk, sík térképet készíthetünk. Egy jól megválasztott poliéder „közelebb áll” a Föld alakjához, mint a sík, kúp vagy henger, így kisebbek lehetnek a torzulások, mint más képfelület esetén. A poliéder vetületek sajátosságai a szakadások, amelyek azok mentén az élek mentén jelentkeznek, amelyek mentén a testet a kihajtogatás céljából felvágtuk. Általánosságban elmondhatjuk, hogy minél több lapja van egy poliédernek, annál „közelebb áll” a gömbhöz, tehát annál kisebbek lesznek a torzulások, viszont a felvágás miatt annál több lesz a szakadás. Poliéder vetületeket mind topokartográfiai (pl. III. katonai felmérés), mind geokartográfiai célokra felhasználhatunk.

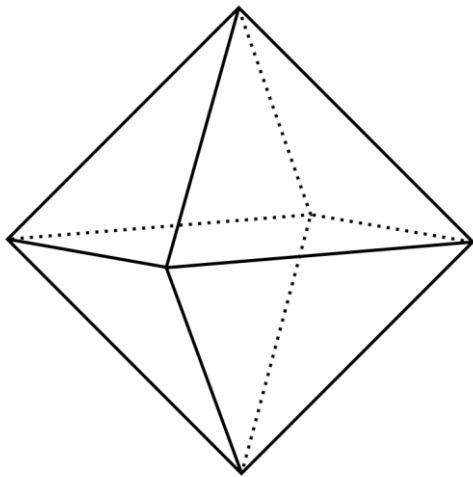
Poliéder képfelülethez felhasználható leképezések

A poliéder vetületek speciális leképezéseket igényelnek. Először a földgömböt főkörök mentén felbontjuk a poliéder lapjainak megfelelően. Minden egyes gömbi sokszög a leképezést követően a poliéder egy-egy lapjába kell átmenjen; így a leképezéssel szemben az első követelményünk, hogy a határoló gömbi főkörívek képe egy szakasz (a poliéder egy éle) legyen. További követelményünk, hogy az érintkező sokszögek közös oldalai mentén ne szakadjon meg az ábrázolás: például ha egy fokhálózati vonal eléri a sokszög határát, a vonal a szomszédos sokszögön ugyanott folytatódjék.

Az oktaéder tulajdonságai vetülettani szempontból

Az oktaéder egy olyan poliéder, melynek nyolc lapja van, és mind a nyolc lapja egybevágó, szabályos háromszög. (1. ábra) Az oktaéder bármely lapjának ösképe a gömbön egy olyan gömbháromszög, melynek minden szöge derékszög, és minden oldalához a gömb középpontjából nézve derékszög tartozik. Ezt az előnyös tulajdonságot még jobban kihasználhatjuk, ha az oktaéder két átellenes csúcsát a Föld forgástengelyére illesztjük.

Ezt poláris elhelyezésnek hívjuk. Ilyenkor a földgömböt az Egyenlítő, valamely szabadon megválasztott meridián, és ezen meridiántól 90 fokenként három másik meridián mentén kell felosztanunk. A felosztás módját 11. ábrán a térkép keretén kívüli rajz segít megérteni. A gömbháromszög középpontját gömbháromszögtani összefüggésekkel meghatározhatjuk: poláris elhelyezés esetén a kiválasztott határoló meridiántól 45 fokra lévő hosszúsági körön, illetve a $\pm \left[90^\circ - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$ szélességi körön található. (Fehér, 2003) Ezt a pontot érdemes segédpólusnak megválasztani.



1. ábra: Oktaéder



2. ábra: Poláris elhelyezésű oktaéderre leképezett Föld. Madarassy nyomán.

A pillangó alakú vetületek

A térképészetnek nem csak az a fontos, hogy az előállított térkép pontos legyen, hanem hogy legyen valamiféle esztétikája. Az oktaédert Cahill úgy hajtogatta ki, hogy a teljes térkép egy pillangóra hasonlít. Példáját más emberek is követték. Az így nyert térkép szimmetrikus, a szakadások többnyire a déli féltekére esnek. Jól megválasztott középmeridiánnal elérhetjük, hogy ezek a szakadások az ábrázolás szempontjából kevésbé fontos területeket, például óceánokat vágjanak át. A következőkben olyan leképezéseket mutatok be, amelyek teljesítik a poliéder vetületekkel szemben korábban megfogalmazott elvárásokat, és így alkalmasak oktaéder képfelületre.

2. fejezet

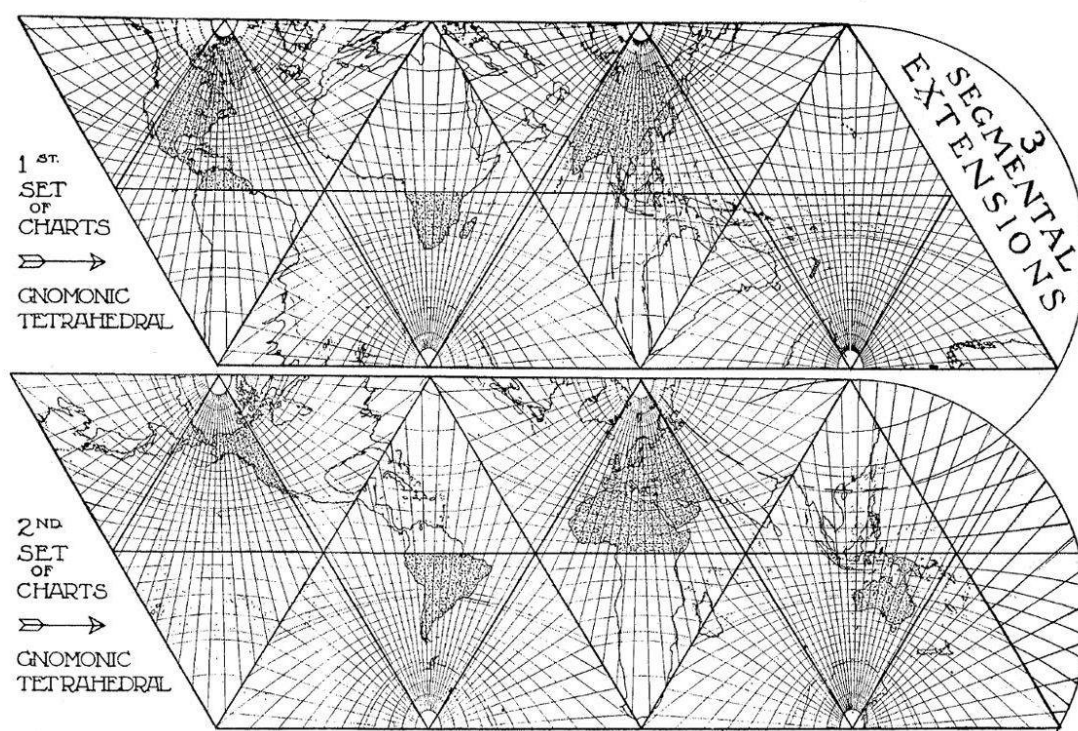
A felhasználható vetületek

2.1 A gnomonikus vetület

Valamennyi poliéder vetület legegyszerűbb megoldása a gnomonikus vetület, mely bármely gömbi főkört egyenesre képez le, ebből adódóan a gömb minden főkörök mentén történő felbontása esetén a részterületek képe sokszög.

Torzulási viszonyok

A gnomonikus vetület rendkívül előnytelen torzulási viszonyairól ismert. A vetület általános torzulású, és érintő helyzetben csak a segédpólusban torzulásmentes. A segédpólustól távolodva a torzulások rohamosan nőnek, oktaéder képfelület esetén a hossztorzulási modulus csúcsoknál eléri a 3-at. A paralelkörök képei kúpszeletek, az éleknél nagy törésekkel, de szakadás nélkül folytatódnak.



3. ábra: Gnomonikus oktaéder (szürke kontinensekkel) tetraéder vetületté (fehér kontinensekkel) kiterjesztve. Cahill nyomán.

A vetület használata

A gnomonikus vetület alkalmazását oktaéderre Cahill javasolja egy cikkében. (Cahill, 1934) Előnye az egyenesek megtartásából ered. Ezért elsősorban rádiózási és léginavigációs célokra ajánlja, ahol fontos a gömbi főkörök gyors megtalálása. Az éleken átmenő mérési feladatok esetén a fokhálózati vonalak meghosszabbításával tetraéder vetületté alakítható. (3. ábra)

A poláris helyzetű oktaéder előnyei

Cahill többi vetületéhez hasonlóan poláris helyzetű oktaéderen rajzolta meg a gnomonikus vetületet, melynek középmeridiánja a Ny. h. $22^{\circ}30'$. A poláris helyzetű oktaéder olyan poliéder, amelyen a gnomonikus vetület fokhálózati képe valamennyi lapon egybevágó. A kockánál és a tetraédernél kedvezőbbek a torzulások. A nyolc hossztartó pont az É. sz. ill. D. sz. $35^{\circ}15'51,8''$ és a K. h. $22^{\circ}30'$ metszéspontjaiban, valamint ettől 90 fokként keleti és nyugati irányban találhatóak.

2.2 A szögtartó Cahill-vetület

Cahill szögtartó vetületét 1929-ben ajánlotta a meteorológusok számára.

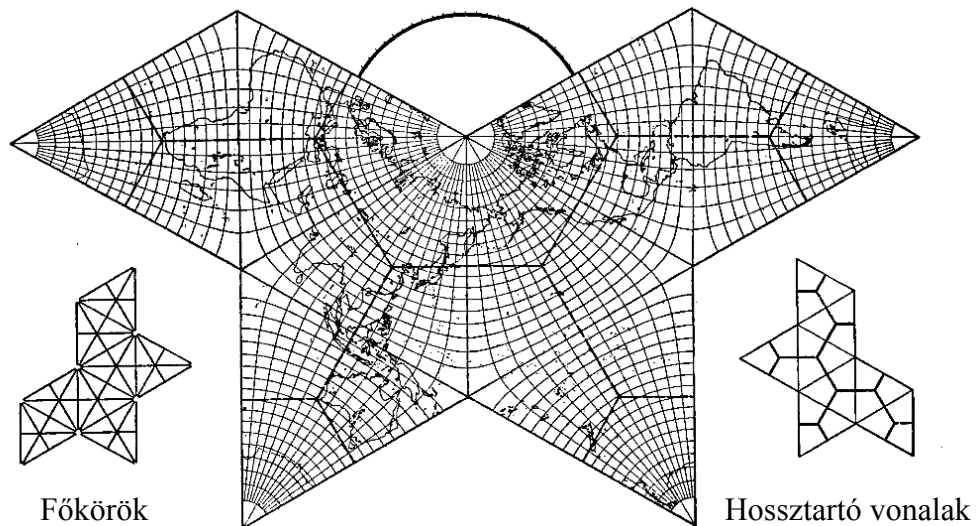
A probléma

A meteorológusoknak olyan szögtartó vetületre volt szükségük, amely az egész Földet kis torzulásokkal képezi le. A legismertebb szögtartó vetületek egyike sem alkalmas erre. Míg a sztereografikus síkvetület csak a sarkokat, a Gauss–Lambert-kúpvetület csak a közepes szélességeket, addig a Mercator-hengervetület csak az Egyenlítő környékét ábrázolja pontosan. Ezen felül további problémát okoz, hogy a sík- és kúpvetületek gyakorlatilag csak a félgömb leképezésére alkalmasak, az Egyenlítőt körívre képezik le: a két féltekéről alkotott kép csak egy ponton illeszthető össze.

A szögtartó Cahill-vetület tulajdonságai

A Cahill által javasolt vetület pillangó alakú, képfelülete egy oktaéder. A vetületi egyenletet Dr. Oscar S. Adams határozta meg. A vetület középmeridiánja Ny. h. $22^{\circ}30'$. Ezen oktaéder hat csúcspontján a szögtartás bár sérül, a térkép többi pontján szögeket torzulásmentesen képezi le. Így a meridiánok és a parallelkörök képei derékszögekben metszik egymást. A meridiánok képei megközelítően egyenesek, a parallelkörök képei pedig

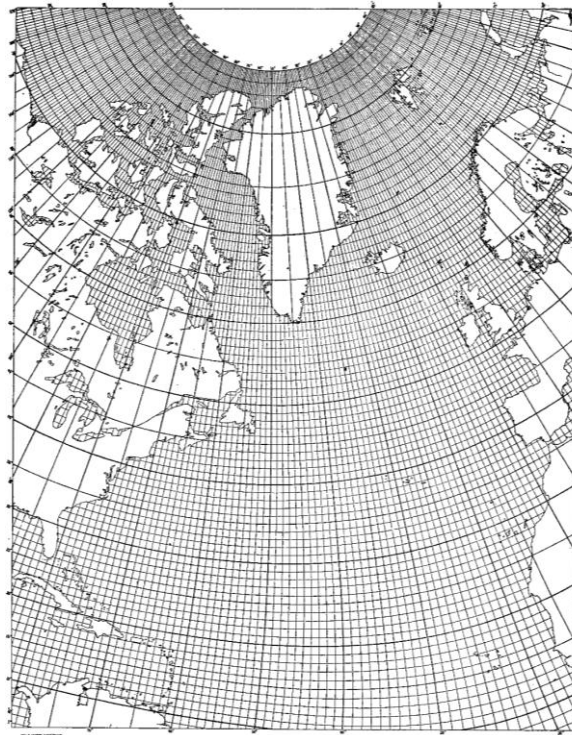
deriválható görbe vonalak. Kivétel az Egyenlítő, amelynek a képe a csatlakoztatás érdekében egy töröttvonal. Továbbá nyolc meridián képe szintén kiegyenesedik: a középmeridián, és innen számolva 45 fokenként minden meridián. A torzulások a háromszögek csúcsainál a legnagyobbak, a háromszög középpontját az oldalak felezőpontjával összekötő szakaszok hossztartó vonalak. (Cahill, 1929)



4. ábra: Szögtartó pillangó-vetület, a vastag vonalak hossztartóak. Cahill nyomán.

A vetület előnyei

A vetület szögtartása miatt kifejezetten alkalmas meteorológiai számítások végzésére. Cahill a térképén fel akarta tüntetni a foktrapézok területét, az irányok pedig közvetlenül leolvashatóak. Az oktaéder csúcsainak környezete, ahol egyrészt a legkedvezőtlenebbek a torzulások, másrészt a vetületi koordináták kiszámítása problémás, mind a sarkokra, vagy az óceánok közepére esnek. Ezeken a helyeken a vetület létrehozásának korában nem folyt rendszeres meteorológiai mérés, így ez egyáltalán nem zavaró. A térkép nagyobb méretarányokban is használható regionális számításokhoz, mert a torzulások mindenütt kicsik. Ez lehetővé teszi, hogy a nemzeti meteorológiai szolgálatok ebben a vetületben tüntessék fel méréseiket. A nemzetközi szervezetnek a közös vetület következtében csak annyi dolga van, hogy a méretarányt lekicsinyítse, és az adatokat generalizálja. Szintén a kis hossztorzulásoknak köszönhető, hogy a hőmérsékleti- és nyomásgradiensek a térképről nagy pontossággal leolvashatóak.



5. ábra: A szögtartó vetület nagyobb méretarányban is szép képet ad. Cahill nyomán.

A pillangó alak kihasználása

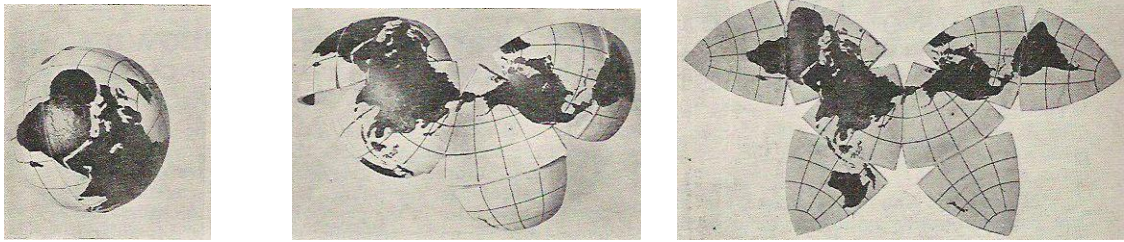
A pillangó-térképek jellegzetessége, hogy a sarkokon a meridiánsereg csak 240° -ot fed le. Cahill azt javasolta, hogy a maradék 120° -on a Föld felét ismételten képezzék le, és ezen az előző napi méréseket ábrázolják. Ez segít a változások követésében.

2.3 Cahill kvázi-területtartó vetülete

1913. február 25-én védte le az USA szabadalmi hivatala Cahill pillangó-vetületének ezt a változatát.

A vetület szemléletes levezetése

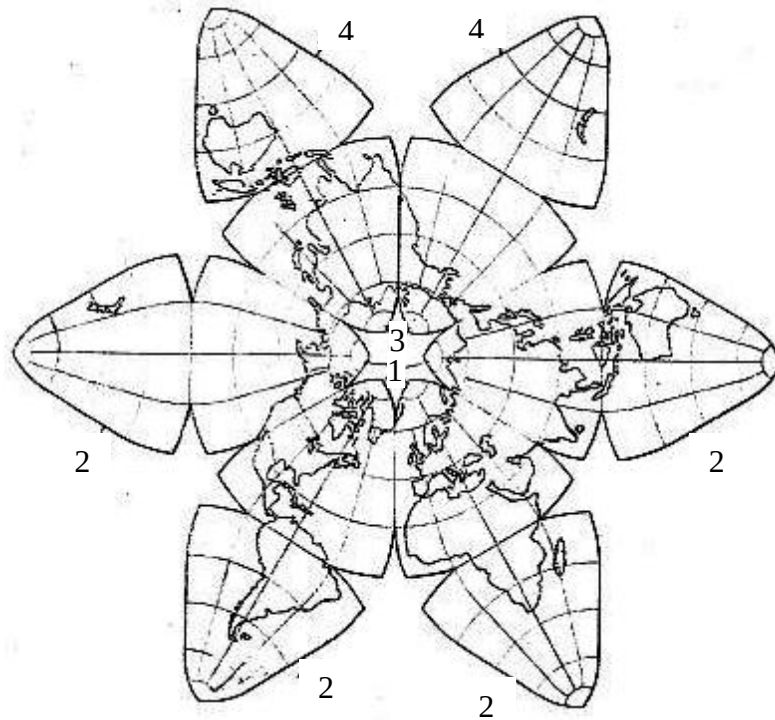
Cahill a vetületét érdekes módon mutatta be: Egy gumilabdára rárajzolta a kontinenseket, majd felvágta a megfelelő gömbi főkörök mentén. Az így felvágott gumilabdát üveglap alá téve ki lehetett lapítani. (Cahill, 1913) Így látható, hogy a vetület képfelülete annyira kevésbé tér el a gömbtől, hogy a gumi nyúlása ezt kompenzálni tudja. Cahill számos térképén kereten kívül elhelyezett sematikus ábrákkal is bemutatta kísérletét. (10. ábra)



6., 7. és 8. ábrák: Cahill kísérlete a gumilabdával. Cahill nyomán

Az oktaéder elhelyezése

Az oktaéder középmeridiánja a Cahillre jellemző Ny. h. $22^{\circ} 30'$. A határoló meridiánok képei görbe vonalak lennének, így a gömbháromszögek képei csak egy-egy ponton, az É. sz. $41^{\circ} 48' 21''$ parallelkör mentén érintkeznének.



9. ábra: Cahill pillangó vetülete a szabadalomból. Cahill nyomán.

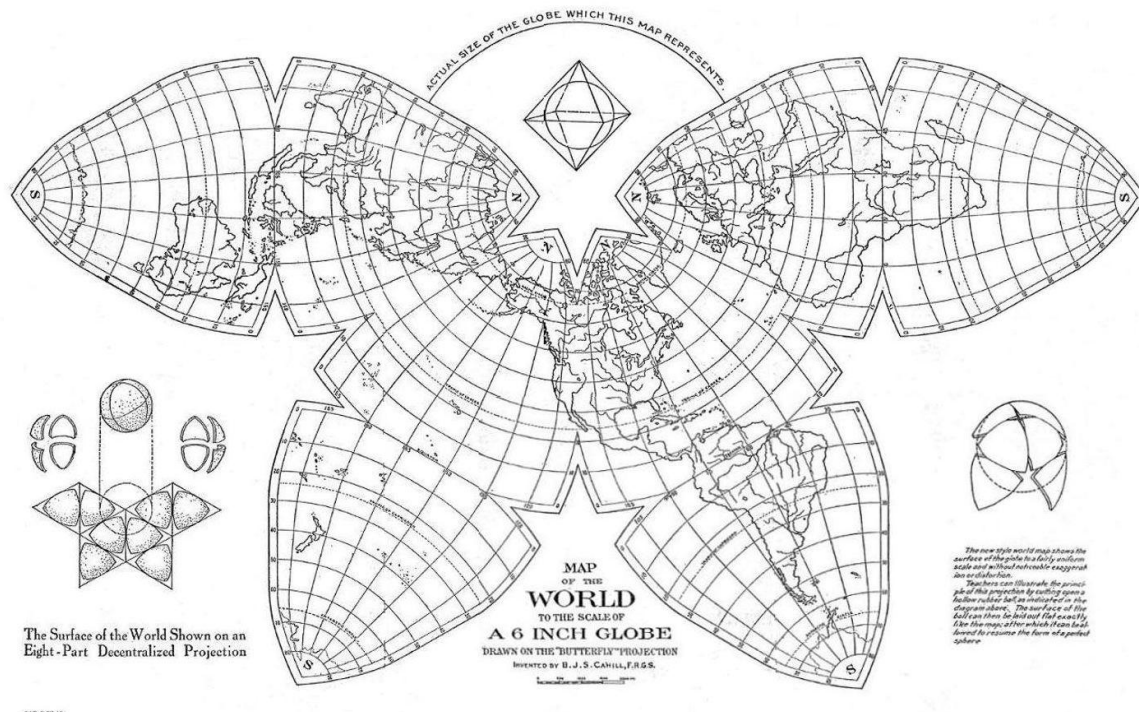
A szakadások csökkentése

Mivel az így létrehozott vetület tele van szakadásokkal, ezeket torzításokkal kell csökkenteni. Cahill a szélső meridiánokat 45° hosszban — az É. sz. $41^{\circ} 48' 21''$ -től északra és délre egyaránt $22^{\circ} 30'$ -re — kiegyenesíti. Az Egyenlítőt szintén ki kellett egyenesíteni a háromszög közepén futó meridiántól $22^{\circ} 30'$ távolságra mind keleti, mind nyugati irányban. Az így keletkezett alakzatokat az északi féltekén a 9. ábra 1-es számmal jelzi. Az ábrázolás így sem fedi le a teljes kört, tehát lehetőség van két-két háromszöget megismételni: ezeket a

9. ábrán 3-as és 4-es számmal jelölve találjuk. Ennek köszönhető, hogy a Kamcsatka-félsziget nem szakad le Szibériától.

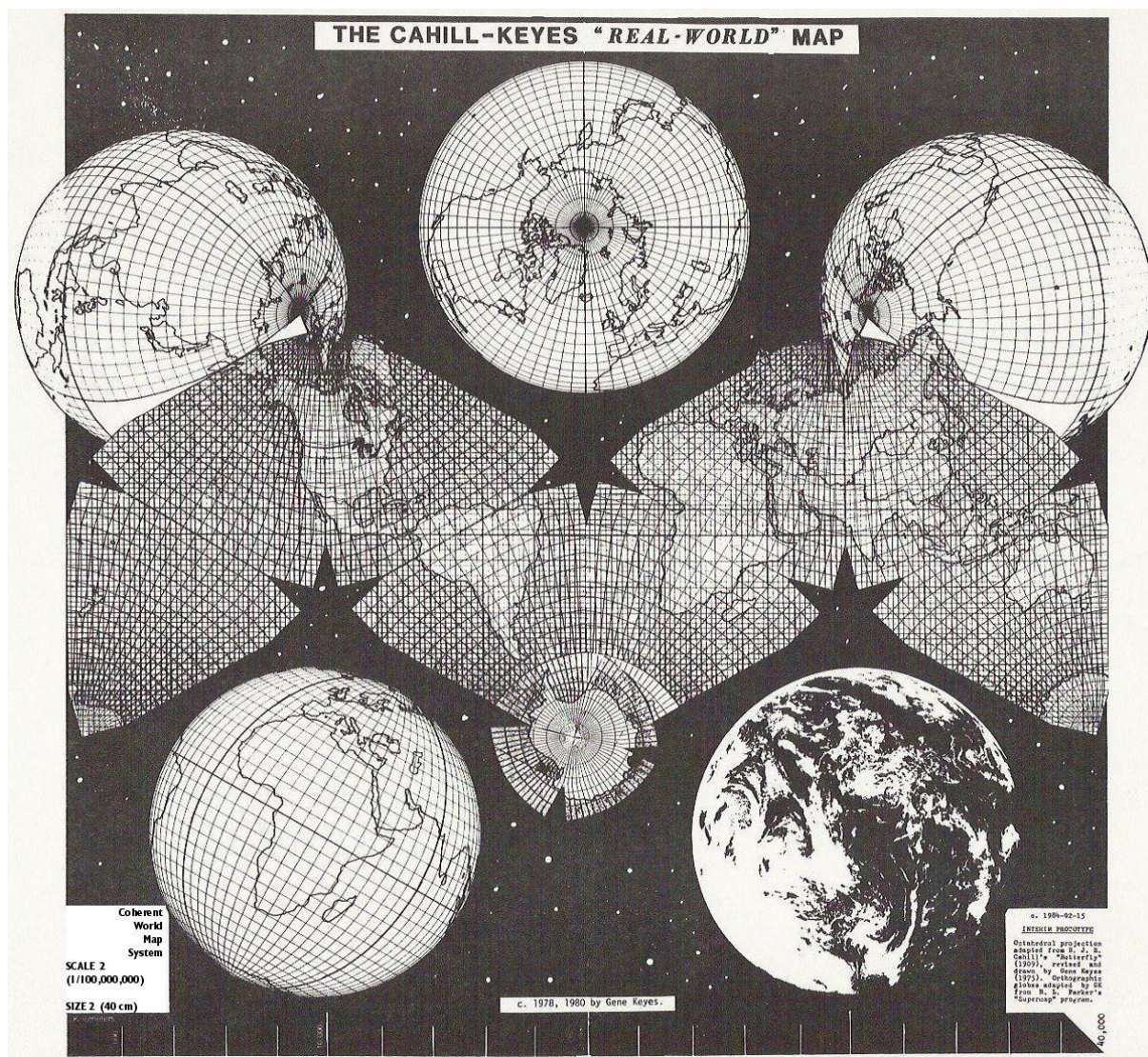
További kiigazítások a szimmetria érdekében

A déli féltekén a határoló meridiánokat nem kellene kiegyenesíteni, hiszen itt a képek nem érintkeznek egymással. Cahill ennek ellenére úgy döntött, hogy a 9. ábrán 2-es és 4-es számmal jelölt alakzatok szélén futó meridiánokat a szimmetria kedvéért kiegyenesíti a D. sz. $41^{\circ} 48' 21''$ -től mindkét irányban $22^{\circ} 30'$ -re. Ez a megoldás azért praktikus, mert a térkép „háromszögei” az egybevágóság okán egymásra hajtogathatóak, és így a térképlapot könnyebb szállítani. (Cahill, 1913)



10. ábra: Cahill kvázi-területtartó térképe. A kereten kívüli magyarázó ábrák: fent a gömb és az oktaéder kapcsolata, jobb és bal oldalon lent a gumilabda kiterítése. Cahill nyomán

2.4 A Cahill–Keyes-vetület



11. ábra: Keyes világtérképe. Keyes nyomán

Keyes 1975-ben számos változtatást hajtott végre Cahill vetületén: (Keyes, 2009)

A pillangó alak lecserélése

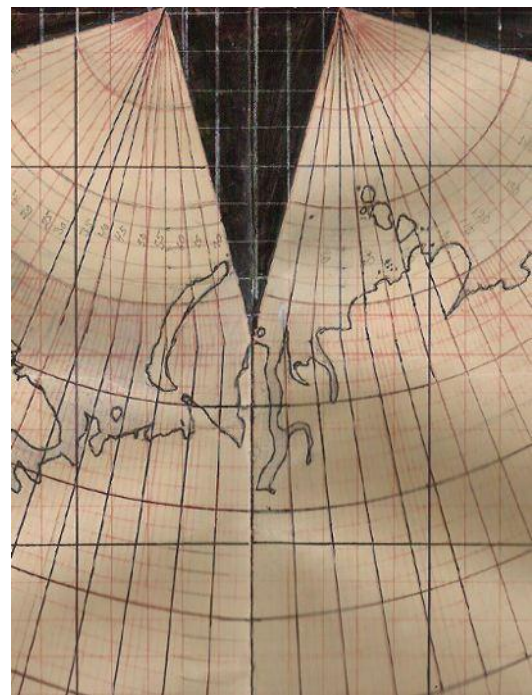
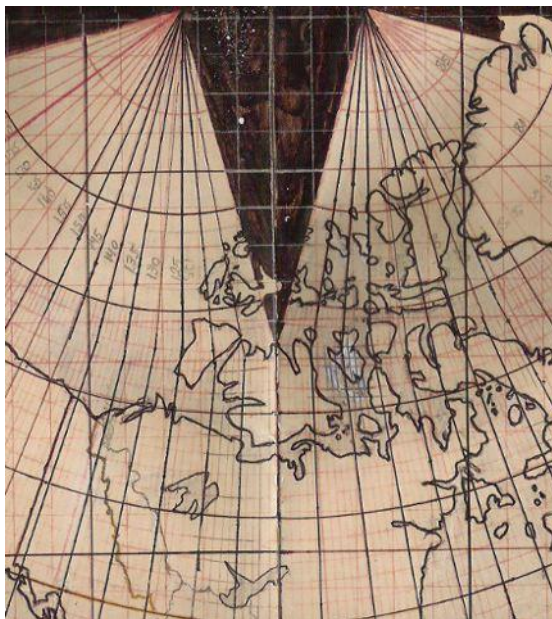
Abból a célból, hogy a megírások talpai dél felé nézzenek az egész térképen, Keyes M alakban illesztette össze az oktaéder lapjait. Így a térkép teteje a konvenciónak megfelelően észak felé néz, továbbá az Egyenlítő hosszát — melyet Keyes 40 000 km-nek vett — jobban szemlélteti.

Középmeridián eltolása

Mivel a fokhálózatot nehéz kézzel kirajzolni a Cahill által választott Ny. h. $22^{\circ}30'$ -es középmeridiánnal, és a lapok szélén lévő foktrapézok megszakadnak, Keyes a Ny. h. 20° -os meridiánt jelölte ki az oktaéder élének. Ez jobban megfelel az 1° -os és 5° -os fokhálózatnak. Cahillnél ez azért nem jelentett gondot, mert kisebb méretarányban dolgozott, ahol megfelelt a $7^{\circ}30'$ -es fokhálózat is, amelynél a foktrapézok nem szakadnak.

A szakadások csökkentése a sarkoknál

Cahill olyan vetületet használt, mely az élekre eső meridiánokat körívekre képezi le. A szakadások mérséklése érdekében ezeket kiegyenesítette 45° hosszban. Látszik tehát, hogy mind a sarkoknál, mind az Egyenlítőnél egy-egy $22^{\circ}30'$ -es íven az ábrázolás megszakad. Hogy Szibériát és a Viktória-szigetet ne kelljen megszakítani, Keyes módosítja ezt az alakot úgy, hogy csak a 17° -os pólustávolságig érjen a bevágás.



12. és 13. ábrák: Szakadások a Viktória-sziget és a Jamal-félsziget környékén. Keyes nyomán.
Érdemes összehasonlítani Waterman vetületével (19. és 20. ábrák)

A fokhálózat átrajzolása

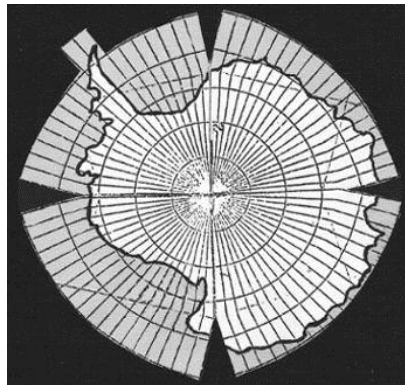
Keyes arra törekedett, hogy a fokhálózat képe egyenletes legyen abban az értelemben, hogy ne legyen hirtelen ugrásszerű különbség a paralelkörök képeinek távolságában. Ennél fogva a vetület csak alakjában hasonlít Cahillére, az egyes gömbnyolcadok leképezése jelentősen eltér.

Paralelkörök leképezése körökre a sarkoknál

Keyes célja volt, hogy a sarki területek összeilleszthetők legyenek. Esztétikai okokból a sarki régiókban a paralelköröket koncentrikus, egyenközü köröknek ábrázolja, amely gyakorlatilag megegyezik Postel síkvetületével.

Antarktisz egyesítése

Mivel Cahill vetületében a meridiánok képei körívek, nem volt lehetőség az Antarktisz összefüggő ábrázolására az oktaéder lapjainak más elrendezésével sem. Ezt még gnomonikus vetületben sem lehetne megtenni, hiszen ekkor a sarkoknál a meridiánsereg nem 360° -ban, hanem csak 240° -ban töltene ki a síkot. A Cahill–Keyes-vetületben ezt meg lehet tenni, mert a sarkoknál Postel-síkvetületet használ. Keyes így az Antarktist a térkép alján, az M alak közepén összefüggően tudja ábrázolni. A fokhálózatot a D. sz. 65° -ig minden irányban kirajzolja.



14. ábra: Az Antarktisz Keyes térképén. Keyes nyomán.

Szakadások feloldása

Keyes a térképen keletkező szakadásokat gyakran bizonyos területek többszöri megrajzolásával oldja fel. Ilyen területek a Kamcsatka-félsziget, Izland, Grönland keleti partjai, a Salamon-szigetek keleti része és a Maldív-szigetek déli része.

2.5 Snyder területtartó vetülete

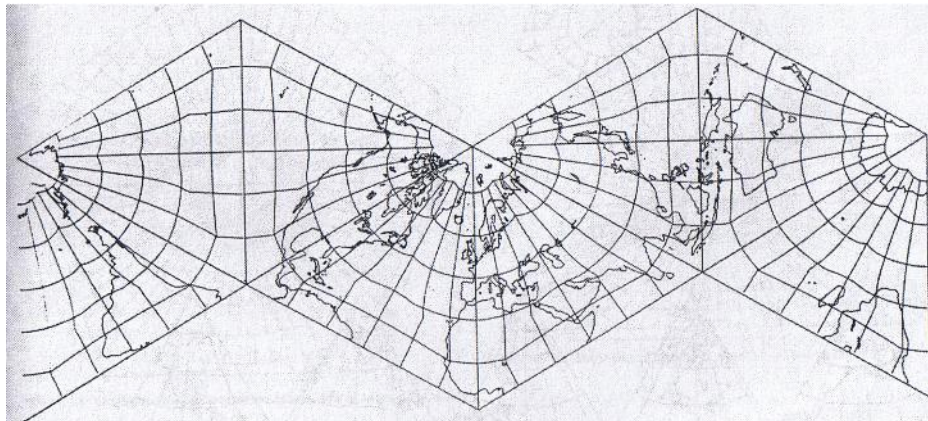
Snyder 1992-ben publikálta területtartó vetületét, mely alkalmas poliéder képfelületekhez.

A vetület levezetése

Snyder a Lambert-féle síkvetületből indult ki. Ez ugyan területtartó, de nem alkalmas poliéderekre, hiszen a határoló gömbi főkörök képei nem egyenesek, a poliéder élein helyenként túlnyúlnak, vagy nem érik el azokat. Ha a sugárfüggvény kiigazításával ezt a problémát kiküszöböljük, a határoló vonalak kiegyenesednek, de a vetület már nem területtartó. A területtartást úgy nyerjük vissza, hogy a segédmeridiánok képeinek hajlásszögét is megfelelő mértékben módosítjuk. (Snyder, 1992)

Lehetséges képfelületek

Snyder vetülete bármilyen poliéderre alkalmazható, melynek minden lapja szabályos sokszög. Az általa leírt képfelület a csonka ikozaéder, és ezen felül megadja a számítás módját valamennyi szabályos poliéderre, így az oktaéderre is.



15. ábra: Snyder területtartó térképe oktaéderen. Snyder nyomán.

Torzulások

A vetületben a legnagyobb hossz- és szögtorzulások a segédpólusban találhatók. A segédpólust a csúcspontokkal összekötő szakaszok mentén a fokhálózati vonalak látványosan megtörnek, de az élek mentén nincs feltűnő törés. Az oktaéder képfelület hátránya, hogy fent említett törések jóval nagyobbak, mint csonka ikozaéder esetén. Ezzel szemben előnye, hogy a lapok középpontjai a földgömb középpontjától azonos távolságra vannak, így a méretarány valamennyi lapon megegyezik.

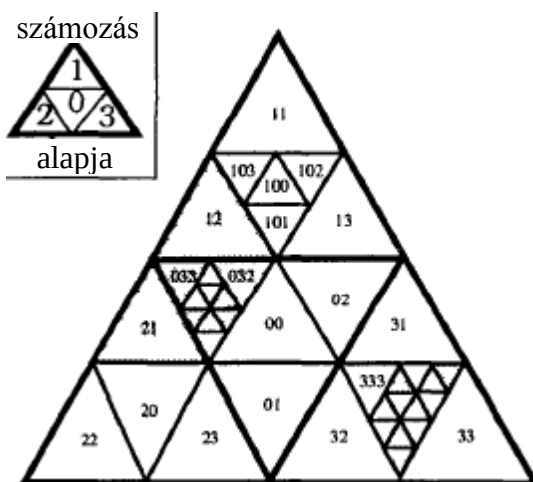
2.6 Módosított Collignon-vetület

Származtatás

Keith C. Clarke 1995-ös publikációjában leírta, hogy a Collignon-féle képzetes hengervetület apró változásokkal alkalmas oktaéder képfelületre. Az oktaéderre alkalmas változatot a gyémánt alakú elrendezésből származtatjuk úgy, hogy középmeridiánjának megadjuk a leképezendő gömbnyolcad közepén átmenő meridiánt, majd a megfelelő háromszöget kivágjuk.

A vetület célja

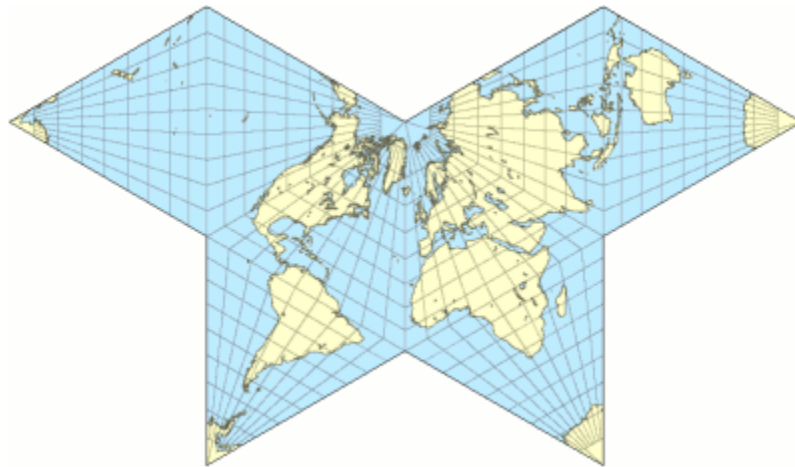
Lugo és Clarke a vetületet arra használta, hogy a térinformatikában megszokott négyzet alakú négy-fa modell helyett háromszögeken alapuló négy-fát tudjon leprogramozni. (Lugo–Clarke, 1995) Ez a háromszög alapú szabályos tesszelláció 3D alkalmazásokhoz kitűnő, mert a TIN-hez hasonlóan háromszögekhez rendelve lehet domborzatmodellt készíteni. A vetület jellemzői miatt az azonos szinten lévő háromszögek azonos területet fednek le a földfelszínen, így egyenletes lesz az adatsűrűség az egész bolygón.



16. ábra: Háromszög alapú szabályos tesszelláció indexei. Lugo nyomán.

Torzulások, törések

Noha a Collignon-vetület területtartó, a Clarke által megadott módosított vetületi egyenletek már nem. Kiszámolhatjuk, hogy a vetület területtorzulási modulusa konstans $\frac{\sqrt{3}}{2}$. A területtartás érdekében Fehér Dániel mindkét koordinátát megszorozta $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ -mal. (Fehér, 2003) A Collignon-vetület jellegzetessége a nagy szögtorzulás, mely ebben az elrendezésben is feltűnik. A háromszögek éleinél a paralellkörök 60°-os szögben megtörnek, a meridiánok pedig az Egyenlítőnél szenvednek nagyobb töréseket. Csak a háromszög közepén futó meridián nem törik meg. Területtartó esetben $\pm \arcsin\left(\frac{8}{\pi\sqrt{3}} - 1\right)$ szélesség mentén hossztartó.



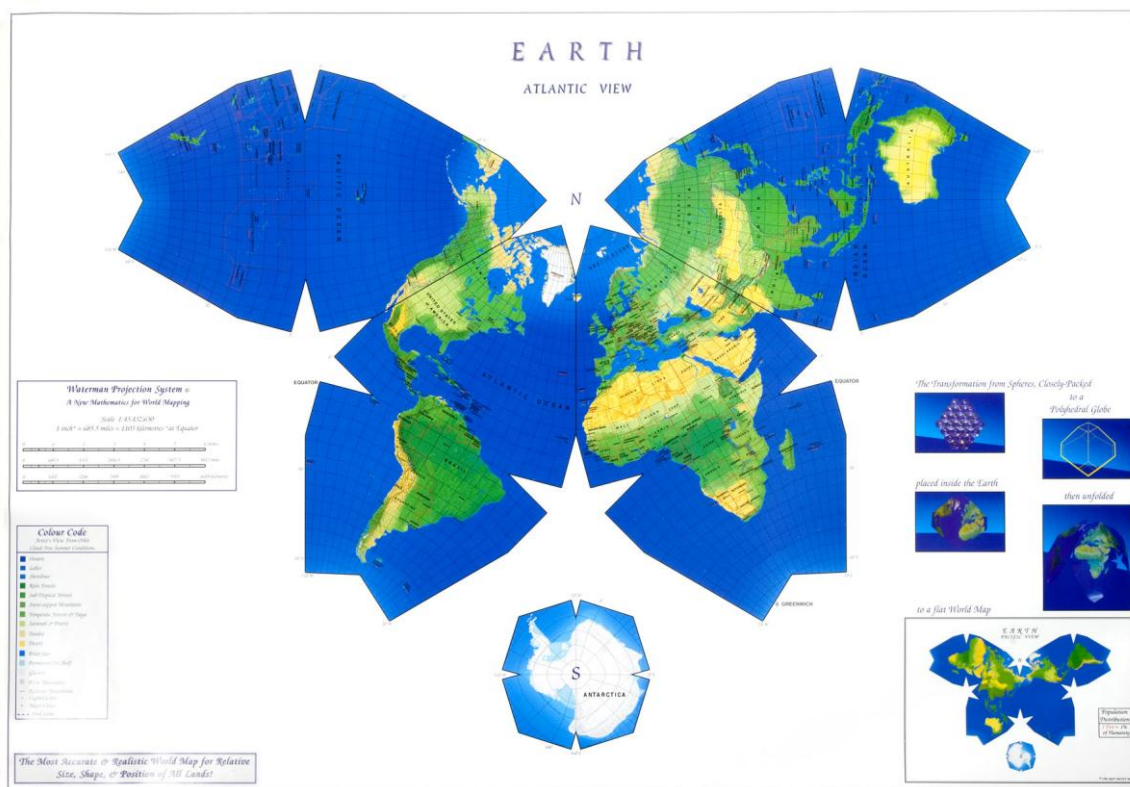
17. ábra: Módosított Collignon-vetület. Furuti nyomán.

2.7 A Waterman-vetület

Waterman 1996-ban készítette el az egész Földet ábrázoló színes falitérképét egy Cahilléhez hasonló vetületben.

A vetület eredete

Waterman matematikus, és többek között azzal foglalkozik, hogy milyen poliéderben lehet gömböket a lehető leghelytakarékosabban elhelyezni. Az általa kiszámított speciális poliédereket Waterman-poliédereknek nevezzük. Waterman ezek közül kiválasztott egy nem-szabályos csonka oktaédert, és azt jelölte meg a vetület képfelületének. A Földet erre a nem-szabályos csonka oktaéderre területtartó módon képezi le.



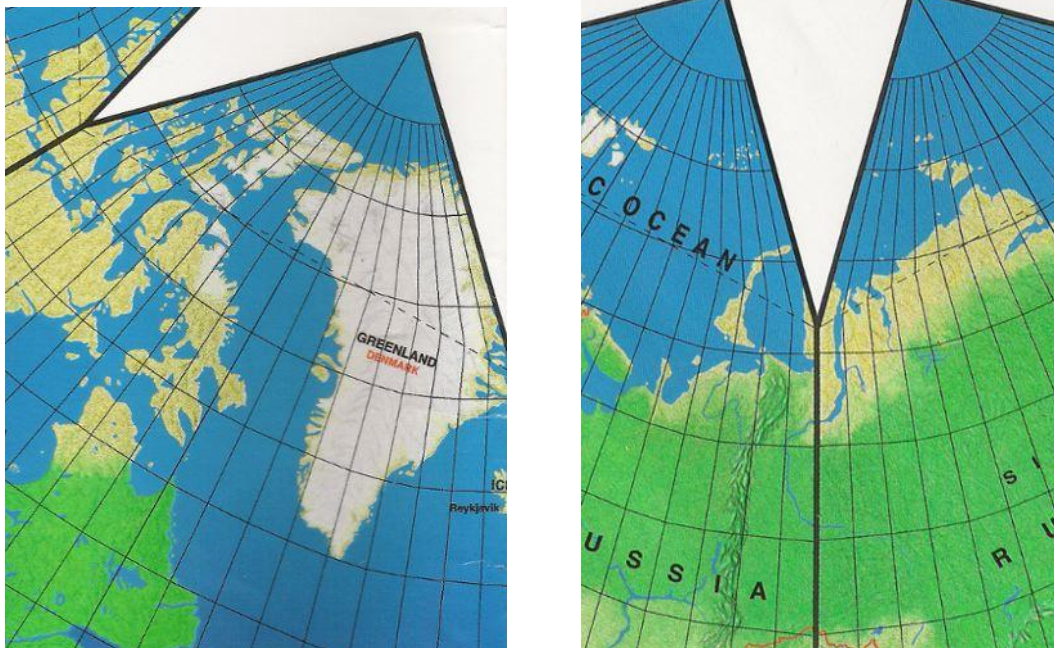
18. ábra: Falitérkép Waterman-vetületben. Kereten kívül, a jobb alsó sarokban látható magyarázó ábrák rendre: egymás mellé helyezett gömbök; ebből levezetett poliéder; a poliéderre vetített Föld; a kihajtogatás módja; végül a kész térkép. Waterman nyomán.

A pillangó alak

Noha Waterman a vetületét a Cahill–Keyes-vetülettől függetlenül alkotta meg, az eredmény hasonló megjelenésű. A középmeridiánt ő is a Ny. h. 20°-ban határozta meg. A képfelület négyzeteit az átlók mentén feldarabolta, és a pillangó alakban kiterített hatszögekhez kapcsolta.

Szakadások

Az így megalkotott vetületben a Csukcsföld területén Eurázsia megszakad. Ez a probléma természetesen Keyes vetületén is jelentkezett, ám ő ezt a Kamcsatka-félsziget kétszeres kirajzolásával feloldotta. Waterman ezzel szemben a Föld minden részét csak egyszer ábrázolja. Ráadásul a felhasznált Waterman-poliéder tulajdonságai miatt a pólusoknál kb. 18°-os bevágások keletkeznek, amelyek olyan területeket is megszakítanak, amelyek Keyesnél összefüggők voltak. Ilyen például a Viktória-sziget. (Keyes, 2010)



19. és 20. ábrák: Szakadások a Viktória-sziget és a Jamal-félsziget környékén. Keyes nyomán.

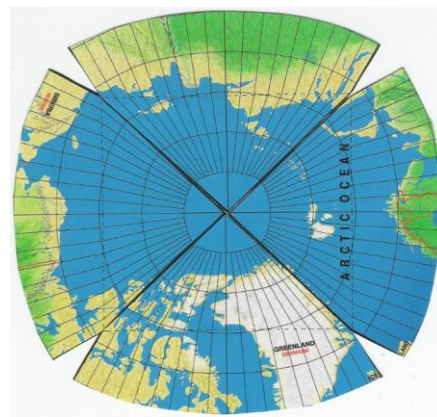
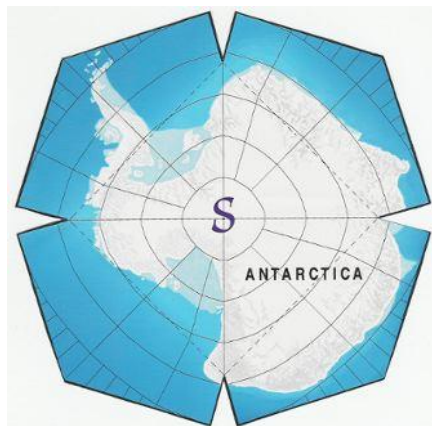
Érdemes összehasonlítani Keyes vetületével (12. és 13. ábrák)

Az Antarktisz összefüggő ábrázolása

Waterman az Antarktisz a térkép alján, minden más térképrésztől elkülönítve ábrázolja. Mivel itt is betartja azt a szabályt, hogy egy területet csak egyszer rajzol meg, a kivágott részek helyén a hatszögeket megcsonkítja.

A fokhálózat képeinek problémái a sarkoknál

A déli pólus környékén szembeűnő, hogy a négyzet átlói mentén a paralellkörök képei megtörnek. Ez a többi négyzetnél is így van, de ezeken nem látványos, mert az ábrázolás amúgy is megszakad; csak akkor láthatók a törések, ha a négyzeteket újból összeillesztjük. A meridiánok a négyzetek szélén törnek meg, jelentős mértékben torzítva Grönland alakját. Ezek a meridiánok a területtartás okán nem is egyenközűek, így számos Kanada északi partjainál fekvő sziget alakja is erősen torzul, holott teljes mértékben a sarki négyzet területére esnek. A torzulások a 75°-os szélességnél a legszembeűnőbbek. A meridiánok képei az Egyenlítőhöz közeledve már egyre kiegyenlítettébb rajzolatot mutatnak.



21. és 22. ábrák: Poláris területek Waterman-vetületben. Keyes nyomán.

3. fejezet

Az oktaéder vetületeket ábrázoló programról

3.1 Bevezető

A program célja

Az oktaéder vetületek megjelenítéséhez programot készítettem PHP nyelven. A program feladata, hogy az egyes leképezések tulajdonságait a fokhálózat képe, a kontinensek alakja, mérete és helyzete segítségével bemutassa. Lehetőséget nyújt, hogy a középmeridián és a lapok kihajtási módjának megválasztása után lássuk, mely területek szempontjából optimális az ábrázolás, és mely területekre esnek a szakadások.

Két kivétellel bármely említett vetületet kipróbálhatjuk. A kvázi-területtartó Cahill-vetületben számos „kézi” torzítás is van, így nem írható le egzakt matematikai alakban. A Wateman-vetület egyenleteit nem sikerült megszerezniem.

Technikai háttér

A megjelenítés a GD könyvtár segítségével PNG formátumban történik. A program először felrajzolja a gömbnyolcadoknak megfelelő háromszögeket, erre rárajzolja a kontinensek töréspontjait, majd legvégül a fokhálózati vonalakat, melyek töréspontjait fokenként számolja ki.

Oktaéder vetületek

Vetület	Cahill-Keyes ▾
Alak	☒ Pillangó ☐ M alakú
Középmeridián (Valós szám, -180 és 180 között.)	-20 °
Fokhálózat sűrűsége (Csak pozitív valós szám lehet.)	10 °
Méretarány (Csak pozitív valós szám lehet.)	1 képpont = 50 km.
Rajz!	

23. ábra: A program kezelőfelülete

3.2 Jelölések

A következő jelöléseket alkalmazom ebben a fejezetben:

φ, λ : A leképezendő pont földrajzi koordinátái.

φ_0, λ_0 : A segédpólus földrajzi koordinátái.

φ^*, λ^* : Segédföldrajzi koordináták

ρ, ω : A pont vetületi koordinátái polárkoordináta-rendszerben.

M: Méretarányszám (méretarány reciproka)

R: A gömbnek képzelt Föld sugara (6371 km)

x, y: A pont vetületi koordinátái derékszögű koordináta-rendszerben.

α : Síkbeli forgatás szöge

x_0, y_0 : Az eltolás-vektor koordinátái

x^*, y^* : A pont koordinátái a számítógép derékszögű koordináta-rendszerében.

3.3 Általános számítási feladatok

Segédföldrajzi koordináták számítása

Valamennyi töréspont vetületi koordinátáinak kiszámítása a következőképp történik: Először, ha szükséges, kiszámolom a pont segédföldrajzi koordinátáit az ismert trigonometrikus összefüggésekkel:

$$\varphi^* = \arcsin[\sin \varphi_0 \cdot \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\lambda - \lambda_0)]$$

$$\lambda^* = \arccos\left(\frac{\sin \varphi - \sin \varphi_0 \sin \varphi^*}{\cos \varphi_0 \cos \varphi}\right),$$

ám ez csak a szög nagyságát adja meg. Előjele $\sin(\lambda - \lambda_0)$ előjelével egyezik meg.

Poláris helyzetű oktaéder képfelület esetén a gömbnyolcad középpontját célszerű a fenti számítás segédpólusaként kijelölni:

$$\varphi_0 = \pm \left[90^\circ - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right],$$

az előjel a választott féltekétől függ.

$$\lambda_0 = m + 45^\circ,$$

ahol m a gömbnyolcad nyugati határán húzódó meridián szögértéke.

Derékszögű koordináták számítása

A vetületi koordináták kiszámítása az egyes vetületekben eltér, így ezt a következő alfejezetben ismertetem. Előfordul, hogy a vetületi egyenlet polárkoordinátákban adja meg a végeredményt. Mivel a PHP nem kezel polárkoordinátákat, ezeket a következőképp számítom át:

$$x = -\rho \cdot \sin \omega$$

$$y = -\rho \cdot \cos \omega$$

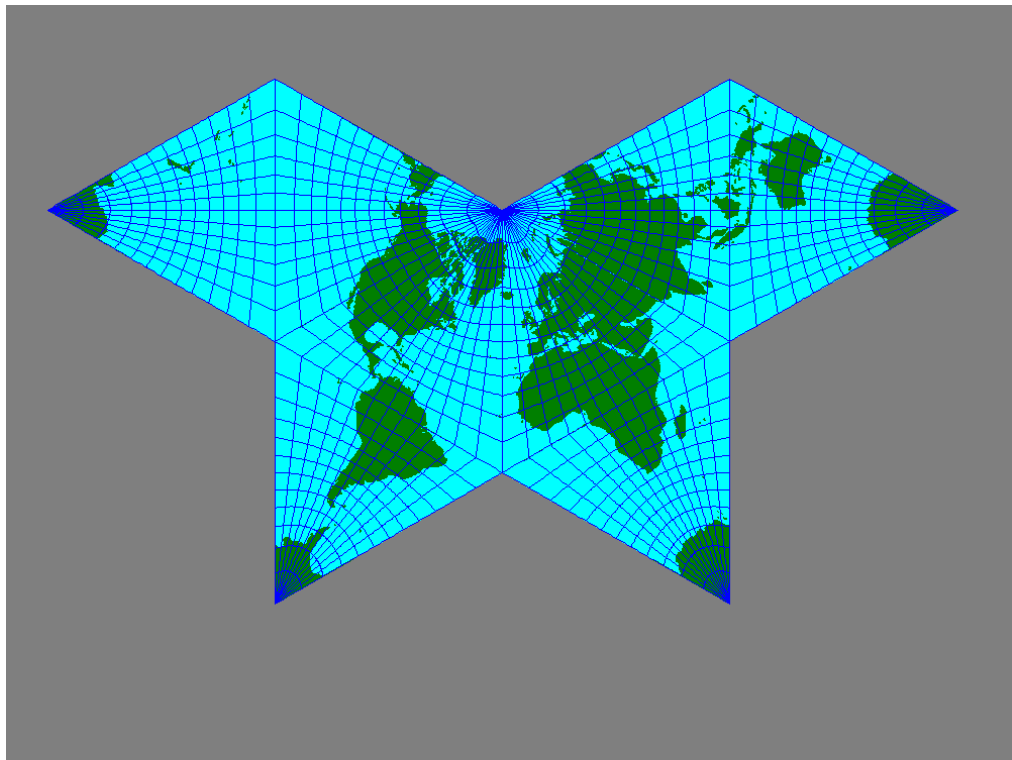
A geodéziában jártasabb emberek felismerik, hogy ez nem egyezik meg az általánosan használt átszámítási képlettel. Ennek oka, hogy a PHP koordináta-rendszere 90°-kal az óra járásával egyező irányban el van forgatva a geodéziában használt koordináta-rendszerhez képest. Tehát az x tengely kelet felé, az y tengely dél felé mutat.

Síkbeli transzformációk

A koordinátákat az egyes háromszögek illesztése érdekében általában el kell forgatni. Végül hogy a háromszögek egymás mellé kerüljenek, el kell tolni a pontot. Ezt a két műveletet egyszerre is elvégezhetem:

$$x^* = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha + x_0$$

$$y^* = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha + y_0$$



24. ábra: Gnomonikus vetület. Középmeridián: Ny. h. 22° 30'; fokhálózat 7° 30'

3.4 Vetületi egyenletek

Gnomonikus vetület

A gnomonikus vetület egyenlete rendkívül egyszerű, ha a vetület középpontja a pólusban van. Ezért a számításhoz az előző alfejezetben kiszámolt segéd földrajzi koordinátákat használom:

$$\rho = \frac{R \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi^*)}{M}$$

$$\omega = \lambda^*$$

Szögtartó vetület számítása Lee komplex függvényei segítségével

A szögtartó vetületek közül a legegyszerűbb a sztereografikus síkvetület. A feladat megoldásához a ferde tengelyű, a *segédegnyelítő síkjában* elhelyezett képsíkú változatot kell használni. A sztereografikus koordinátákat egységsugarú gömbön számítom.

$$\rho = \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi^*}{2}$$

$$\omega = \lambda^*$$

Ezután derékszögű koordinátákat számítok, melyeket p és q betűvel jelölök.

$$p = \rho \cdot \cos \omega$$

$$q = \rho \cdot \sin \omega$$

A sztereografikus vetület, bár szögtartó, önmagában nem használható poliéder képfelületekhez, mert a gömbi főköröket körívre képezi le. Ezért van szükség olyan függvényekre, melyek szögtartó módon szabályos háromszögekbe képezik bele ezeket az alakzatokat. Lee ehhez vezette le a következő megoldást. (Lee, 1976)

A sztereografikus koordinátákat a további számításokhoz a z komplex számmal jellemzem:

$$z = p + i \cdot q$$

Mivel a PHP nem kezel komplex számokat, így ezeket kételemű tömbként tárolom. A szükséges műveleteket (összeadás, szorzás, hatványozás) az alapvető összefüggések segítségével elkészített saját függvényekkel oldom meg.

A koordinátákat a Schwarz-integrál felhasználásával kiszámolt komplex polinommal közelítjük:

$$r = 2\sqrt{2}z$$

$$w = r + 0,026042r^4 + 0,003193r^7 + 0,000555r^{10} + 0,000113r^{13} + 0,000025r^{16} + \\ + 0,000006r^{19} + 0,000002r^{22}$$

A w komplex szám megfelelő részei lesznek az új koordináták. A PHP koordináta-rendszere miatt a képzetes rész ellentettje lesz az x , míg a valós rész ellentettje az y koordináta. A koordinátákat a méretaránynak megfelelő konstanssal kell szorozni. Gyök kettővel azért osztok, hogy a térkép összevethető legyen a többivel. (Az érintő gnomonikus vetülethez hasonlóan így a segédpólusban 1 lesz a hossztorzulás.)

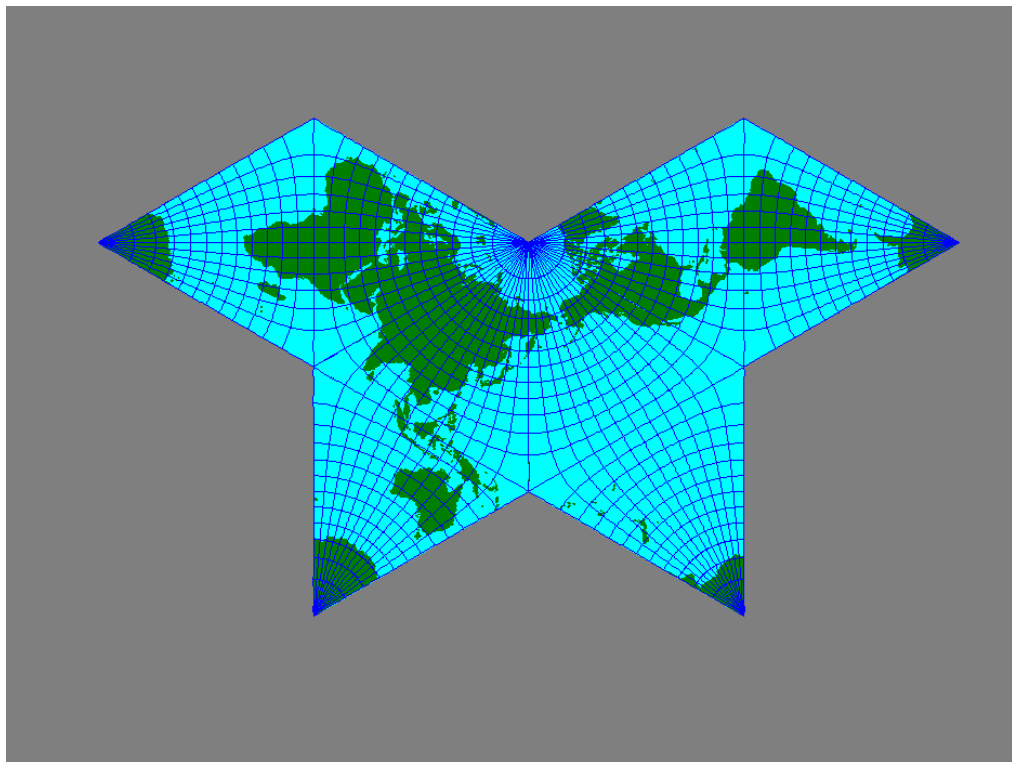
$$x = -\frac{R}{\sqrt{2}M} \Im w$$

$$y = -\frac{R}{\sqrt{2}M} \Re w$$

Ezeket a koordinátákat a lassú konvergencia miatt a segédpólustól távol eső területeken már nem használhatom, mert feltűnően nagy hibákhoz vezet. Ezért a háromszögek csúcsainál (azok $2^\circ 30'$ -es környezetében) a koordinátákat egy lineáris képlettel közelítem.

Az együtthatókat igyekeztem a következő céloknak megfelelően megválasztani: Legfontosabb, hogy a gömbháromszög csúcsainak képei egy szabályos háromszög csúcsait adják ki. Az Egyenlítő képe egyenes kell, hogy maradjon. Semelyik fokhálózati vonal nem törhet meg. Végül, hogy az Egyenlítő a meridiánokkal lehetőleg derékszöget zárjon be.

Mivel ezeket a célokat ránézésre próbáltam összehangolni, az eredmény vetületanalízis szempontjából ezeken a területeken használhatatlan, viszont szemléltetésre jól felhasználható.



25. ábra: Szögtartó vetület. Középmeridián: K. h. $157^\circ 30'$; fokhálózat $7^\circ 30'$

Snyder területtartó vetülete

Snyder területtartó vetületéhez meg kell határozni, hogy mekkora az az oktaéder, amelynek a felszíne megegyezik a Föld felszínével. (Snyder, 1992) Ezt egy R' állandóval jellemezzük, ami az oktaéder középpontja, és egy lap középpontja közötti távolságot jelenti. Ennek kiszámítása:

$$R' = R \sqrt{\frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg}^2 \left[\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]}}$$

Ezután a segéd földrajzi koordinátákat használjuk. Ha λ^* negatív, vagy nagyobb, mint 120° , addig kell 120° -ot hozzáadni, vagy kivonni, amíg 0° és 120° közé nem esik. A továbbiakban λ^* alatt ezt a korrigált értéket értem. A koordináták kiszámítása néhány paraméter meghatározása után történik:

$$H = \arccos \left(\frac{\sqrt{6}}{6} \sin \lambda^* - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \lambda^* \right)$$

$$A = R^2 \left(\lambda^* + H - \frac{3}{4} \pi \right) \text{ (szögek radiánban értendők)}$$

A polárszög ebből már kiszámítható:

$$\omega = \arctg \left(\frac{2A}{[R']^2 \operatorname{tg}^2 \left[\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] - 2\sqrt{3}A} \right)$$

A polártávolsághoz újabb paraméterekre van szükségünk:

$$q = \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \left[\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]}{\cos \lambda^* + \sqrt{3} \sin \lambda^*} \right)$$

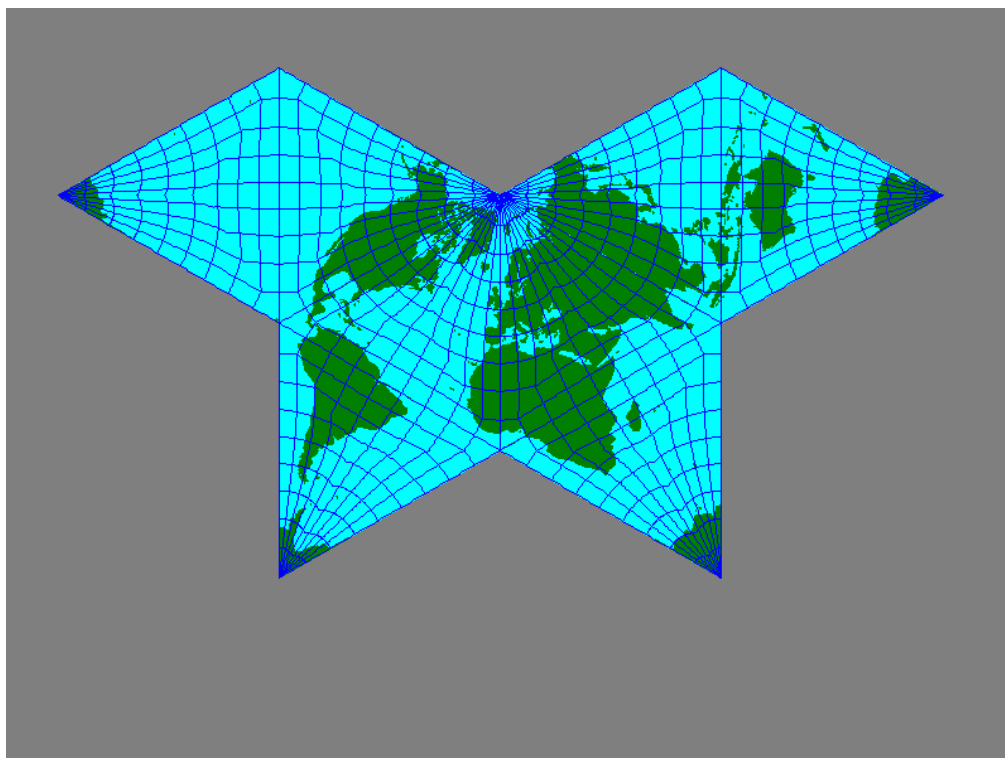
$$d = \frac{R' \operatorname{tg} \left[\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]}{\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega}$$

$$f = \frac{d}{2R' \sin \left(\frac{q}{2} \right)}$$

Ebből kiszámolható:

$$\rho = \frac{2R'}{M} \cdot f \cdot \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi^*}{2} \right)$$

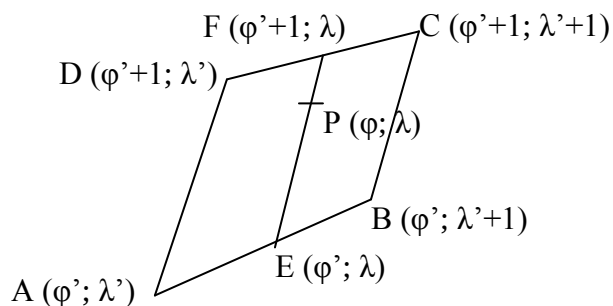
A polárszöghöz végül hozzá kell adni azt a korrekciót, amit a segédhosszúságból az elején kivontunk.



26. ábra: Területtartó Snyder-vetület. Középmeridián: 0° ; fokhálózat 10°

Cahill–Keyes vetület közelítése interpolációval

A Cahill–Keyes vetület egyenlete igen bonyolult, és nagy számításigényű, mert számos különböző zónára osztja a gömbnyolcadot. A gyorsabb számítás és az egyszerűbb program érdekében a vetületet interpolációval közelítem. Keyes honlapján elérhető egy táblázat, mely a fokhálózati vonalak metszéspontjainak vetületi koordinátáit tartalmazza egész fokokra. Ezek az adatok kilométerben vannak megadva, deciméter pontossággal, a 0° – 90° szélesség és a 0° – 45° hosszúságok között. Ez csak a gömbnyolcad egy fele, de ha a gömbnyolcad másik felére esik a pont, akkor a pontot először a gömbön a 45° meridiánra tükrözve, majd a képét síkon ugyanezen meridián képére visszatükrözve megkapjuk ezen pontok vetületi koordinátáit is.



27. ábra: Az interpolációhoz felhasznált pontok

Ezek alapján, ha ismerem egy P pont földrajzi koordinátáit, akkor a táblázatból meg tudom határozni annak az $1^\circ \times 1^\circ$ -os foktrapéznek a négy sarkát vetületi koordinátákkal, amelyben a pontunk képe lesz. Ezt a foktrapézt egy általános négyszöggel közelítem. A négyszög délnyugati sarkát A-val, a többi az óramutató járásával ellentétes irányban B, C és D betűvel jelölöm. (27. ábra) Az A pont földrajzi koordinátáit, amelyek a P pont földrajzi koordinátáinak egészrészei, φ' -el és λ' -vel jelölöm. Az E és F pontok a P-vel azonos hosszúságon vannak, de az E pont az AB, az F pont a CD szakaszon fekszik. Ezeknek koordinátáit tudom először lineáris interpolációval meghatározni (szögek fokban értendők):

$$x_E = x_A + (x_B - x_A)(\lambda - \lambda')$$

$$y_E = y_A + (y_B - y_A)(\lambda - \lambda')$$

$$x_F = x_D + (x_C - x_D)(\lambda - \lambda')$$

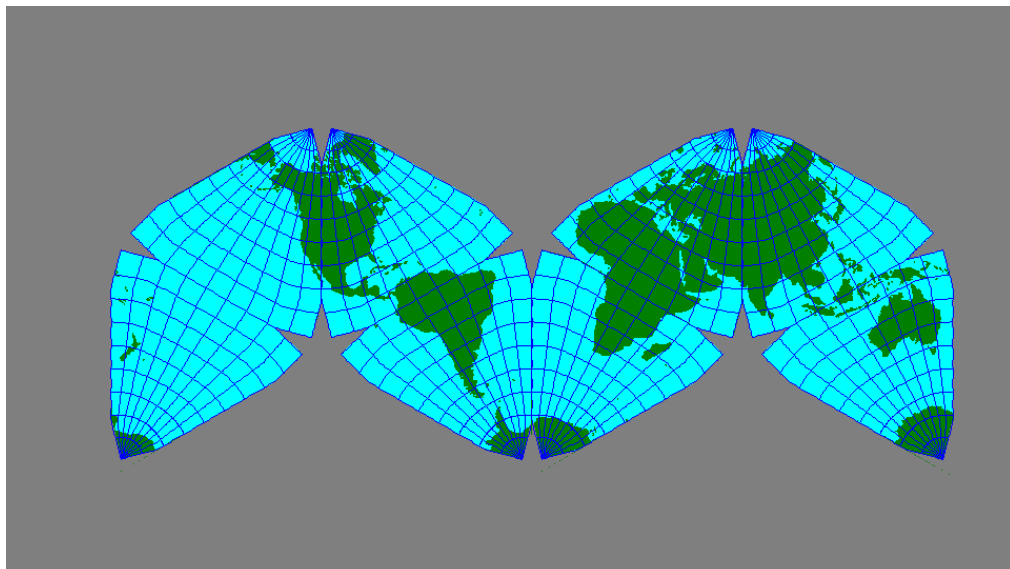
$$y_F = y_D + (y_C - y_D)(\lambda - \lambda')$$

A keresett P pont képét az EF szakaszon végzett újabb interpolációval lehet meghatározni:

$$x = x_E + (x_F - x_E)(\varphi - \varphi')$$

$$y = y_E + (y_F - y_E)(\varphi - \varphi')$$

Keyes délnyugati tájékozású koordináta-rendszert használ. A PHP koordináta-rendszerébe úgy térek át, hogy az y koordináta ellentettjét veszem, majd a két koordinátát megcserélem. (90° -os elforgatás óra járásával ellentétes irányban.) A méretarány miatt a koordinátákat végül M-mel el kell osztani.



28. ábra: Cahill–Keyes-vetület. Középméridián: Ny. h. 20° ; fokhálózat 10°

Módosított Collignon-vetület

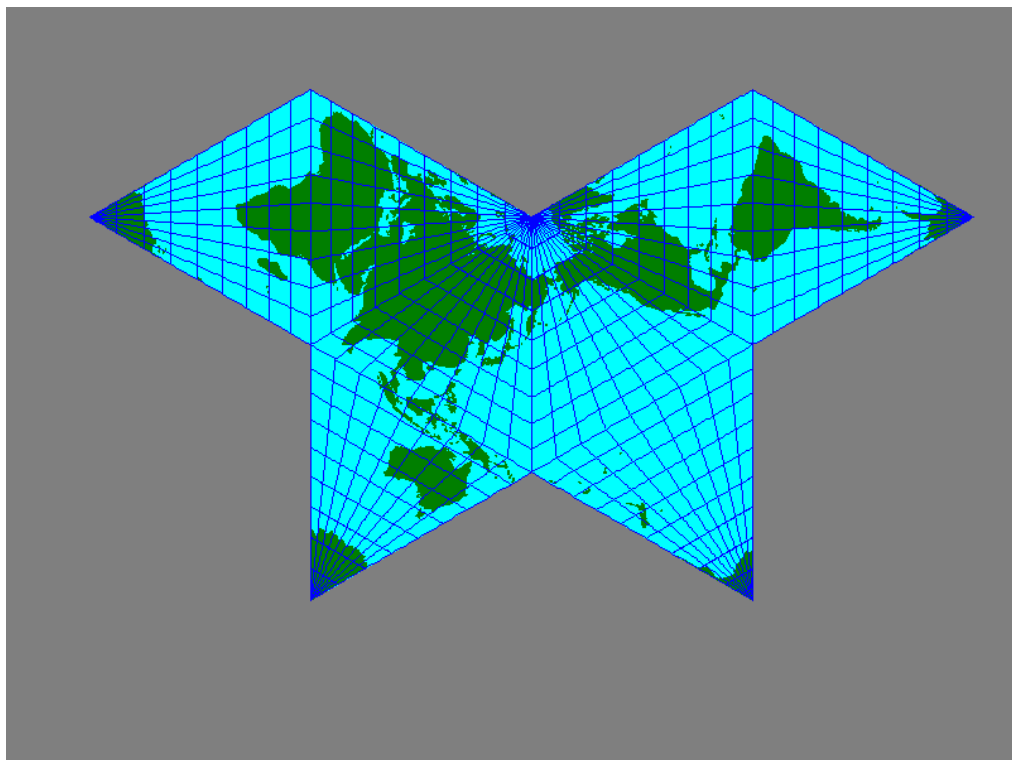
A módosított Collignon-vetülethez nem szükséges segédföldrajzi koordinátákat számítani, viszont $\Delta\lambda$ alatt egy -45° és 45° közötti szöget értek, ami a háromszög közepén futó meridián és a leképezendő pont közötti hosszúságkülönbség.

A vetületi egyenletek viszonylag egyszerűek: (Fehér, 2003)

$$y = \frac{R}{M} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi (1 - \sin \varphi)$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{3}\pi} \Delta\lambda \cdot y \text{ (szögek radiánban értendők)}$$

A koordináta-rendszer tájékozása itt szerencsésen egybeesik a PHP koordinátaival.



29. ábra: Módosított Collignon-vetület. Középmeridián: K. h. 160° ; fókálózat 10°

4. fejezet

Cahill kvázi-területtartó vetületének felújítása

4.1 A kutatás célja

Az informatika előretörésével egyre gyakrabban generálunk térképeket adatbázisok és más digitális állományok segítségével. Ehhez szükség van a vetületi egyenletek ismeretére, hiszen a vetületi transzformációkat így tudjuk a számítógépben leprogramozni. Cahill kvázi-területtartó vetülete nem felel meg ennek a követelménynek, mert a fokhálózatot kézzel kellett torzítani ahhoz, hogy a gömbháromszögek képei összeilleszthetők legyenek.

Fenti okok miatt vágtam bele a vetület felújításába. Célom, hogy olyan leképezést készítsék, mely hasonlít Cahill eredeti vetületére, területtorzulása ne legyen túl nagy, egzakt matematikai képletekkel leírható, és fokhálózatának képe a szokásos simasági feltételeknek a lehető legteljesebb mértékben eleget tesz. A vetülettani korrektség mellett fontos szempont, hogy amint Cahill is eredetileg a nagyközönség számára, atlaszokba szánta vetületét, úgy az új leképezés is a hétköznapi ember számára értelmezhető, esztétikus képet adjon. Emiatt törekszem például arra, hogy a paralelkörök és a meridiánok lehetőleg derékszöget zárjanak be egymással.

Ha ezt külön nem jelzem, a vetületi egyenletekben található betűk megegyeznek az előző fejezet jelöléseivel.

4.2 A vetületi egyenletek

Közepes szélességek

A $22^{\circ}30'$ és $67^{\circ}30'$ szélességek közötti területekből indultam ki. Albers kúpvetületét választottam a terület leképezésére, mert területtartó. Az Egyenlítő menti területek későbbi összeilleszthetőségének érdekében kikötöttem, hogy a $22^{\circ}30'$ szélesség hossztartó legyen. A kúpvetület határoló meridiánjainak 60° -os szöget kell bezárniuk, hiszen így tudjuk a gömbnyolcadot egyenlő oldalú háromszögbe képezni. A két feltételből következik, hogy a másik hossztartó paralelkör a 72° közelében található (de ezt már nem képezem le), a sugárhajlás (a továbbiakban n) $2/3$. A vetületi egyenlet felírásához pontosan meg kell határozni a második hossztartó paralelkör helyét:

$$\beta_n = \arccos(2 \cdot n - \cos 67^{\circ}30'), \text{ ahol } \beta_n \text{ a keresett paralelkör pólustávolsága.}$$

Ebből meghatározhatuk a sugárfüggvényt:

$$\rho = \frac{R}{M} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{90^\circ - \varphi}{2}\right)}{n} + \frac{\sin^2\left(\frac{67^\circ 30'}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\beta_n}{2}\right)}{n^2}}$$

$$\omega = n \cdot \Delta\lambda.$$

Magas szélességek

A $67^\circ 30'$ -nél nagyobb szélességeket ortogonális polikónikus vetületben képezem le. Kanada térképészetében már felmerült a kúpvetületek és a polikónikus vetületek illesztésének problémája a magas szélességeken, így Bousfield kanadai térképész meghatározta a szükséges paraméterek (S_m , S_p és c) értékét. (Györfy, é. n.) A paraméterek meghatározásához a határoló paralelkörre, az ott található h és k fokhálózat menti torzulási modulusokra, és a kúpvetület sugárhajlására lesz szükségünk. A fokhálózat menti torzulások:

$$h = \sqrt{n + \frac{\sin^2\left(\frac{67^\circ 30'}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\beta_n}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{22^\circ 30'}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{22^\circ 30'}{2}\right)}}$$

$$k = \frac{1}{h}, \text{ mert az Albers-kúpvetület területtartó.}$$

Ebből a szükséges paraméterek:

$$c = n$$

$$S_m = k$$

$$S_p = \frac{h \cdot \sin 67^\circ 30'}{n}$$

A vetülethez szükségünk van egy függvényre is:

$$f(\Delta\lambda) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{c \cdot \Delta\lambda}{2}\right)}{\sin 67^\circ 30' \cdot \cos^{\left(\frac{S_m}{S_p} - 1\right)} 67^\circ 30'}$$

$$\gamma = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left[f(\Delta\lambda) \cdot \sin \varphi \cdot \cos^{\left(\frac{S_m}{S_p} - 1\right)} \varphi \right]$$

$$x = \frac{R}{M} \cdot S_p \cdot \frac{\sin \gamma}{\operatorname{tg} \varphi}$$

$$y = -\frac{R}{M} \left[S_m \cdot \varphi + S_p \cdot \frac{1 - \cos \gamma}{\operatorname{tg} \varphi} - S_m \cdot \frac{67^\circ 30'}{180^\circ} \cdot \pi - \rho(67^\circ 30') \right]$$

Az előző egyenletben található $\rho(67^\circ 30')$ értékre a kúpvetülethez illesztés miatt van szükség. Úgy kapjuk meg, hogy a kúpvetületben a $67^\circ 30'$ szélességhez tartozó ρ értéket egységsugarú gömbön kiszámítjuk.

Alacsony szélességek

Az Egyenlítő képének a $-22^\circ 30' \leq \Delta\lambda \leq 22^\circ 30'$ hosszúságok között Cahill vetületéhez hasonlóan ki kell egyenesednie. Ismételten a polikónikus vetülethez nyúltam. Az előzőekhez képest annyival egyszerűbbek a képletek, hogy a határoló paralelkörön mind h , mind k 1. $\varphi = 0$ esetén a képletek 0-val való osztásra vezetnek, így határértéket kell számolni!

A $\varphi < 22^\circ 30'$ és $|\Delta\lambda| > 22^\circ 30'$ területre nem találtam olyan vetületet, amely az eredetihez hasonló képet eredményezett volna. A szélességi köröket körívekre képeztem le. A köríveket úgy forgattam el, hogy a polikónikus vetület határán deriváltjaik megegyezzenek a polikónikus vetület szélességi köreinek deriváltjaival. A képletek komplexitása miatt a differenciálást numerikusan végeztem el. A körök sugarai az Egyenlítő felé lineárisan növekednek. A szélességi körök képeit a hosszúsági körök képei egyenként oszttják föl. A hosszúsági körök képeinek differenciálhatósága nincs garantálva, de jól megválasztott paraméterek mellett szabad szemmel nem fedeztem fel törést erős nagyításnál sem. A fokhálózati vonalak képei szemre merőlegeseknek tűnnek, így a vetület többi, ortogonális részeivel egységes képet ad.

A vetületi egyenletekhez szükséges kiszámítani:

(φ és $\Delta\lambda$ mindenütt radiánban helyettesítendő be.)

$x(\varphi)$ és $y(\varphi)$ a polikónikus vetület vetületi koordinátái $\Delta\lambda = 22^\circ 30'$ rögzített hosszúság mellett.

$$\xi(\varphi) = \arctg \left(\frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda}(\varphi)}{\frac{\partial y}{\partial \lambda}(\varphi)} \right), \text{ mely a paralelkör deriváltja és az x tengely által bezárt szög.}$$

$\rho(22^\circ 30')$ az Albers-kúpvetület sugárfüggvényének értéke egységsugarú gömbön, a $22^\circ 30'$ földrajzi szélesség helyén.

$$\rho' = \rho(22^\circ 30') \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{22^\circ 30'}{180^\circ} \cdot \pi - \varphi \right] \right) \text{ lesz a paralelkörök sugara.}$$

$$n' = n \cdot \left(1 + \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{22^\circ 30'}{180^\circ} \cdot \pi - \varphi \right] \right) \text{ pedig a meridiánok távolságát jellemzi.}$$

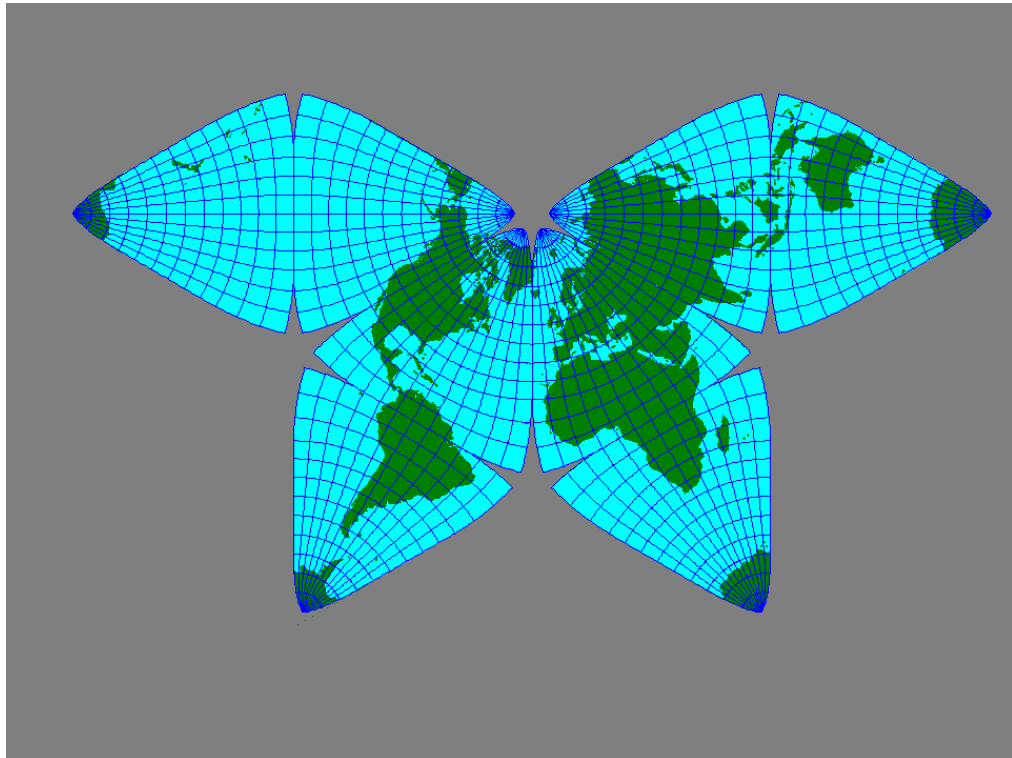
$$x = x(\varphi) + \frac{R}{M} \cdot \rho' \cdot \left[\sin \left(\xi(\varphi) + n' \cdot \left[\Delta\lambda - \frac{22^\circ 30'}{180^\circ} \cdot \pi \right] \right) - \sin(\xi[\varphi]) \right]$$

$$y = y(\varphi) - \frac{R}{M} \cdot \rho' \cdot \left[\cos(\xi[\varphi]) - \cos \left(\xi(\varphi) + n' \cdot \left[\Delta\lambda - \frac{22^\circ 30'}{180^\circ} \cdot \pi \right] \right) \right]$$

4.3 Az elkészült vetület jellemzése

A vetület a közepes szélességeken területtartó, a $\pm 22^\circ 30'$ szélesség mentén, valamint az Egyenlítő $22^\circ 30'$ -es környezetében a középmeridiánokban hossztartó. A háromszögek Egyenlítő felőli íves csúcsainak környékét leszámítva ortogonális, de szabad szemmel még itt is ortogonálisnak tűnik. A területtorzulás is szemmel láthatóan ezen a környéken a legnagyobb. Ez kevésbé zavaró, mert a gyenge pontok szerencsésen óceánok közepére esnek, és a vetület itt amúgy is megszakad. A fokhálózati vonalak képei a többi vetületváltozattal ellentétben (a szögtartót kivéve) a háromszögek szélén sem törnek meg, így esztétikus képet adnak. Kitűnő vetület a Föld atlaszban történő ábrázolására.

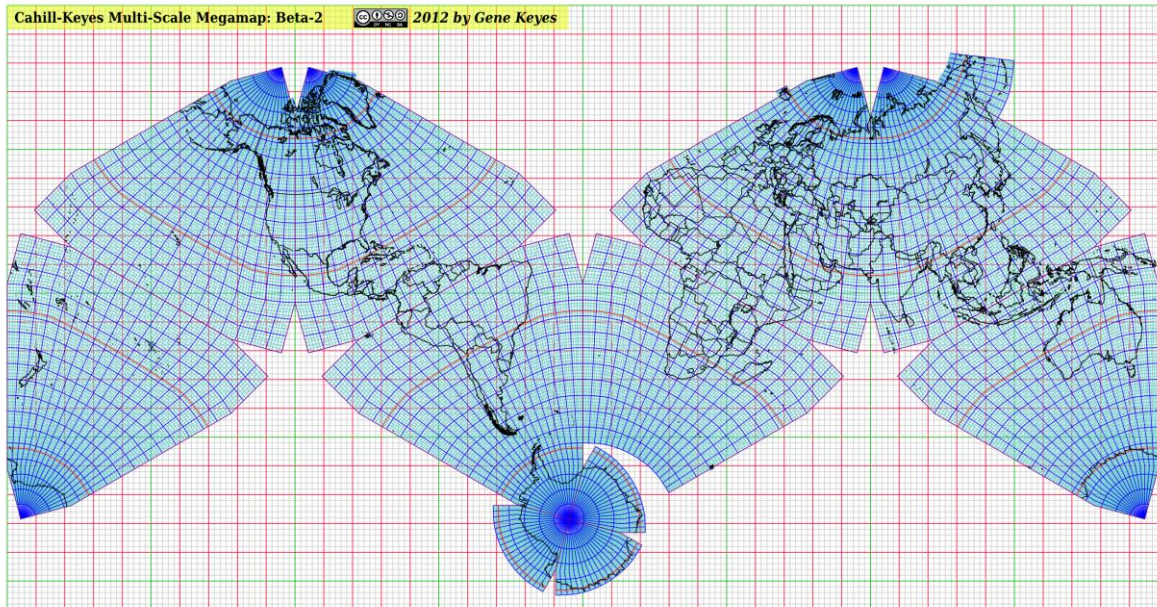
Az előző fejezetben ismertetett PHP-programban ezt a vetületet is elkészítettem, így ennek segítségével generáltam az alábbi ábrát:



30. ábra: Módosított Cahill-vetület

5. fejezet

A pillangó-vetületek mai lehetséges alkalmazásai

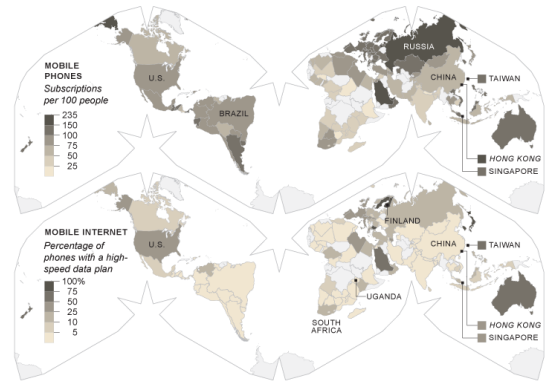


31. ábra: Digitális adatbázisból készült politikai térkép Cahill–Keyes vetületben. Keyes nyomán.

Az oktaéder képfelület egyik nagy előnye, hogy az ilyen képfelületre vetített térképek általában a hagyományos ábrázolásmódoknál kedvezőbb torzulási viszonyokkal rendelkeznek. Cahill eredetileg, amikor a pillangó típusú vetületeit kidolgozta, ezt az előnyt tudományos alkalmazások (pl. meteorológia, navigáció, hirdástechnika) területén szeretne volna kihasználni a gnomonikus és a szögtartó leképezésekkel, és csak a kvázi-területtartó vetületét szánta a nagyközönségnek. A mai GIS technológiák segítségével gyorsabban és pontosabban tudunk szögeket, távolságokat megmérni és a gömbi főköröket megtalálni, mint egy ilyen célú térképen ezeket körzővel meghatározni. Így jelenleg ezeknek a térképeknek inkább esztétikai értékük a fontosabb. Ezt használja ki Waterman, akinek térképeit falitérkép vagy akár hűtőmágnes formátumban az interneten is megvásárolhatjuk. Ő a térképeit oktatási célokra is javasolja, hiszen a kis torzulások miatt a diákok fejében pontosabb kép alakul ki a Földről, mint egy Mercator-vetületű világtérképet szemlélve.



32. ábra: Hűtőmágnes-térkép
Waterman-vetületben



33. ábra: Újságban megjelent tematikus
térkép Cahill–Keyes vetületben

Szintén nem elhanyagolható szempont, amit Clarke fedezett fel, hogy a háromszögeket a négy-fa logika szerint ugyanúgy tovább lehet bontani, mint a hagyományos négyzet alakot, így a geoinformatikában is teret nyerhet alkalmazásuk. Én ezeket a térképeket elsősorban dekorációs (pl. falitérkép) vagy tudományos ismeretterjesztő célokra, tematikus térképek alapjaként ajánlanám. Egy ilyen térkép a nagyközönség figyelmét felhívná magára, hiszen a legtöbb világtérképünk téglalap vagy ellipszis alakú. A szakadások miatt olyan tematika ajánlott, amely csak a kontinensekre terjed ki, az óceánok területére nincs adat. A szögtartó oktaéder vetületet lokális alaktartása és más szögtartó vetületekhez képest csekély torzulásai miatt különösen tudom ajánlani iskolai atlaszokba. A szakdolgozat írása közben (2011. XII. 6-án) jelent meg a New York Times hasábjain néhány tematikus térkép Cahill–Keyes vetületben.

Összefoglalás

Cahill pillangó-térképei számos más oktaéder vetületet ihlettek. Már maga Cahill is háromféle vetületet hozott létre rendszerében. Ezért sok változatos vetületet használhatunk fel pillangó alakú térkép megalkotásához: Cahill három vetületén (gnomonikus, szögtartó, kvázi-területtartó) kívül a Cahill–Keyes általános torzulású vetület, Snyder és Waterman által megalkotott területtartó vetületek, és kis módosításokkal Collignon területtartó vetülete is alkalmas a képfelületre.

Mivel az oktaéder jobban közelíti a gömböt, mint a sík, a kúp vagy a henger, a hagyományos vetületeknél kedvezőbb torzulási viszonyokat is elérhetünk. Ennek ára a térképen több helyen megjelenő szakadás, de ezen szakadások helyei optimalizálhatóak, hogy az ábrázolás szempontjából kevésbé fontos területeket vágjanak át.

A rendelkezésre álló vetületi egyenletek alapján PHP nyelvű programot írtam. Ez a megadott vetületekben rajzolja ki a fókusz és a földrészek képeit a képernyőre. A vetület középpontját a programhoz tetszőlegesen meg lehet adni.

Cahill kvázi-területtartó vetületét felújítottam, hogy a vetület egzakt matematikai képletekkel leírható legyen. A kész leképezés ortogonális, a közepes szélességeken területtartó, ezért esztétikus, könnyen értelmezhető ábrázolást nyújt.

A pillangó típusú térképeknek ma is nagy szerepe lehetne. Felhasználhatóak oktatási, geoinformatikai vagy pusztán dekoratív célokra, bizonyos tematikus térképeknek kitűnő alapot adnak. Figyelemfelkeltő hatásuk és esztétikai értékük is jelentős.

Köszönetnyilvánítás

A dolgozat elkészítésében hatalmas segítséget nyújtott témavezetőm, Dr. Györffy János. A dolgozat témáját az ő ötlete nyomán választottam meg. Hálás vagyok neki a heti rendszerességű konzultációkért, és hogy a munka szövegét szakmai és stilisztikai szempontból egyaránt alaposan felülvizsgálta. Rendkívül sokat segített cikkek felkutatásában, a szögtartó vetület megoldásában és a torzulási modulusok kiszámításában, értelmezésében és a Cahill-vetület felújításában. Köszönöm továbbá tanszékünk lelkiismeretes titkárnőjének, Horváth Ildikónak, hogy a titkárságon található földoktaéder készítőjét alapos munkával kinyomozta. Jelen dolgozat nem jöhetett volna létre Dr. Gede Mátyás ösztönzése és a PHP nyelv térképészeti alkalmazásait bemutató internetes oktatási segédanyaga nélkül.

Forrásjegyzék

B. J. S. Cahill: A Land Map of the World on a New Projection, *Journal of the Association of Engineering Societies*, 1913. X. 153-207. oldalak

B. J. S. Cahill: A World Map to End World Maps, *Geografiska Annaler*, 16. évf., 97-108. oldalak (1934)

B. J. S. Cahill: Projection for World Maps, *Monthly Weather Review*, 57. évf., 4. szám, (1929. IV.) 128-133. oldalak

B. J. S. Cahill: Map of the World, *szabadalom (sorszám: 1054276) 1913. II. 25.*

Fehér D.: Poliéder vetületek, *ELTE Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék*, 2003.

Györffy J.: Nemzeti és nemzetközi térképművek ellipszoid alapfelületű képzetes vetületei, http://mercator.elte.hu/~gyorffy/jegyzete/MScVettan2/ellipsz_alapf/JEGYZ_EV6.htm

G. Keyes: Notes on Re-designing B.J.S. Cahill's Butterfly World Map, 2009. XII. 30.

G. Keyes: Review of the Waterman World Map, 2010. XI. 24.

L. P. Lee: Conformal Projections Based on Elliptic Functions, *Cartographica*, 1976

J. A. Lugo–K. C. Clarke: Implementation of Triangulated Quadtree Sequencing for a Global Relief Data Structure, *Twelfth International Symposium on Computer- Assisted Cartography*, 1995. II. 27. 147-156. oldalak

J. P. Snyder: An Equal-Area Map Projection for Polyhedral Globes, *Cartographica*, 29. évf., 1. szám, (1992. tavasz) 10-21. oldalak

Ábrák forrásai

2. ábra: **Madarassy P.–Guszlev A.:** A vetülettan alkalmazási térbeli alakzatokon. A TDK-dolgozat mellékleteként készített oktaédert magam fényképeztem.
3. ábra: **B. J. S. Cahill:** A World Map to End World Maps
4. és 5. ábra: **B. J. S. Cahill:** Projection for World Maps
- 6-8. ábra: **B. J. S. Cahill:** A Land Map of the World on a New Projection
9. ábra **B. J. S. Cahill:** Map of the World
10. ábra: <http://www.genekeyes.com/Cahill-desk-maps/3-Cahill-desk-maps.html>
11. ábra: http://www.genekeyes.com/CAHILL_GALLERY/1975-Cahill-Keyes.html
- 12-14; 19-22. ábrák: **G. Keyes:** Notes on Re-designing B.J.S. Cahill's Butterfly World Map
15. ábra: **J. P. Snyder:** An Equal-Area Map Projection for Polyhedral Globes
16. ábra: **J. A. Lugo–K. C. Clarke:** Implementation of Triangulated Quadtree Sequencing for a Global Relief Data Structure
17. ábra: <http://www.progonos.com/furuti/MapProj/Dither/ProjPoly/projPoly2.html>
18. és 32. ábrák: <http://odt.org/> webáruház
31. ábra: <http://www.genekeyes.com/CAHILL-KEYES-UPDATE/Cahill-Keyes-map-update2.html>
33. ábra: <http://www.nytimes.com/interactive/2011/12/06/science/1206-world.html>