

Rezonáns Neptunuszon túli objektumok vizsgálata

OTDK pályamunka

FEKETE MÓNKA ÉVA

I. éves Csillagász M.Sc.

ELTE TTK

Témavezető:

DR. ÉRDI BÁLINT

ELTE TTK, Csillagászati Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar



Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Középmozgás rezonanciák	4
2.1. Középmozgás rezonanciák	4
2.2. A 7/3 rezonancia	5
3. Modell és módszerek	6
3.1. Mozgásegyenletek	6
3.2. A rezonanciaváltozó	8
4. Rezonáns TNO-k keresése	9
4.1. Adatok és modellezés	9
4.2. Eredmények	10
5. A 7/3 rezonancia feltérképezése	13
5.1. Modellezés	13
5.2. Eredmények	14
6. Diszkusszió	20
6.1. Azonosított libráló TNO-k	20
6.2. A rezonancia megjelenése és a kezdeti pályaelemek kapcsolata	22
6.3. Az aszimmetrikus libráció jelenléte	22
6.4. Az eredmények összevetése valós TNO-kkal	24
7. Összefoglalás	26
Hivatkozások	28
Köszönetnyilvánítás	29

1. Bevezetés

A Neptunuszon túli objektumok (TNO-k) tanulmányozása egy fontos, élénk kutatási terület. Ezt több, a csillagászatban alapvető kérdés megválaszolása motiválja. A Naprendszer Neptunuszon túli régiójának megismerése kulcsot adhat a Naprendszer eredetéhez, a külső bolygók keletkezéséhez fűződő kérdésekhez. A belső Naprendszer fejlődésének és a földi élet kialakulásának megértéséhez is közelebb juthatunk ezen kis égitestek vizsgálatával: az ebből a régióból a Föld pályáját metsző pályára fejlődő üstökösök által víz juthat a bolygóra. A vizsgálatok az égitestek keletkezésére, fizikai tulajdonságaira és dinamikájára irányulnak. Figyelmemet az utóbbi területre összpontosítottam. Célom a $7/3$ arányú középmozgás rezonancia megismerése, melyhez több TNO is kötődik.

A rezonáns TNO-k a Kuiper-övbeli objektumok egy csoportjához tartoznak. Rezonanciájuk a Neptunusszal abban rejlik, hogy a TNO és a szóban forgó óriásbolygó relatív helyzetei periodikusan ismétlődnek, ezáltal a kis perturbációk felerősödnek. 10000 éves időskálán a Neptunusz perturbáló hatása viszonylag nagy, $\sim 1\%$ amplitúdójú oszcillációkat idéz elő a pályájukban. A Pluto volt az első ismert rezonáns TNO (1965) (Davies et al., 2008). Az 1990-es évek közepétől az ismert TNO-k száma nagymértékben nőtt, más arányú rezonanciákat is felfedeztek. Egyre bizonyosabbá vált, hogy a Neptunuszon túli régió szerkezete igen komplex. A jelenleg folyó kutatások már adnak becsléseket az egyes rezonáns populációk méretére, a pályaelemek (például excentricitás, inklináció) eloszlására. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Csillagászati Tanszékének égi mechanika kutatócsoportja – melynek keretein belül valósult meg a TDK dolgozatomban leírt kutatás is – vizsgálatokat folytatott a kaotikus és reguláris trajektóriák megjelenésével kapcsolatban, valamint az egyes középmozgás arányokra feltárták a fél nagytengely-excentricitás síkon azokat a régiókat, ahol rezonancia esete állhat fenn (Érdi et al., 2012). Mivel egyre több Neptunuszon túli objektumot katalogizálnak, a modellek összevetése valós égitestekkel jó fokmérője lehet a modell helyességének, pontosságának. Ez szolgált munkám kiindulópontjaként, melyben a kiválasztott $7/3$ rezonanciánál található TNO-k között kerestem a szakirodalomban eddig még nem ismert libráló TNO-kat. Az említett vizsgálat adta az ötletet, hogy a jelenséget általánosan is szemügyre vegyem. Arra kerestem a választ, vajon hova kell a pálya mentén elhelyezni az objektumot, hogy a rezonanciát indikáló kritikus paraméter (rezonanciaváltozó) libráljon. A kutatás tulajdonképpen a rezonancia megjelenése és a kezdeti pályaelemek közötti kapcsolat feltárására irányul. Ezt a kérdéskört korábban senki sem vizsgálta. A tanszéki kutatócsoport már végzett számításokat a $7/4$ rezonanciára, én a $7/3$ arányú rezonanciával kezdtem el foglalkozni.

Kutatásom céljai az alábbiak voltak:

- (a) Új libráló TNO-k datálása a 7/3 rezonanciánál
- (b) A kezdeti pályaelemek és a rezonancia megjelenése közti összefüggések keresése
- (c) A rezonanciaváltozó középértékének vizsgálata
- (d) A valós és fiktív testekre kapott eredmények összevetése

Dolgozatom 2. fejezetében bemutatom a középmozgás rezonanciákat. Ezt követően ismertetem a használt modellt és módszereket. A 4. és 5. fejezetekben a valós TNO-kra, illetve a fiktív próbatestekre végzett numerikus szimulációt és annak eredményeit fejtem ki. Végül értékelem és összefoglalom a kapott eredményeket.

2. Középmozgás rezonanciák

2.1. Középmozgás rezonanciák

Két test akkor van középmozgás rezonanciában, ha középmozgásaik aránya jó közelítéssel felírható kis egész számok hányadosaként:

$$\frac{n}{n'} = \frac{p+q}{p}, \quad (1)$$

ahol p és q relatív prímek.

A rezonancia erőssége. A rezonancia rendjét q jelöli. Mivel a rezonancia erőssége a rend növekedésével csökken, legfontosabbak az alacsony rendű rezonanciák ($q = 1, 2$). Azonban a magasabb rendű rezonanciák is fontossá válhatnak. Például a 13/8 és 8/5 arányú rezonanciák befolyásolhatják a Vénusz és a Föld mozgását (Bazsó et al., 2010).

E. W. Thommes (Thommes, 2005) kutatásai azt mutatják, hogy a magasabb rendű rezonanciák (5/2, 7/4, 9/5) bolygórendszerek keletkezésére is hatással lehetnek. Továbbá számos TNO librál ilyen rezonanciákban (5/2, 7/3, 7/4, 9/5) (Chiang et al., 2003; Emel'Yanenko & Kiseleva, 2008; Gladman, Marsden & Vanlaerhoven, 2008). A magasabb rendű rezonanciák nagy excentricitásokra kiváltképp jelentősek, ugyanis a perturbáció az e q -ik hatványával arányos, ezáltal nagy e nagy e^q -t von maga után. Mint ismeretes, a TNO-k egy része nagy e -vel rendelkezik.

Belső és külső rezonanciák. Megkülönböztetünk belső és külső rezonanciákat. Előbbi akkor áll fenn, ha a rezonanciában lévő test pályájának fél nagytengelye a Naphoz képest nézve kisebb, mint a mozgását perturbáló égitesté. Utóbbi ennek ellenkezője, azaz a perturbáló égitest pályájának fél nagytengelye a kisebb.

2.2. A 7/3 rezonancia

Az általam választott rezonancia 7/3 arányú külső rezonancia. Az itt jelen lévő TNO populáció méretét 4000-re becsülik (Gladman et al., 2012). Ez egy eddig kevésbé vizsgált rezonancia, mivel negyedrendű, ráadásul a rá jellemző fél nagytengely (a_r) 52 és 54 AU közé esik, ami az erős 2/1 arányú ($45 AU \lesssim a_r \lesssim 50 AU$) rezonancián túl található. Az előző alfejezetben írt érveken kívül azért is érdemes ezt a rezonanciát feltérképezni, mert az itt megfigyelt TNO-k többsége az eddigi vizsgálatok alapján librál, azaz a jelenség remekül tetten érhető ennél a rezonanciánál.

3. Modell és módszerek

3.1. Mozgásegyenletek

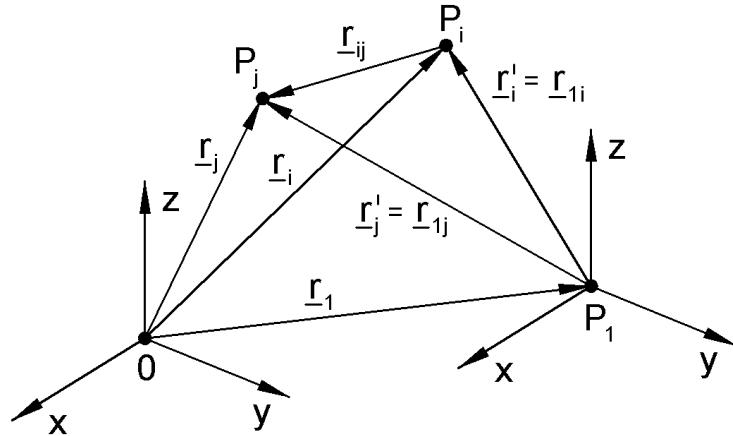
A választott rezonancia vizsgálata során gravitációs hattest-problémával közelítettem a rendszert. A hat test a Nap, a TNO és a négy óriásbolygó (Jupiter, Szaturnusz, Uránusz, Neptunusz). A kőzetbolygókat úgy vettem figyelembe, hogy tömegüket a Napéhoz adtam.

Jelölje az égitesteket $P_1, P_2, \dots, P_6$, tömegüket pedig $m_1, m_2, \dots, m_6$. Legyen továbbá a P_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) test O_{xyz} inerciarendszerben vett helyvektora $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Most a hattest-probléma azon esetével állunk szemben, amikor az egyik test (legyen ez P_1) jóval nagyobb tömegű a többinél. Ebből kifolyólag P_i -k ($i = 2, 3, \dots, 6$) mozgását érdemes P_1 -hez, azaz a Naphoz viszonyítva vizsgálni. Ehhez célszerű az alábbi vektorok bevezetése (1. ábra):

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_{1i} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1, \quad (2a)$$

$$\mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_{1j} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_1, \quad (2b)$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_j - \mathbf{r}'_i. \quad (2c)$$



1. ábra. A probléma sematikus ábrája és az alkalmazott jelölések.

A vektorok hossza:

$$r'_i = |\underline{\mathbf{r}}'_i| = \sqrt{x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i}, \quad (3a)$$

$$r'_j = |\underline{\mathbf{r}}'_j| = \sqrt{x'^2_j + y'^2_j + z'^2_j}, \quad (3b)$$

$$r_{ij} = |\underline{\mathbf{r}}_{ij}| = \sqrt{(x'_j - x'_i)^2 + (y'_j - y'_i)^2 + (z'_j - z'_i)^2}. \quad (3c)$$

Vezessük be az R_i perturbációs függvényt:

$$R_i = k^2 \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^6 m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{x'_j x'_i + y'_j y'_i + z'_j z'_i}{r_j'^3} \right), \quad (4)$$

ahol k a Gauss-féle gravitációs állandó.

Ekkor komponensenként kiírva a mozgásegyenletek:

$$\ddot{x}'_i + \frac{\mu_i}{r_i'^3} x'_i = \frac{\partial R_i}{\partial x'_i}, \quad (5a)$$

$$\ddot{y}'_i + \frac{\mu_i}{r_i'^3} y'_i = \frac{\partial R_i}{\partial y'_i}, \quad i = 2, 3, \dots, 6 \quad (5b)$$

$$\ddot{z}'_i + \frac{\mu_i}{r_i'^3} z'_i = \frac{\partial R_i}{\partial z'_i}, \quad (5c)$$

ahol

$$\mu_i = k^2(m'_\odot + m_i). \quad (6)$$

A μ_i felírásában szereplő $m'_\odot$ a belső bolygók tömegével megnövelt naptömeg.

A (5a)-(5b)-(5c) egyenletek tehát a P_i tömegpontok mozgását adják meg P_1 körül P_1 és a többi P_j ($j = 2, 3, \dots, 6, j \neq i$) test együttes hatását figyelembe véve. P_j -k hatása P_i -re az R_i perturbációs függvényen keresztül jelenik meg. Az R_i -ben a zárójel első tagja ($\frac{1}{r_{ij}}$) adja meg P_j -nek P_i -re gyakorolt közvetlen hatását. A zárójelben szereplő második tag pedig P_j közvetett hatását írja le, hiszen P_j befolyásolja a Nap inerciarendszerbeli mozgását.

A mozgásegyenletek numerikus integrálását a változó lépésközt lehetővé tevő beágyazott Runge-Kutta-Dormand 7(6) (Dormand & Prince, 1978) integrátorral végeztem. A módszer részletei megtalálhatóak a nevezett cikkben. A kezdeti értékek az égitestek hely- és sebességkoordinátái a választott epochára.

3.2. A rezonanciaváltozó

Külső rezonancia esetén definiáljuk az alábbi θ rezonanciaváltozót:

$$\theta = (p + q)\lambda_T - p\lambda_N - q\varpi_T, \quad (7)$$

ahol λ_T és λ_N a TNO és a Neptunusz közepes pályamenti hosszúságai, ϖ_T a TNO perihéliumhosszúsága. Ebből az látszik, hogy a Neptunusz pálya mentén elfoglalt helye a J2000 ekliptikus referenciatengelyhez képest nézve kapcsolatban áll a TNO λ_T adott időpontbeli helyzetével és a TNO ϖ_T perihéliumhelyzetével. Rezonancia esetén a perturbációs függvény sorfejtésében a θ -tól és annak többszöröseitől függő tagok dominálnak. Ezek reprezentálják a perturbációs függvény rezonáns részét. Ha a rezonanciaváltozó nem vesz fel minden értéket 0° és 360° között, akkor azt mondjuk, hogy θ librál. Valós TNO-k esetében θ legtöbbször 180° körül oszcillál (librál) valamilyen amplitúdóval. Emiatt a rezonáns TNO-k kifejezés mellett szokás a libráló TNO-k használata is.

A rezonanciaváltozó a két égitest együttállásainak helyzetét is leírja (ekkor $\lambda_T = \lambda_N$), amikor is egymáshoz legközelebb vannak, ezáltal a perturbációs függvény rezonáns része megadja a legnagyobb perturbációkat.

Szimmetrikus és aszimmetrikus libráció. Szimmetrikus librációról beszélünk, amikor a rezonanciaváltozó értéke 0° vagy 180° körül librál. Vannak emellett olyan külső rezonanciák is, ahol léteznek úgynevezett aszimmetrikus librációk. Ekkor a kritikus paraméter értéke nem 180° körül oszcillál (Beaugé, 1994).

4. Rezonáns TNO-k keresése

4.1. Adatok és modellezés

Az IAU Minor Planet Center (*Minor Planet Center*) adatbázisából az 52 és 54 AU közötti tartományból gyűjtöttem ki a TNO-kat; ezek lehetnek 7/3 arányú rezonanciában a Neptunusszal. Az adatbázisban szereplő 1070 objektum közül 16 darab volt ebben a fél nagytengely intervallumban.

A modellezéshez szükséges kezdeti feltételeket az óriásbolygókra a JPL HORIZONS rendszerből (*JPL HORIZONS System*) vettem, mely a legújabb DE405 efemeriszen alapul. A használt tömegértékeket az 1. táblázat tartalmazza.

Bolygó	Tömeg [$M_{\odot}$]
Jupiter	0.00095479194
Szaturnusz	0.0002858860
Uránusz	0.00004366244
Neptunusz	0.00005151389

1. táblázat. A modellezésben használt óriásbolygó tömegek.

A TNO-knál nem közvetlenül a kezdeti hely- és sebességkoordinátákat adtam meg, hanem az adott epochára vonatkozó pályaelemeket, melyekből a program efemerisz számítással generálta a kezdeti feltételeket. A használt pályaelemrendszer:

- a fél nagytengely
- e excentricitás
- i pályahajlás
- Ω felszálló csomó hossza
- ω pericentrum argumentuma
- M középanomália

A pályaelemek 15 esetben a K129U (2012.09.30. 0^h UTC), 1 esetben a K125D epochára (2012.05.13. 0^h UTC) voltak megadva. Ezt a kezdőfeltételek megadásakor kellett figyelembe venni, hogy az összes égitest kezdeti hely- és sebességkoordinátái azonos epochára legyenek felírva.

A programmal az integrálást először 50000 évre végeztem el. Ez az időtartam elegendőnek bizonyult arra, hogy megállapíthassuk: a rezonanciaváltozó librál-e vagy cirkulál. Libráló TNO esetén az integrálást 1 millió évre is elvégeztem. Hasonlóképp jártam el akkor is, ha a kritikus paraméter természete nehezen eldönthetőnek bizonyult.

Rezonancia akkor áll fenn, ha θ nem vesz fel minden lehetséges értéket 0° és 360° között, ezért a libráció felismeréséhez θ időbeli (t) alakulását kell megnézni. Ezenkívül a rezonanciaváltozó [(7)], illetve a középanomália definíciójából következően a jelenséget a közepes pályamenti hosszúságok különbségeinek ($\lambda_T - \lambda_N$) és a TNO középanomáliájának (M_T) a kapcsolatát vizsgálva is hasznos tanulmányozni:

$$M_T = \lambda_T - \varpi_T. \quad (8)$$

Ha ϖ_T -t (7)-(8)-ból kiküszöböljük, akkor egyszerűsítés és kis átrendezés után a következőt kapjuk:

$$\lambda_T - \lambda_N = \frac{\theta}{p} - \frac{q}{p} M_T. \quad (9)$$

Együttáláskor $\lambda_T \cong \lambda_N$ így ennek centrumait is megtudhatjuk, az

$$M_T = \frac{\theta + 2l \cdot 180^\circ}{q} \quad (10)$$

összefüggésből, ahol $l \in \mathbb{Z}^+$.

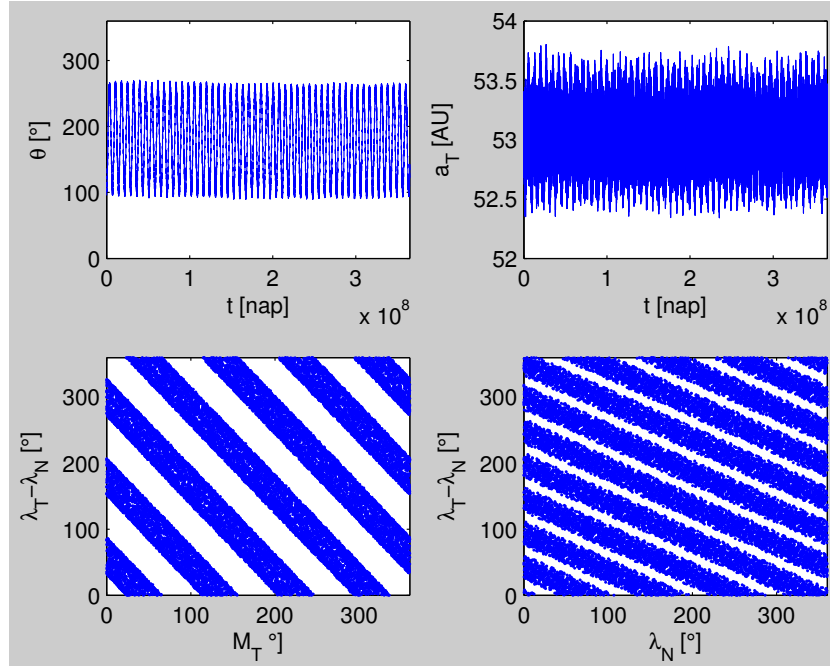
4.2. Eredmények

A vizsgált 16 objektum között 7 rezonáns TNO-t találtam. A libráló égitesteket és azok kezdeti pályaelemeit a K129U epochára a 2. táblázat tartalmazza.

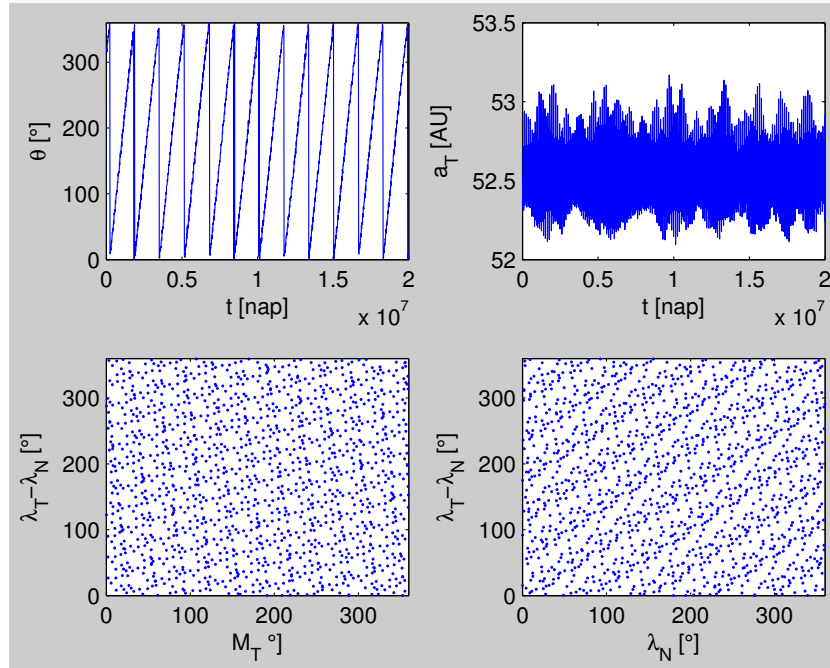
A számítások eredményeinek szemléltetésére készítettem egy olyan ábraegyüttest, amely bemutatja a rezonanciaváltozó (θ) és a TNO fél nagytengelyének (a_T) időbeli (t) alakulását, ezenkívül felfesti a Neptunusz és a TNO közepes pályamenti hosszúságainak különbsége ($\lambda_T - \lambda_N$) és a TNO középanomáliája (M_T) közötti kapcsolatot, valamint a TNO Neptunuszhoz képesti relatív helyzetét. Utóbbi két esetben sávok szerkezet rajzolódik ki, a sávok szélessége a librációs amplitúdótól függ. A 2. ábra a 2001 XT254 nevű libráló TNO-ra kapott eredményeket mutatja. A 3. ábra az 1995 TL8 jelű, nem libráló TNO-t mutatja.

Név	a [AU]	e	i [°]	Ω [°]	ω [°]	M [°]
2002 GX32	52.8029681	0.3733647	13.95458	28.22019	185.54101	14.89989
2001 XT254	53.2546714	0.3258986	0.51652	359.5953	132.55788	357.29861
1999 CV118	53.030588	0.2935225	5.47158	305.59712	147.935	28.50254
2004 DJ71	53.2108262	0.384632	11.29708	101.5641	55.9626	357.1005
2002 CZ248	53.322004	0.3927595	5.46411	135.17166	311.06979	29.07985
2008 CT190	52.8715311	0.3439232	38.82686	103.59491	47.3634	0.925
2010 FE49	53.5910107	0.3728093	11.71745	57.90047	131.01231	7.53766

2. táblázat. A libráló TNO-k és azok kezdeti pályaelemei a K129U epochára: a fél nagytengely, e excentricitás, i inklináció, Ω felszálló csomó hossza, ω pericentrum argumentuma, M középanomália.



2. ábra. A 2001 XT254 jelű libráló TNO-ra kapott eredmények szemléltetése. θ a rezonanciaváltozó, t az idő, a_T a TNO fél nagytengelye, λ_N a Neptunusz közepes pályamenti hosszúsága, $(\lambda_T - \lambda_N)$ a TNO és a Neptunusz közepes pályamenti hosszúságának különbsége, M_T a TNO középanomáliája.



3. ábra. A 1995 TL8 jelű, nem libráló TNO-ra kapott eredmények szemléltetése. θ a rezonanciaváltozó, t az idő, a_T a TNO fél nagytengelye, λ_N a Neptunusz közepes pályamenti hosszúsága, $(\lambda_T - \lambda_N)$ a TNO és a Neptunusz közepes pályamenti hosszúságának különbsége, M_T a TNO középanomáliája.

5. A 7/3 rezonancia feltérképezése

A konkrét égitestek vizsgálata felvetette azt a kérdéskört, hogy a libráció kialakulása a 7/3 rezonanciában milyen feltételekhez kötődik. Numerikus szimulációval 0,41 excentricitás értékig vizsgáltam a jelenséget, mivel a talált TNO-k is nagy excentricitással ($e \approx 0,3 - 0,4$) librálnak.

5.1. Modellezés

A (5a)-(5b)-(5c) mozgásegyenleteket a Runge-Kutta-Dormand 7(6) módszerrel integráltam. Az integrálási idő fizikai egységekben 20000 évnak felel meg. Ez az időtartam már elegendően hosszúnak bizonyult a libráció kimutatásához.

A kezdeti feltételeket a K129U (2012.09.30. 0^h UTC) epochára adtam meg. Az óriásbolygókra itt is a JPL HORIZONS rendszerből (*JPL HORIZONS System*) származó adatokat adtam meg és a 4. fejezetben ismertetett tömegeket használtam.

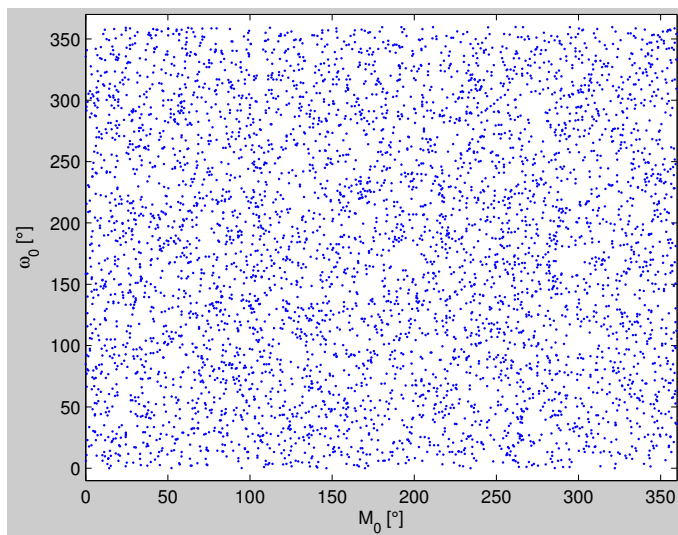
A próbatestek pályaelemeit ($a, e, i, \Omega, \omega, M$) a következőképp választottam meg.

Ω és i A pályaelemek számából kifolyólag a teljes paraméterkészlet lefedése rendkívül időigényes lenne, így érdemes az $\Omega = 0$ és $i = 0$ egyszerűsítést bevezetni.

M és ω Előállításukra véletlenszám-generátort használtam.

a és e A félnagy tengely és az excentricitás esetében szükség volt egy olyan lépésköz megválasztására, ami az összefüggések jellegét az egyes kezdőhelyekre jól demonstrálja. Ehhez a -t először $\Delta a = 0,05 AU$, e -t $\Delta e = 0,01$ -dal változtattam. Ezután futtatások alapján a fél nagy tengelyt 52 és 54 AU között $\Delta a = 0,1 AU$ értékkel változtattam, az excentricitást pedig 0,1 és 0,41 között $\Delta e = 0,04$ értékkel.

Egy kiválasztott (a, e) párra 5000 kezdőhelyről indítottam el a fiktív TNO-t. A 4. ábra 5000 véletlenszám-generátorral választott M_0 és ω_0 értéket tükröz. A pontok az $M_0\omega_0$ síkot homogén módon töltik ki. Mivel e két paraméter összege a közepes pályamenti hosszúság ($\lambda_0 = \omega_0 + M_0$), ezért levonhatjuk a következtetést, hogy ennyi kezdőhely jól lefedi az égitest pályáját.

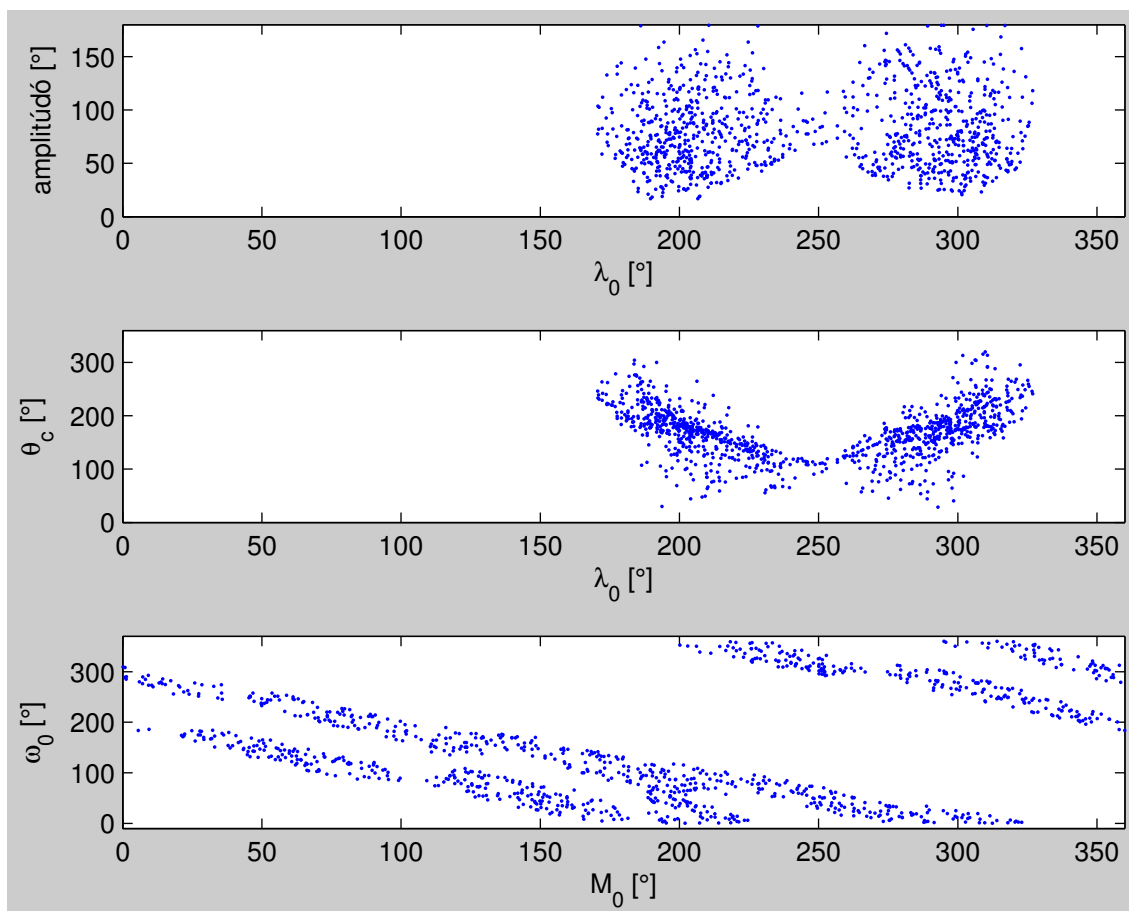


4. ábra. 5000 véletlenszám-generátorral választott M_0 és ω_0 ábrázolása.

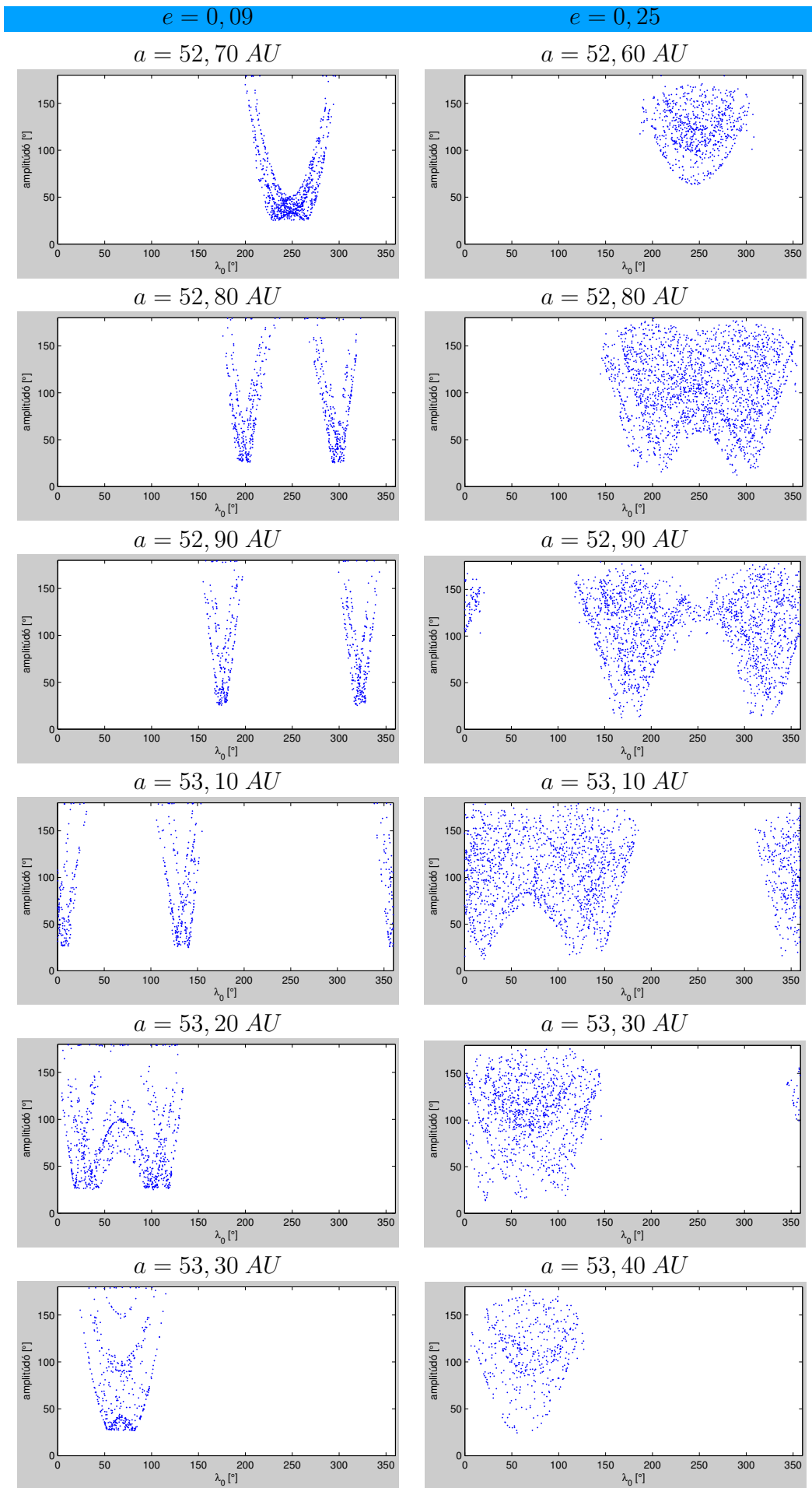
5.2. Eredmények

11 különböző e és 21 különböző a értékre vizsgáltam azt, hogy mikor alakulhat ki libráció. Ez összesen 231 futtatást jelent, mindegyikben 5000 próbatestet szimulálva. A librációra vonatkozó összefüggéseket az alábbi párok ábrázolásával tártam fel: librációs amplitúdó- λ_0 , θ_c - λ_0 (ahol θ_c a rezonanciaváltozó középértéke) és ω_0 - M_0 . Erre egy példa az 5. ábrán látható.

A libráció lehetséges helyeinek megkeresése végett egy kiválasztott excentricitásra a fél nagytengely mentén végigmentem a rezonancián, majd ábrázoltam az amplitúdó- λ_0 kapcsolatot. A viselkedést a 3. táblázatba helyezett ábrasorozat mutatja egy alacsony ($e = 0,09$) és egy közepes ($e = 0,25$) excentricitásra.



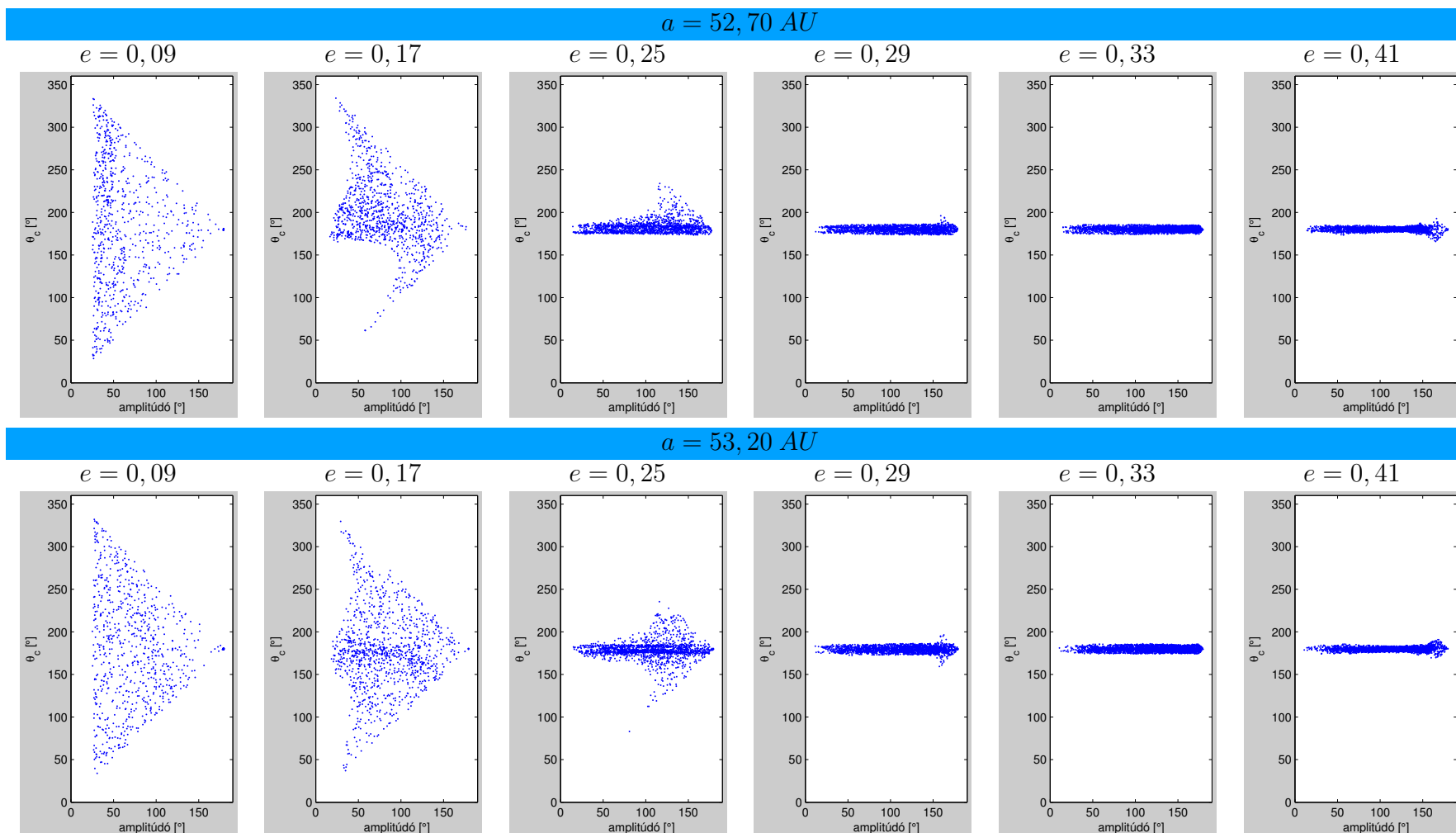
5. ábra. A librációs amplitúdó- λ_0 , θ_c - λ_0 és ω_0 - M_0 kapcsolatok megjelenítése az $e = 0, 17$ és $a = 52, 80$ AU feltételekre talált libráló objektumoknál.



3. táblázat. A librációs amplitúdó- λ_0 kapcsolat rögzített e esetén. A bal oldali oszlopban $e = 0,09$, a jobb oldali oszlopban $e = 0,25$.

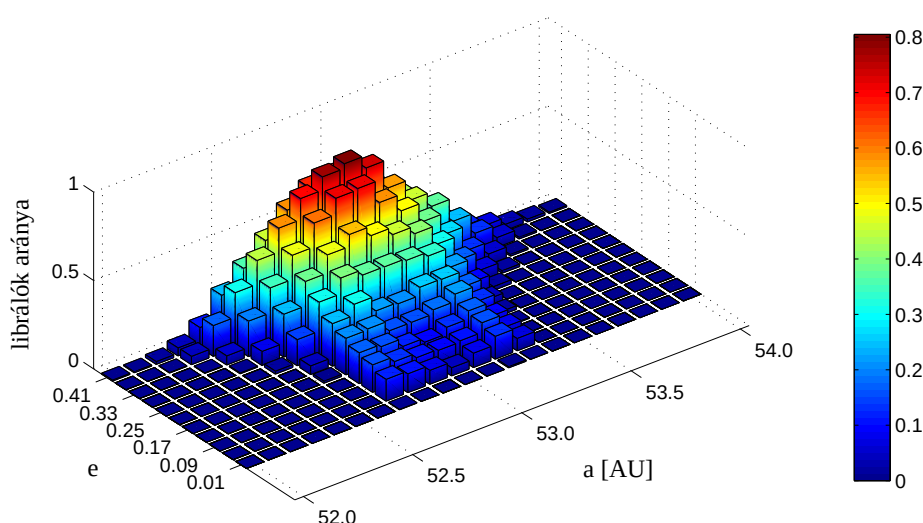
Látható, hogy rögzített e -re a rezonancia bal oldalán (tehát kisebb a -k esetén) a libráció lehetősége $\lambda = 250^\circ$ körül jelenik meg. A fél nagytengely növekedésével az itt felsejlő szerkezet két részre válik, és kisebb, illetve nagyobb λ -k felé tolódik el. A két tartomány végül 50° és 100° között összeolvad. Továbbá alacsony e -nél a megjelenő struktúrák különállóbbak, nagyobb e -nél viszont összefolynak.

A rezonanciaváltozó közéértéket (θ_c) az amplitúdó függvényében rögzített a mellett érdemes vizsgálni. A 4. táblázat ábrái $a = 52,70 \text{ AU}$ és $a = 53,32 \text{ AU}$ fél nagytengelyre mutatják az eredményeket a viselkedés jellegét jól megvilágító e -kre: 0,09; 0,17; 0,25; 0,29; 0,33; 0,41. Az $a = 52,70 \text{ AU}$ értékre kis excentricitásoknál θ_c a lehetséges háromszög alakú tartományt – hiszen minél nagyobb az amplitúdó, annál kisebb mozgástere van θ_c -nek, hogy 0° és 360° között maradjon – teljesen betölti. Az excentricitást növelve a pontok egyre inkább rásimulnak a $\theta_c = 180^\circ$ egyenesre egészen $e = 0,33$ -ig. Ennél az a -nál ez aszimmetrikusan történt, de nem minden esetben van így. Utóbbi szimmetrikus szűkülés látható a táblázat alsó sorában $a = 53,20 \text{ AU}$ -ra. Az $e = 0,41$ -nél enyhe szétnyílás tapasztalható 170° körüli amplitúdónál.



4. táblázat. A θ_c -amplitúdó kapcsolat rögzített a esetén. A felső sorban $a = 52,70 \text{ AU}$, az alsó sorban $a = 53,20 \text{ AU}$.

Megvizsgáltam továbbá, hogy milyen kapcsolat van az a , e értékek megválasztása és a libráció megjelenési helyei között. Az ehhez készített 6. ábra azt mutatja egy 3 dimenziós oszlopdiaqramon, hogy a választott fél nagytengely és excentricitás értékre az 5000 kezdőhely hányad részére jelent meg libráció. Az ábra kirajzolja az ae síkon a librációs tartományt. A tartomány szimmetrikus, középpontja körülbelül a $7/3$ rezonanciához tartozó fél nagytengely-intervallum közepére, azaz $a = 53 \text{ AU}$ -ra esik. E középérték és nagy e -k felé haladva a libráló objektumok aránya egyre nő. Libráló TNO-k legnagyobb valószínűséggel tehát ebben a tartományban várhatók.

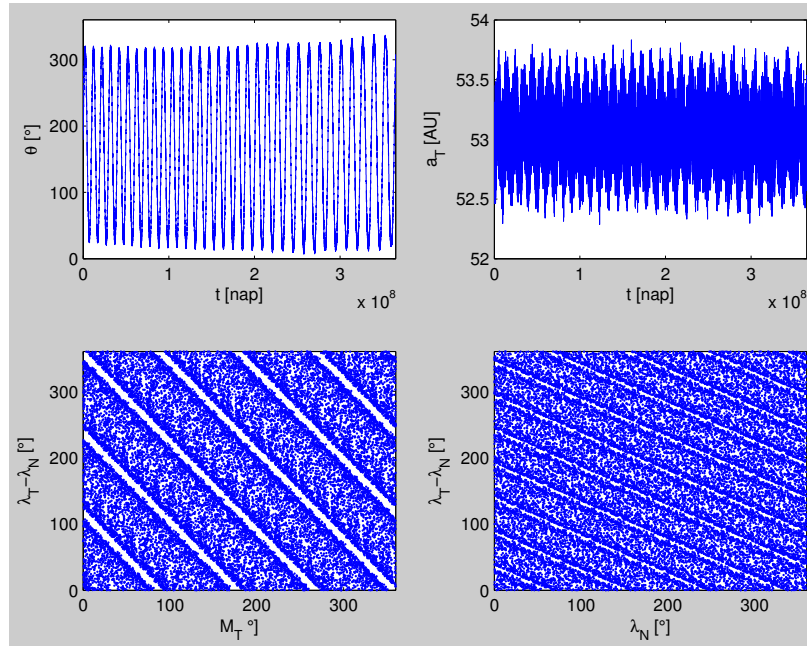


6. ábra. A libráló TNO-k aránya a vizsgált (a, e) párokra, adatpáronként 5000 próbatestre nézve.

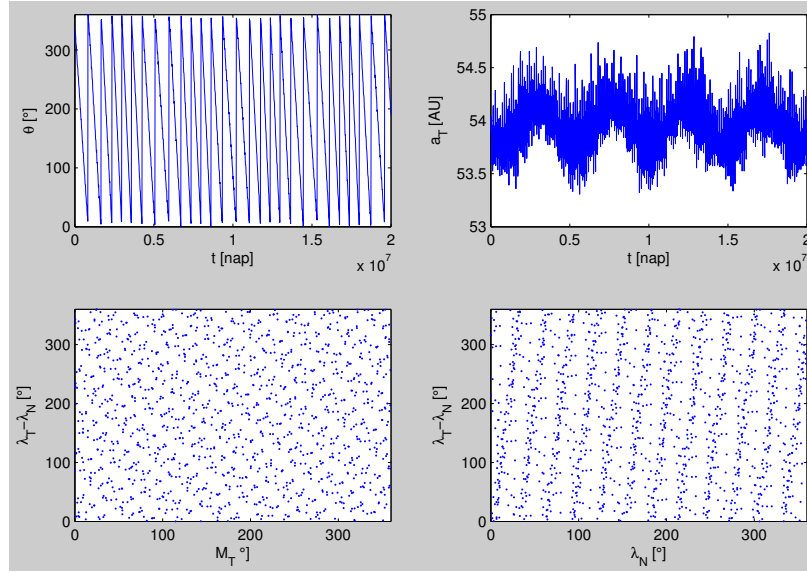
6. Diszkusszió

6.1. Azonosított libráló TNO-k

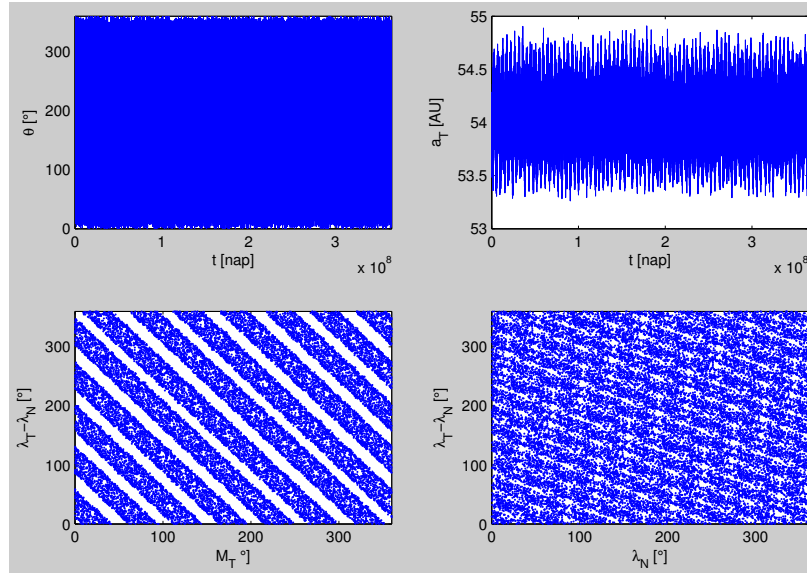
A 7 azonosított libráló TNO közül eddig ötöt tartottak számon rezonánsként (Érdi et al., 2012; Lykawka & Mukai, 2007; Gladman et al., 2012). A 2008 CT190 és 2010 FE49 objektumoknál ezt én mutattam ki először. A 2008 CT190 jelű TNO-ra kapott eredmények a 7. ábrán láthatók 1 millió évre integrálva. A 2010 FE49 TNO-nál valóban nehéz felismerni a jelenséget, mivel a rezonanciaváltozó közel 180° -kal librál, továbbá a TNO Neptunushoz képesti relatív helyzetét mutató ábrán sem rajzolódott ki sávos szerkezet. Tehát egyedül a $(\lambda_T - \lambda_N)$ és a TNO középanomáliája (M_T) közötti kapcsolat sejtette, hogy egy libráló objektumról van szó. A 8. és 9. ábrák 2010 FE49-re mutatják az összefüggéseket 50000, illetve 1 millió évre integrálva.



7. ábra. A 2008 CT190 jelű TNO-ra kapott eredmények szemléltetése 1 millió évre integrálva. θ a rezonanciaváltozó, t az idő, a_T a TNO fél nagytengelye, λ_N a Neptunusz közepes pályamenti hosszúsága ($\lambda_T - \lambda_N$) a TNO és a Neptunuszt közepes pályamenti hosszúságának különbsége, M_T a TNO középanomáliája.



8. ábra. A 2010 FE49 jelű TNO-ra kapott eredmények szemléltetése 50000 évre integrálva. θ a rezonanciaváltozó, t az idő, a_T a TNO fél nagytengelye, λ_N a Neptunusz közepes pályamenti hosszúsága ($\lambda_T - \lambda_N$) a TNO és a Neptunuszt közepes pályamenti hosszúságának különbsége, M_T a TNO középánomáliája.



9. ábra. A 2010 FE49 jelű rezonáns TNO-ra kapott eredmények szemléltetése 1 millió évre integrálva. θ a rezonanciaváltozó, t az idő, a_T a TNO fél nagytengelye, λ_N a Neptunusz közepes pályamenti hosszúsága ($\lambda_T - \lambda_N$) a TNO és a Neptunuszt közepes pályamenti hosszúságának különbsége, M_T a TNO középánomáliája.

6.2. A rezonancia megjelenése és a kezdeti pályaelemek kapcsolata

A rezonancia megjelenését illetően az a következtetés vonható le, hogy vannak olyan librációs centrumok, ahonnan a testet indítva librálni fog a rezonanciaváltozó. Ezek nagy e -knél összefolynak, tehát itt a pályán több, a libráció kialakulását előidéző pozíció van.

Továbbá megállapítható, hogy ha a librációs tartományban egyre közeledünk a szimmetriatengely, azaz $a = 53 AU$ és nagyobb e -k felé, akkor a libráló objektumok aránya egyre nő. Ebből az következik, hogy ezeknél a pályáknál több olyan kezdőhely van, ahonnan a testet indítva librációt tapasztalunk, ami a rögzített e -kből megállapított jellemzőt erősíti meg.

Rögzített a mellett a rezonanciaváltozó középértéke szimmetrikusan vagy aszimmetrikusan rásimul e növelése mellett a $\theta_c = 180^\circ$ egyenesre körülbelül $e = 0,33$ -nál. Hogy mikor melyik összehúzódas valósul meg, ezzel a lépésközzel nem vizsgálható megbízhatóan. A jelenlegi adatokból úgy tűnik, kis a -nál aszimmetrikus a szűkülés, majd a rezonancia mentén haladva szimmetrikussá válik. Az $a = 52,30$ értéknél mintha újra meg bomlana a szimmetrikus jelleg. Az aszimmetrikus libráció magasabb excentricitásoknál való hiányának magyarázatát a következő alfejezetben fejtem ki.

6.3. Az aszimmetrikus libráció jelenléte

A vizsgált libráló TNO-k a Neptunusszal állnak $7/3$ arányú rezonanciában. Avégett, hogy az itt jelen levő aszimmetrikus libráció természetére fényt derítsek, a perturbált kéttest-probléma perturbációs függvénye Laplace-féle sorfejtésének konvergenciáját vizsgáltam. Ehhez a Sundman-kritériumot alkalmaztam, melynek részletei a Laplace-féle sorfejtéssel együtt megtalálhatók S. Ferraz-Mello cikkében (Ferraz-Mello, 1993).

A TNO és a Neptunusz fél nagytengelyét jelölje rendre a_T és a_N , excentricitását e_T és e_N . Vezessük be a G_i függvényeket:

$$G_0(e) = 1 - 2e + e^2 - \frac{2}{3}e^3 + \frac{2}{3}e^4 + \dots, \quad (11)$$

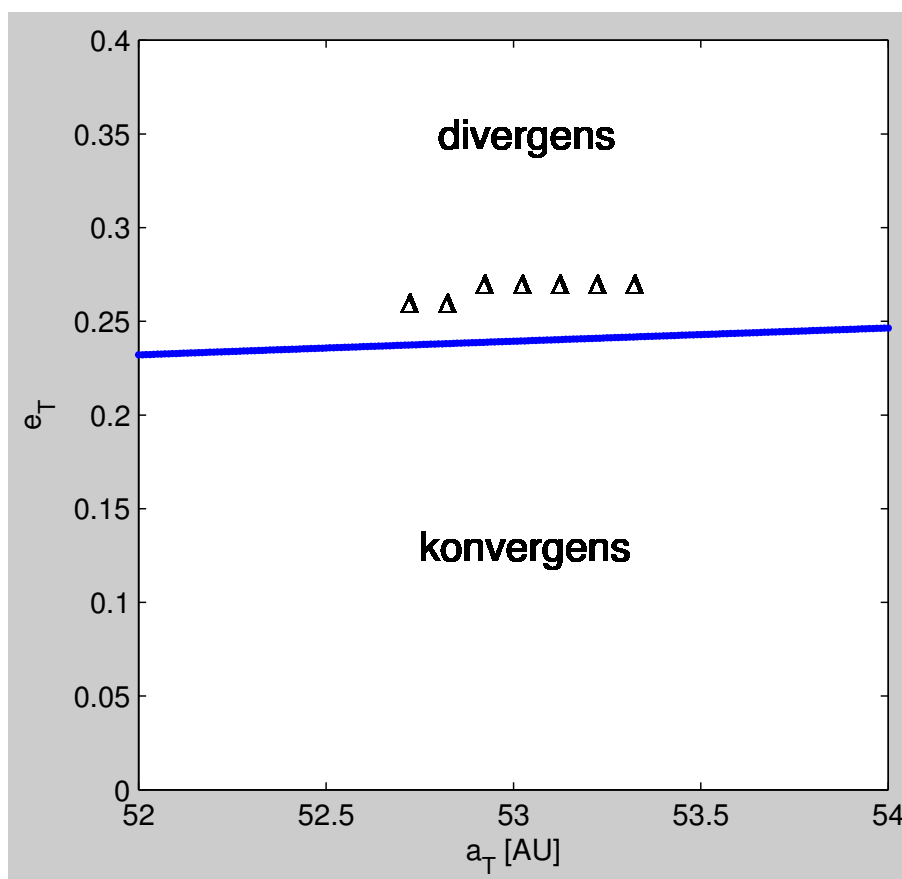
$$G_1(e) = 1 + 2e + e^2 + \frac{2}{3}e^3 + \frac{2}{3}e^4 + \dots \quad (12)$$

A Laplace-féle sorfejtés akkor lesz konvergens, ha fennáll az alábbi összefüggés:

$$a_T G_0(e_T) > a_N G_1(e_N), \quad (a_T > a_N). \quad (13)$$

Ellenkező esetben a sorfejtés divergens.

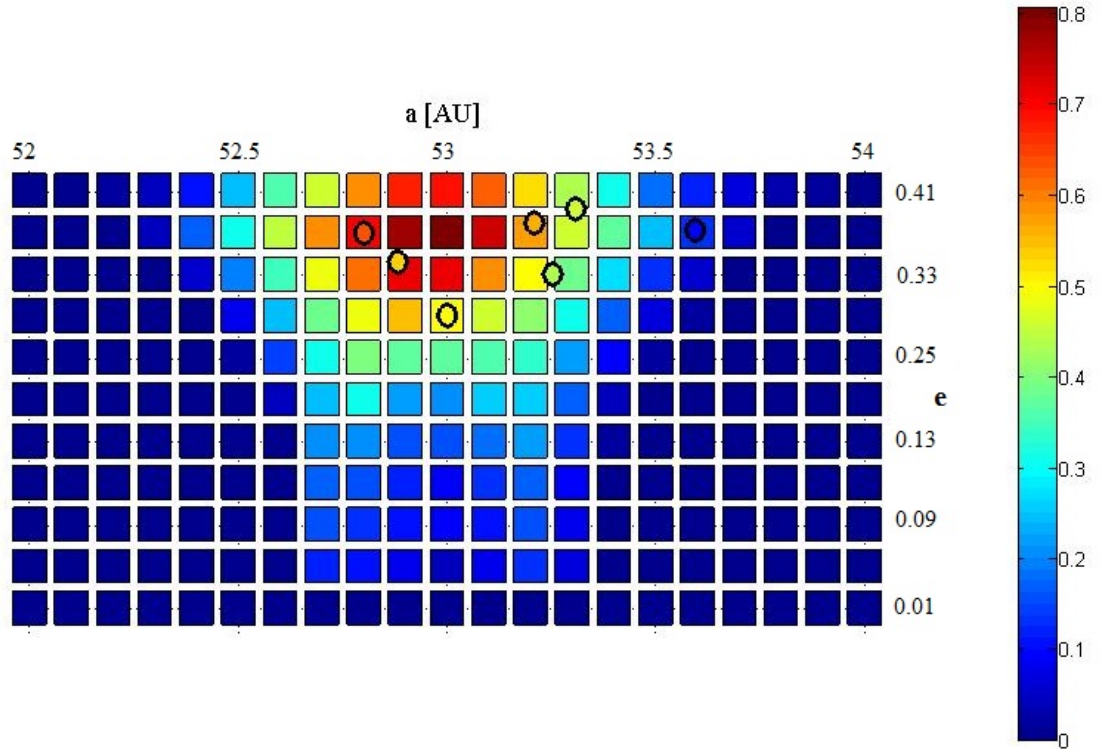
A Neptunusz K129U epochára számolt adatait használtam ($a_N = 30,105$; $e_N = 0,009$). A számítások eredményét a 10. ábra szemlélteti. Adott fél nagytengely értékre a felső divergens és az alsó konvergens tartományt elválasztó excentricitást rajzoltam fel. Ezenkívül feltüntettem az ábrán azokat a határexcentricitásokat, amelyek felett nem jelentkezett aszimmetrikus libráció. A pontosabb eredményhez lokálisan sűrűbb lépésközt alkalmaztam ($\Delta e = 0,01$). Látható, hogy a numerikus módszerrel kapott határexcentricitások közel állnak az analitikusan megállapítottakhoz. Ez rávilágít az R sorfejtésének konvergenciája és az aszimmetrikus libráció jelenlétének kapcsolatára: a konvergens tartományban datálható a jelenség, míg a divergens tartományban nem.



10. ábra. A perturbációs függvény Laplace-féle sorfejtésének konvergenciájához tartozó határexcentricitás értékek a Sundman-kritérium alapján. A tengelyeken a_T és e_T rendre a TNO pályájának fél nagytengelyét és excentricitását jelölik. A háromszögek a numerikus számítások eredményei alapján megállapított határt jelzik a vizsgált (a, e) párokra. A görbe felett a divergens, alatta a konvergens tartomány található.

6.4. Az eredmények összevetése valós TNO-kkal

A numerikus modellezést úgy is elvégeztem, hogy a talált valós TNO-k a , e , i , Ω kezdeti pályaelemeit adtam meg. M és ω értékét véletlenszám-generátor segítségével állítottam be. A kapott eredményeket összevetettem a fiktív testekre végzett számításokkal, ezt a 11. ábra mutatja. Az egyes (a, e) párokra és a fekete kontúrú körökre a színskála mutatja a libráló próbatestek arányát. A négyzetek a numerikus modellezés eredményei, a fekete kontúrral rendelkező körök a valós TNO-k a , e , i , Ω kezdeti pályaelemeivel végzett szimulációt jelölik. A valós TNO-k minden esetben a próbatestek által kirajzolt librációs tartományba esnek, továbbá a libráló égitestek arányai – 5000 különböző kezdőpontra nézve – is összhangban vannak a valós és fiktív testekre. Számszerűen ezek az arányok az általam rezonanciába sorolt TNO-kra az 5. táblázatban olvashatóak. A táblázatban kék színnel kiemelt égitestek akár családot is alkothatnak, hiszen igen közeli pályákon keringenek.



11. ábra. A libráló TNO-k aránya az ae síkon. A vizsgált (a, e) párokra a színskála mutatja a libráló próbatestek arányát. A négyzetek a numerikus modellezés eredményei, a fekete kontúrral rendelkező körök a valós TNO-k a , e , i , Ω kezdeti pályaelemeivel végzett szimulációkat jelzik.

Név	Librálók aránya
1999 CV118	0,4902
2001 XT254	0,4316
2002 CZ248	0,4532
2002 GX32	0,6398
2004 DJ71	0,5524
2008 CT190	0,5230
2010 FE49	0,0872

5. táblázat. A valós TNO a , e , i , Ω kezdeti pályaelemeivel kapott arányok 5000 kezdőhelyre. A kék színnel kiemelt égitestek családot alkothatnak.

7. Összefoglalás

Dolgozatomban a $7/3$ arányú középmozgás rezonanciát tanulmányoztam. Először a Minor Planet Center TNO adatbázisában (*Minor Planet Center*) fellelhető objektumok között kerestem librálókat. Ehhez gravitációs hattest-problémával közelítettem a rendszert, majd numerikusan integráltam a mozgásegyenleteket 50000, illetve libráció vagy nehezen besorolható viselkedés esetén 1 millió évre. 1070 TNO-ból 16 esett ebbe a rezonanciába. A 16 égitestből 7 esetben a rezonanciaváltozó a vizsgált időintervallum egészen librált, 9 esetben pedig cirkulált. A 7 azonosított rezonáns TNO közül kettőnél – a 2008 CT190 és 2010 FE49 jelűnél – én mutattam ki először ezt a jelenséget.

A problémát általánosan is vizsgáltam $e = 0,01$ és $e = 0,41$ között. A felső határt a valós libráló TNO-k excentricitása alapján választottam meg. A numerikus szimulációnál adott (a, e) párokra $\Omega = 0$ és $i = 0$ -t véve véletlenszerűen választott M és ω értékekkel adtam meg a fiktív kisbolygó kiindulóhelyzetét. Egy-egy (a, e) pár esetén 5000 helyről indítottam a testet. A libráció lehetősége és a kezdeti pályaelemek közötti kapcsolatot az alábbiak ábrázolásával tártam fel: librációs amplitúdó- λ_0 , $\theta_c - \lambda_0$ és a $\omega_0 - M_0$. Megmutattam, hogy rögzített e -re a rezonancián végighaladva kis a esetén a libráció lehetősége $\lambda = 250^\circ$ körül jelenik meg. A fél nagytengelyt növelve ez a szerkezet két részre válik, és kisebb, illetve nagyobb λ -k felé tolódik el. A két tartomány 60° környékén ismét eggyé válik. Minél nagyobb az e , a kirajzolódó struktúrák annál jobban összemosódnak. Az $a = 53 AU$ centrum és nagyobb e -k felé haladva a pályákon egyre több olyan kezdőhely van, ahonnan a testet indítva librációt tapasztalunk. Utóbbit az adott pályákra 5000 kezdőpontból indított szimulációk során kapott libráció aránnyal is alátámasztottam.

A rezonanciaváltozó középértékének természetét rögzített a mellett vizsgáltam. Kis excentricitásoknál θ_c a lehetséges θ_c -amplitúdó tartományt θ_c teljesen betölti. Az excentricitást növelve a pontok szimmetrikusan vagy aszimmetrikusan egyre inkább rásimulnak a $\theta_c = 180^\circ$ egyenesre egészen $e = 0,33$ -ig. Az $e = 0,41$ értéknél enyhe szétnyílás tapasztalható 170° körüli amplitúdónál. Az aszimmetrikus libráció megszűnésének magyarázata az R perturbációs függvény Laplace-féle sorfejtésének konvergenciájában rejlik. Ahol a sorfejtés divergenssé válik, ott szűnik meg az aszimmetrikus libráció. Korábban alacsonyabb rendű ($q = 1, q = 2$) rezonanciáknál vizsgálták a jelenséget (Beaugé, 1994), magasabb rendűekre azonban nem.

A valós TNO-kra és a próbatestekre kapott eredmények erősítik egymást, mind az ae síkon vett librációs tartományt, mind a libráció megjelenésének pályán vett kezdőhelyeit illetően. A szimulációk alapján libráció legnagyobb valószínűséggel a rezonáns fél nagytengely, $a = 53 \text{ AU}$ körül és nagy excentricitásoknál fordulhat elő, és a libráló TNO-k éppen itt találhatók.

Munkám folytatásaként a $7/3$ rezonanciát nagyobb excentricitásoknál is feltérképezem. Továbbá korábbi és későbbi bolygó konfigurációkra is elvégzem a modellezést, ami a $7/3$ rezonancia általánosabb megismerését teszi lehetővé az itt bemutatott struktúrákkal való összehasonlításon keresztül. Ezenfelül más rezonanciák vizsgálatát is tervezem, ami segíthet egy globálisabb kép felfestésében a rezonáns libráció kialakulásáról a Neptunuszon túli objektumoknál.

A munkám során használt numerikus integrálást végző programokat témavezetőmtől kaptam. A programokat célirányosan továbbfejlesztettem. A futtatásokat és az adatok kiértékelését magam végeztem. Az ábrákat és a kutatás során szükséges kisebb szubrutinokat – MATLAB és C programozási nyelveket használva – én készítettem.

Hivatkozások

- Bazsó, Á. et al. (2010). “A survey of near-mean-motion resonances between Venus and Earth”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 107, pp. 63–76.
- Beaugé, C. (1994). “Asymmetric liberations in exterior resonances”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 60, pp. 225–248.
- Chiang, E. I. et al. (2003). “Resonant and Secular Families in the Kuiper Belt”. *ArXiv Astrophysics e-prints*.
- Davies, J. K. et al. (2008). “The Early Development of Ideas Concerning the Transneptunian Region”. *The Solar System Beyond Neptune*. Ed. by M. A. Barucci et al., pp. 11–23.
- Dormand, J. R. & Prince, P. J. (1978). “New Runge-Kutta algorithms for numerical simulation in dynamical astronomy”. *Celestial Mechanics* 18, pp. 223–232.
- Emel’Yanenko, V. V. & Kiseleva, E. L. (2008). “Resonant motion of trans-Neptunian objects in high-eccentricity orbits”. *Astronomy Letters* 34, pp. 271–279.
- Érdi, B. et al. (2012). “Stability of higher order resonances in the restricted three-body problem”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 113, pp. 95–112.
- Ferraz-Mello, S. (1993). “The convergence domain of the Laplacian expansion of the disturbing function”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 58, pp. 37–52.
- Gladman, B., Marsden, B. G. & Vanlaerhoven, C. (2008). “Nomenclature in the Outer Solar System”. *The Solar System Beyond Neptune*. Ed. by M. A. Barucci et al., pp. 43–57.
- Gladman, B. et al. (2012). “The Resonant Trans-Neptunian Populations”. *The Astronomical Journal* 144.
- JPL HORIZONS System. URL: <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>.
- Lykawka, P. S. & Mukai, T. (2007). “Dynamical classification of trans-neptunian objects: Probing their origin, evolution, and interrelation”. *Icarus* 189, pp. 213–232.
- Minor Planet Center. URL: <http://www.minorplanetcenter.net/>.
- Thommes, E. W. (2005). “A Safety Net for Fast Migrators: Interactions between Gap-opening and Sub-Gap-opening Bodies in a Protoplanetary Disk”. *The Astrophysical Journal* 626, pp. 1033–1044.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Érdi Bálintnak a kutatás lehetőségéért, valamint a sok hasznos tanácsért. Továbbá köszönöm a családom és a csoporttársaim támogatását.