

Becslések halmazrendszerek mélyárnyékának a méretére

Grósz Dániel

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematika BSc

Témavezető: Katona O. H. Gyula egyetemi tanár

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

2013. január 9.

Kivonat

Az árnyéktétel (Kruskal-Katona-tétel) arra ad választ, hogy ha adott k elemű halmazoknak egy rendszere, akkor legalább hány $k - 1$ elemű halmaz van, amely részhalmaza valamelyik k elemű halmaznak (ezek alkotják a halmazrendszer árnyékát). Nevezzük egy halmazrendszer mélyárnyékának az árnyékban szereplő halmazok közül azokat, amelyeket egynél több k elemű halmaz is tartalmaz részhalmazként. Ebben a dolgozatban alsó és felső becsléseket adunk a halmazrendszer maximális méretére a mélyárnyéka méretének a függvényében, ha a k elemű halmazok egy adott n elemszámú halmaz elemeiből állnak.

1. Az árnyéktétel

Legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer, ami pozitív egészek k elemű halmazaiból áll. Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer *árnyékának* nevezzük, és $\Delta\mathcal{A}$ -val jelöljük azon $k - 1$ elemű halmazok összességét, amelyeket megkaphatunk $\mathcal{A}$ valamely halmazából egy szám elhagyásával, azaz a következő halmazt:

$$\{B : |B| = k - 1 \text{ és } \exists A \in \mathcal{A} : B \subset A\}.$$

Az árnyéktétel a következő kérdésre ad választ: ha adott $|\mathcal{A}| = m$, legalább hány halmazból áll $\Delta\mathcal{A}$?

Először bevezetünk néhány fogalmat. Ha k egy pozitív egész szám, akkor a pozitív egészek k elemből álló halmazain a következőképpen definiáljuk a kolexikografikus rendezést: ha A és B két k elemű halmaz, legyen $A < B$, ha $\max(A \triangle B) \in B$.

Jelöljük $\mathcal{S}_k(m)$ -mel az első m darab k elemű halmaz által alkotott halmazt ezen rendezés szerint. Az m -edik halmazt felírhatjuk ilyen alakban:

$$\{a_t - (t - 1), a_t - (t - 2), \dots, a_t, a_{t+1} + 1, a_{t+2} + 1, \dots, a_k + 1\}.$$

Ekkor $\mathcal{S}_k(m)$ -et a következő alakban írhatjuk:

$$\bigcup_{i=t}^k \left\{ A \cup \{a_{i+1} + 1, \dots, a_k + 1\} \mid A \in \binom{[a_i]}{i} \right\}.$$

Ebből következik a következő ismert lemma: Minden m és k pozitív egész számra m felírható k -binomiális alakban, azaz $m = \binom{a_k}{k} + \dots + \binom{a_t}{t}$ alakban, ahol $a_k > \dots >$

$a_t \geq t \geq 1$, és a felírás egyértelmű.

Könnyen látható, hogy ekkor

$$\Delta\mathcal{S}_k(m) = \bigcup_{i=t}^k \left\{ A \cup \{a_{i+1} + 1, \dots, a_k + 1\} \mid A \in \binom{[a_i]}{i-1} \right\},$$

és $|\Delta\mathcal{S}_k(m)| = \binom{a_k}{k-1} + \dots + \binom{a_t}{t-1}$.

1. tétel (Árnyéktétel, Kruskal-Katona-tétel, [1, 2]). *Ha $m \geq 1$, $k \geq 1$ és $\mathcal{A}$ egy m különböző k elemű halmazból álló rendszer, akkor $|\Delta\mathcal{A}| \geq |\Delta\mathcal{S}_k(m)|$. Máshogy fogalmazva, ha $m = \binom{a_k}{k} + \dots + \binom{a_t}{t}$ k -binomiális alakban, akkor $|\Delta\mathcal{A}| \geq \binom{a_k}{k-1} + \dots + \binom{a_t}{t-1}$.*

Ennek a tételnek egy egyszerűbben megfogalmazható, kicsit gyengébb változata a következő:

2. tétel (Az árnyéktétel Lovász-féle változata, [8]). *Írjuk fel $|\mathcal{A}| = m$ -et $\binom{x}{k}$ alakban, ahol x pozitív valós szám. Ekkor $|\Delta\mathcal{A}| \geq \binom{x}{k-1}$.*

3. észrevétel. Az árnyéktétel kérdésfelvetésével természetesen ekvivalens, és esetenként célszerű azt vizsgálni, hogy adott egy halmazrendszer árnyékának a mérete, akkor legfeljebb hány halmazból állhat az eredeti rendszer. Az árnyéktétellel ekvivalens, hogy ha $|\Delta\mathcal{A}| = \binom{a_k}{k-1} + \dots + \binom{a_{t+1}}{t}$ $(k-1)$ -binomiális alakban, akkor $|\mathcal{A}| \leq \binom{a_k}{k} + \dots + \binom{a_{t+1}}{t+1}$. Ugyanis különböző m -ekre $|\Delta\mathcal{S}_k(m)|$ csak egy módon lehet egyenlő: ha $m = \binom{a_k}{k} + \dots + \binom{a_2}{2} + \binom{a_1}{1}$, akkor $|\Delta\mathcal{S}_k(m)| = |\Delta\mathcal{S}_k(\tilde{m})|$, ahol $\tilde{m} = \binom{a_k}{k} + \dots + \binom{a_2}{2} + \binom{a_2-1}{1} + 1 > m$.

2. Mélyárnyékok

Legyenek $k \leq n$ pozitív egészek, $X = \{1, 2, \dots, n\}$, és legyen $\mathcal{A} \subseteq \binom{X}{k}$. Katona Gyula a következő kérdést vetette fel: Nevezzük az $\mathcal{A}$ halmazrendszer *mélyárnyékának*, és jelöljük $\Upsilon\mathcal{A}$ -val $\Delta\mathcal{A}$ azon elemeit, amelyek legalább két $\mathcal{A}$ -beli halmazból megkaphatók egy szám elhagyásával, azaz a következő halmazt:

$$\{B : |B| = k-1 \text{ és } \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \neq A_2, \text{ és } B \subset A_1, B \subset A_2\}.$$

Ha adott $|\mathcal{A}| = m$, legalább hány halmazból áll $\Upsilon\mathcal{A}$? A továbbiakban erre adunk néhány becslést.

Észrevétel. Itt már számít az X alaphalmaz mérete: elég nagy n mellett (pl. diszjunkt halmazokból álló halmazrendszerrel) a válasz mindig 0.

Az előző kérdés helyett általában azt érdemes vizsgálni, hogy ha tudjuk, hogy $|\Upsilon\mathcal{A}| \leq \mu$, akkor legfeljebb hány halmazból állhat $\mathcal{A}$; jelöljük ezt $m_{n,k}(\mu)$ -vel (ha $\mu \leq \binom{n}{k-1}$).

4. Állítás. Tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és $\mu \geq \binom{n-1}{k-2}$. Legyen $\mu - \binom{n-1}{k-2} = \binom{b_k}{k-1} + \dots + \binom{b_{t+1}}{t}$ ($k-1$)-binomiális alakban. Ekkor $m_{n,k}(\mu) \geq \binom{n-1}{k-1} + \binom{b_k}{k} + \dots + \binom{b_{t+1}}{t+1}$.

Konstrukció. Olyan $\mathcal{A}$ és $\Upsilon\mathcal{A} = \mathcal{C}$ halmazrendszereket adunk meg, amelyekben benne van az összes olyan k , ill. $k-1$ elemű halmaz, amely tartalmazza az 1-et, és az ilyen tulajdonságú halmazrendszerek között a koleszikografikus rendezés szerint a legkisebbek. Az $\mathcal{S}_{k-1}(\mu - \binom{n-1}{k-2})$ -beli halmazok minden eleméhez adjunk hozzá 1-et, és legyen a kapott halmazrendszer $\mathcal{D}$. Legyen $\mathcal{C} = \left\{ \{1\} \cup C : C \in \binom{X \setminus \{1\}}{k-2} \right\} \cup \mathcal{D}$. Hasonlóan $\mathcal{S}_k(\binom{b_k}{k-1} + \dots + \binom{b_{t+1}}{t})$ -ban a halmazok minden eleméhez adjunk hozzá 1-et, és legyen a kapott halmazrendszer $\mathcal{B}$. Legyen $\mathcal{A} = \left\{ \{1\} \cup A : A \in \binom{X \setminus \{1\}}{k-1} \right\} \cup \mathcal{B}$. Ekkor $\Upsilon\mathcal{A} = \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| = \mu$, és $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1} + \binom{b_k}{k} + \dots + \binom{b_{t+1}}{t+1}$. $\square$

Ebben a konstrukcióban minden $C \in \binom{X}{k-1} \setminus \Upsilon\mathcal{A}$ halmaz részhalmaza egy olyan $\mathcal{A}$ -beli halmaznak ($\{1\} \cup C$ -nek), amelynek minden más $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\Upsilon\mathcal{A}$ -ban. Ennek az elvnek az alapján egy olyan felső becslést kapunk, ami legtöbbször nem éles, viszont hasonlóan mozog az előbbi alsó becsléshez.

5. Állítás. Legyen $\mu = \binom{a_k}{k-1} + \dots + \binom{a_{t+1}}{t}$ ($k-1$)-binomiális alakban. Ekkor $m_{n,k}(\mu) \leq \binom{n}{k-1} - \mu + \binom{a_k}{k} + \dots + \binom{a_{t+1}}{t+1}$.

Bizonyítás. $\mathcal{A}$ azon halmazai, amelyeknek minden $k-1$ elemű részhalmaza benne van a mélyárnyékban, egy olyan rendszert alkotnak, amelynek az árnyéka legfeljebb μ elemű, tehát az árnyéktétel és a 3. észrevétel alapján legfeljebb $\binom{a_k}{k} + \dots + \binom{a_{t+1}}{t+1}$ halmazból áll. Másrészt azon $\binom{X}{k-1}$ -beli halmazok száma, amelyek nincsenek benne $\Upsilon\mathcal{A}$ -ban, pontosan $\binom{n}{k-1} - \mu$, és ezek mindegyike legfeljebb egy $\mathcal{A}$ -beli halmaznak része. $\square$

Mint láttuk, $\mathcal{A}$ szétválasztható két részre, ahol az egyik résznek az árnyéka részhalmaza $\Upsilon\mathcal{A}$ -nak. Így nem meglepő, hogy a mélyárnyék vizsgálatánál fel lehet használni olyan eszközöket, amik az árnyéktétel bizonyításához is használhatók. Vezessük be a $\tilde{\mathcal{A}} = \{A \in \mathcal{A} : \Delta\{A\} \subseteq \Upsilon\mathcal{A}\}$ jelölést.

A felső becslés és a konstrukció közötti különbség abból adódik, hogy a konstrukcióban míg az 1-et nem tartalmazó halmazok közül a kolezikografikus rendezés szerinti néhány legkisebbet választottuk ki, az 1-et tartalmazó halmazokkal együtt ez már nem teljesül, így $|\tilde{\mathcal{A}}|$ kisebb, mint az árnyéktétel által adott felső becslés. Ha $|\mathcal{A}|$ -t tekintjük adotttnak, akkor a 4. állítás konstrukciójában tehát a mélyárnyék legfeljebb annyival nagyobb az 5. állítás megfordítása által adott alsó becslésnél, ahány $\binom{X}{k-1}$ -beli halmazban szerepel az 1-es, tehát $\binom{n-1}{k-2}$ -vel.

6. *észrevétel.* Ha $\Upsilon\mathcal{A}$ -ban benne van az összes $k-1$ elemű halmaz, ami tartalmazza az 1-et, akkor ha a $\binom{X}{k-1} \setminus \Upsilon\mathcal{A}$ -beli halmazokhoz hozzávesszük az 1-et, különböző halmazokat kapunk, amelyeknek a többi $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\Upsilon\mathcal{A}$ -ban. Tehát $\mathcal{A}$ akkor a legnagyobb, amikor $\tilde{\mathcal{A}}$ a legnagyobb, azaz az árnyéktételből következik, hogy a 4. állítás konstrukciója maximális méretű az ilyen tulajdonságú halmazrendszerek között adott μ mellett.

3. Pontos eredmények speciális halmazrendszerekre

7. *észrevétel.* Tegyük fel, hogy – ellentétben a 4. állítás konstrukciójával – bizonyos, az $\Upsilon\mathcal{A}$ -n kívüli $k-1$ elemű halmazokról tudjuk, hogy nem tartalmazza őket olyan $\mathcal{A}$ -beli k elemű halmaz, amelynek az összes többi $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\Upsilon\mathcal{A}$ -ban. Tegyük fel, hogy $\binom{X}{k-1} \setminus \Upsilon\mathcal{A}$ felosztható olyan diszjunkt $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_k$ méretű, diszjunkt halmazrendszerekre, amelyekre minden $\mathcal{X}_i$ -beli halmaz csak olyan $\mathcal{A}$ -beli halmazoknak részhalmaza, amelyeknek legalább i darab $k-1$ elemű részhalmaza van $\Upsilon\mathcal{A}$ -n kívül. Ekkor

$$\begin{aligned} |\mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}}| &\leq \sum_{i=1}^k \left| \left\{ A \in \mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}} : |\Delta\{A\} \setminus \Upsilon\mathcal{A}| = i \right\} \right| = \\ &= \sum_{\substack{C \in \Delta\{A\} \setminus \Upsilon\mathcal{A} \\ A \in \mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}}}} \frac{1}{|\Delta\{A\} \setminus \Upsilon\mathcal{A}|} \leq \sum_{\substack{C \in \mathcal{X}_i \\ 1 \leq i \leq k}} \frac{1}{i} = |\mathcal{X}_1| + \frac{|\mathcal{X}_2|}{2} + \dots + \frac{|\mathcal{X}_k|}{k}. \end{aligned}$$

A balra tolás műveletet Erdős, Ko és Rado vezette be [3]-ban.

Definíció. Legyen $\mathcal{A} \in \binom{\mathbb{N}}{k}$ tetszőleges halmazrendszer, és legyen $i, j \in \mathbb{N}$, $i > j$. Az S_{ij} balra tolás művelet minden $\mathcal{A}$ -beli halmazban kicseréli i -t j -vel, ha ez nem

csökkenti a halmaz méretét, és nem eredményez szintén $\mathcal{A}$ -ban lévő halmazt:

$$S_{ij}(A) := \begin{cases} A \setminus \{i\} \cup \{j\} & , \text{ ha } i \in A \text{ és } j \notin A \\ A & \text{ különben} \end{cases},$$

$$S_{ij}(\mathcal{A}) := \left\{ \begin{cases} S_{ij}(A) & , \text{ ha } S_{ij}(A) \notin \mathcal{A} \\ A & , \text{ ha } S_{ij}(A) \in \mathcal{A} \end{cases} : A \in \mathcal{A} \right\}.$$

8. lemma (Katona [4]). *Ha S_{ij} egy balra tolás, akkor $\Delta S_{ij}(\mathcal{A}) \subseteq S_{ij}(\Delta\mathcal{A})$. Ebből közvetlenül következik, hogy $|\Delta S_{ij}(\mathcal{A})| \leq |\Delta\mathcal{A}|$.*

Bizonyítás. Legyen $|C| = k - 1$ és $C \in \Delta S_{ij}(\mathcal{A})$. Ekkor valamely $B \in S_{ij}(\mathcal{A})$ -ra $C \subset B$.

- Ha $B \in \mathcal{A}$, akkor két eset lehetséges:
 - Ha $i \in C \subset B$, akkor $B \in \mathcal{A}$ és $S_{ij}(C) \subset S_{ij}(B) \in \mathcal{A}$. Azaz $S_{ij}(C) \in \Delta\mathcal{A}$, tehát $C \in S_{ij}(\Delta\mathcal{A})$.
 - Ha $B \in \mathcal{A}$, de $i \notin C$, akkor $C \in \Delta\mathcal{A}$, és $C = S_{ij}(C)$ miatt $C \in S_{ij}(\Delta\mathcal{A})$.
- Ha $B \notin \mathcal{A}$, akkor valamely $A \in \mathcal{A}$ -ra $B = S_{ij}(A)$. Ekkor $i \in A$, $j \notin A$, és $j \in B$, $i \notin B$.
 - Ha $j \in C$, akkor $C \setminus \{j\} \cup \{i\} \subset A$. Azaz $C = S_{ij}(C \setminus \{j\} \cup \{i\}) \in S_{ij}(\Delta\mathcal{A})$.
 - Ha $j \notin C$, akkor $C = A \setminus \{i\} = S_{ij}(A \setminus \{i\}) \in S_{ij}(\Delta\mathcal{A})$. □

Az árnyéktételnek több bizonyítása ismert balra tolások és változataik segítségével (Frankl [5], Daykin [6], Ahlswede et al. [7]).

9. tétel. *Ha $k = 3$, akkor azon $\mathcal{A}$ halmazrendszerek közül, amelyekre $\bigcup \Upsilon\mathcal{A} = X$ teljesül, adott $\mu \geq n - 1$ mellett $|\mathcal{A}|$ a 4. állítás konstrukciója esetén maximális.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az $\Upsilon\mathcal{A}$ halmaz, mint élek által alkotott gráf összefüggő.

Legyen kezdetben $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{A}}$, és $\mathcal{C} = \Upsilon\mathcal{A}$. Ekkor $\Delta\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Ha $\mathcal{B}$ -re balra tolás műveleteket alkalmazunk, az árnyéka nem nő. Úgy módosítjuk több lépésben $\mathcal{B}$ -t és $\mathcal{C}$ -t, hogy a $\Delta\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ mellett az $\bigcup \mathcal{C} = X$ feltétel is minden lépés után teljesüljön; $|\mathcal{C}|$ nem nő, és $|\mathcal{B}|$ nem változik. Azt fogjuk elérni, hogy $\mathcal{C}$ -ben minden $\{1, i\}$ pár benne legyen (ahol $i \in X \setminus \{1\}$). Ekkor a 6. észrevételhez hasonlóan érvelve azt kapjuk,

hogy ha a kapott $\mathcal{B}$ -hez hozzávesszük az 1-et tartalmazó háromelemű halmazokat, akkor az így keletkező $\mathcal{A}'$ halmazrendszer mélyárnyéka a kapott $\mathcal{C}$ vagy annak egy részhalmaza; $|\mathcal{A}' \setminus \mathcal{B}| \geq |(\binom{X}{k-1} \setminus \mathcal{C})| \geq |(\binom{X}{k-1} \setminus \Upsilon \mathcal{A})| \geq |\mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}}|$, tehát $|\mathcal{A}'| \geq |\mathcal{A}|$. Azok közül a halmazrendszerek közül pedig, amelyeknek a mélyárnyéka az összes $\{1, i\}$ párt tartalmazza, a 6. észrevétel szerint a 4. állítás konstrukciója maximális.

A $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{A}}$, és $\mathcal{C} = \Upsilon \mathcal{A}$ állapotból indulva S_{i1} balra tolásokat ($i \in X \setminus \{1\}$) szeretnénk alkalmazni $\mathcal{B}$ -re; párhuzamosan $\mathcal{C}$ -t $\mathcal{C}' := \mathcal{C} \setminus \Delta \mathcal{B} \cup \Delta(S_{i1}(\mathcal{B}))$ -vel helyettesítjük. Ez a művelet $|\mathcal{B}|$ -t nem változtatja, $|\mathcal{C}|$ -t nem növeli, és a $\Delta \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$ tartalmazást megtartja. Ha $\{1, i\} \in \mathcal{C}$, akkor $\mathcal{C}$ összefüggősége is megmarad, hiszen ez az él a balra tolás után is megmarad, és ha egy pont $\mathcal{C}$ -ben össze van kötve i -vel, akkor $\mathcal{C}'$ -ben is egy komponensben van vele.

Ha kezdetben a $\Delta \mathcal{B}$, mint élhalmaz által alkotott gráf nem összefüggő, akkor a komponensei között $\mathcal{C} \setminus \Delta \mathcal{B}$ -beli élek haladnak (mivel feltettük, hogy kezdetben $\mathcal{C} = \Upsilon \mathcal{A}$ összefüggő); legfeljebb 1-gyel kevesebb, mint $\Delta \mathcal{B}$ komponenseinek a száma. Ezeket helyettesítjük az 1-et nem tartalmazó komponensek egy-egy pontját az 1-gyel összekötő élekkel, a $\mathcal{B}$ -re és $\mathcal{C}$ -re előírt tulajdonságokat megtartva.

Mindaddig, amíg nem minden $\{1, i\} \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ összefüggősége miatt létezik olyan $i \in X \setminus \{1\}$, amelyre $\{1, i\} \in \mathcal{C}$, de a $\mathcal{C}$ gráfban van olyan j szomszédja, ami 2 távolságra van az 1-től. Ha egy ilyen i -re az S_{i1} balra tolást alkalmazzuk $\mathcal{B}$ -re, és ennek megfelelően módosítjuk $\mathcal{C}$ -t, akkor az 1 fokszámát növeljük. Ugyanis (a $\mathcal{C} \setminus \Delta \mathcal{B}$ -beli élek előbbi helyettesítése után) $\{1, j\} \notin \mathcal{C}$ csak úgy lehetséges, hogy $\exists 1 \notin B \in \mathcal{B}$, amelyre $\{i, j\} \subset B$; ekkor $B \setminus \{i\} \cup \{1\} \in S_{i1}(\mathcal{B})$, tehát $\{1, j\} \in \mathcal{C}'$. Ezt a lépést ismételve olyan $\mathcal{B}$ -t és $\mathcal{C}$ -t kapunk, hogy $\forall i \in X \setminus \{1\} : \{1, i\} \in \mathcal{C}$.

Tegyük fel most, hogy a $\Upsilon \mathcal{A}$ gráf nem összefüggő, és a komponenseinek csúcs-halmazai $X_1, \dots, X_l$ (ahol $\bigcup_{j=1}^l X_j = X$ és $|X_1|, \dots, |X_l| \geq 2$). Legyen $\mathcal{A}|_{X_j} = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq X_j\}$. Az $\Upsilon \mathcal{A}$ különböző komponensei közötti élek csak olyan $\mathcal{A}$ -beli hármasban lehetnek benne, amelyben legalább két ilyen él benne van, tehát a 7. észrevétel szerint

$$|\mathcal{A}| \leq \sum_{j=1}^l |\mathcal{A}|_{X_j}| + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq l} |X_{j_1}| \cdot |X_{j_2}|. \quad (1)$$

Feltehető, hogy X_2 olyan, hogy $|\Upsilon(\mathcal{A}|_{X_2})| = |\{C \in \Upsilon \mathcal{A} : C \subseteq X_2\}| \geq |X_2|$. (Ilyen X_j van, mert $\Upsilon \mathcal{A}$ nem összefüggő, és legalább $n - 1$ éle van.) Legyen $\{x, y\} \in \Upsilon(\mathcal{A}|_{X_2})$ olyan él, amelyet elhagyva $\Upsilon(\mathcal{A}|_{X_2})$ összefüggő marad. Ha $\mathcal{A}$ -ból elhagyjuk az $\{x, y\}$ -t tartalmazó hármasokat, akkor az (1) becslés értéke az

$\mathcal{A}|_{X_2}$ -beli, $\{x, y\}$ -t tartalmazó hármasok számával, azaz legfeljebb $|X_2| - 2$ -vel csökken, $|\Upsilon\mathcal{A}|$ pedig legalább 1-gyel csökken.

Legyen $z \in X_1$ és $\dot{\mathcal{A}} = \mathcal{A}|_{X_1} \cup \mathcal{A}|_{X_2}$. Ezután a bizonyítás első részében leírt lépéseket alkalmazzuk az $X_1 \cup X_2$ halmazon (z -t az 1-gyel azonosítva) $\mathcal{B} = \tilde{\dot{\mathcal{A}}}$ -ra és $\mathcal{C} = \Upsilon\dot{\mathcal{A}} \cup \{\{x, z\}\}$ -re. Az így kapott $|\mathcal{C}|$ csak eggyel nagyobb, mint $|\Upsilon\dot{\mathcal{A}}|$, $|\mathcal{B}|$ -t nem változtattuk, viszont elértük, hogy z a $\mathcal{C}$ -ben össze legyen kötve $X_1 \cup X_2$ összes többi pontjával. Tehát ha $\mathcal{B}$ -hez hozzávesszük az összes $X_1 \cup X_2$ -beli, z -t tartalmazó hármas, a kapott halmaz mélyárnyéka része $\mathcal{C}$ -nek. Azaz az (1) becslés értékét $\frac{1}{2}|X_1| \cdot |X_2|$ -vel növeltük. $|X_1| \geq 2$ miatt ez biztosan nagyobb, mint $|X_2| - 2$, és az X_1 és X_2 komponenseket egyesítettük. Ezt ismételve $\Upsilon\mathcal{A}$ -t nem növelve elérhetjük, hogy $\Upsilon\mathcal{A}$ összefüggő legyen; az (1) becslésben ekkor egyenlőség áll fenn, tehát $|\mathcal{A}|$ nem csökkent. $\square$

Észrevétel. A tétel nem feltétlenül igaz az $\bigcup \Upsilon\mathcal{A} = X$ feltétel nélkül. Legyen pl. $\mu = \binom{n-1}{2}$. Ekkor ha a mélyárnyéknak az első $n-1$ pozitív egészből alkotható párokat választjuk, akkor a legnagyobb $\mathcal{A}$ tartalmazza az első $n-1$ számból alkotható összes hármas, és $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ db hármas, ami tartalmazza az n számot. Ha a mélyárnyékból kivesszük az $\{n-2, n-1\}$ élt, és helyette az $\{1, n\}$ -t vesszük be, akkor $\mathcal{A}$ -ban az $\{n-2, n-1\}$ élt eddig tartalmazó legalább $n-3$ db hármasból csak egy maradhat, az n pedig $n-2$ db hármasban szerepelhet, tehát általában csökken a hármasok száma.

Észrevétel. A tétel nem általánosítható könnyen $k \geq 4$ -re. A feltétel kézenfekvő általánosítása lenne, hogy $\Delta\Upsilon\mathcal{A} = \binom{X}{k-2}$. Ennél egy erősebb feltétel az, hogy a 4. állítás konstrukciójához hasonlóan minden $\binom{X}{k-1} \setminus \Upsilon\mathcal{A}$ -beli halmaz kiegészíthető egy olyan k elemű halmazzá, amelynek minden más $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\Upsilon\mathcal{A}$ -ban – azaz (miután szükség esetén hozzávesszünk néhány k elemű halmazt úgy, hogy $\Upsilon\mathcal{A}$ -t nem növeljük) $|\mathcal{A}| = |\tilde{\mathcal{A}}| + \binom{n}{k-1} - |\Upsilon\mathcal{A}|$. (A $k=3$ esetben: az $\Upsilon\mathcal{A}$ gráfban bármely két pont távolsága legfeljebb 2.) Az e feltételt teljesítő halmazrendszerek között már igaz, hogy a 4. állítás konstrukciója maximális méretű. Sőt, az előbbi feltételt elég az 1-et tartalmazó $\binom{X}{k-1} \setminus \Upsilon\mathcal{A}$ -beli halmazokra feltenni. (A $k=3$ esetben: az $\Upsilon\mathcal{A}$ gráfban minden pont legfeljebb 2 távolságra van az 1-től.)

Bizonyítás. Legyen kezdetben ismét $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{A}}$, és $\mathcal{C} = \Upsilon\mathcal{A}$. Legyen $\mathcal{B}' = S_{i1}(\mathcal{B})$ (ahol $i \in X \setminus \{1\}$); legyen $\mathcal{C}' := \mathcal{C} \setminus \Delta\mathcal{B} \cup \Delta\mathcal{B}'$. Láttuk, hogy ha $i \in X \setminus \{1\}$, akkor $\Delta S_{i1}(\mathcal{B}) \subseteq S_{i1}(\Delta\mathcal{B})$. Legyen $1 \in D \in \binom{X}{k-1} \setminus \mathcal{C}$, és tegyük fel, hogy $x \in X \setminus D$ -re $D \cup \{x\}$ -nek az összes D -től különböző $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\mathcal{C}$ -ben. Tegyük fel, hogy $D \in \binom{X}{k-1} \setminus \mathcal{C}'$, de $D \cup \{x\}$ -nek valamelyik D -től különböző $k-1$

elemű részhalmaza ($\mathcal{C}$ -től eltérően) $\mathcal{C}'$ -ben már nincs benne. Ez csak a $D \setminus \{1\} \cup \{x\}$ lehet. (Nevezzük az ilyen D halmazokat „problémásnak”).

Ekkor van olyan $B \in \mathcal{B}$, amelyre $D \setminus \{1\} \cup \{x\} \subset B$. Tehát $D \setminus \{1\} \cup \{x\} \in \Delta\mathcal{B}$. Másrészt tudjuk, hogy $D \setminus \{i\} \cup \{x\} \in \mathcal{C}$.

- Ha $D \setminus \{i\} \cup \{x\} \in \Delta\mathcal{B}$: Ekkor $D \setminus \{1\} \cup \{x\} \in S_{i1}(\Delta\mathcal{B})$. Másrészt $D \setminus \{1\} \cup \{x\} \notin \Delta S_{i1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}'$. Tehát $|\Delta\mathcal{B}'| \leq |\Delta\mathcal{B}| - 1$, így $|\mathcal{C}'| \leq |\mathcal{C}| - 1$.
- Ha $D \setminus \{i\} \cup \{x\} \notin \Delta\mathcal{B}$: Ekkor $B \setminus \{i\} \cup \{1\} \in S_{i1}(\mathcal{B})$, tehát $D \setminus \{i\} \cup \{x\} \in \Delta S_{i1}(\mathcal{B})$. Emiatt, és mert $\mathcal{C}' \setminus \Delta\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{C} \setminus \Delta\mathcal{B}$, míg $|\Delta\mathcal{B}'| \leq |\Delta\mathcal{B}|$, $|\mathcal{C}' \setminus \Delta\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{C} \setminus \Delta\mathcal{B}| - 1$, azaz $|\mathcal{C}'| \leq |\mathcal{C}| - 1$.

Egy $D \setminus \{i\} \cup \{x\}$, ill. $D \setminus \{1\} \cup \{x\}$ halmazt nem kaphatunk meg egy másik „problémás” D_2 halmazból ilyen módon, hiszen $D \cup \{x\}$ -nek a többi $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\mathcal{C}$ -ben, azaz nem „problémás”. Tehát $|\mathcal{C}'|$ legalább a „problémás” halmazok számával kisebb, mint $|\mathcal{C}|$, így ha ezeket hozzávesszük $\mathcal{C}'$ -höz, akkor is legfeljebb akkora marad, mint $\mathcal{C}$. Helyettesítsük $\mathcal{B}$ -t $\mathcal{B}'$ -vel, és $\mathcal{C}$ -t az így kapott $\mathcal{C}'$ -vel. Ekkor $|\mathcal{B}|$ nem változik, $|\mathcal{C}|$ nem nő, a $\Delta\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ tartalmazás megmarad, és továbbra is fennáll, hogy $1 \in D \in \binom{X}{k-1} \setminus \mathcal{C}$ esetén valamely $x \in X \setminus D$ -re $D \cup \{x\}$ -nek az összes D -től különböző $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\mathcal{C}$ -ben. Ezt a lépést ismételve olyan $\mathcal{B}$ -t és $\mathcal{C}$ -t kapunk, hogy $\forall D \in \binom{X \setminus \{1\}}{k-2} : D \cup \{1\} \in \mathcal{C}$. Ebből a 6. észrevételhez hasonlóan megint következik az állítás. $\square$

4. A Johnson-bebecslés általánosítása mélyárnyékkal

Legyenek n, k pozitív egész számok, $k \leq n$. Egy n bitből álló (bináris) kódszó súlyának nevezzük a benne szereplő 1-es bitek számát. Egy n bites k konstans súlyú kód olyan kódszavaknak egy halmaza, amelyben az összes kódszó súlya k .

Két kódszó távolsága azoknak a pozícióknak a száma, amelyeken a két szóban különböző bit áll. $A(n, d, k)$ -val (ill. általában w súly mellett $A(n, d, w)$ -vel) jelöljük, hogy legfeljebb hány kódszóból állhat egy n bites, k súlyú kód, amelyben bármely két kódszó távolsága legalább d . Mivel két azonos súlyú kód távolsága páros, a kérdés $2 \mid d \geq 4$ -re érdekes. $A(n, d, k)$ -ra sok felső becslés és konstrukció ismert. Egy egyszerű, de (különösen a $k = 4$ esetben) jól használható felső becslés a Johnson-bebecslés.

10. tétel (Johnson-becslés konstans súlyú kódokra, Johnson [9]). Ha $2k < d$, akkor nyilvánvalóan $A(n, d, k) = 1$. Ha $2k \geq d$,

$$A(n, d, k) \leq \left\lfloor \frac{n}{k} \left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \left\lfloor \cdots \left\lfloor \frac{n-k + \lceil \frac{d}{2} \rceil}{\lceil \frac{d}{2} \rceil} \right\rfloor \cdots \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor.$$

Bizonyítás. k -ra vonatkozó teljes indukciót használunk, és minden i pozícióra megnézzük, hogy hány olyan kódszó lehet, amelyben az i . bit 1-es. Ha kihagyjuk az i . bitet azokból a kódszavakból, amelyekben ott 1-es áll, akkor $n-1$ bites, $k-1$ súlyú kódot kapunk, amelyben továbbra is bármely két kódszó távolsága legalább d . Tehát ezek száma az indukciós feltevés alapján legfeljebb

$$\left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \left\lfloor \cdots \left\lfloor \frac{n-k + \lceil \frac{d}{2} \rceil}{\lceil \frac{d}{2} \rceil} \right\rfloor \cdots \right\rfloor \right\rfloor,$$

ill. 1, ha $k \leq \lceil \frac{d}{2} \rceil$, azaz ha $2k < d+2$. Az eredeti kódban az n bit mindegyike legfeljebb ennyi kódszóban lehet 1-es, és minden kódszóban k darab 1-es van, ebből adódik az állítás. $\square$

Vegyünk észre, hogy $m_{n,k}(0) = A(n, 4, k)$. A $\mu > 0$ eseteket is vizsgálhatjuk a Johnson-becsléshez hasonlóan, és ilyen módon adunk egy felső becslést, ami kis μ -re jobb, mint az 5. állításban adott becslés.

Tetszőleges $\mathcal{H}$ halmazrendszerre vezessük be a következő jelölést:

$$\mathcal{H}^i := \{H \setminus \{i\} : i \in H \in \mathcal{H}\}.$$

Legyen az $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^n$ halmazok mélyárnyékának mérete rendre $\mu_1, \dots, \mu_n$. Minden $i \in X$ -re $\Upsilon \mathcal{A}^i = (\Upsilon \mathcal{A})^i$, úgyhogy

$$\mu_1 + \dots + \mu_n = (k-1)\mu. \quad (2)$$

Másrészt $\mathcal{A}^i$ egy $n-1$ méretű alaphalmazon értelmezett, $k-1$ méretű halmazokból álló halmazrendszer, tehát

$$|\mathcal{A}| = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n |\mathcal{A}^i| \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n m_{n-1, k-1}(\mu_i). \quad (3)$$

$m_{n,1}(0) = 1$, és $m_{n,1}(\mu) = n$, ha $\mu > 0$. A $k=2$ esetben, ha $\mu > 0$, $|\mathcal{A}|$ akkor maximális, ha $\mathcal{A}$ tartalmazza a mélyárnyékának az elemeiből alkotható összes párt,

valamint $X \setminus \Upsilon \mathcal{A}$ elemeihez egy-egy olyan párt, amelynek másik tagja a mélyárnyék-nak egy tetszőleges eleme. Ekkor $m_{n,2}(\mu) = \binom{\mu}{2} + n - \mu = \frac{\mu(\mu-3)}{2} + n$. Ha $\mu = 0$, $\mathcal{A}$ diszjunkt párokból áll, tehát $m_{n,2}(0) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

11. Állítás. Ha $k \geq 3$, akkor

$$m_{n,k}(\mu) \leq \frac{(n(n-1) \dots (n-k+4)) \cdot (\frac{1}{3}n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}{k(k-1) \cdot \dots \cdot 4} + \mu \frac{2}{k} \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \right).$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk a $k = 3$ esetet. Feltehetjük, hogy valamely l -re $\mu_1, \dots, \mu_l > 0$, és $\mu_{l+1} = \dots = \mu_n = 0$. Ekkor (3)-ból

$$\begin{aligned} 3|\mathcal{A}| &\leq \sum_{i=1}^l \left(\frac{\mu_i(\mu_i-3)}{2} + n \right) + (n-l) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \sum_{i=1}^l \left(\frac{\mu_i(\mu_i-3)}{2} + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right) + n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \\ &= \sum_{i=1}^l \left(\frac{\mu_i-3}{2} + \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{\mu_i} \right) \mu_i + n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

$\left(\frac{\mu_i-3}{2} + \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{\mu_i} \right)' = \frac{1}{2} - \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{\mu_i^2}$ -nek az $[1, n-1]$ intervallumban egyetlen nullhelye van, előtte a derivált negatív és utána pozitív, tehát a kifejezés maximuma 1-ben és $n-1$ -ben lehet. Ezek közül 1-ben a nagyobb: $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$, tehát (2)-ből

$$\begin{aligned} 3|\mathcal{A}| &\leq \sum_{i=1}^l \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \right) \mu_i + n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\mu \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \right), \text{ azaz} \\ m_{n,3}(\mu) &\leq \frac{1}{3}n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \mu \frac{2}{3} \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \right). \end{aligned}$$

Végül $k > 3$ esetén (3)-ból és (2)-ből indukcióval következik az állítás (annak köszönhetően, hogy a becslés elsőfokú, könnyen):

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \left(\frac{((n-1) \dots (n-k+4)) \cdot (\frac{1}{3}n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}{(k-1) \cdot \dots \cdot 4} + \mu_i \frac{2}{k-1} \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \right) \right) = \\ &= \frac{(n(n-1) \dots (n-k+4)) \cdot (\frac{1}{3}n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}{k(k-1) \cdot \dots \cdot 4} + \mu \frac{2}{k} \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \right). \quad \square \end{aligned}$$

Hivatkozások

- [1] Katona O. H. Gyula, A theorem of finite sets, Theory of Graphs. Proc. Colloq. Tihany, Akad. Kiadó (1966) 187–207.

- [2] J. B. Kruskal, The number of simplices in a complex, *Mathematical Optimization Techniques*, Univ. California Press (1963) 251–278.
- [3] P. Erdős, Chao Ko, R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math. Oxford* 12 (1961), 313–320.
- [4] Katona O. H. Gyula, Intersection theorems for systems of finite sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 15 (1964) 329–337.
- [5] P. Frankl, A new short proof for the Kruskal-Katona theorem, *Discrete Mathematics* 48 (1984) 327–329.
- [6] D. E. Daykin, A simple proof of the Kruskal-Katona theorem, *Journal of Combinatorial Theory (A)* 17 (1974) 252–253.
- [7] R. Ahlswede, H. Aydinian, L. H. Khachatrian, More about shifting techniques, *European Journal of Combinatorics* 24 (2003) 551–556.
- [8] Lovász László, *Kombinatorikai problémák és feladatok*, Budapest: Typotex 1999. 555–557.
- [9] S. M. Johnson, A new upper bound for error-correcting codes, *IRE Transactions on Information Theory* 1962. április, 203–207.