

A napciklus oszcillátor-modelljeinek szisztematikus vizsgálata

Készítette:

Nagy Melinda

csillagász MSc szakos hallgató

Témavezető:

Dr. Petrovay Kristóf

tanszékvezető egyetemi tanár

ELTE TTK Csillagászati Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Budapest

2013

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani Dr. Petrovay Kristófnak, amiért szívesen vállalta témavezetésem és munkámban segítségemre volt.

Budapest, 2013. január 3.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Elméleti áttekintés	2
2.1. A Nap rétegeinek rövid áttekintése	2
2.2. A napfoltok	3
2.2.1. A napfolt-relatívszám	3
2.3. A napciklus változásai és a Waldmeier-effektus	6
2.4. A napdinamó	8
2.5. Oszcillátorok	10
2.6. A Nap mint oszcillátor	13
2.6.1. A napciklus oszcillátor-modellje – Mininni és társai	13
2.6.2. A napciklus oszcillátor-modellje – Lopes és Passos	15
3. A Waldmeier-effektus jelentősége	17
4. A van der Pol-oszcillátor vizsgálata	21
4.1. A vizsgálat szempontjai	21
4.2. A perturbáció definiálása	22
4.3. Eredmények áttekintése	24
4.3.1. A perturbált paraméter μ	24
4.3.2. A perturbált paraméter ξ	24
4.3.3. μ és ξ paraméterek együttes perturbációja	28
5. A van der Pol–Duffing-oszcillátor vizsgálata	30
5.1. Az alkalmazott módszer	30
5.2. Eredmények áttekintése	31
5.2.1. Konstans Duffing-paraméter	31
5.2.2. Időben változó Duffing-paraméter	33
6. Összegzés	35
Hivatkozások	36

1. Bevezetés

A naptevékenység számszerű jellemzésére Wolf 1859-ben bevezette a napfolt-relatívszámot, és a megfigyelési adatokat alapul véve sikerült rekonstruálni a relatívszámokat egészen a XVII. század elejéig. Ábrázolva a napfoltszámokat a naptevékenység ciklikus viselkedése figyelhető meg, melynek tanulmányozása során Waldmeier 1935-ben felismerte a ciklusok felfutási ideje és amplitúdója közt fennálló inverz korrelációt. A felfutás meredekségének függvényében ábrázolva a ciklusok maximum értékeit még egyértelműbben észrevehető, hogy az erősebb ciklusoknak rövidebb a felfutási ideje (Cameron és Schüssler, 2008).

A napciklusokra Mininni és mtsai. (2000) van der Pol-oszcillátort, Lopes és Passos (2008) pedig van der Pol–Duffing-oszcillátort illesztettek, mint egyszerű modellt.

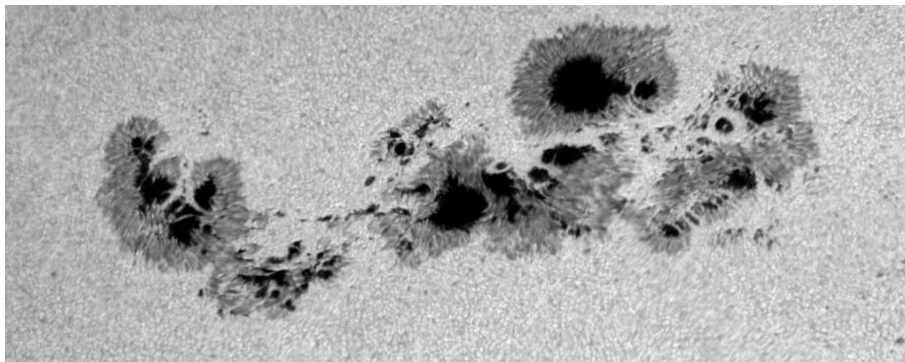
Munkám során azt vizsgáltam, hogy a van der Pol-oszcillátor egyes paramétereit külön-külön, illetve együtt, véletlenszerűen változtatva a kapott oszcillátor-modellek teljesítik-e a Waldmeier-effektust, valamint a napciklusok más megfigyelt jellemzőit. Emellett tanulmányoztam az egyidejűleg több paraméterében perturbált van der Pol–Duffing-oszcillátor viselkedését is az említett szempontok szerint.

Kutatásom célja megismerni, hogy a perturbációt jellemző, általam definiált időállandók és amplitúdók függvényében az oszcillátorok mely esetekben mutatják együttesen az elvárt jellemzőket. Ezáltal a napfoltciklus több tulajdonságával jól egyező, egyszerű modellhez juthatok. Emellett a modellben használt és a napdinamó együttműködési közötti kapcsolat segítségével a dinamó-paraméterek értékére a későbbiekben megismerés adhatók.

2. Elméleti áttekintés

2.1. A Nap rétegeinek rövid áttekintése

A Nap belseje négy tartományra osztható a bennük zajló folyamatok szerint. A Nap energiatermelése a *magban* zajlik, mely a sugár 25%-áig terjed. Itt történik az energiatermelés 99%-a fúziós reakció révén. Ennek során hidrogénatomok alakulnak héliummá, a tömegkülönbség pedig energia formájában szabadul fel. A keletkezett energia gamma- és röntgen-sugárzás útján a *radiatív zónán*, valamint konvektív energiateranszporttal a *konvektív zónán* át jut a felszínre.



1. ábra. A képen egy a Nap fotoszféráján megfigyelhető napfoltcsoport látható. Az egyes foltok közepén a sötét umbra, körülötte a penumbra látszik. A felvétel Kitt Peak-en készült a National Science Foundation McMath-Pierce teleszkópjával. (<http://www.noao.edu/outreach/press/pr01/mp.html> - letöltés: 2011. szeptember 8.)

A *fotoszférából* származik a Nap sugárzásának döntő hányada. Nagyon vékony réteg, néhány száz kilométer vastag. A réteg alá optikai eszközökkel nem láthatunk be az anyag opacitása miatt. A fotoszféra jelenségei közé tartoznak a **napfoltok**. A 6000K-es fotoszféra felett helyezkedik el a *kromoszféra*, mely sugárzásának legnagyobb részét a hidrogén Balmer-sorozatának H_{α} vonala adja. A réteg szintén jól megfigyelhető az ionizált kalcium (CaII) H- és K-vonalában. A 20000K hőmérsékletű kromoszféra, és az igen forró korona között egy vékony tartomány, az *átmeneti réteg* található. A *korona* már a szigorú értelemben vett naplégkör legkülső része, mely sokáig csak a napfogyatkozások során volt megfigyelhető, napjainkban azonban már vizsgálható a koronográf és az űreszközök segítségével.

A Nap légkörében a *napszél* egy kifelé tartó áramlás, ahol a részecskék hőmozgásának sebessége már meghaladja a szökési sebességet.

2.2. A napfoltok

A napfoltokról (1. ábra) már 2000 évvel ezelőtt is készültek feljegyzések, ám az első tudományos megfigyeléseket Galilei végezte az 1600-as években. Azt, hogy a napfoltokban erős mágneses tér található, George E. Hale mutatta ki 1908-ban.

A napfoltok közepe sötétebb, ezt *umbrának* nevezzük, a külső, világosabb rész a penumbra, mely sugárirányú szálakból áll. A mágneses tér az umbrában közel merőleges a felszínre, erőssége pedig meg tudja akadályozni a konvekciós mozgást. Ez a befagyás tételének következménye, miszerint az anyag nem metszheti a mágneses erővonalakat. A felszínre ezáltal kevesebb energia jut, így az umbrában 2000 fokkal alacsonyabb hőmérséklet észlelhető. Ezzel szemben a penumbrában a mágneses tér szétterül, és mivel a mágneses tér gyengébb, lehetnek konvekciós mozgások (Kálmán, 1999).

2.2.1. A napfolt-relatívszám

A napmegfigyeléseket alapul véve Wolf (1859) bevezette a *napfolt-relatívszámot*, hogy a naptevékenységet számszerűen jellemezni tudja. Habár nem fizikai mennyiség, máig ez a domináns paraméter a naptevékenység jellemzésében. Ennek oka, hogy a napfolt-relatívszámok alkotják a leghosszabb, egységes adatsort a napaktivitás változásának megfigyelésében, így ennek segítségével lehet hosszú időszakra vonatkozó vizsgálatokat végezni. A hagyományos definíció:

$$R_w = k(10g + f), \quad (1)$$

g - a foltcsoportok száma

f - a napkorongon megfigyelhető foltok száma

k - az észlelés körülményeitől függő korrekciós tényező (műszerparaméterek, megfigyelés helye, számlálási eljárás részletei).

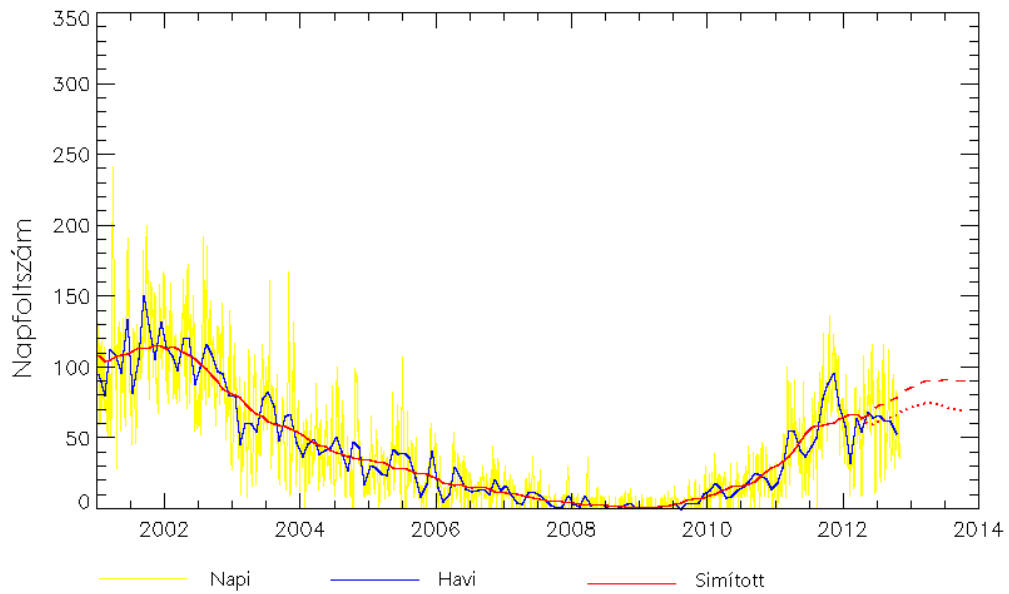
Wolf 1700-ig visszamenőleg feldolgozta a rendelkezésére álló napmegfigyelési adatokat, hogy rekonstruálhassa a naptevékenység menetét. Később J. Eddy az 1700 előtti napfoltmegfigyeléseket is összegyűjtötte, így egészen Galileiig, az 1610-es évekig sikerült is meghatározni a napfolt-relatívszámot.

Mivel R_w jelentős fluktuációkat mutat napi és havi időskálán (ld. 2. ábra), szokás éves átlagértéket megadni a hosszabb időskálájú változások vizsgálatára, ez a *simított havi átlag* (napfoltszám). Ezt 13 hónapra számolják a havi átlagos napfolt-számokból úgy, hogy az első és az utolsó hónapra vonatkozó értékeket 0.5 súllyal

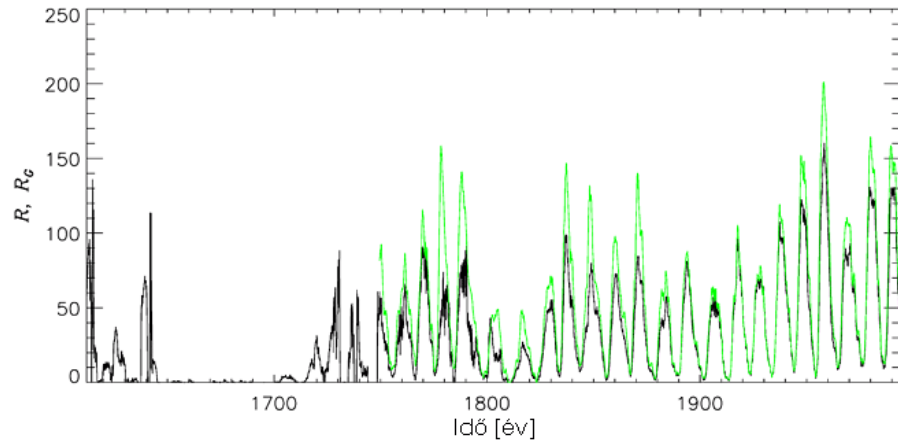
veszik figyelembe:

$$R = \frac{1}{24} \left(R_{m,-6} + 2 \sum_{i=-5}^{i=5} R_{m,i} + R_{m,6} \right), \quad (2)$$

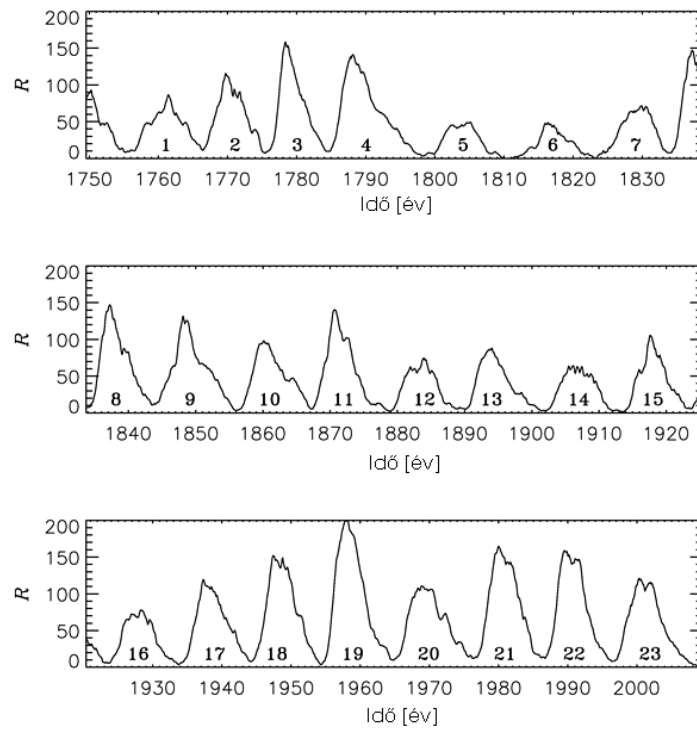
$R_{m,i}$ az aktuális hónaptól számított, i . naptári hónapra vonatkozó átlagos R_w érték (Petrovay, 2010).



2. ábra. Az ábra a napfoltzámadatokat mutatja a 23. napciklusból és a 24. elejéről. A sárga görbe a napi, a kék a havi átlagot, a piros pedig a simított havi átlagot jelzik – a pontozott és a szaggatott piros görbék két különböző eljárással készített előrejelzést mutatnak. A napfoltzám adatok legmegbízhatóbb forrása a *Solar Influences Data Analysis Center* (<http://sidc.oma.be/index.php> - letöltés: 2012. november 1.).



3. ábra. Az ábrán simított havi átlag, R – zöld görbe –, és a GSN (Group Sunspot Number), R_G változása látható – fekete görbe. (A GSN egy másik indikátora a naptevékenység változásainak, részletesen: Petrovay 2010, 1.2. fejezet)



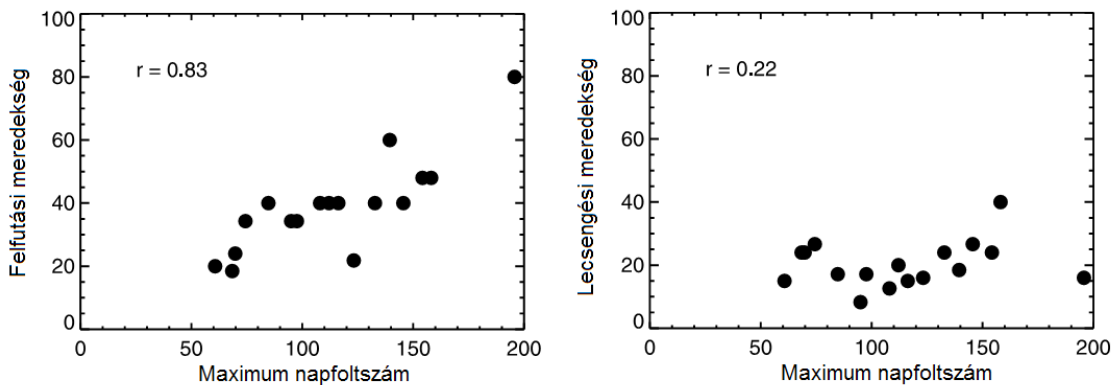
4. ábra. R , napfoltszámok változása az 1749-2009-ig terjedő időszakra a ciklusok szokásos számozásával (Petrovay, 2010).

2.3. A napciklus változásai és a Waldmeier-effektus

A 4. ábrán észrevehető, hogy a ciklusok hossza és amplitúdója igen szabálytalan. A minimumtól minimumig eltelt idő átlagosan 11.02 ± 1.2 év, a napfoltszám értékek maximuma 113 ± 40 lehet. A ciklusok felfutási ideje rövidebb (3-4 év) a lecsengési időszaknál (7-8 év), az aszimmetria mértéke korrelál a ciklus amplitúdójával.

Ezt az összefüggést először Waldmeier (1935) fogalmazta meg, miszerint a felfutási idő inverz korrelációt mutat az adott ciklusban megfigyelhető maximális napfoltszám értékével – a lecsengés időtartamára ez nem érvényes. Az, hogy az erősebb ciklusok esetében gyorsabb a felfutás még látványosabban mutatkozik, ha a meredekséget ábrázoljuk a maximális napfoltszám függvényében – 5. ábra, (Cameron és Schüssler, 2008). A korreláció a felfutási meredekség és a maximum napfoltszám között közel lineáris, $r \sim 0.85$ korrelációs együtthatóval. Fontos továbbá, hogy a Waldmeier-szabály a felfutási időt figyelembe véve csak a napfoltszámok esetén jelentkezik. A felfutási meredekséggel az effektus azonban más naptevékenységet jellemző mennyiségen is kimutatható, pl. a napfoltcsoportok számán (GSN) – ld. még a 3. fejezetben.

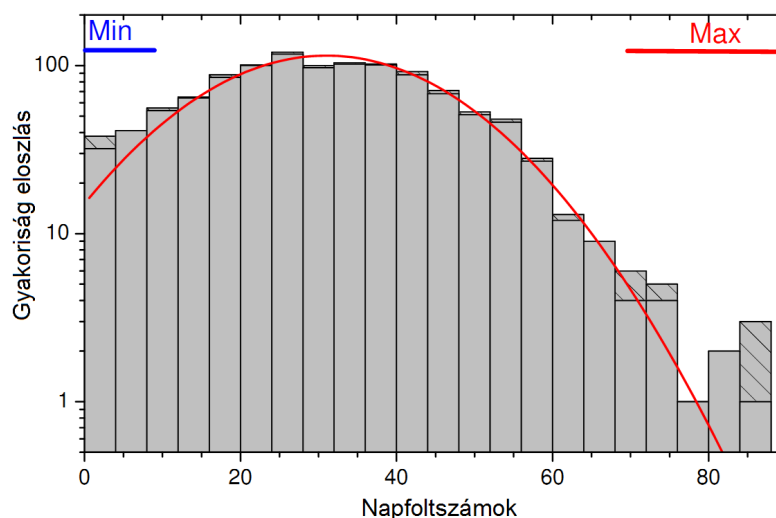
Inverz korreláció tapasztalható még a ciklus amplitúdója, és a megelőző ciklus lecsengési ideje között (Hathaway és mtsai., 1994), ami a Waldmeier effektus következményeként értelmezhető.



5. ábra. A felfutási meredekség (balra) és a lecsengési meredekség (jobbra) a ciklusamplitúdó függvényében ábrázolva – Wolf-féle napfoltszám adatok alapján. Megfigyelhető, hogy a felfutás meredeksége, és a ciklus amplitúdója között sokkal nagyobb a korreláció, mint a lecsengés esetében (Cameron és Schüssler, 2008).

A 3. ábrán a közel 11 éves periódusokon kívül több napfolt-cikluson át tartó változás is jelentkezik. A 20. század közepétől megfigyelhető fokozott napaktivitás *Modern-maximumként* ismert. Ezzel szemben több mérsékeltén aktív időszak is észrevehető: a *Dalton-minimum* (5, 6 és 7-es ciklusok) és a *Gleissberg-minimum* (12-16 ciklusok). A 3. ábrán, 1640 és 1705 között megfigyelhető, jelentősen lecsökkent aktivitási időszak a *Maunder-minimum*.

Ezt a nagy időskálájú változást tanulmányozta munkatársaival Usoskin (2007), a napfoltszámok több évezredre visszanyúló rekonstrukciójával¹. A főmaximumok és főminimumok előfordulását vizsgálta munkatársaival, a napfoltszámok általuk kapott eloszlását a 6. ábra mutatja. Az eloszlás Gauss-görbével közelíthető, ám mind a főmaximumokat, mind a főminimumokat illetően többlet tapasztalható a normális eloszláshoz képest. Ez arra utal, hogy ezek a periódusok speciális fázisai a napdinamó működésének, nem pedig véletlen fluktuációk. Azt is kimutatták, hogy a nagy maximumok, illetve minimumok bekövetkezése nem periodikus, inkább kaotikus folyamat, mely megnehezíti a naptevékenység előrejelezhetőségét.



6. ábra. A napfoltszámok gyakoriságeloszlása 11 000 éves időskálán (Usoskin és mtsai., 2007). A dőlt vonallal jelölt részek az 1610 óta megfigyelt adatokat jelölik. Az eloszlás Gauss-görbével közelíthető – átlaga 31, szórása pedig 30 –, ugyanakkor mind a kis, mind a nagy napfoltszámokat tekintve többlet figyelhető meg.

¹A ¹⁴C izotópra vonatkozó adatsorok segítségével végezték a rekonstrukciót, 10 éves átlagolással.

2.4. A napdinamó

A Nap mágneses terét a belsejében működő mágneses dinamó hozza létre. A viselkedését leíró modell létrehozása során figyelembe kell venni például a következő megfigyelési jelenségeket:

1. A napfolt-ciklus 11 éves változását.
2. A pillangódiagramot, amit úgy kapunk, ha ábrázoljuk a napfoltcsoportok szélesség szerinti eloszlását – 7. ábra. Az új ciklus foltjai először a 25° - 30° szélességen jelennek meg, majd a foltok átlagos szélessége csökken: a ciklus utolsó foltjai az 5° - 10° körüli szélességeken figyelhetők meg.
3. A Hale-féle polaritásszabályt, és vele összefüggésben a 22 éves mágneses ciklust. A Hale-szabály szerint:
 - a foltcsoportok vezető és követő része ellentétes polaritású foltokat tartalmaz;
 - egy adott ciklusban az egyik (pl. az északi) félgömbön mindig egy adott polaritás a vezető (pl. az északi) a másik félgömbön pedig a másik;
 - a következő 11 éves ciklusban a polaritásviszonyok megfordulnak.

A napdinamó-modellekben egyre fontosabb szerep jut a differenciális rotáció² mellett a Nap meridionális cirkulációjának, mely az egyenlítőre merőleges síkban történő áramlás. A felszínen az egyenlítőtől a pólus felé tart, a Nap belsejében visszafordul, és ott egy a pólustól az egyenlítő felé tartó áramlás alakul ki. Jelentősége közvetett módon van, ugyanis a pillangódiagram kialakulásában nagy valószínűséggel a cirkuláció játszik szerepet.

A legáltalánosabban elfogadott dinamómodell az $\alpha - \Omega$ modell, melynek alapjait Parker (1955) fektette le klasszikus cikkével. A modell szerint a toroidális (egyenlítővel párhuzamos) és a poloidális (egyenlítőre merőleges) mágneses térkomponensek alakulnak egymásba. Az α -effektus a poloidális mágneses térkomponens létrejöttéért felel, míg az Ω -effektus, amely a differenciális rotáció következménye, a toroidális mágneses teret generálja.

A jelenlegi dinamómodellek (Petrovay, 2000) az átlagtér közelítésen alapulnak, melyben csatolt differenciálegyenlet rendszer írja le a nagy skálájú mágneses tér toroidális és poloidális komponenseinek változását.

Legegyszerűbb esetben, amikor a turbulencia homogén és izotróp – l , a turbulencia skálája kisebb, mint L , az átlagtér jellemző léptéke –, a dinamó egyenlet az alábbi

²A Nap felszíni forgási sebessége változik a szélességgel, azaz differenciálisan rotál.

alakban írható fel:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta_T \times \nabla \mathbf{B}), \quad (3)$$

$\mathbf{B}$ – átlagos mágneses tér,

$\mathbf{U}$ – nagyléptékű áramlás sebessége,

η_T – mágneses diffúzivitás

α – paraméter

Egyszerűsítés után (Petrovay, 2000) a (3) összefüggésből az alábbi, *klasszikus* $\alpha - \Omega$ dinamóegyenleteket kapjuk:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B - (\mathbf{U}_c \cdot \nabla) A - (\nabla \cdot \mathbf{U}_c) A + \eta_T \nabla^2 A \quad (4)$$

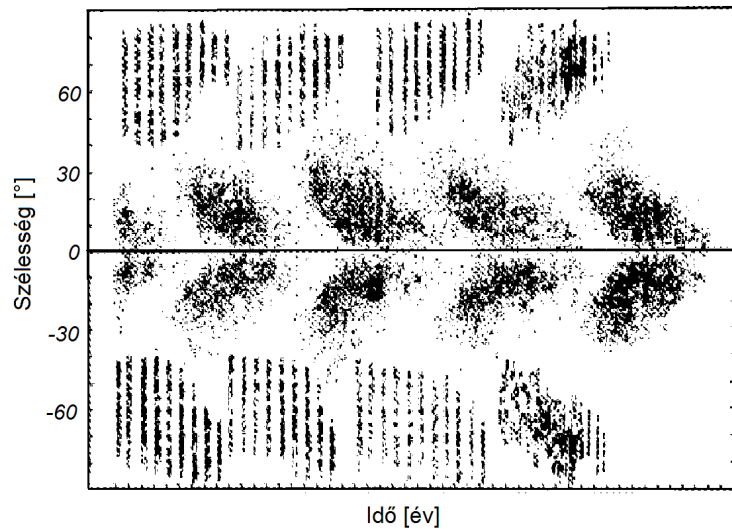
$$\frac{\partial B}{\partial t} = \Omega \frac{\partial A}{\partial x} - (\mathbf{U}_c \cdot \nabla) B - (\nabla \cdot \mathbf{U}_c) B + \eta_T \nabla^2 B, \quad (5)$$

B és A a toroidális (φ irányú) komponense a mágneses térnek illetve a vektorpotenciálnak,

$\mathbf{U}_c$ – meridionális cirkulációt,

$\Omega(r, \vartheta)$ – szögsebességprofil, mely a differenciális rotációt jellemzi,

r, ϑ, φ – a gömbi polárkoordináták.



7. ábra. A kiterjesztett pillangódiagram: a napfoltcsoportok, és poláris fáklyák – foltcsoport környezetében látható fényesebb képződmények – idő, és szélesség szerinti eloszlását mutatja. A napfoltok az egyenlítő, a fáklyák a pólusok felé vándorolnak az idő múlásával.

2.5. Oszcillátorok

Ha egy testet rugóra akasztunk, majd függőleges irányban kitérítjük, két szélső érték között harmonikus rezgőmozgást fog végezni. Általános esetben fellép egy sebességgel arányos csillapító erő is, minek következtében a mozgás energia-utánpótlás nélkül megszűnik. Az ilyen rendszer mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}, \quad (6)$$

ahol D a rugóállandó és k a csillapítási tényező.

Bevezetve a $2\beta = \frac{k}{m}$, időbeli csillapítási együtthatót és $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$, csillapítatlan harmonikus rezgés körfrekvenciáját az egyenlet az alábbi alakban írható fel:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (7)$$

melynek megoldását $x(t) = A(t) \sin(\omega t + \varphi)$ alakban keressük. $A(t)$ időfüggvény meghatározásához képezzük $x(t)$ első és második deriváltját, majd visszahelyettesítjük a dinamikai egyenletbe. Ezek után $A(t)$ -re exponenciális időfüggvény adódik, vagyis a mozgást leíró függvény:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (8)$$

Eszerint a csillapodó rezgés amplitúdója időben exponenciálisan csökken annál gyorsabban, minél nagyobb β , csillapítási együttható értéke – reciproka $\tau = \frac{1}{\beta}$ a lecsengési vagy relaxációs idő.

Ahhoz, hogy a rezgés a csillapítás ellenére is fennmaradjon, a testet periodikus erővel gerjeszteni kell. Ekkor a dinamikai egyenlet kiegészül a rezgést fenntartó periodikus erővel:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin(\omega t), \quad (9)$$

ahol ω a gerjesztő erő körfrekvenciája, a_0 pedig a gerjesztő erő amplitúdója m -el normálva. A kényszermozgás frekvenciája a rezgés kezdetétől egy bizonyos idő után megegyezik a kényszerítő mozgás frekvenciájával.

Duffing-oszcillátor

A Duffing-oszcillátor egy példája a nemlineáris rugalmasságú, periodikus erővel gerjesztett rendszereknek (Kanamaru, 2008):

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos \omega t, \quad (10)$$

ahol a csillapítás $\delta \geq 0$.

Ez az oszcillátor – a van der Pol-oszcillátorhoz hasonlóan – a káosz leírásának egyszerű modelljeként ismert (abban az esetben, ha $\beta < 0$).

Van der Pol-oszcillátor

A van der Pol-oszcillátor egy nemlineáris csillapítású oszcillátor, melyet az alábbi másodrendű differenciálegyenlet ír le (Kanamaru, 2007):

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (11)$$

ahol $\varepsilon > 0$ a csillapítás paramétere.

Kis csillapítás esetén ($\varepsilon \ll 1$) a fenti, (11) egyenletet az $y = \varepsilon \left(x - \frac{x^3}{3} \right) - \dot{x}$ transzformáció segítségével az alábbi alakra hozható:

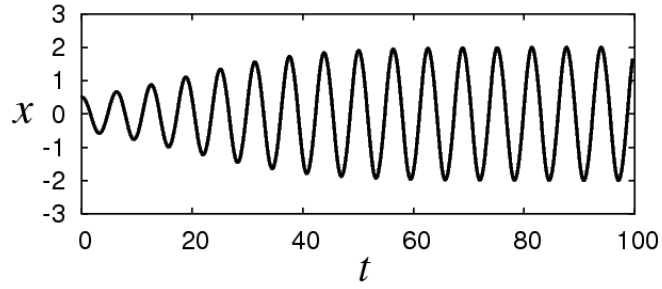
$$\dot{x} = \varepsilon \left(x - \frac{x^3}{3} \right) - y, \quad (12)$$

$$\dot{y} = x. \quad (13)$$

Abban az esetben, ha $\varepsilon = 0$, a rendszer viselkedése az $x = A \cos(t + \varphi)$, $y = A \sin(t + \varphi)$ egyenletekkel írható le. Hogy megkapjuk a közelítő megoldást kis ε -ra, új változókat vezetünk be: $u = x \cos t + y \sin t$, $v = -x \sin t + y \cos t$. Ezeket behelyettesítve a (12,13) egyenletekbe $\dot{u} = \frac{\varepsilon}{8}u[4 - (u^2 + v^2)]$ és $\dot{v} = \frac{\varepsilon}{8}v[4 - (u^2 + v^2)]$ adódik. $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ átalakítással a kapott differenciálegyenlet $r = 2$ mellett stabil egyensúlyra vezet kis ε esetén:

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon}{8}r(4 - r^2). \quad (14)$$

Kis csillapítás mellett tapasztalható viselkedésre a 8. ábra mutat példát.



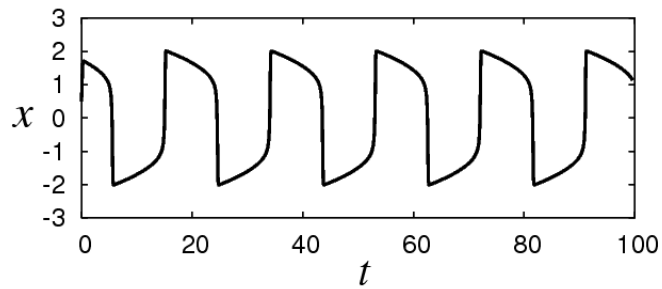
8. ábra. A rendszer kitérés-idő diagramja kis, $\varepsilon = 0.1$ csillapítás esetén, $x(0) = 0.5$ és $y(0) = 0$ kezdeti értékekkel.

Nagy csillapításra ($\varepsilon \gg 1$) a (11) egyenletet az ún. Liénard-transzformációval ($y = x - \frac{x^3}{3} - \frac{\dot{x}}{\varepsilon}$) célszerű új alakra hozni:

$$\dot{x} = \varepsilon \left(x - \frac{x^3}{3} - y \right), \quad (15)$$

$$\dot{y} = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (16)$$

Amikor a rendszer távol van az $y = x - \frac{x^3}{3}$ görbétől, a (15,16) egyenletekből az $|\dot{x}| \gg |\dot{y}| = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ kifejezés adódik – ekkor vízszintes irányú, gyors mozgás jellemző. Amikor a rendszer belép arra a szakaszra, ahol $|x - \frac{x^3}{3} - y| = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$, lassan halad végig a görbén, végül kilép a tartományból. Erre a viselkedésre mutat példát az alábbi, 9. ábra.



9. ábra. A rendszer kitérés-idő diagramja nagy, $\varepsilon = 10$ csillapítás esetén, $x(0) = 0.5$ és $y(0) = 0$ kezdeti értékekkel.

2.6. A Nap mint oszcillátor

A dinamóprobléma további egyszerűsítése során a megoldásban csak az időfüggést vesszük figyelembe, a térbeli változást elhanyagoljuk. A (4,5) egyenletekben megjelenő térbeli deriváltakat $\nabla \sim \frac{1}{L}$ -el közelítjük, majd a kapott $\frac{U_c}{L}$ és $\frac{\eta_T}{L^2}$ tagokat $\frac{1}{\tau}$ -val helyettesítjük, ahol τ karakterisztikus időskála. Az így felírható egyenletek:

$$\dot{A} = \alpha B - \frac{A}{\tau} \quad (17)$$

$$\dot{B} = \frac{\Omega}{L} A - \frac{B}{\tau}. \quad (18)$$

A két egyenletet összevonva:

$$\ddot{B} = \frac{D-1}{\tau^2} B - \frac{2}{\tau} \dot{B} \quad (19)$$

kifejezést kapjuk, melyben $D = \frac{\alpha\Omega\tau^2}{L}$ a dinamószám.

$D < 1$ esetén a (19) egyenlet egy csillapított, lineáris oszcillátort ír le.

$D > 1$ -re az eredményeknek nincs oszcillátor jellegű alakja.

Számos módja van annak, hogy az oszcillátor-modellt kiterjesszük úgy, hogy periodikus, vagy kvázi-periodikus viselkedést kapjunk. Az egyik közelítésben nemlinearitást viszünk a rendszerbe: $D = D_0[1 - f(B)]$ -t feltételezve, ahol $f(B=0) = 0$ és $f \geq 0$. Ekkor a (19) egyenlet nemlineáris oszcillátort ír le:

$$\ddot{B} = \frac{D_0-1}{\tau^2} B - \frac{2}{\tau} \dot{B} - \frac{D_0-1}{\tau^2} B f(B). \quad (20)$$

A legáltalánosabb esetben a csillapító mechanizmust jellemző tagot $f(B)$ függvényben másodfokúnak feltételezzük, ekkor a (20) egyenlet *Duffing-oszcillátort* ír le (Kanamaru, 2008). A (4,5) egyenletekből kiindulva, általánosabb esetre van der Pol – Duffing-oszcillátort kapunk (Lopes és Passos, 2008), mely a paraméterek bizonyos értékei esetén *van der Pol-oszcillátorra* egyszerűsödik (Kanamaru, 2007).

2.6.1. A napciklus oszcillátor-modellje – Mininni és társai

Mininni és munkatársai (2000) cikkükben a napciklus egyszerű modelljét írták le a napi napfoltszám adatokat felhasználva 1816 és 2000 közötti időszakból. Munkájuk

során az oszcillátor (11) egyenletét az alábbi formában írták fel:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - \mu(3\xi x^2 - 1)\dot{x}. \quad (21)$$

Az egyenletben szereplő konstansok:

ω – frekvencia,

μ – aszimmetria paraméter,

ξ – nemlinearitás.

Az egyenletben szereplő konstansok meghatározásához először a napfoltszám adatokból létrehoztak egy $B(t) \sim \sqrt{R_{SSN}}$ adatsort, melyre ezután – a négyzetes hiba minimalizálásával – illesztették $\ddot{x}$ -t ω , ξ , és μ paraméterek variálásával. Az így kapott konstansok:

$$\omega = 0.2993 \quad \mu = 0.2044 \quad \xi = 0.0102.$$

Azt találták, hogy a legjobban illeszkedő van der Pol-oszcillátor megfelelő modell B adatsor időbeli változásának leírásához. A napciklusok amplitúdójában és időtartamában fellépő változásokat ξ paraméter változtatásán keresztül vették figyelembe az alábbi módon:

$$\xi = \xi_0 + r\xi_s, \quad (22)$$

ahol:

ξ_0 – konstans,

ξ_s – zérus átlagú, Gauss-eloszlású érték,

r – dimenziótlan paraméter, az rms értéke ξ sztochasztikus részének.

A 10. ábra mutatja B adatsor, illetve a felírt egyenletek 150 évre kiszámított értékeit $r = 0.02$ mellett. A vizsgálat során ξ_s -t véletlenszerűen változtatták 30 naponként.

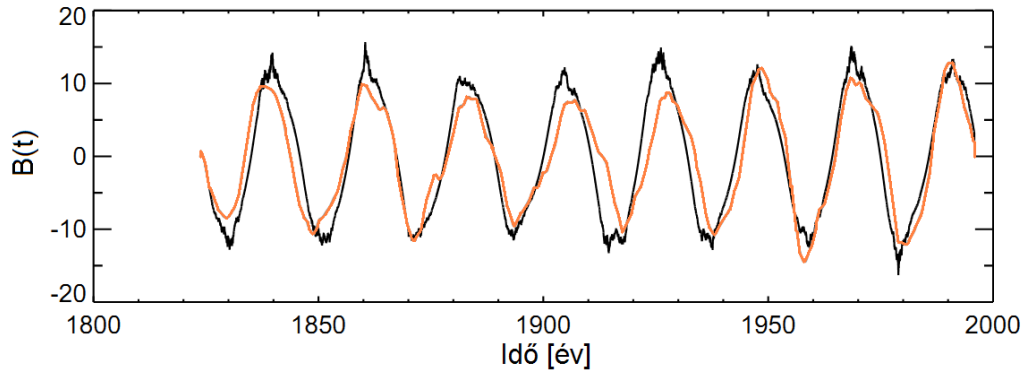
Az egyenletrendszer segítségével ilyen módon leírható a napciklusok néhány jellegzetes tulajdonsága – pl. a maximumok alakja. Továbbá a kapott modellt összevetve a megfigyelt adatsorral, három fontos átlagparaméterrel és azok szórásával jól egyező értékeket kaptak – 1. táblázat. Ezek a periódusidő, a maximális napfoltszám, illetve a felfutási idő.

Ezen tulajdonságokon kívül más megfigyelési tények, pl. a Waldmeier-effektus teljesülését már nem vizsgálták.

	Periódusidő * [év]	Felfutási idő [év]	Maximum értéke
$B(t)$ adatsor	21.4 ± 1.6	4.2 ± 0.4	113 ± 40
Van der Pol	21.4 ± 0.8	4.3 ± 0.4	152 ± 38

* A 22 éves mágneses ciklusra.

1. táblázat. A napi napfoltszám adatok és a Van der Pol-oszcillátor átlagértékeinek, és azok szórásának összehasonlítása. (Mininni és mtsai., 2000)



10. ábra. Napfoltszám adatokból nyert, mágneses térrel arányos $B(t)$ adatsor (fekete görbe) és a sztochasztikus van der Pol-oszcillátor (sárga görbe) – Mininni és mtsai. (2000)

2.6.2. A napciklus oszcillátor-modellje – Lopes és Passos

Lopes és Passos (2008) a napfoltciklus időbeli változását vizsgálták az 1750...2008 időszak napfoltszám adatainak felhasználásával. Munkájuk során az $\alpha - \Omega$ dinamómodell egyenleteit először az alábbi, egyszerűsített formára alakították:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - \mu(3\xi x^2 - 1)\dot{x} + \lambda x^3, \quad (23)$$

λ a Duffing paraméter.

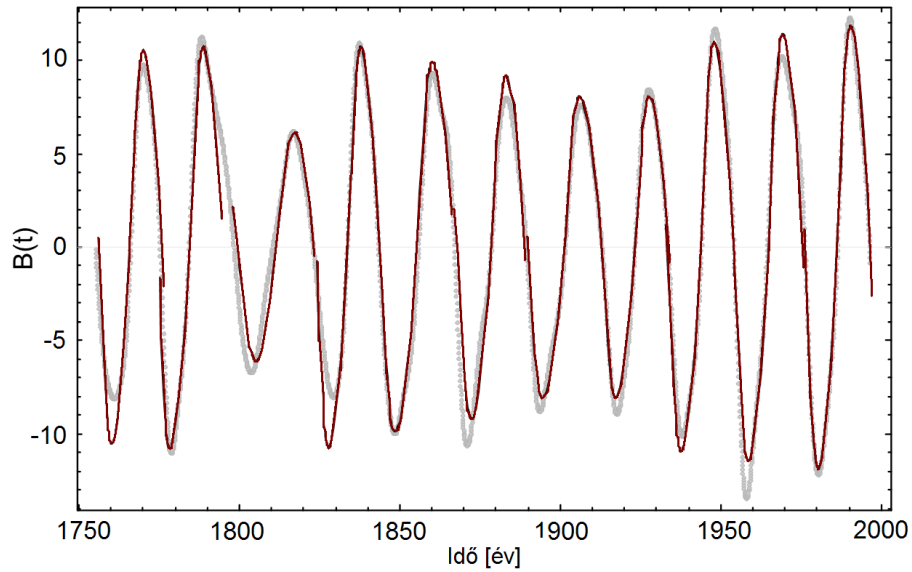
Az egyenlet egy nemlineáris, van der Pol–Duffing-oszcillátort ír le. Ez a dinamikai rendszer sztochasztikus, ugyanakkor ciklikus viselkedést mutat, akárcsak a napciklus. Az egyenletben szereplő paraméterek, μ , ω , ξ és λ időben lassan változnak a

plazma állapotától függően. Ennek megfelelően Lopes és Passos azzal a feltevés-sel éltek, hogy minden egyes mágneses ciklus a (23) egyenlet egy megoldása, adott paraméterértékek mellett.

Munkájuk során először létrehozták a simított $B(t)$ adatsort a napfoltszám ada-tokból, majd a teljes idősort ~ 22 éves mágneses ciklusokra osztották fel. Ezt köve-tően a felírt modellt külön-külön illesztették mindegyik ciklusra, melynek eredmé-nyét a 11. ábra mutatja. Az illesztések során μ , ω és ξ paramétereket határozták meg, λ -t azonban elhanyagolták, mivel értékei legalább két nagyságrenddel kiseb-bek voltak a többi együtthatóknál. A cikkben leírt, 11 mágneses ciklusra illesztett paraméterek átlaga és szórása:

$$\begin{aligned}\omega &= 0.3001 \pm 0.0205, \\ \mu &= 0.1578 \pm 0.0469, \\ \xi &= 0.0154 \pm 0.0079.\end{aligned}$$

Az átlagértékek jó közelítéssel egyeznek a Mininni és társai (2000) által meghatáro-zott konstansokkal.



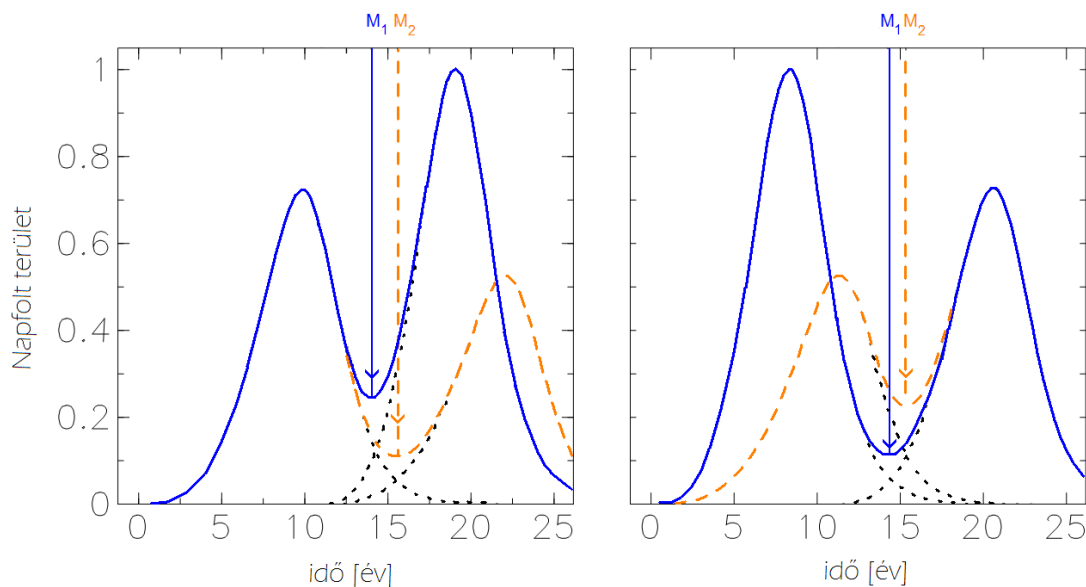
11. ábra. A sötét vonal mutatja a mágneses ciklusonkénti illesztés eredményét, a szürke görbe pedig a $B(t)$ adatsort.

3. A Waldmeier-effektus jelentősége

A naptevékenység változásai irányítják az űridőjárás jelenségeit, vagyis a Föld körüli térségben számos folyamatot, ezért fontos ismernünk annak hosszú és rövid időskálájú változásait. Napjainkban tehát a kutatások egyik központi területe a napfoltciklusok erősségének előrejelzése. Emellett, ha megfelelően előre tudnánk jelezni a naptevékenység alakulását, akkor a dinamómodelleket illetően is további megszorításokat nyerhetnénk.

A nap aktivitásának előrejelzése például úgynevezett "prekurzorok" segítségével kísérelhető meg. Ezek az éppen aktuális ciklus lecsengő fázisában vagy a napfoltminimumban mérhető fizikai tulajdonságok, melyek a következő ciklus erőssége között mutatnak korrelációt.

Amint azt a 2.3. fejezetben már összefoglaltam, az egyes napfoltciklusok aszimmetrikusak, a felfutási időszak rövidebb, valamint Waldmeier-effektus szerint az erősebb ciklusokra meredekebb növekedés jellemző. Emellett fontos tudni, hogy az egyes ciklusok átfedik egymást: az új ciklusok foltjai már megjelennek magasabb szélességeken, amikor még az előző ciklus foltjai jelen vannak az egyenlítőhöz közelebbi régiókban. Az átfedés időtartama 2-3 év. Ezt a jelenséget figyelembe kell



12. ábra. Az ábrák a ciklus-amplitúdótól függő napfoltminimum eltolódás illusztrációi (Cameron és Schüssler, 2007). *Balra* a soron következő ciklus hatása, *jobbra* a megelőző ciklus hatása látható.

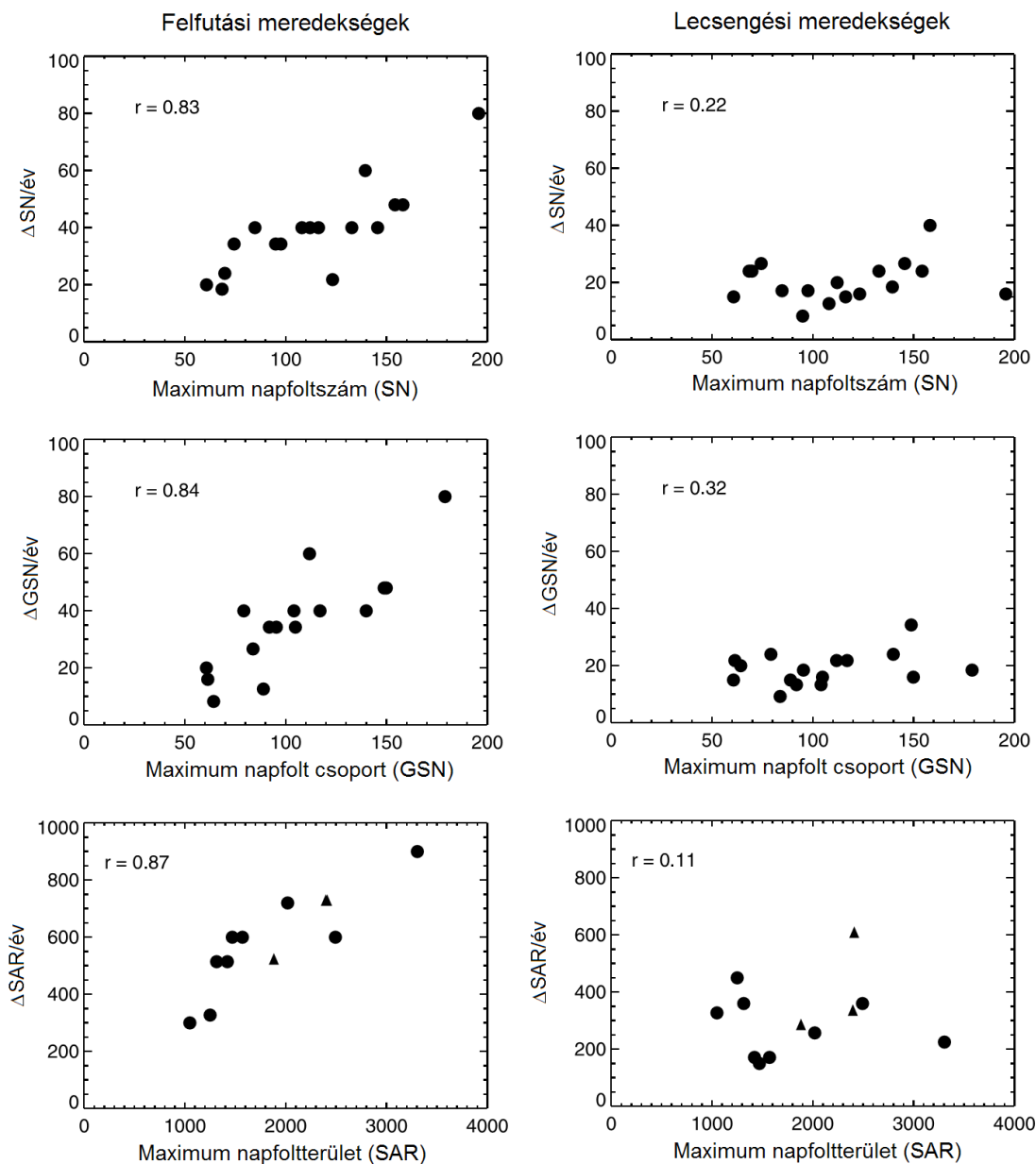
venni minden előrejelzési metódus esetén, hiszen az átfedés mértéke más és más az egymást követő ciklusok erősségétől függően, amint ezt a 12. ábra szemlélteti (Cameron és Schüssler, 2007).

Az ábrán a pontvonalak jelölik az individuális ciklusokat, a folytonos kék, valamint a szaggatott narancs görbék pedig az egymást követő ciklusok összegét mutatják. Az ábra *bal oldalán* megfigyelhető, hogy amennyiben erősebb ciklus következik, annak a gyorsabb felfutás miatt a napfoltminimum időpontja (M1) hamarabb bekövetkezik. Ezzel szemben amikor gyengébb periódus következik, a lassabb felfutás okán a minimum (M2) később következik be. Eszerint a napciklus minimumának időpontja a soron következő ciklus amplitúdójának függvényében eltolódik. A *jobb* oldalon ugyanígy megfigyelhető a minimum időpontjának eltolódása a megelőző ciklus hatására. Az előrejelzésben a következő ciklus hatása a döntőbb, mivel az éppen induló ciklus felfutása és amplitúdója közt áll fenn kapcsolat.

A minimum időpontjának ilyen, amplitúdó függő eltolódása a Waldmeier-effektus következménye (Cameron és Schüssler, 2007). A soron következő ciklus amplitúdója ezek alapján megbecsülhető már néhány évvel a minimum bekövetkezése után.

Cameron és Schüssler (2008) kimutatták, hogy a ciklusok kezdeti szakaszában tapasztalható növekedési meredekség, és a bekövetkező maximális amplitúdó közt erős korreláció mutatható ki – mely korreláció nem jellemző a ciklusok lecsengési meredeksége esetében. A vizsgált időszakokat úgy választották meg, hogy a ciklusok közti átfedés hatása minimális legyen. A vizsgálatokat több, napaktivitást jellemző indikátor esetén is elvégezték.

Eredményeik a 13. ábrán láthatók. Megfigyelhető, hogy a Waldmeier-effektus minden vizsgált indikátor esetében jelentkezik.



13. ábra. Balra a felfutási meredekség, jobbra pedig a lecsengési meredekség látható a napciklusok amplitúdóinak függvényében ábrázolva, a naptevékenységet jellemző három indikátor esetére (Cameron és Schüssler, 2008). A felső sor a Wolf-féle napfoltszámokra, a középső a napfoltcsoportokra, míg az alsó a foltterületekre vonatkozó eredményeket mutatják. r az egyes indikátorokkal meghatározott korrelációs együtthatók értéke.

Munkám célja a Mininni és mtsai. (2000) illetve Lopes és Passos (2008) által a napfoltciklusra illesztett van der Pol- illetve van der Pol–Duffing-oszcillátorok viselkedésének megismerése. Ez egy egyszerű modell, mely a (4,5) dinamó egyenletek egyszerűsítése során adódik. Véletlenszerű zavart adva az oszcillátor együtthatóihoz, 2000 év hosszú idősorokat generáltam, majd az alapján vizsgáltam őket, hogy teljesítik-e a Waldmeier-szabályt. Emellett egy további fontos szempont volt az is, hogy a ciklusok lecsengési meredeksége és amplitúdója közt ne legyen szignifikáns korreláció, mivel ez a naptevékenység esetében sem áll fenn (Cameron és Schüssler, 2008).

Kutatásom eredményeként egy olyan modell adódott, mellyel egyszerűen szimulálható a napfoltciklus több ismert jellegzetessége. Emellett, ha ismert az oszcillátor egyenletében szereplő együtthatók és a dinamóparaméterek kapcsolata, akkor a napdinamó paramétereire becslés adható. Ezek eredményeként pedig a modell a napfoltciklus előrejelezhetőségében nyújthat segítséget.

4. A van der Pol-oszcillátor vizsgálata

Munkám során először a van der Pol-oszcillátort tanulmányoztam:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - \mu[\xi x^2 - 1]\dot{x}. \quad (24)$$

Az egyes paraméterek:

ω , frekvencia – a ciklusok hosszát definiálja,

μ , csillapítás – az aszimmetriát jellemzi,

ξ , nemlinearitás – a ciklusok amplitúdóját szabályozza.

4.1. A vizsgálat szempontjai

Az fenti egyenletből adódó $x(t)$ függvény a toroidális mágneses térkomponenssel arányos. Ez, és a napfoltszámok között az $SSN = x^n(t)$ összefüggés áll fenn, ahol n lehetséges értékei: 1, 1.5 és 2 (Bracewell, 1988; Mininni és mtsai., 2000), melyeket sorra felhasználtam kutatásomban.

Az oszcillátor-paraméterek kezdeti értékének a Mininni és mtsai. (2000) által, $n = 2$ mellett illesztett konstansokat választottam:

$$\omega_0 = 0.2993 \quad \mu_0 = 0.2044 \quad \xi_0 = 0.0102.$$

A Monte Carlo-szimulációk során egyes paramétereket véletlenszerűen változtattam és azt vizsgáltam, hogy ily módon a modell közelíti-e a napfoltciklus (3. ábra) megfigyelt tulajdonságait:

$T_N \cong 11.02$ év	az egyes ciklusok átlagos hossza;
$\text{rms}_{T,N} \cong 11$ %	a ciklushosszak szórása;
$\text{rms}_{A,N} \cong 25 \dots 30$ %	az amplitúdók szórása,
$K_{mer, fel, N} \cong 0.8 \dots 0.9$	korreláció a felszálló ág meredeksége és a ciklus maximuma közt (Waldmeier-szabály);
$K_{mer, le, N} \cong 0.11 \dots 0.35$	korreláció a leszálló ág meredeksége és a ciklus maximuma közt.

Ezek alapján az oszcillátor jellemzőire az alábbi feltételeket szabtam:

$$\begin{aligned} K_{mer, fel, vdP} &> 0.8, & |K_{mer, le, vdP}| &< 0.5, \\ 10\% < \text{rms}_{T, vdP} &< 20\%, & 10\% < \text{rms}_{A, vdP} &< 30\%. \end{aligned}$$

A legfontosabb kitérium a Waldmeier-szabály teljesülése.

A ciklusok felszálló és lecsengő ágának meredekségét az alábbi összefüggéssel definiáltam:

$$M_i = \frac{0.6x_{max,i} - 0.3x_{max,i}}{t_{0.6,i} - t_{0.3,i}},$$

ahol:

$x_{max,i}$ – az i . ciklus maximuma;

$t_{0.6,i}, t_{0.3,i}$ – azok az időpontok, ahol $x(t)$ függvény értéke $x_{max,i}$ 60%-ával, illetve 30%-ával egyezik meg.

4.2. A perturbáció definiálása

A van der Pol-oszcillátor (24) egyenletében szereplő paraméterek közül μ , csillapításhoz és ξ nemlinearitáshoz adtam véletlenszerű variációt különféle eljárások szerint. Magát a zajt az alábbi két módszerrel definiáltam.

Az egyik esetben a zaj értékét konstansnak tartottam egy előre definiált, T_{corr} korrelációs ideig, melynek értékét 1 és 20 év között változtattam. Az aktuális oszcillátorparaméter változása tehát $d(t) = \Delta \cdot R$ alakban, *lépcső-függvény* szerint történik, ahol R Gauss-eloszlású, véletlen számot jelöl; Δ pedig a perturbáció nagyságát jellemző bemeneti paraméter.

A másik esetben *folytonosan* változó, Ornstein–Uhlenbeck-folyamatnak megfelelő (Longtin, 2010) zajt írtam fel a következő összefüggéssel:

$$d(t) = d(t - dt) - Kd(t - dt)dt + \Delta \cdot R\sqrt{dt}, \quad (25)$$

ahol K a relaxációs konstans – a korrelációs idő reciproka.

Az oszcillátor általam szabályozott bemeneti paramétereit $(\Delta; T_{corr})$, illetve $(\Delta; K)$. Az egyes modell típusok – ld. alább – viselkedését ezen értékek változása szerint vizsgáltam.

Ezen perturbációkat *additívan*

$$\mu(t) = \mu_0 + d(t) \quad \text{ill.} \quad \xi(t) = \xi_0 + d(t), \quad (26)$$

és *multiplikatíván*

$$\mu(t) = \mu_0 e^{d(t)} \quad \text{ill.} \quad \xi(t) = \xi_0 e^{d(t)} \quad (27)$$

használtam fel. Bizonyos $\mu(t)$ és $\xi(t)$ mellett a modellben előfordultak instabilitások. Ennek elkerülése érdekében korlátozásokat vezettem be ezek értékére.

Additív zajra:

$$0 < \mu(t) < 2\mu_0, \quad 0 < \xi(t) < 2\xi_0, \quad (28)$$

valamint multiplikatív zajra:

$$0.1\mu_0 < \mu(t) < 10\mu_0, \quad 0.1\xi_0 < \xi(t) < 10\xi_0. \quad (29)$$

Az oszcillátor viselkedését tehát külön vizsgáltam aszerint, hogy az időfüggő paraméter ξ vagy μ , vagyis a (24) egyenlet az alábbi módokon írható:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \mu(t) [\xi_0 x^2 - 1] \dot{x}, \quad (30)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \mu_0 [\xi(t) x^2 - 1] \dot{x}. \quad (31)$$

Egy további lépésben az eddig külön variált oszcillátor paramétereket egyidejűleg változtattam:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \mu(t) [\xi(t) x^2 - 1] \dot{x}. \quad (32)$$

Az együtthatók közt a dinamó egyenlet alapján kapcsolat van (Lopes és Passos, 2008), melyet a modellezés során figyelembe vettem:

$$\xi(t) = \frac{C_\xi}{\mu(t)}, \quad \text{ahol} \quad C_\xi = \xi_0 \cdot \mu_0 = 0.002. \quad (33)$$

Az itt tárgyalt módszereket sorra felhasználva azt tapasztaltam, hogy a legkedvezőbb az, ha $\mu(t)$ függvényt határozom meg először, folytonos, multiplikatív perturbációval, majd ebből számítom $\xi(t)$ paramétert. Az együtthatók együttes változása esetén az alábbi határokat állítottam be:

$$0.1\mu_0 < \mu(t) < 10\mu_0, \quad 0.75\xi_0 < \xi(t) < 100\xi_0. \quad (34)$$

Annak érdekében, hogy az oszcillátor-modellek viselkedését statisztikailag vizsgálni tudjam, az oszcillátorok kitérés-idő diagramját 2000 évre számoltam ki a fent leírt perturbációkkal, $SSN = x^n(t)$ alkalmazásával $n = 1, 1.5$ és 2 mellett.

4.3. Eredmények áttekintése

Az egyes eljárásokkal kiszámított $x^n(t)$ függvényeket a 4.1. fejezetben leírt szempontok szerint elemeztem. A továbbiakban a kapott eredményeket foglalom össze.

4.3.1. A perturbált paraméter μ

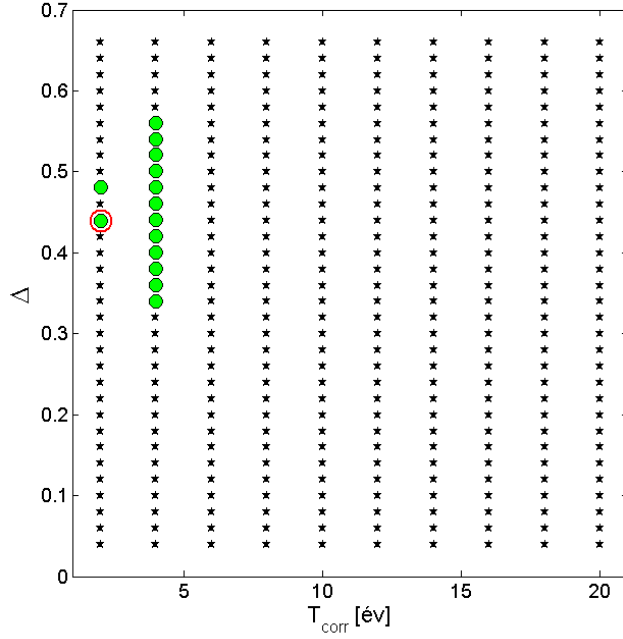
Abban az esetben, amikor a van der Pol-oszcillátor egyenletét a (30) kifejezés szerint írtam fel, a modell csak közelítőleg mutatta a 4.1. fejezetben leírt, napfoltciklushoz hasonló tulajdonságokat. Bár számos $(\Delta; T_{corr})$, $(\Delta; K)$ bemeneti paraméter mellett teljesült a Waldmeier-effektus, a többi jellegzetességgel együttesen nem mutatkozott a szimulációk során.

4.3.2. A perturbált paraméter ξ

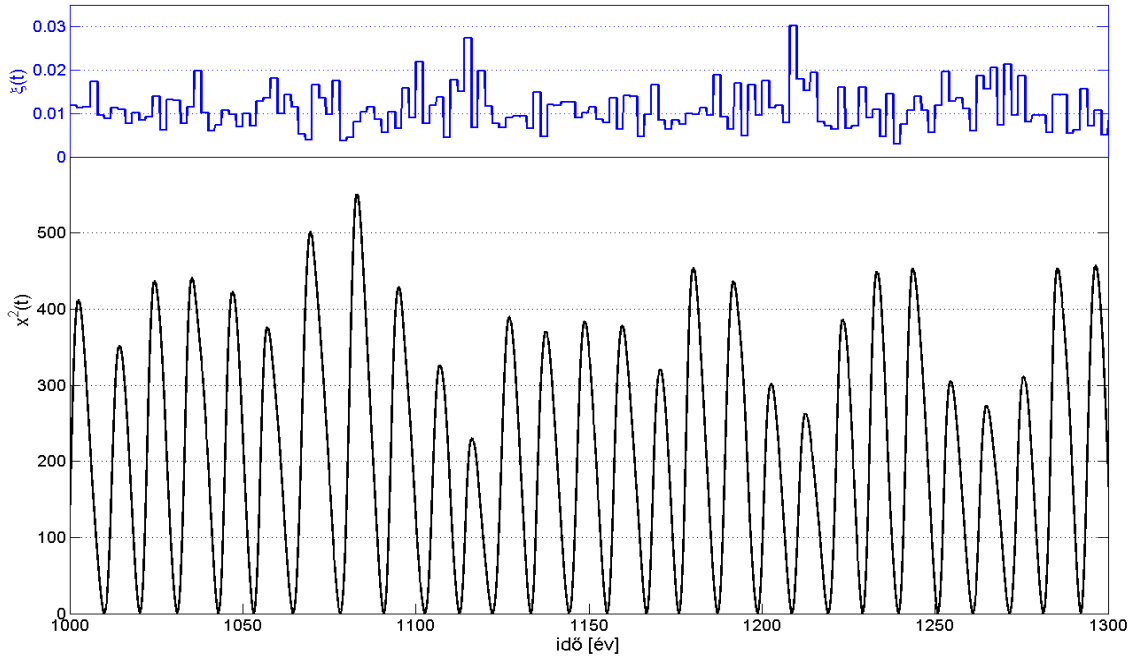
Amikor az időfüggő paraméter ξ , vagyis az oszcillátor egyenlet (31) összefüggés szerinti formáját használtam, a modell számos esetben mutatta együttesen az elvárt, napciklushoz hasonló jellegzetességet. A legkedvezőbb eljárásnak a multiplikatív zaj használata bizonyult, mind folytonos, mind lépcsős perturbáció esetén.

A 14. ábrán egy példa látható az oszcillátor egyenlet megoldása során alkalmazott bemeneti paraméterter alakulására. Itt $\xi(t)$ lépcsőfüggvény szerint, multiplikatívan változik, az oszcillátor kitérését $SSN = x^2(t)$ alapján számítottam. A Waldmeier-effektus minden értékpár esetén teljesül. Emellett több esetben is, $T_{corr} \sim 2 - 4$ éves korrelációs idők mellett a napciklushoz hasonló jellegzetességek együttesen jelen vannak. A bekarikázott pont $\Delta = 0.44$, $T_{corr} = 2$ év értékpárhoz tartozik. Az ezekkel kiszámolt kitérés-idő függvény, valamint $\xi(t)$ a 15. ábrán látható. Megfigyelhető, hogy $\xi(t)$ függvényben fellépő nagyobb értékek csökkenést okoznak az oszcillátor amplitúdójában, például az 1100 év utáni ciklusokban. Ugyanakkor $x^2(t)$ -ben előforduló erősebb periódusok, például az 1050 és 1100 közötti időszakban $\xi(t)$ kisebb értékei következtében adódnak. A modell és a napciklus jellemzőinek összehasonlítása a 2. táblázatban olvasható, a Waldmeier-effektust a 16. ábra mutatja.

Megvizsgáltam továbbá ezen oszcillátor viselkedését 11 000 év hosszú időskálán is. Az eredményül kapott ciklus-amplitúdók és a periódusidők eloszlását a 17-18. ábrák mutatják.



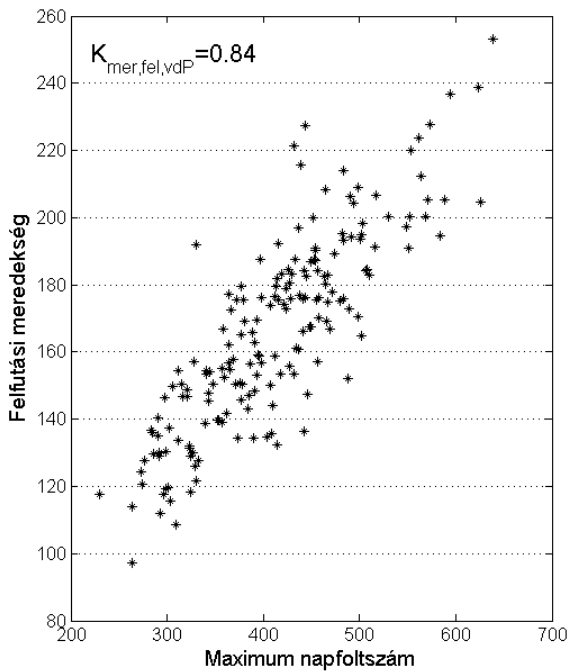
14. ábra. A szimulációk során használt paraméterter alakulása ξ lépcsőfüggvény szerinti, multiplikatív perturbációjakor, $n = 2$ esetén. A csillagok a Waldmeier-effektus teljesülését jelölik, míg a zöld pontok azon bemeneti paraméter párokat, melyekre a napciklust közelítő jellegzetességek együttesen teljesülnek – ld. 4.1. fejezet.



15. ábra. Az ábra egy 300 éves intervallumot mutat példaként a nemlinearitás paraméterében (ξ) véletlenszerűen perturbált van der Pol-oszcillátor viselkedésére. A zajt a 14. ábrán bekarikázott ponthoz tartozó, $\Delta = 0.44$, $T_{corr} = 2$ év értékek jellemzik. A felső panel mutatja $\xi(t)$ paraméter időbeli változását, míg az alsó az oszcillátor $x^2(t)$ viselkedését.

2. táblázat. A táblázat a 15. ábrán látható oszcillátor-modell és a napciklus jellemzőit hasonlítja össze. A modell tulajdonságait a 2000 évre kiszámított $x^2(t)$ függvény tulajdonságai alapján határoztam meg.

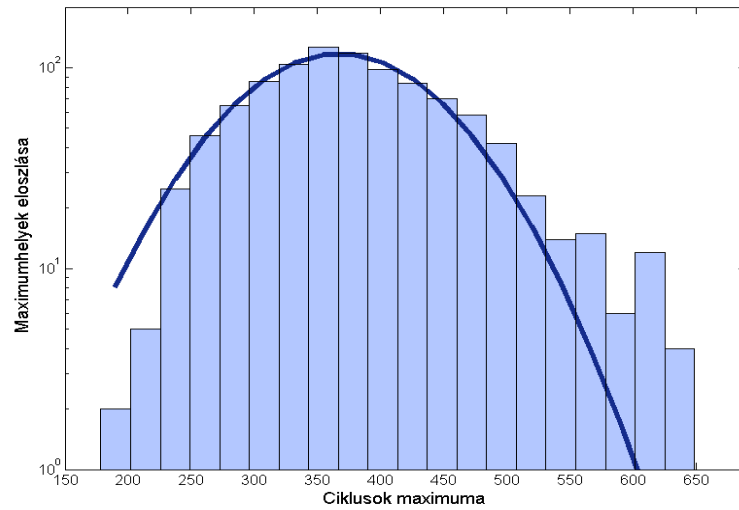
	$K_{\text{mer,fel}}$	$K_{\text{mer,le}}$	T [év]	rms_T [%]	rms_A [%]
Napfoltciklus	0.85	0.35	11.02	11	30
van der Pol-oszcillátor	0.84	-0.49	10.92	10	20



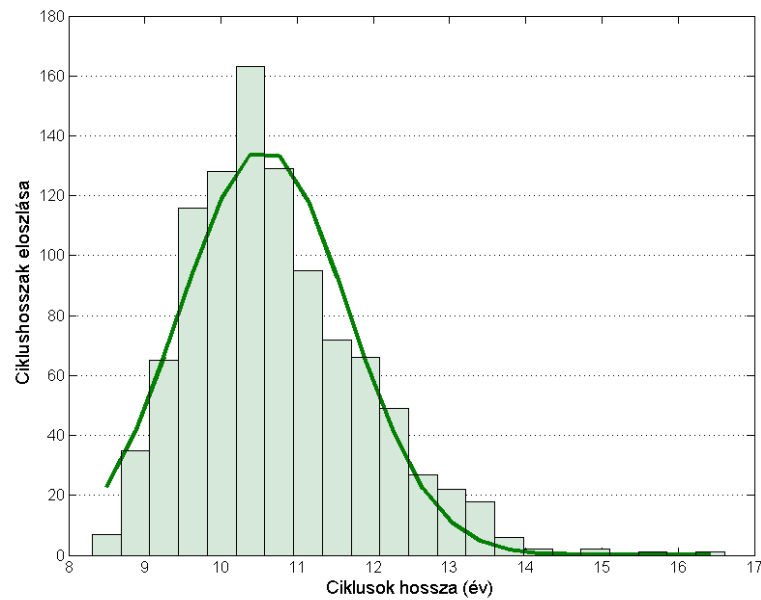
16. ábra. Az ábra a Waldmeier-effektust szemlélteti a 15. ábrán látható oszcillátor-modell esetére. A ciklusok felfutási meredeksége és maximuma közt fennálló korreláció közel lineáris, a korrelációs együttható értéke 0.84. Az effektus a napciklus esetére az 5. ábra bal oldalán látható.

A 17. ábra mutatja az oszcillátor amplitúdó-eloszlását $\Delta = 0.44$, $T_{\text{corr}} = 2$ év paraméterpár. Az Usoskin és társai (2007) által kapott, 6. ábrán látható eloszláshoz hasonlóan többlet tapasztalható nagy oszcillátor amplitúdóknál, azonban a kis kitérések oldalán hiány látszik az illesztett Gauss-görbéhez képest. Ennek oka, hogy az oszcillátor nem produkál Maunder-minimumhoz hasonló főminimumokat.

Munkám során azt tapasztaltam, hogy a modellben előfordulnak 20-30 éves, vagy még hosszabb, úgynevezett szuperciklusok is, ezért az amplitúdók eloszlása mellett a ciklushosszak eloszlását is tanulmányoztam. A 18. ábra a periódushosszak eloszlását mutatja az iménti esetre. Látszik, hogy a 11 000 év hosszan futtatott szimuláció során a ciklusok jellemzően 8-14 év időtartamúak, ennél hosszabb periódusok pedig csak néhány esetben fordulnak elő.



17. ábra. A 14. ábrán karikával jelölt tulajdonságú van der Pol-oszcillátor ciklus-amplitúdó eloszlása, 11 000 éves szimulációt futtatva – jellege a 6. ábrán látható, Usoskin és mtsai. (2007) által kapott eredménnyel összehasonlítható. Az adatokra illesztett Gauss-görbe paraméterei: $\mu = 367.28$, $\sigma = 76.56$, $A = 117.38$.



18. ábra. A 14. ábrán karikával jelölt tulajdonságú van der Pol-oszcillátor ciklushossz eloszlása, 11 000 éves szimulációt futtatva. Az adatokra illesztett Gauss-görbe paraméterei: $\mu = 10.85$ év, $\sigma = 1.29$ év, $A = 103.56$.

4.3.3. μ és ξ paraméterek együttes perturbációja

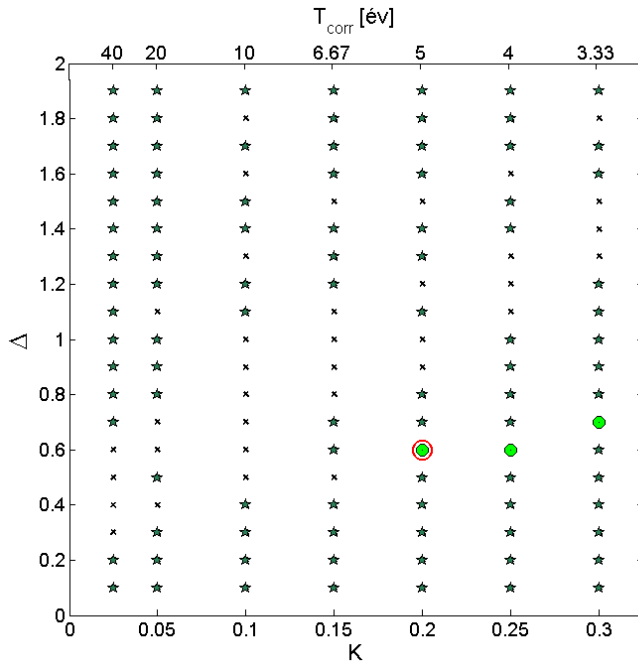
Miután megvizsgáltam a van der Pol-oszcillátor viselkedését úgy, hogy külön-külön perturbáltam a csillapítás (μ) és nemlinearitás paraméterét (ξ), a következő lépésben ezek együttes hatását vizsgáltam – a (32) egyenlet szerint.

A (4,5) dinamó egyenletek egyszerűsítése során az adódik, hogy ezek a paraméterek egymástól nem függetlenül változnak (Lopes és Passos, 2008). A köztük lévő kapcsolatot a (33) összefüggéssel vettem figyelembe.

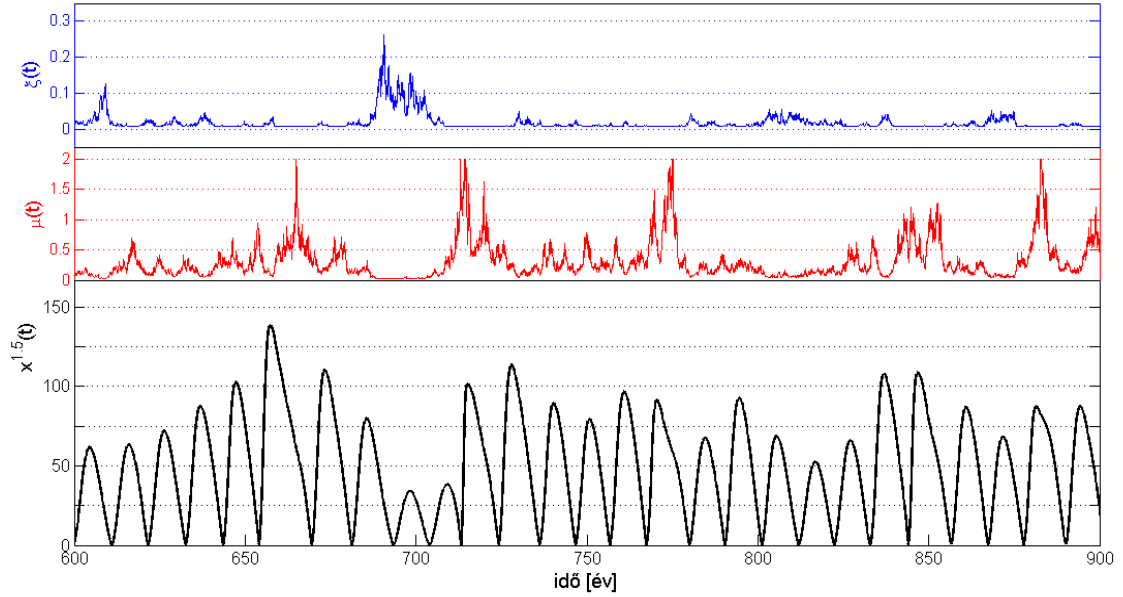
A részletes vizsgálatokat itt $SSN = x^n(t)$, $n = 1.5$ esetére végeztem el, mert így kaptam a napcikluséhoz leginkább hasonló amplitúdókat.

Az alábbi, 19. ábrán látható, hogy a korábbi, 14. ábrán bemutatott esethez hasonlóan most is 5 évnél rövidebb korrelációs idők mellett adódnak kedvező tulajdonságú modellek. A zaj amplitúdóját jellemző, Δ értéke sem tér el jelentősen a korábbi paraméterterben tapasztalt kedvező esetekétől.

A 20. ábrán egy példa látható a modell viselkedésére. Megfigyelhető, hogy $\mu(t)$ nagyobb értékei hatására az oszcillátor ciklusaira erősebb aszimmetria jellemző, pl. 650 és 660 évek között. A nemlinearitás paraméter, $\xi(t)$ nagy értékei amplitúdó csökkenést okoznak, ahogy az 690 és 710 között figyelhető meg. A bemutatott modell tulajdonságai a 3. táblázatban olvashatók.



19. ábra. Az x-tengelyen a sztochasztikus perturbáció relaxációs paramétere (lent), illetve az ennek megfelelő korrelációs idő (fent) látható. A csillagok a Waldmeier-effektus teljesülését jelölik, míg a pontok azon bemeneti paraméter párokat, melyekre a napciklust közelítő jellegzetességek együttesen teljesülnek – ld. 4.1. fejezet. A további pontokban a Waldmeier-szabály nem teljesül.



20. ábra. Az ábra egy 300 éves intervallumot mutat példaként a két paraméterében perturbált van der Pol-oszcillátor viselkedésére. A zajt a 19. ábrán bekarikázott ponthoz tartozó, $\Delta = 0.6$, $K = 0.2$ értékek jellemzik. A felső panel mutatja $\xi(t)$, a középső $\mu(t)$ paraméterek időbeli változását, míg az alsó az oszcillátor $x^{1.5}(t)$ viselkedését.

3. táblázat. A 20. ábrán látható oszcillátor-modell és a napciklus jellemzőit összehasonlító táblázat. A modell tulajdonságait a 2000 évre kiszámított $x^{1.5}(t)$ függvény tulajdonságai alapján határoztam meg.

	$K_{\text{mer,fel}}$	$K_{\text{mer,le}}$	T [év]	rms _T [%]	rms _A [%]
Napfoltciklus	0.85	0.35	11.02	11	30
van der Pol-oszcillátor	0.83	-0.40	11.24	10.12	29.43

A 11 000 év hosszan futtatott szimuláció eredményeképp Gauss-függvénnyel közelíthető amplitúdó, és periódusidő eloszlást kaptam. A görbe tulajdonságai a ciklus-maximumok eloszlása esetén: $\mu_A = 83.35$, $\sigma_A = 25.89$, $A_A = 105.08$. A ciklus-hosszak eloszlására illeszthető Gauss-függvény jellemzői: $\mu_T = 10.54$, $\sigma_T = 0.98$, $A_T = 119.73$.

A korábbi eloszlással ellentétben (17. ábra) itt a nagy amplitúdók oldalán sem tapasztalható többlet.

5. A van der Pol–Duffing-oszcillátor vizsgálata

A van der Pol–Duffing-oszcillátor egyenlete az előző fejezetben felírt (24) összefüggést kiegészítve kapható:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \mu(t)[\xi(t)x^2 - 1]\dot{x} + \lambda(t)x^3, \quad (35)$$

ahol λ a Duffing-paraméter.

A kifejezés az oszcillátor egyenlet kézen fekvő általánosítása, másodrendű korrekciókat bevezetve a csillapításba (ξ) és a frekvenciába (λ). Emellett a (4,5) dinamó egyenletek egyszerűsítésével is ez a típusú oszcillátor adódik. Az előző fejezetben vizsgált, van der Pol-oszcillátor a Duffing-tag elhanyagolásával kapható.

5.1. Az alkalmazott módszer

Ellentétben a korábban tárgyalt, van der Pol-oszcillátort leíró (24) egyenlettel, a (35) kifejezés együtthatóit egyidejűleg variáltam. A kezdeti értékeket továbbra is a Mininni és társai (2000) által illesztett paraméterekkel definiáltam:

$\omega_0 = 0.2993$, $\mu_0 = 0.2044$, $\xi_0 = 0.0102$, a Duffing-paramétert $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ -nek választottam. A $\mu(t)$, $\xi(t)$ és $\lambda(t)$ értékei nem függetlenek, a köztük fennálló kapcsolatok a dinamó egyenlet egyszerűsítése során adódnak (Lopes és Passos, 2008):

$$\xi(t) = \frac{C_\xi}{\mu(t)} \quad \text{és} \quad \lambda(t) = C_\lambda \frac{\mu(t)}{2}, \quad (36)$$

ahol a konstansok értéke:

$$C_\xi = \xi_0 \cdot \mu_0 = 0.002, \quad C_\lambda = 2 \frac{\lambda_0}{\mu_0} = 0.0005.$$

Ezeket az oszcillátor paramétereket $\mu(t)$ időfüggvény alapján határoztam meg, melyet folytonos, multiplikatív perturbációval definiáltam – 4.2. fejezet. A paraméterek az alábbi határok között változhatnak:

$$0.1\mu_0 < \mu(t) < 10\mu_0, \quad 0.75\xi_0 < \xi(t) < 100\xi_0, \quad 0 < \lambda(t) < 2\lambda_0. \quad (37)$$

A részletes vizsgálatokat itt $SSN = x^n(t)$, $n = 1.5$ esetére végeztem el, mert így kaptam a napcikluséhoz leginkább hasonló amplitúdókat. A szimulációkat ez esetben is 2000 évre futtattam. Az oszcillátornak továbbra is a 4.1. fejezetben leírtaknak kell eleget tennie.

5.2. Eredmények áttekintése

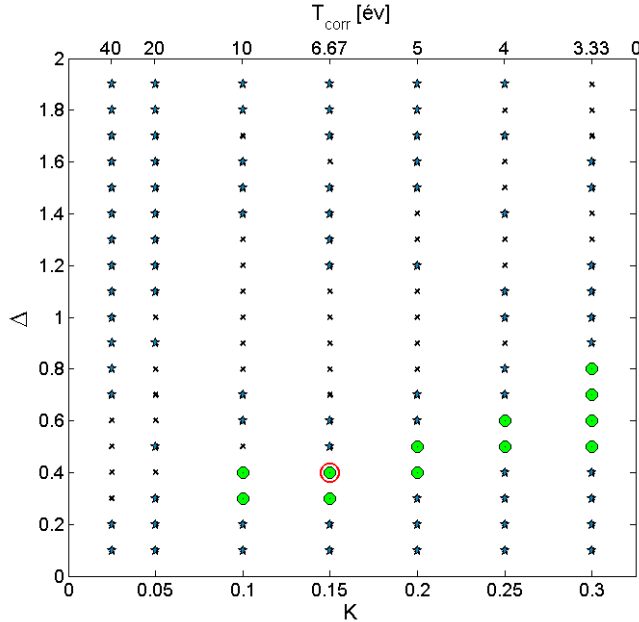
A van der Pol–Duffing-oszcillátor vizsgálata során a Duffing-paraméter értéke alapján két esetet különítettem el: $\lambda = \lambda_0$, illetve $\lambda = \lambda(t)$.

5.2.1. Konstans Duffing-paraméter

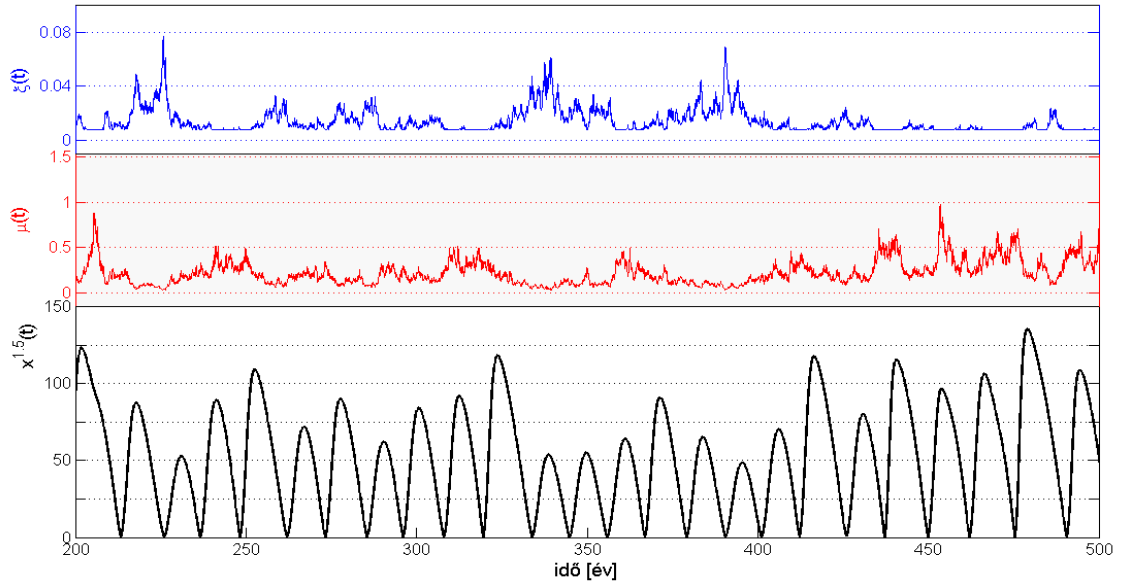
Az alábbi, 21. ábra mutatja a perturbációt jellemző paramétertér alakulását abban az esetben, amikor a van der Pol–Duffing-oszcillátor egyenletében $\mu(t)$ és $\xi(t)$ az idő függvényében változnak, a Duffing-paraméter viszont konstans értékű. Látható, hogy a korábbi, 19. ábrán szemléltetett esethez képest jóval több olyan eset adódik, amikor a modell együttesen mutatja az elvárt tulajdonságokat.

Az oszcillátor viselkedésére a 22. ábrán látható egy példa, ennek tulajdonságait a 4. táblázatban foglaltam össze.

A 11 000 évre futtatott szimuláció során azt tapasztaltam, hogy a jellemző periódusidők 8 és 18 év közé esnek – az eloszlást jellemző Gauss-görbe tulajdonságai: $\mu_T = 11.70$, $\sigma_T = 1.28$, $A_T = 128.83$. Az amplitúdók eloszlását közelítő Gauss-függvény: $\mu_A = 81.98$, $\sigma_A = 29.21$, $A_A = 76.40$.



21. ábra. Az x-tengelyen a sztochasztikus perturbáció relaxációs paramétere (lent), illetve az ennek megfelelő korrelációs idő (fent) látható. A csillagok a Waldmeier-effektus teljesülését jelölik, míg a zöld pontok azon (K, Δ) párokat, melyekre a napciklus viselkedését közelítő tulajdonságok együttesen teljesülnek – ld. 4.1. fejezet. A kis 'x'-ek esetén a Waldmeier-effektus nem teljesül.



22. ábra. Az ábra egy 300 éves intervallumot mutat példaként a két paraméterében perturbált van der Pol–Duffing-oszcillátor viselkedésére. A zajt a 21. ábrán bekarikázott ponthoz tartozó, $\Delta = 0.4$, $K = 0.15$ értékek jellemzik. A felső panel mutatja $\xi(t)$, a középső $\mu(t)$ paraméterek időbeli változását, míg az alsó az oszcillátor $x^{1.5}(t)$ viselkedését.

4. táblázat. A 22. ábrán látható oszcillátor-modell és a napciklus jellemzőit összehasonlító táblázat. A modell tulajdonságait a 2000 évre kiszámított $x^{1.5}(t)$ függvény tulajdonságai alapján határoztam meg.

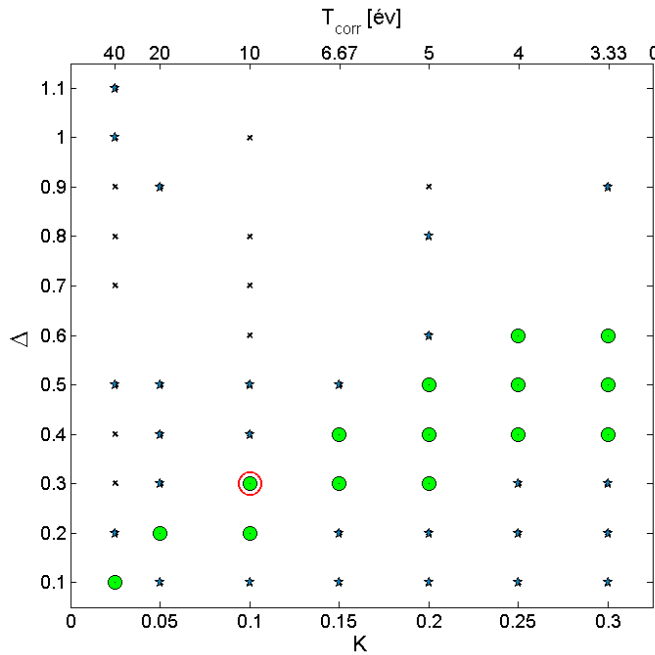
	$K_{\text{mer,fel}}$	$K_{\text{mer,le}}$	T [év]	rms_T [%]	rms_A [%]
Napfoltciklus	0.85	0.35	11.02	11	30
van der Pol–Duffing-oszcillátor	0.92	-0.32	12.30	11.37	25.76

5.2.2. Időben változó Duffing-paraméter

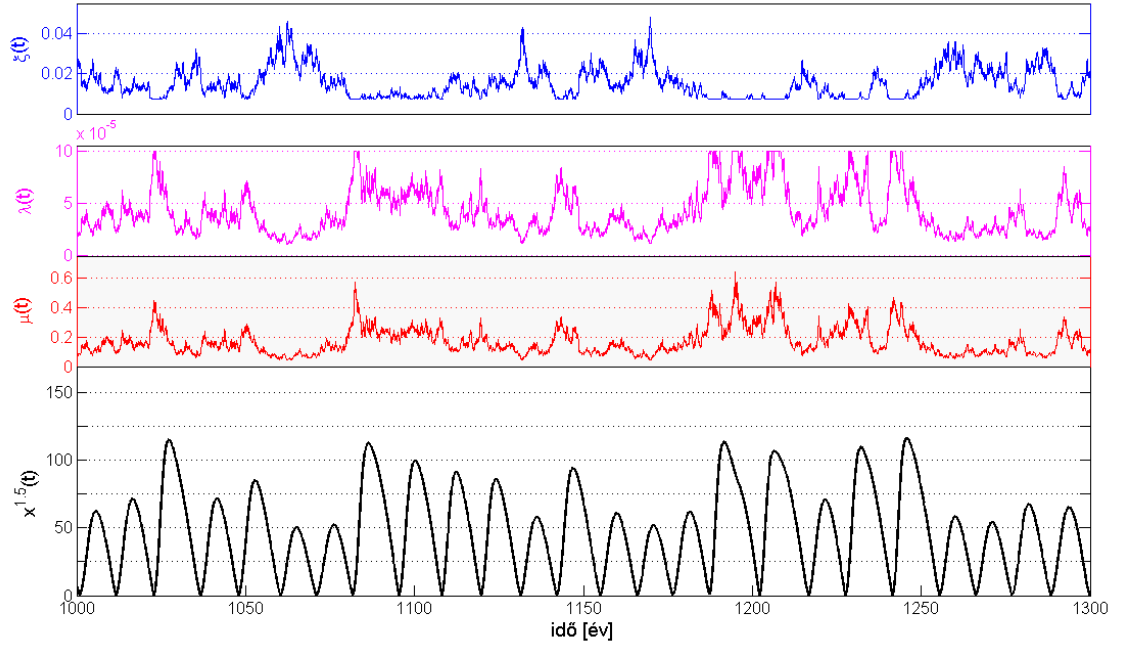
Ha mindhárom együttható, μ , ξ és λ is időfüggő, akkor a paramétertérben minden, a perturbációt jellemző időállandó esetére adódik kedvező tulajdonságú oszcillátormodell, ahogy az a 23. ábrán látható. Összehasonlítva az eddigi módszerek során kapott paraméterterekkel elmondható, hogy ebben az esetben adódik a legtöbb olyan modell, melyekre teljesülnek a 4.1. fejezetben tárgyalt elvárások.

Az oszcillátor viselkedésére a 24. ábrán látható egy példa, melynek tulajdonságai az 5. táblázatban olvashatók.

A periódusidők és az amplitúdók eloszlása a 11 000 éves szimuláció után az alábbi tulajdonságú Gauss-eloszlásokkal közelíthető. A ciklus-maximumok eloszlása esetén: $\mu_A = 85.26$, $\sigma_A = 26.24$, $A_A = 71.83$, illetve a ciklushosszakra: $\mu_T = 10.83$, $\sigma_T = 2.05$, $A_T = 173.06$



23. ábra. Az x-tengelyen a sztochasztikus perturbáció relaxációs paramétere (lent), illetve az ennek megfelelő korrelációs idő (fent) látható. A csillagok a Waldmeier-effektus teljesülését jelölik, míg a zöld pontok azon (K, Δ) párokat, melyekre a napciklus viselkedését közelítő tulajdonságok együttesen teljesülnek – ld. 4.1. fejezet. A kis 'x'-ek esetén a Waldmeier-effektus nem teljesül.



24. ábra. Az ábra egy 300 éves intervallumot mutat példaként a három paraméterében perturbált van der Pol–Duffing-oszcillátor viselkedésére. A zajt a 23. ábrán bekarikázott pont, $\Delta = 0.3$, $K = 0.1$ értékek jellemzi. A felső panel mutatja $\xi(t)$ időbeli változását, alatta $\lambda(t)$ és $\mu(t)$ függvények láthatók. Az oszcillátor kitérés-idő diagramja az alsó panelen látható – $x^{1.5}(t)$.

5. táblázat. A 24. ábrán látható oszcillátor-modell és a napciklus jellemzőit összehasonlító táblázat. A modell tulajdonságait a 2000 évre kiszámított $x^{1.5}(t)$ függvény tulajdonságai alapján határoztam meg.

	$K_{\text{mer,fel}}$	$K_{\text{mer,le}}$	T [év]	rms_T [%]	rms_A [%]
Napfoltciklus	0.85	0.35	11.02	11	30
van der Pol–Duffing-oszcillátor	0.92	-0.32	12.63	16.00	26.70

6. Összegzés

Munkám során a van der Pol-oszcillátor paramétereit külön-külön, illetve együttesen, véletlenszerűen perturbáltam eltérő módszerekkel és az így adódó oszcillátor-modellek tulajdonságait hasonlítottam össze a napciklus megfigyelt jellemzőivel. Azt vizsgáltam, hogy van-e olyan módszer, illetve perturbáló paraméter, mellyel az oszcillátor-modell a napfoltciklushoz hasonló jellegzetességeket mutat. A modellektől leginkább elvárt tulajdonság a Waldmeier-effektus teljesülése volt.

A napfoltciklus és az oszcillátor kitérés-idő függvénye közt többféle kapcsolat definiálható: $SSN = x^n(t)$, $n = 1, 1.5, 2$. Abban az esetben, amikor csak egy paraméterhez adtam véletlenszerű zajt, mindhárom definíciót felhasználtam vizsgálataim során. A szimulációkat minden esetben 2000 évre futtattam le.

Kapott eredményeim szerint a nemlinearitás paramétert, $\xi(t)$ -t multiplikatívan perturbálva (ld. 4.2. fejezet) adódik a napciklus tulajdonságait leginkább közelítő modell – a többi együttható értékét konstansnak definiálva. Más módszereket használva nem, vagy csak néhány alkalommal tapasztaltam az elvárt tulajdonságok (ld. 4.1. fejezet) együttes teljesülését.

A több paraméterében perturbált van der Pol- és van der Pol–Duffing-oszcillátor tanulmányozásakor az aszimmetria paraméter, $\mu(t)$ folytonos, multiplikatív perturbációjából kiindulva definiáltam $\xi(t)$, illetve $\lambda(t)$ értékeit. Az oszcillátorok $x^n(t)$ időfüggvényét $n = 1.5$ esetén vizsgáltam részletesen.

Feltérképeztem a perturbációt jellemző paraméterteret a Waldmeier-effektus és a további tulajdonságok teljesülése alapján. Eredményeim azt mutatják, hogy a modell számos esetben visszaadja a Waldmeier-szabályt és a többi elvárt jellemzőt. Ezek alapján elmondható, hogy modellemmel a napciklus viselkedését jól szimulálható adatsor hozható létre. Emellett a további kutatások során, a dinamó egyenletben szereplő, és az oszcillátor együtthatói közti megfeleltetés alapján a dinamó paramétereinek értékére megkorlátok tehetők.

Hivatkozások

- Bracewell, R. N.: 1988, "Three-halves law in sunspot cycle shape", *mnras* **230**, 535
- Cameron, R. and Schüssler, M.: 2007, Solar cycle prediction using precursors and flux transport models, *apj* **659**, 801
- Cameron, R. and Schüssler, M.: 2008, "A robust correlation between growth rate and amplitude of solar cycles: consequences for prediction methods", *ApJ* **685**, 1291
- Hathaway, D. H., Wilson, R. M., and Reichmann, E. J.: 1994, "The shape of the sunspot cycle", *SoPh* **151**, 177
- Kanamaru, T.: 2007, "Van der Pol oscillator", *Scholarpedia* **2(1)**, 2202
- Kanamaru, T.: 2008, "Duffing oscillator", *Scholarpedia* **3(3)**, 6327
- Kálmán, B.: 1999, "Az elmúlt napciklus tanulsága", *Magyar Tudomány* **47**, 797
- Longtin, A.: 2010, Stochastic dynamical systems, *Scholarpedia* **5(4)**, 1619
- Lopes, I. and Passos, D.: 2008, "A low-order solar dynamo model: Inferred meridional circulation variations since 1750", *ApJ* **686**, 1420
- Mininni, P., Gómez, D., and Mindlin, G.: 2000, "Stochastic relaxation oscillator model for the Solar Cycle", *PhRvL* **85**, 5476
- Parker, E.: 1955, "Hydromagnetic dynamo models", *ApJ* **122**, 293–314.
- Petrovay, K.: 2000, "What makes the Sun tick? The origin of the solar cycle", in *The Solar Cycle and Terrestrial Climate*, pp 3–14, ESA, SP-463
- Petrovay, K.: 2010, "Solar Cycle prediction", *lrsp* 7
- Usoskin, I., Solanki, S. K., and Kovaltsov, G. A.: 2007, "Grand minima and maxima of solar activity: new observational constraints", *A&A* **471**, 301
- Waldmeier, M.: 1935, "Neue Eigenschaften der Sonnenfleckenkurve", *Astronomische Mitteilungen, Zurich* **14(133)**, 105
- Wolf, R.: 1859, "Mittheilungen über die Sonnenflecken. I", *Astronomische Mitteilungen, Zurich* **1**, 3