

Nagy Dániel

Maximális halmazrendszerek kizárt posetekkel

OTDK dolgozat



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikus MSc szak

Témavezető: Katona Gyula egyetemi tanár
ELTE TTK Számítógéptudományi Tanszék

2013. január

Kivonat

A dolgozatban egy véges alaphalmaz részhalmazából álló, egy adott tartalmazási konfigurációt nélkülöző maximális elemszámú halmazrendszereket vizsgálunk. Legyen P egy véges poset, $\mathcal{F}$ pedig $[n]$ részhalmazainak egy rendszere. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ tartalmazza P -t, ha létezik egy $f : P \rightarrow \mathcal{F}$ injektív leképezés, amire minden $a, b \in P$ esetén teljesül $a <_P b \Rightarrow f(a) \subset f(b)$. $\mathcal{F}$ -et P -mentesnek nevezzük, ha nem tartalmazza P -t. $\text{La}(n, P)$ jelöli az $[n]$ részhalmazából képzett maximális méretű P -mentes halmazrendszer az elemszámát. $\text{La}(n, P)$ pontos értéke eddig csak néhány P poset esetén volt ismert, sok posetre csak aszimptotikus becslés van, vagy még az sem.

Felhasználva egy Burcsi Pétertől származó technikát, felső becslést adunk $\text{La}(n, P)$ -re minden P esetén. Belátjuk, hogy ha a P véges poset elemszáma $|P|$, leghosszabb lánc pedig $L(P)$ elemből áll, akkor elég nagy n esetén

$$\text{La}(n, P) \leq \sum_{i=\lfloor \frac{n-b(P)+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n+b(P)-1}{2} \rfloor} \binom{n}{i} \quad \text{ahol} \quad b(P) = \frac{|P| + L(P)}{2} - 1$$

Azaz ha $\mathcal{F}$ P -mentes, akkor legfeljebb annyi eleme van, mint az n szerinti $b(P)$ darab legnagyobb binomiális együttható összege.

Ezután leírunk végtelen sok olyan P posetet, amire a

$$\left\{ F \subset [n] \mid \left\lfloor \frac{n-b(P)+1}{2} \right\rfloor \leq |F| \leq \left\lfloor \frac{n+b(P)-1}{2} \right\rfloor \right\}$$

halmazrendszer P -mentes minden n -re. Ezekre éles a fenti becslés, így megkaptuk $\text{La}(n, P)$ pontos értékét. A kapott tétel közös általánosítása Erdős, De Bonis-Katona-Swanepoel és Griggs-Li-Lu eredményeinek.

Végül megvizsgálunk néhány olyan problémát, ahol a kizárt struktúra a tartalmazási relációkon kívül bizonyos részhalmazok méretének egyenlőségét is magában foglalja.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. A módszer alapjai	3
3. Felső becslés általános posetekre	5
4. Pontos eredmények	6
5. További problémák	9
Hivatkozások	13

1. Bevezetés

Az $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ véges alaphalmaz részhalmazaiából álló, valamilyen tartalmazási konfigurációtól mentes $\mathcal{F}$ halmazrendszereket vizsgálunk.

Definíció Legyen P egy véges poset, $\mathcal{F}$ pedig az $[n]$ részhalmazaiából álló halmazrendszer. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ tartalmazza P -t, ha valamilyen $f : P \rightarrow \mathcal{F}$ injektív leképezésre teljesül $a < b \Rightarrow f(a) \subset f(b)$ minden $a, b \in P$ esetén. Ha $\mathcal{F}$ nem tartalmazza P -t, akkor P -mentesnek nevezzük.

Legyen $\text{La}(n, P)$ az $[n]$ részhalmazaiából álló legnagyobb P -mentes halmazrendszer elemszáma.

Ne feledjük, hogy P -t nem feszített részposetként keressük, tehát $\mathcal{F}$ elemei több relációt is teljesíthetnek, mint P elemei. A célunk az, hogy meghatározzuk $\text{La}(n, P)$ értékét minél több poset esetén. Az első ilyen jellegű tétel Spernertől származik, amit Erdős általánosított.

1.1. Tétel. (Sperner) [11] Legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ alaphalmaz részhalmazaiából álló halmazrendszer. Ha $\mathcal{F}$ egyik eleme sem részhalmaza egy másiknak, akkor

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \quad (1)$$

1.2. Tétel. (Erdős) [4] Legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ alaphalmaz részhalmazaiából álló halmazrendszer. Ha nincs $\mathcal{F}$ -nek $k+1$ olyan eleme, amelyekre $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{k+1}$ teljesül ($k \leq n$), akkor $|\mathcal{F}|$ legfeljebb annyi, mint a k legnagyobb n szerinti binomiális együttható összege. Ez a korlát nem javítható, hiszen választhatjuk azokat az F halmazokat, amikre $\lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor \leq |F| \leq \lfloor \frac{n+k-1}{2} \rfloor$.

Mivel sok P poset esetén fog a legnagyobb P -mentes halmazrendszer az összes $n/2$ -höz közeli méretű részhalmazból állni, célszerű bevezetni a következő jelölést.

Jelölés $\Sigma(n, m) = \sum_{i=\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n+m-1}{2} \rfloor} \binom{n}{i}$ jelöli az m legnagyobb n szerinti binomiális együttható összegét.

Fogalmazzuk át az 1.2. Tételt. Legyen P_{k+1} a $k+1$ elemű lánc poset. Ekkor

$$\text{La}(n, P_{k+1}) = \Sigma(n, k) \quad (2)$$

Most bebizonyítjuk az 1.2. Tételt. Nem Erdős eredeti bizonyítását mutatjuk be, hanem Lubell láncokat használó módszerét alkalmazzuk [10].

Bizonyítás (1.2. Tétel) Láncnak nevezzük az $[n]$ alaphalmaz $n+1$ olyan részhalmazából álló halmazt, amire $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n$ és $|L_i| = i$ teljesül minden $i = 0, 1, 2, \dots, n$ esetén. Összesen $n!$ lánc van. Kettős leszámolást alkalmazunk az olyan (C, F) párokra, ahol C egy lánc, $F \in C$ és $F \in \mathcal{F}$.

Egy adott $F \in \mathcal{F}$ részhalmazon összesen $|F|!(n - |F|)!$ lánc megy át. Tehát a párok száma

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} |F|!(n - |F|)!$$

Egy lánc legfeljebb k darab $\mathcal{F}$ -beli elemet tartalmazhat, különben megjelenne egy P_{k+1} poset. Tehát legfeljebb $k \cdot n!$ pár van. Ez alapján

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} |F|!(n - |F|)! \leq k \cdot n! \quad (3)$$

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|F|}} \leq k \quad (4)$$

Ha $|\mathcal{F}|$ -et rögzítettnek tekintjük, (4) bal oldala akkor minimális, ha a halmazok mérete a lehető legjobban megközelíti $n/2$ -t. Kiválasztva azt a $\Sigma(n, k)$ részhalmazt, amire $\lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor \leq |F| \leq \lfloor \frac{n+k-1}{2} \rfloor$, egyenlőséget kapunk. Tehát

$$La(n, P_{k+1}) = \Sigma(n, k) \quad (5)$$

□

Már sok posetre sikerült aszimptotikusan meghatározni $La(n, P)$ értékét, azonban a pontos érték csak néhány P esetén ismert (lásd [8] és [9]).

A dolgozatban előforduló poseteket a Hasse-diagramjuk segítségével ábrázoljuk.

Definíció A P poset Hasse-diagramja egy olyan ábra, melyre igaz, hogy ha a b elem a fölött áll, és össze vannak kötve, akkor b fedi a -t, azaz $a <_P b$ és nincs olyan c elem, amelyre teljesül $a <_P c <_P b$.

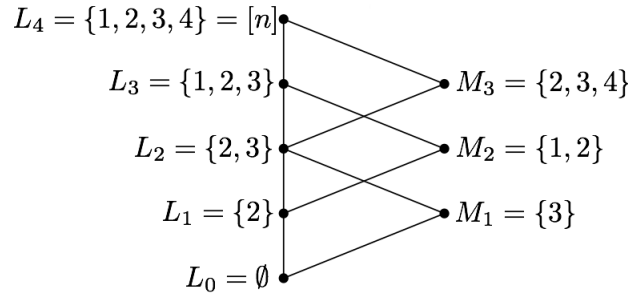
2. A módszer alapjai

A célunk az, hogy pontosan meghatározzuk $La(n, P)$ -t végtelen sok P posetre. Ehhez egy Burcsi Pétertől származó technikát használunk, amely ebben a fejezetben kerül bemutatásra. A módszer lényege, hogy $\mathcal{F}$ -nek nem a láncokkal, hanem úgynevezett vastag láncokkal vett metszeteit vizsgáljuk.

Definíció Legyen $C : L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n$ egy lánc. A C -hez tartozó vastag lánc az a $D = \{L_0, L_1, \dots, L_n, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}\}$ halmaz, ahol $M_i = L_{i-1} \cup (L_{i+1} \setminus L_i)$.

Ekkor $|M_i| = |L_i| = i$, $i < j \Rightarrow L_i \subset L_j$, $L_i \subset M_j$, $M_i \subset L_j$ és $i + 1 < j \Rightarrow M_i \subset M_j$.

$\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ -et a D vastag lánc főszálának, a $\{M_1, M_2, \dots, M_{n-1}\}$ halmazt a vastag lánc mellékszálának nevezzük. $\mathcal{D}$ jelöli az összes vastag lánc halmazát ($|\mathcal{D}| = n!$).



1. ábra. Az $\emptyset \subset \{2\} \subset \{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ láncához tartozó vastag lánc

2.1. Lemma. (Burcsi) [2] Legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ részhalmazaiából álló halmazrendszer ($n \geq 2$), és legyen m pozitív valós szám. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} |\mathcal{F} \cap D| \leq 2m \cdot n! \quad (6)$$

Ekkor

$$|\mathcal{F}| \leq m \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \quad (7)$$

Ha m egész és $m \leq n - 1$, akkor az alábbi erősebb becslés is igaz:

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, m) \quad (8)$$

Bizonyítás Először számoljuk meg azt, hogy hány vastag lánc metsz egy adott $F \subseteq [n]$ halmazt. $\emptyset$ és $[n]$ benne vannak mind az $n!$ vastag láncban. Tegyük fel, hogy $F \notin \{\emptyset, [n]\}$. Ekkor $|F|!(n - |F|)!$ vastag lánc tartalmazza F -et a főszálában, hiszen ennyi lánc megy át rajta. Most számoljuk meg, hány vastag lánc tartalmazza F -et a mellékszálában. Legyen $F = M_{|F|}$, ekkor $|F| \cdot (n - |F|)$ -féleképpen választhatjuk meg $L_{|F|}$ -et, mivel ki kell cserélnünk $M_{|F|}$ egyik elemét egy újra. $M_{|F|}$ és $L_{|F|}$ egyértelműen meghatározzák $L_{|F|-1}$ -et és $L_{|F|+1}$ -et. Ezután $(|F| - 1)!$ illetve $(n - |F| - 1)!$ módon választhatjuk meg a főszál elejét és végét. F -et a mellékszálukban tartalmazó vastag láncok száma tehát $|F|(n - |F|)(|F| - 1)!(n - |F| - 1)! = |F|!(n - |F|)!$. Tehát F -et összesen $2|F|!(n - |F|)!$ vastag lánc tartalmazza.

Legyen $t = |\mathcal{F} \cap \{\emptyset, [n]\}|$. Alkalmazzunk kettős leszámolást a (D, F) párokra, ahol $D \in \mathcal{D}$, $F \in D$ és $F \in \mathcal{F}$.

$$t \cdot n! + \sum_{F \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset, [n]\}} 2|F|!(n - |F|)! \leq 2m \cdot n! \quad (9)$$

$$t \cdot \frac{1}{2} + \sum_{F \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset, [n]\}} \frac{1}{\binom{n}{|F|}} \leq m \quad (10)$$

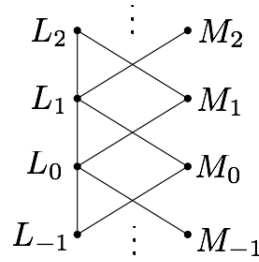
Mivel $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ a legnagyobb n szerinti binomiális együttható, és $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \geq 2$, a következő adódik:

$$\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leq m \quad (11)$$

Ezzel igazoltuk (7)-et. Ha m egész, $m \leq n - 1$, és $|\mathcal{F}|$ -et rögzítettnek tekintjük, (10) bal oldala akkor minimális, ha olyan részhalmazokat választunk, amiknek a mérete a lehető legközelebb esik $n/2$ -höz. $\Sigma(n, m)$ ilyen részhalmazt véve, (10)-ben egyenlőség áll. Ezért $|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, m)$, tehát (8) is igaz. $\square$

Definíció A végtelen vastag lánc egy olyan poset, melynek elemei L_i , $i \in \mathbb{Z}$ és M_i , $i \in \mathbb{Z}$, definiáló relációi pedig

$$i < j \Rightarrow L_i \subset L_j, L_i \subset M_j, M_i \subset L_j$$



2. ábra. A végtelen vastag lánc

Tetszőleges vastag lánc elemeiből a tartalmazással, mint relációval képzett poset részposete a végtelen vastag láncnak.

2.2. Lemma. (Burcsi) [2] Legyen m egyész szám, vagy egy egész fele, P pedig egy véges poset. Tegyük fel, hogy a végtelen vastag lánc bármely $2m + 1$ eleme tartalmazza P -t. Legyen $\mathcal{F}$ egy $[n]$ részhalmazából álló P -mentes halmazrendszer. Ekkor

$$|\mathcal{F}| \leq m \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \quad (12)$$

Ha m egész és $m \leq n - 1$, akkor az alábbi erősebb becslés is igaz:

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, m) \quad (13)$$

Bizonyítás Mivel a vastag láncok elemeiből álló poset részposete a végtelen vastag láncnak, $|\mathcal{F} \cap D| \leq 2m$ minden $D \in \mathcal{D}$ -re. Összesen $n!$ vastag lánc van, tehát

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} |\mathcal{F} \cap D| \leq 2m \cdot n! \quad (14)$$

A 2.1. Lemmát használva készen vagyunk. $\square$

Megjegyzés Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a végtelen vastag lánc tetszőleges 5 elemét kiválasztva, két-két elem pirosra illetve kékre színezhető úgy, hogy a pirosak nagyobbak legyenek a kékeknél. Tehát ha B jelöli azt a négyelemű posetet, amelynek definiáló relációi $a_1 < b_1, a_1 < b_2, a_2 < b_1$ és $a_2 < b_2$ (lásd 4. ábra), akkor a 2.2. Lemma szerint $n \geq 3$ esetén

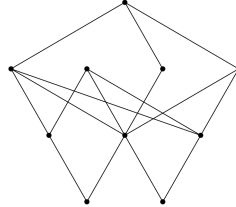
$$La(n, B) \leq \Sigma(n, 2) \quad (15)$$

(15)-ben egyenlőség áll, mivel választhatjuk az összes $\lfloor n/2 \rfloor$ és $\lfloor n/2 + 1 \rfloor$ elemű részhalmazt. Ezzel új bizonyítást nyertünk De Bonis, Katona és Swanepoel tételére, mely szerint $La(n, B) = \Sigma(n, 2)$, ha $n \geq 3$. Az eredeti bizonyítás a körmódszeren alapszik. [3]

3. Felső becslés általános posetekre

Az előző fejezetben bemutatott módszer segítségével felső becslést adunk $La(n, P)$ -re minden véges P poset esetén. Ezután leírunk végtelen sok olyan posetet, amire ez a felső becslés éles, meghatározva ezzel $La(n, P)$ értékét ezekre a posetekre. A 3. és 4. fejezet a szerző eredményeit tartalmazza, amelyek publikálás alatt állnak a Burcsi Péterrel közös [2] cikkben.

Definíció A P véges poset leghosszabb láncának a hossza az a legnagyobb $L(P)$ szám, amire valamely $a_1, a_2, \dots, a_{L(P)} \in P$ esetén $a_1 < a_2 < \dots < a_{L(P)}$ teljesül.



3. ábra. Egy poset, aminek $|P| = 10$ eleme van, és a leghosszabb lánc $L(P) = 4$ hosszú

3.1. Tétel. Legyen P egy véges poset, és legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ részhalmazaiából álló P -mentes halmazrendszer. Ekkor

$$|\mathcal{F}| \leq \left(\frac{|P| + L(P)}{2} - 1 \right) \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \quad (16)$$

Ha $\frac{|P| + L(P)}{2} - 1$ egész szám és $\frac{|P| + L(P)}{2} \leq n$, akkor a következő erősebb becslés is igaz:

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma \left(n, \frac{|P| + L(P)}{2} - 1 \right) \quad (17)$$

Bizonyítás A 2.2. Lemmát akarjuk használni $m = \frac{|P| + L(P)}{2} - 1$ -gyel. Tehát elég a következő lemmát bizonyítani.

3.2. Lemma. Legyen P egy véges poset. Ekkor a végtelen vastag lánc minden $|P| + L(P) - 1$ elemű S részposete tartalmazza P -t.

Bizonyítás A lemmát $L(P)$ szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha $L(P) = 1$, akkor S egy $|P|$ elemű részposete a végtelen vastag láncnak. Kiválaszthatjuk mindet, így P -t kapunk, mivel P elemei közt nincsenek relációk. Tegyük fel, hogy beláttuk a lemmát minden olyan véges posetre, amiben a leghosszabb lánc hossza $l - 1$, és lássuk be egy olyan P -re, amire $L(P) = l$.

Rendezzük sorba a végtelen vastag lánc elemeit a következőképpen:

$$\dots L_{-1}, M_{-1}, L_0, M_0, L_1, M_1, L_2, M_2 \dots$$

Tegyük fel, hogy P -nek k minimális eleme van, és válasszuk ezeknek S első k elemét a fenti sorrend szerint. Vegyük észre, hogy S összes további eleme, esetleg egy kivétellel, nagyobb a végtelen vastag láncban a már kiválasztott k elem mindegyikénél. Ha van ilyen kivétel, töröljük azt S -ből. Ezután S -nek legalább $|P| + L(P) - k - 2$ eleme marad, mind nagyobbak annál a k -nál, amit a minimális elemeknek választottunk. Jelölje S' ezen elemek halmazát.

Legyen P' az a poset, ami P -ből marad a minimális elemek törlése után. Ennek $|P'| = |P| - k$ eleme van és a leghosszabb lánc $L(P') = L(P) - 1$ hosszú. Az indukciós feltétel szerint S' néhány eleme P' -t alkot, mivel $|S'| \geq |P| + L(P) - k - 2 = |P'| + L(P') - 1$. Ezekhez az elemekhez hozzávéve az eredeti k -t, egy P posetet kapunk S elemeiből. $\square$

Megjegyzés Az eddig ismert legjobb felső becslés P -mentes halmazrendszerek elemszámára általános P esetén $\Sigma(n, |P| - 1)$ volt. Ez az 1.2. Tételből következik, mivel P részposete a $P|P|$ lánc posetnek. Az új felső korlát megegyezik ezzel a lánc posetek esetén, azonban erősebb minden más posetre. Ekkor ugyanis $L(P) < |P|$, tehát

$$\Sigma\left(n, \frac{|P| + L(P)}{2} - 1\right) < \Sigma(n, |P| - 1) \quad (18)$$

Továbbá elég nagy n -re

$$\left(\frac{|P| + L(P)}{2} - 1\right) \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} < \Sigma(n, |P| - 1) \quad (19)$$

4. Pontos eredmények

Ebben a fejezetben leírunk végtelen sok olyan posetet, amire $\text{La}(n, P)$ pontosan meghatározható a 3.1. Tétel segítségével.

Definíció Egy P véges posetre jelölje $e(P)$ a legnagyobb m egészt, amire az $[n]$ alaphalmaz összes $k, k + 1, \dots, k + m - 1$ méretű részhalmazából álló halmazrendszer P -mentes minden n és k esetén.

Végtelen sok P -re belátjuk, hogy $\text{La}(n, P) = \Sigma(n, e(P))$, ha n elég nagy. Ezzel megerősítjük az alábbi sejtést.

4.1. Sejtés. [1] Minden P véges posetre

$$\text{La}(n, P) = e(P) \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} (1 + O(1/n)) \quad (20)$$

Bukh belátta a sejtést minden olyan posetre, aminek a Hasse-diagramja fa. [1]

Vezessünk be egy jelölést a 3.1 Tételben szereplő kifejezésre.

Jelölés

$$b(P) = \frac{|P| + L(P)}{2} - 1 \quad (21)$$

4.2. Lemma. Tegyük fel, hogy egy véges P posetre teljesül $e(P) = b(P)$ és $n \geq b(P) + 1$. Ekkor

$$La(n, P) = \Sigma(n, e(P)) = \Sigma(n, b(P)) \quad (22)$$

Bizonyítás Álljon $\mathcal{F}$ az $[n]$ azon részhalmazai közül, melyeknek a mérete $\lfloor \frac{n-e(P)+1}{2} \rfloor \leq |F| \leq \lfloor \frac{n+e(P)-1}{2} \rfloor$. Ekkor $|\mathcal{F}| = \Sigma(n, e(P))$ és $\mathcal{F}$ P -mentes $e(P)$ definíciója szerint. Másrészt a 3.1. Tétel szerint egy P -mentes halmazrendszernek legfeljebb $\Sigma(n, b(P))$ eleme lehet. $\square$

Most megadunk néhány egyszerű posetet, amire $e(P) = b(P)$ teljesül.

Definíció (Lásd a 4. ábrát).

E az egyelemű poset.

A következő posetek elemei szintekre oszthatók úgy, hogy a pontosan akkor nagyobb b -nél a posetben, ha a magasabb szinten van, mint b .

B a pillangó-poset, egy 2 szintű poset, 2 elemmel mindkét szintjén.

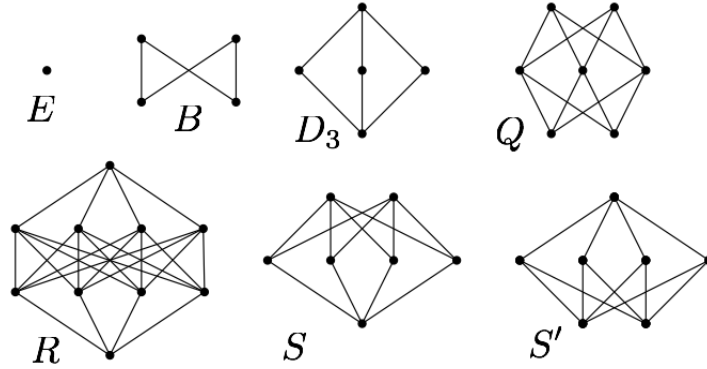
D_3 a 3-gyémánt poset, aminek rendre 1, 3 és 1 eleme van az egyes szintjein.

Q az a poset, aminek rendre 2, 3 és 2 eleme van a szintjein.

R az a poset, aminek rendre 1, 4, 4 és 1 eleme van a szintjein.

S az a poset, aminek rendre 1, 4 és 2 eleme van a szintjein.

S' az a poset, aminek rendre 2, 4 és 1 eleme van a szintjein.



4. ábra. 7 egyszerű poset, amire $e(P) = b(P)$ teljesül

4.3. Lemma. Minden $P \in \{E, B, D_3, Q, R, S, S'\}$ esetén teljesül $e(P) = b(P)$.

Bizonyítás $b(P)$ egész szám mind a hét fenti posetre. Tegyük fel, hogy $e(P) \geq b(P) + 1$ valamelyik P posetre. Ekkor $n \geq b(P) + 1$ esetén lenne egy P -mentes $\mathcal{F}$ halmazrendszer, ami $[n]$ részhalmazai közül áll és $|\mathcal{F}| = \Sigma(n, b(P) + 1) > \Sigma(n, b(P))$, ez pedig ellentmond a 3.1. Tételnek. Tehát $e(P) \leq b(P)$. Belátjuk, hogy minden $P \in \{E, B, D_3, Q, R, S, S'\}$ posetre és n, k egészekre az $[n]$ alaphalmaz összes $k, k + 1, \dots, k + b(P) - 1$ elemű részhalmazából álló halmazrendszer P -mentes. Ebből $e(P) \geq b(P)$ következik, ami teljessé teszi a bizonyítást.

Az állítás triviális $P = E$ -re, mivel $b(E) = 0$.

$b(B) = 2$. Az összes k és $k + 1$ elemű részhalmaz alkotta halmazrendszer B -mentes, mivel két $k + 1$ elemű részhalmaznak nem lehet két különböző k elemű metszete.

$b(D_3) = 3$. Az összes $k, k + 1$ és $k + 2$ elemű részhalmaz alkotta halmazrendszer D_3 -mentes, mivel ha az A, B részhalmazokra $|B| - |A| \leq 2$, akkor legfeljebb két F halmazra lesz igaz $A \subset F \subset B$.

$b(Q) = 4$. Tegyük fel, hogy 7 darab $k, k + 1, k + 2$ vagy $k + 3$ méretű részhalmaz Q -t formál. Ekkor közülük lesz 4 az alsó két szinten, vagy 4 a felső két szinten. Ők B -t kellene hogy alkossanak, ami nem lehetséges.

$b(R) = 6$. Tegyük fel, hogy 10 darab $k \leq |F| \leq k + 5$ méretű részhalmaz R -et formál. Legyen A a legkisebb, B a legnagyobb részhalmaz. Legyen U az 5 legkisebb részhalmaz uniója. A második szint 4 halmaza mind részhalmaza U -nak, és legalább 3 különbözik tőle. Hasonlóan, a harmadik szint 4 részhalmaza tartalmazza U -t és legalább 3 különbözik tőle. Mivel D_3 nem áll elő $m, m + 1$ és $m + 2$ méretű halmazokból, $|A| + 6 \leq |U| + 3 \leq |B|$, ami ellentmondás.

$b(S) = 4$. Tegyük fel, hogy 10 darab $k, k + 1, k + 2$ vagy $k + 3$ méretű részhalmaz S -et formál. Legyen V a legfelső szint két elemének a metszete, ekkor $|V| \leq k + 2$. A középső szint 4 halmaza mind részhalmaza V -nek, és legalább 3 különbözik tőle. Ez a 3 elem V -vel és a legkisebb részhalmazzal együtt egy D_3 -at formál $k, k + 1$ és $k + 2$ elemű részhalmazokból, ez pedig ellentmondás.

Egy halmazrendszer pontosan akkor S' mentes, ha az elemei komplementeréből álló halmaz S -mentes. Ezért $e(S') = e(S) \geq b(S) = b(S')$. $\square$

Megadunk három módszert arra, hogy poseteket építsünk kisebbekből, megtartva az $e(P) = b(P)$ tulajdonságot.

Definíció Legyenek P_1, P_2 posetek. Legyen $P_1 \oplus P_2$ az a poset, ami P_1 -ből és P_2 -ből úgy kapható, hogy feltesszük az $a < b$ relációt minden $a \in P_1, b \in P_2$ -re.

Tegyük fel, hogy P_1 -nek van legnagyobb M eleme, P_2 -nek pedig legkisebb m eleme. Ekkor jelölje $P_1 \otimes P_2$ azt a posetet, ami P_1 -ből és P_2 -ből úgy kapható, hogy azonosítjuk M -et és m -et. Továbbá legyen $P_1 \odot P_2 = (P_1 \setminus \{M\}) \oplus (P_2 \setminus \{m\})$

4.4. Lemma. Tetszőleges véges posetekre

$$e(P_1 \oplus P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) + 1 \quad (23)$$

Ha $P_1 \otimes P_2$ és $P_1 \odot P_2$ értelmezve vannak, akkor

$$e(P_1 \otimes P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) \quad (24)$$

$$e(P_1 \odot P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) - 1 \quad (25)$$

Bizonyítás Ahhoz, hogy P_1 -et találjunk, legalább $e(P_1) + 1$ szint kell, P_2 -höz pedig legalább $e(P_2) + 1$ szint. $\oplus$ definíciója szerint P_2 legalsó szintje P_1 legfelső szintje felett van $P_1 \oplus P_2$ tetszőleges előállításánál, tehát $P_1 \oplus P_2$ -höz legalább $e(P_1) + 1 + e(P_2) + 1$ szint kell. $P_1 \otimes P_2$ -re ugyanígy érvelhetünk, hozzáátéve, hogy P_1 legfelső szintje egybeesik P_2 legalsó szintjével. Hasonlóan $(P_1 \setminus \{M\})$ és $(P_2 \setminus \{m\})$ elhelyezéséhez legalább $e(P_1)$ illetve $e(P_2)$ szint kell, és ezek a szintek egymás felett kell hogy legyenek. Ez igazolja a $P_1 \odot P_2$ -re felírt becslést.

Megjegyzés A (24) sorban minden esetben egyenlőség áll. (Lásd [6]) Most azonban csak az egyenlőtlenségre lesz szükségünk.

4.5. Lemma. Tegyük fel, hogy P_1 és P_2 olyan véges posetek, amikre teljesül $e(P_1) = b(P_1)$ és $e(P_2) = b(P_2)$. Ekkor

$$e(P_1 \oplus P_2) = b(P_1 \oplus P_2) \quad (26)$$

Ha $P_1 \otimes P_2$ és $P_1 \odot P_2$ értelmezett, akkor

$$e(P_1 \otimes P_2) = b(P_1 \otimes P_2) \quad (27)$$

$$e(P_1 \odot P_2) = b(P_1 \odot P_2) \quad (28)$$

Bizonyítás

$|P_1 \oplus P_2| = |P_1| + |P_2|$, $L(P_1 \oplus P_2) = L(P_1) + L(P_2)$ és $e(P_1 \oplus P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) + 1$,
 $|P_1 \otimes P_2| = |P_1| + |P_2| - 1$, $L(P_1 \otimes P_2) = L(P_1) + L(P_2) - 1$ és $e(P_1 \otimes P_2) \geq e(P_1) + e(P_2)$,
 $|P_1 \odot P_2| = |P_1| + |P_2| - 2$, $L(P_1 \odot P_2) = L(P_1) + L(P_2) - 2$ és $e(P_1 \odot P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) - 1$.

A fentiek és (21) alapján

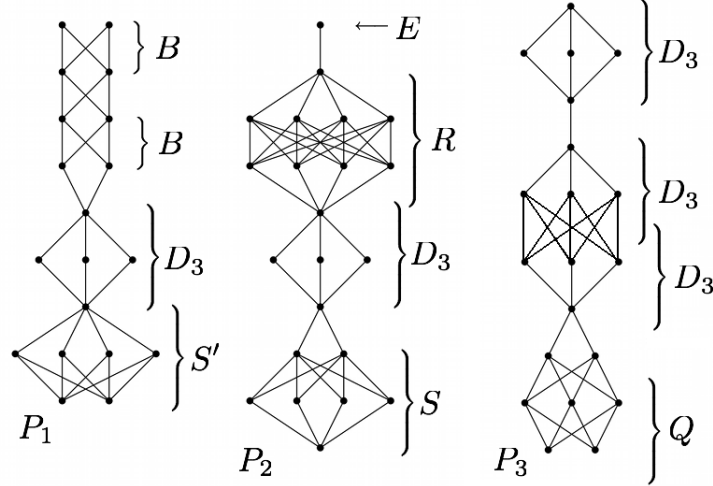
$$e(P_1 \oplus P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) + 1 = b(P_1) + b(P_2) + 1 = b(P_1 \oplus P_2) \quad (29)$$

Ha $P_1 \otimes P_2$ és $P_1 \odot P_2$ értelmezett, akkor

$$e(P_1 \otimes P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) = b(P_1) + b(P_2) = b(P_1 \otimes P_2) \quad (30)$$

$$e(P_1 \odot P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) - 1 = b(P_1) + b(P_2) - 1 = b(P_1 \odot P_2) \quad (31)$$

Már láttuk, hogy $e(P) \leq b(P)$ minden posetre igaz, ezzel készen vagyunk. $\square$



5. ábra. Az E, B, D_3, Q, R, S és S' posetekből a $\oplus$, $\otimes$ és $\odot$ műveletekkel felépített posetek. $P_1 = S' \otimes D_3 \oplus B \oplus B$, $P_2 = S \oplus D_3 \otimes R \oplus E$ és $P_3 = Q \oplus D_3 \odot D_3 \oplus D_3$.

A következő tétel összefoglalja az eddig bizonyítottakat.

4.6. Tétel. Legyen P egy véges poset, ami felépíthető az E, B, D_3, Q, R, S és S' posetekből a $\oplus$, $\otimes$ és $\odot$ műveletekkel (az 5. ábrán látható három példa). Ha $n \geq b(P) + 1$, akkor

$$La(n, P) = \Sigma(n, b(P)) = \Sigma(n, e(P)) \quad (32)$$

Bizonyítás A 4.3. és 4.5. Lemmák szerint $e(P) = b(P)$. Ekkor az 4.2. Lemma bizonyítja a tételt.

Megjegyzés A 4.6. Tétel közös általánosítása Erdős tételének (1.2. Tétel), a B posetre vonatkozó tételnek (lásd [3]) és a következő eredménynek.

4.7. Tétel. (5.1. Tétel, $k=3$ eset) Ha $n \geq 2$, akkor

$$La(n, D_3) = \Sigma(n, 3) \quad (33)$$

5. További problémák

Ebben a fejezetben két olyan extrémális problémát vizsgálunk, ahol a kizárt struktúra a tartalmazási relációkon kívül bizonyos részalmazok méretének egyenlőségét is magában foglalja. Ehhez a Griggs, Li és Lu által kifejlesztett partíciós módszert használjuk majd. A módszer lényege, hogy $[n]$ láncait partícionáljuk, majd minden csoportra megnézzük, hogy az ottani láncok átlagosan hányszor metszik az $\mathcal{F}$ halmazrendszert. Ezen számok maximumát véve felső becslést nyerünk $\mathcal{F}$ és egy véletlen lánc metszetének várható méretére. Innen pedig adódik egy felső korlát $|\mathcal{F}|$ -re. A bizonyítások kulcsa a láncok megfelelő csoportosítása, ez függeni fog $\mathcal{F}$ -től. A partíciós módszert felhasználva határozták meg $La(n, P)$ pontos értékét bizonyos gyémántposetekere.

Definíció A D_k ($k \geq 2$) k -gyémánt egy $k+2$ elemű poset, melynek elemei $A, B_1, \dots, B_k$ és C teljesítik $A < B_i < C$ -t minden $1 \leq i \leq k$ -ra.

5.1. Tétel. (Griggs-Li-Lu) [7] Legyen $n, k \geq 2$, és legyen $m = \lceil \log_2(k+2) \rceil$.

(1) Ha $k \in [2^{m-1} - 1, 2^m - \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} - 1]$, akkor

$$\text{La}(n, D_k) = \Sigma(n, m) \quad (34)$$

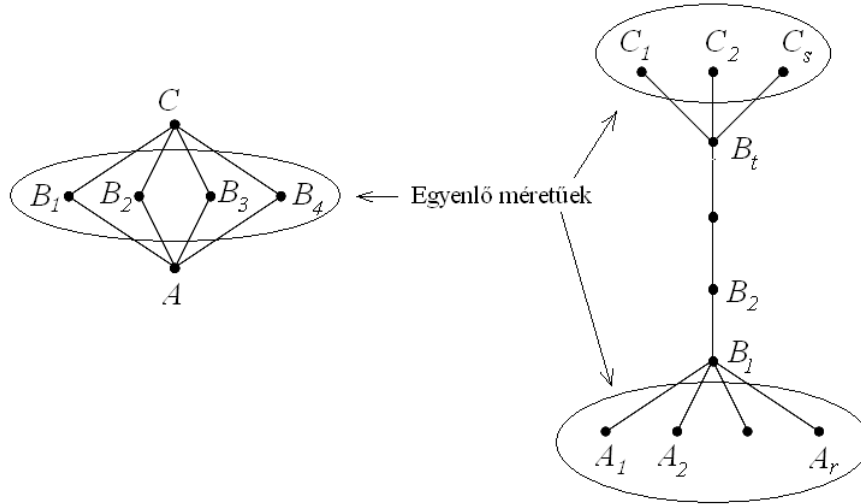
(2) Ha $k \in [2^m - \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}, 2^m - 2]$, akkor

$$\Sigma(n, m) \leq \text{La}(n, D_k) \leq \left(m + 1 - \frac{2^m - k - 1}{\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}} \right) \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \quad (35)$$

Griggs és Li az [5] cikkben a partíciós módszer további alkalmazásait mutatják be.

Az 5.1. Tételbe $k = 4$ -et helyettesítve azt kapjuk, hogy $\text{La}(n, D_4) = \Sigma(n, 3)$. Belátjuk, hogy ha D_4 helyett csak az olyan D_4 -et zárjuk ki, ahol a középső 4 részhalmaz mérete egyenlő, akkor a maximálisan kiválasztható részhalmazok száma $\Sigma(n, 3)$ -ról $\Sigma(n, 4)$ -re nő.

5.2. Tétel. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ az $[n]$ halmaz részhalmazainak olyan rendszere, amiben nincs 6 olyan részhalmaz, amire $A \subset B_1, B_2, B_3, B_4 \subset C$ és $|B_1| = |B_2| = |B_3| = |B_4|$ teljesül. Ekkor $|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, 4)$.



6. ábra. A kizárt struktúra az 5.2. és 5.3. Tételben.

Bizonyítás Legyen $\mathcal{F}$ a feltételeket teljesítő halmazrendszer. Csoportosítsuk $[n]$ láncait a következőképpen. Minden $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{F}$ párra jelölje C_{AB} azon láncok halmazát, melyeknek $\mathcal{F}$ -vel vett minimális, illetve maximális metszete A , illetve B . Legyen C_0 azoknak a láncoknak a halmaza, amelyek legfeljebb 1 $\mathcal{F}$ -beli halmazt tartalmaznak. Ekkor $\text{ave}_{c \in C_{AB}}(c \cap \mathcal{F}) \leq 1$. Ha $|B| - |A| \leq 3$, akkor $\text{ave}_{c \in C_{AB}}(c \cap \mathcal{F}) \leq 4$. Tegyük fel, hogy $|B| - |A| = t \geq 4$. Ekkor

$$\text{ave}_{c \in C_{AB}}(c \cap \mathcal{F}) \leq 2 + 3 \sum_{i=1}^{t-1} \binom{t}{i}^{-1} \leq 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 4 \quad (36)$$

Tehát $\mathcal{F}$ -nek egy véletlenszerűen választott láncgal vett metszetének várható értéke legfeljebb 4. Mivel egy adott $F \in \mathcal{F}$ halmaz $\binom{n}{|F|}^{-1}$ valószínűséggel van benne egy véletlen láncban,

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \binom{n}{|F|}^{-1} \leq 4 \quad (37)$$

Ha $|\mathcal{F}|$ -et rögzítettnek tekintjük, (37) bal oldala akkor minimális, ha a halmazok mérete a lehető legjobban megközelíti $n/2$ -t. Kiválasztva azt a $\Sigma(n, 4)$ részhalmazt, amire $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \leq |F| \leq \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$, egyenlőséget kapunk. Tehát $|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, 4)$. $\square$

Megjegyzés A fenti tétel állítása nem javítható, hiszen nem találunk 6 halmazt a kért tulajdonsággal, ha a 4 középső szint összes halmazát választjuk.

5.3. Tétel. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ az $[n]$ halmaz részhalmazainak olyan rendszere, amiben nincs $r + t + s$ olyan részhalmaz, amire $A_1, A_2, \dots, A_r \subset B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_t \subset C_1, C_2, \dots, C_s$ és $|A_1| = |A_2| = \dots = |A_r|$, $|C_1| = |C_2| = \dots = |C_s|$ teljesül. ($r, s, t \geq 1$) Ekkor

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, t+1) + \binom{n}{\lfloor \frac{n+t+2}{2} \rfloor} \left(\frac{2(r+s-2)}{n} + O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right) \right) \quad (38)$$

A tétel bizonyításához két lemmára lesz szükségünk. Az első egy technikai állítás, ami szerint az $n/2$ -től jelentősen eltérő méretű részhalmazok száma elhanyagolható. A lemmát bizonyítás nélkül közöljük.

5.4. Lemma. [8] Legyen $k = 2\sqrt{n \log n}$. Ekkor

$$2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} - k \rfloor} \binom{n}{i} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \quad (39)$$

5.5. Lemma. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ az $[n]$ halmaz részhalmazainak olyan rendszere, amiben nincs $s + 1$ olyan részhalmaz, amire $B \subset C_1, C_2, \dots, C_s$ és $|C_1| = |C_2| = \dots = |C_s|$ teljesül. Jelölje $\mathcal{F}_k$ azon $\mathcal{F}$ -beli F elemek halmazát, melyekre $\frac{n}{2} - k \leq |F| \leq \frac{n}{2} + k$, ahol $k = 2\sqrt{n \log n}$. Ekkor

$$\text{ave}_{c \in C_A}(c \cap \mathcal{F}_k) \leq 1 + \frac{2s}{n} + O(kn^{-2}) \quad (40)$$

Bizonyítás Legyen $\mathcal{F}$ egy ilyen halmazrendszer.

Minden $A \in \mathcal{F}_k$ részhalmazra legyen C_A azon láncok halmaza, melyeknek A a minimális közös eleme $\mathcal{F}_k$ -val. Jelölje C_0 azon láncok halmazát, melyeknek nincs közös eleme $\mathcal{F}_k$ -val. Ekkor

$$\text{ave}_{c \in C_A}(c \cap \mathcal{F}_k) = 0 \quad (41)$$

Legyen $A \in \mathcal{F}_k$ tetszőleges részhalmaz, az A -t tartalmazó $\mathcal{F}_k$ -beli részhalmazokat jelölje $B_1, B_2, \dots, B_t$. Ha rögzítjük egy lánc elejét $\emptyset$ -től A -ig, akkor annak a valószínűsége, hogy átmegy B_i -n $\binom{n-|A|}{|B_i|-|A|}^{-1}$. Mivel nincs s darab egyenlő méretű halmaz $\mathcal{F}$ -ben, ami tartalmazza A -t,

$$\text{ave}_{c \in C_A}(c \cap \mathcal{F}_k) \leq 1 + (s-1) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2} + k - |F|} \binom{n-|F|}{i}^{-1} \leq 1 + \frac{s-1}{n-|F|} + O(n^{-2}) \leq 1 + \frac{2(s-1)}{n} + O(kn^{-2}) \quad (42)$$

$\square$

Bizonyítás (5.3. Tétel) Legyen $\mathcal{F}$ egy halmazrendszer, ami kielégíti a feltételeket. Legyen k és $\mathcal{F}_k$ ugyanaz, mint az 5.5. Lemmában bizonyításában. Színezzük fehérre $\mathcal{F}_k$ azon elemeit, amelyek tartalmazznak r másik egyenlő méretű $\mathcal{F}_k$ -belit, és részhalmazai s másik egyenlő méretű $\mathcal{F}_k$ -belinek. Legyenek pirosak $\mathcal{F}_k$ azon elmei, amelyek tartalmazznak r másik egyenlő méretű $\mathcal{F}_k$ -belit, de nem részhalmazai s másik egyenlő méretű $\mathcal{F}_k$ -belinek. Legyen $\mathcal{F}_k$ többi eleme zöld.

Ekkor a fehér halmazokban nem lehet t pontú lánc. A pirosakra alkalmazható az 5.5. Lemma, hiszen egyik piros halmaz sem részhalaza s másik egyenlő méretű pirosnak. Hasonlóan felírható a lemma a zöld halmazok komplementeréből álló halmazrendszerre is.

$$\text{ave}(c \cap \mathcal{F}_F) \leq t - 1 \quad (43)$$

$$\text{ave}(c \cap \mathcal{F}_P) \leq 1 + \frac{2(s-1)}{n} + O(kn^{-2}) \quad (44)$$

$$\text{ave}(c \cap \mathcal{F}_Z) \leq 1 + \frac{2(r-1)}{n} + O(kn^{-2}) \quad (45)$$

Adjuk össze ezeket a becsléseket.

$$\text{ave}(c \cap \mathcal{F}_k) \leq t + 1 + \frac{2(r + s - 2)}{n} + O(kn^{-2}) \quad (46)$$

Rögzített $|\mathcal{F}_k|$ estén $\text{ave}(c \cap \mathcal{F}_k)$ akkor minimális, ha a halmazok mérete a lehető legközelebb esik $n/2$ -höz. Ezért

$$|\mathcal{F}_k| \leq \Sigma(n, h - 1) + \binom{n}{\lfloor \frac{n+h}{2} \rfloor} \left(\frac{2(r + s - 2)}{n} + O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right) \right) \quad (47)$$

A kimaradó halmaz mérete ehhez képest elhanyagolható:

$$|\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_k| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \quad (48)$$

Ezért fennáll a bizonyítandó egyenlőtlenség.

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_k| + |\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_k| \leq \Sigma(n, t + 1) + \binom{n}{\lfloor \frac{n+t+2}{2} \rfloor} \left(\frac{2(r + s - 2)}{n} + O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right) \right) \quad (49)$$

□

Az 5.3. Tétel két tekintetben is megjavítja a következő tételt. Jobb felső korlátot kaptunk ugyanis, miközben csak egy bonyolultabb struktúrát zártunk ki.

5.6. Tétel. (Griggs-Lu) [8] Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ az $[n]$ halmaz részhalmazainak olyan rendszere, amiben nincs $r + t + s$ olyan részhalmaz, amire $A_1, A_2, \dots, A_r \subset B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_t \subset C_1, C_2, \dots, C_s$ teljesül. ($r, s, t \geq 1$) Ekkor

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, t + 1) + \binom{n}{\lfloor \frac{n+t+2}{2} \rfloor} \left(\frac{2(t+2)(r + s - 2)}{n} + O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right) \right) \quad (50)$$

Megjegyzés Van olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszer, ami mentes a fent kizárt struktúrától és az elemszáma

$$|\mathcal{F}| \geq \Sigma(n, t + 1) + \binom{n}{\lfloor \frac{n+t+2}{2} \rfloor} \left(\frac{(r + s - 2)}{n} - O(n^{-2}) \right) \quad (51)$$

Válasszuk ki ugyanis a középső $t+1$ szintről az összes részhalmazt. Az alulról következő szinten minden részhalmazhoz rendeljük hozzá az elemei indexének összegének $\left\lceil \frac{n}{r-1} \right\rceil$ -es maradékát, majd válasszuk ki a legnagyobb osztálynak megfelelő részhalmazokat. Könnyen látható, hogy ezek közül semelyik r -nek sem lesz közös egyelemű bővítése. Hasonlóan járhatunk el a felülről következő szinten az $\left\lceil \frac{n}{s-1} \right\rceil$ -es maradékokat tekintve. (Ez Tran konstrukciójának egy változata. Lásd [12])

Hivatkozások

- [1] B. Bukh, *Set families with a forbidden subposet*, Electronic J. of Combinatorics **16** (2009), R 142.
- [2] P. Burcsi and D. T. Nagy, *The method of double chains for largest families with excluded subposets*, arXiv:1204.5355.
- [3] A. De Bonis, G. O. H. Katona, and K. J. Swanepoel, *Largest family without $A \cup B \subseteq C \cap D$* , J. Combin. Theory. Ser. A. **111** (2005), 331–336.
- [4] P. Erdős, *On a lemma of Littlewood and Offord*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 898–902.
- [5] J. R. Griggs and W.-T. Li, *The partition method for poset-free families*, in press, J. Combinatorial Optimization.
- [6] J. R. Griggs and W.-T. Li, *Poset-free families and Lubell-boundedness*, arXiv:1208.4241.
- [7] J. R. Griggs, W.-T. Li, and L. Lu, *Diamond-free families*, J. Combinatorial Theory **119** (2012), 310–322.
- [8] J. R. Griggs and L. Lu, *On families of subsets with a forbidden subposet*, Combinatorics, Probability, and Computing **18** (2009), 731–748.
- [9] G. O. H. Katona, *Forbidden inclusion patterns in the families of subsets (introducing a method)*, Horizons of Combinatorics, Bolyai Society Mathematical Studies, vol. 17, Bolyai János Mathematical Society, Budapest and Springer-Verlag, 2008, pp. 119–140.
- [10] D. Lubell, *A short proof of Sperner’s lemma*, Journal of Combinatorial Theory **1** (1966), 299.
- [11] E. Sperner, *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge*, Math. Z. **27** (1928), 544–548.
- [12] H. T. Tran, *An extremal problem with excluded subposets in the Boolean lattice*, Order **15** (1998), 347–357.