

OTDK-DOLGOZAT

2015

Egyensúlyok nem-kooperatív játékokban

Equilibria in non-cooperative games

Kézirat lezárva: 2013. március 31.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Alapok	3
1.1. Matematikai fogalmak, jelölések és tételek	3
1.2. Játékelméleti fogalmak és jelölések	9
2. Nash-egyensúly	13
2.1. Definíció és létezés	13
2.2. Létezés bizonyítása a Berge-tétellel	18
3. Berge-egyensúly	22
3.1. Definíciók	22
3.2. Berge-egyensúly létezése	27
3.3. Létezés bizonyítása a Berge-tétellel	28
3.4. Gyengített Berge-egyensúly	32
4. Berge-Nash-egyensúly és az összetett egyensúly	37
4.1. Berge-egyensúly és Nash-egyensúly kapcsolata	37
4.2. Berge-Nash-egyensúly	39
4.3. Az összetett egyensúly	43
Összefoglalás	46
Függelék	47
Irodalomjegyzék	73

Táblázatok jegyzéke

2.1.	Fogolydilemma kifizetőmátrixa	14
2.2.	Érmepárosítás kifizetőmátrixa	20
4.1.	4.22. példa kifizetőmátrixa	43
4.2.	Gyáva nyúl játék kifizetőmátrixa	45

Bevezetés

A dolgozatban, mint ahogyan a címe is mutatja nem-kooperatív játékok különböző egyensúlyfogalmait vizsgáljuk meg. A dolgozat célja egyrészt, hogy bemutassa a kevésbé ismert Berge-egyensúlyt, másrészt pedig, hogy megmutassa a Berge-tétel alkalmazhatóságát a nem-kooperatív játékokra definiált különböző egyensúlyfogalmak létezésének bizonyításakor. A dolgozat folyamán az ismert Nash-egyensúlyról és a kevésbé ismert Berge-egyensúlyról elmondottak mellett bevezetünk két új egyensúlyfogalmat, amik a két ismert egyensúly vizsgálata közben, a feltételek enyhítése céljából születtek.

Az első fejezetben egy matematikai és játékelméleti bevezetőt írunk le. A fejezetben Border (1985) és Berge (1959) könyvek és Szabó (2011), Szabó (2012a), Szabó (2012b) és Forgó, Pintér, Simonovits, és Solymosi (2005) jegyzetek nagy segítségünkre voltak. Külön kiemelnénk, hogy ebben a fejezetben adjuk meg a Berge-tételt és a Kakutani-féle fixponttételt, amik elengedhetetlenek a továbbiak tárgyalásához. A fejezetben továbbá bemutatjuk a Berge-tétel általánosítását is, ami vektorértékű célfüggvények esetével foglalkozik.

A második fejezetet a Nash-egyensúlynak szántuk. A Nash-egyensúly fogalmát Nash (1950) és Nash (1951) cikkek alapján szerepeltettük. A fejezetben bemutatjuk a szakirodalomból ismert néhány létezés bizonyító tételt Nikaido és Isoda (1955) cikk és Forgó et al (2005) jegyzet alapján. A fejezetet azzal zárjuk, hogy belátjuk a Nash-egyensúly létezését a Berge-tétel felhasználásával.

A harmadik fejezetben bemutatjuk a Berge-egyensúlyt Berge (1957) és Zsukovszkij és Csikrij (1994) könyvek alapján. Megadjuk az egyensúly definícióját Nessah, Larbani, és Tazdaït (2007b) és Nessah, Larbani, és Tazdaït (2007a) cikkek alapján. Ezután belátjuk a Berge-egyensúly létezését a Berge-tétel segítségével, majd a fejezet végén bevezetjük a gyengített Berge-egyensúlyt. Ennek az egyensúlynak a bizonyításához használjuk fel az általánosított Berge-tételt.

A negyedik fejezetben magmutatjuk, hogy a Berge-egyensúlyok és a Nash-egyensúlyok miként kapcsolódnak össze Colman, Körner, Musy, és Tazdaït (2011) cikk alapján. Ez után bevezetjük a Berge-Nash-egyensúly fogalmát és megadjuk a Nessah et al (2007b) cikk szerinti létezéséhez szükséges feltételeket. Ez után belátjuk a Berge-Nash-egyensúly létezését a Berge-tétel segítségével. A fejezet végén definiáljuk az összetett egyensúlyt.

A dolgozat végén szerepel egy hosszabb függelék, itt szerepelnek a használt matematikai tételek bizonyításai és az azokhoz szükséges fogalmak és állítások.

1. fejezet

Alapok

Ebben a fejezetben bevezetjük a dolgozatban használt matematikai és játékelméleti alapfogalmakat, továbbá kimondunk néhány fontosabb állítást is. A fejezetet két részre osztottuk, az első részfejezet egy matematikai bevezető, míg a második egy játékelméleti bevezető. A játékelméleti alapoknál kimondott állításokat a kimondásuk után bizonyítjuk is, a matematikai bevezetőnél pedig, helytakarékossági szempontból, a függelékben tesszük ezt meg minden esetben.

1.1. Matematikai fogalmak, jelölések és tételek

Ebben a részfejezetben a dolgozathoz szükséges matematikai fogalmakat és tételeket adjuk meg. Az itt leírt tételek Border (1985) könyv és Szabó (2011), Szabó (2012a) és Szabó (2012b) jegyzetek szerint szerepelnek. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a jelölések helyenként eltérhetnek a hivatkozott irodalmakban található jelölésektől. Az igazán fontos tételeknél megadjuk a tételt először publikáló szerző, vagy szerzők nevét, továbbá a cikkek, vagy könyvek elérhetőségét is. A szükséges definíciók és jelölések a matematikai irodalomból megszokottak, ahol nem, ott azt külön jelezzük.

Mivel a használt tételek pontos kimondása és bizonyítása hosszadalmas kifejtést igényel, így azt a függelékben tesszük meg. A függelék önmagában, az ebben a részfejezetben leírtak nélkül is igyekszik a lehető legjobb rálátást adni a felhasznált tételekre, míg ez az alfejezet sokban épít az ott leírtakra. Az alfejezetben egy bizonyítás sem szerepel, a tételek és bizonyításaik minden esetben megtalálhatók a függelékben. Szeretnénk felhívni a tisztelt Olvasók figyelmét, hogy amennyiben szükségét érzik, a függelékben leírtak alapján válaszokat kaphatnak az esetlegesen itt felmerülő kérdéseikre.

A célunk tehát ezzel az alfejezettel nem az, hogy teljes, vagy precíz képet adjunk a használt tételekről, hanem az, hogy a nem megszokott, vagy kevésbé ismert fogalmakat bevezessük, kimondjuk a legfontosabb tételeket és az azokhoz vezető kisebb tételeket,

továbbá, hogy közöljük új eredményeinket.

Elsőnek definiáljuk valós értékű függvényekre az úgynevezett alulról és felülről folytonosságot. Ezt azért szerepeltetjük itt, mert ellentétben az angol megnevezéssel, magyarul az ilyen folytonosság megnevezése nem egyértelmű, a szakirodalomban eltérő lehet.

1.1. definíció (Alulról folytonosság). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény alulról folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra létezik U környezete az a pontnak, hogy minden $x \in U$ esetén $f(a) - \varepsilon < f(x)$. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény alulról folytonos, ha minden $x \in X$ pontban alulról folytonos.

1.2. definíció (Felülről folytonosság). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény felülről folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra létezik U környezete az a pontnak, hogy minden $x \in U$ esetén $f(x) < f(a) + \varepsilon$. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény felülről folytonos, ha minden $x \in X$ pontban felülről folytonos.

1.3. definíció (Folytonosság). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra létezik U környezete az a pontnak, hogy minden $x \in U$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, ha minden $x \in X$ pontban folytonos.

Halmazértékű leképezések esetén is szükségünk lesz különböző folytonossági fogalmakra. Ismét megjegyeznénk, hogy a definíciók szerepeltetésének fő oka az, hogy a megnevezések a szakirodalomban itt sem egyértelműek.

1.4. definíció (Alulról félig folytonosság). Legyenek (X, τ_X) , (Y, τ_Y) topologikus terek. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés alulról félig folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $G \subseteq Y$ nyílt halmaz esetén, amelyre $F(a) \cap G \neq \emptyset$, létezik $U \in \tau_X(a)$ környezet, hogy minden $x \in U$ esetén $F(x) \cap G \neq \emptyset$. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés alulról félig folytonos az X halmazon, ha minden $G \subseteq Y$ nyílt halmaz esetén $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\} \subseteq X$ halmaz nyílt.

1.5. definíció (Felülről félig folytonosság). Legyenek (X, τ_X) , (Y, τ_Y) topologikus terek. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $Z \subseteq Y$ zárt halmaz esetén, amelyre $F(a) \cap Z = \emptyset$, létezik $U \in \tau_X(a)$ környezet, hogy minden $x \in U$ esetén $F(x) \cap Z = \emptyset$. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos az X halmazon, ha minden $Z \subseteq Y$ zárt halmaz esetén $\{x \in X : F(x) \cap Z = \emptyset\} \subseteq X$ halmaz nyílt.

1.6. definíció (Folytonosság). Legyenek (X, τ_X) , (Y, τ_Y) topologikus terek. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés folytonos egy $a \in X$ pontban, ha alulról félig folytonos és felülről félig folytonos az $a \in X$ pontban. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés folytonos az X halmazon, ha alulról félig folytonos és felülről félig folytonos az X halmazon.

A következő állítást később sok bizonyításban szerepel.

1.7. állítás. *Legyenek (X, τ_X) , (Y, τ_Y) topologikus terek.*

1. *Legyen az (Y, τ_Y) reguláris topologikus tér. Ha az $F : X \rightarrow \mathcal{Z}(Y)$ felülről félig folytonos, zárt halmaz értékű leképezés, akkor zárt gráfú.*
2. *Legyen (Y, τ_Y) kompakt topologikus tér. Ha az $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés zárt gráfú, akkor felülről félig folytonos.*
3. *Legyen (Y, τ_Y) kompakt és reguláris topologikus tér. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{Z}(Y)$ zárt, kompakt halmaz értékű leképezés pontosan akkor felülről félig folytonos, ha zárt gráfú.*

Bizonyítás. Az 5.41. állítás bizonyításánál megtalálható a függelékben. ■

A dolgozatban szereplő fő tételek igazolásához elengedhetetlen a Kakutani-féle fixpont-tétel. A tétel használata jól ismert a nem-kooperatív játékelmélet irodalmából, többek között a Nash-egyensúly létezésének igazolásához szokás használni. Ennek belátásához viszont előbb az úgynevezett Brouwer-féle fixponttételt szükséges igazolni.

1.8. tétel (Brouwer-féle fixponttétel). *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex és kompakt halmaz. Ha az $f : K \rightarrow K$ függvény folytonos, akkor akkor f -nek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Az 5.60. tétel bizonyításánál megtalálható a függelékben. ■

A Kakutani-féle fixponttétel a következő. Erre később fontossága miatt, csak mint Kakutani-féle fixponttétel fogunk hivatkozni, bizonyítások esetén viszont a tétel dolgozatbeli hivatkozását is megadjuk.

1.9. tétel (Kakutani (1941)). *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^m$ konvex, kompakt halmaz és legyen $F : K \rightarrow \mathcal{P}(K)$ nemüres, konvex, kompakt értékű, felülről félig folytonos halmazértékű leképezés. Ekkor az F leképezésnek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Az 5.67. tétel bizonyításánál megtalálható a függelékben. ■

A következőkben a Berge-tételt írjuk le. A Berge-tételt számos tudományterületen használják, például a mikroökonómiában az általános egyensúly létezésének bizonyításához szokás használni arra, hogy olyan elméleti feltételeket adjunk meg, amik mellett a Kakutani-féle fixponttételt teljesítő halmazértékű leképezéseket kapunk. Először bevezetjük a jelöléseket.

Legyenek (T, τ_T) , (X, τ_X) topologikus terek. Legyen $H : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés, a feltételi leképezés, legyen $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}$, a célfüggvény és tekintsük a következő $t \in T$ -vel paraméterezett feladatot:

$$\begin{aligned} f(t, x) &\rightarrow \max \\ x &\in H(t) . \end{aligned}$$

A feladat értékfüggvénye, $f^\vee : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, amelyre minden $t \in T$ esetén

$$f^\vee(t) = \sup_{H(t)} f(t, \cdot) = \sup_{x \in H(t)} f(t, x) .$$

A feladat megoldásleképezése, $\mathcal{X} : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$, amelyre

$$\mathcal{X}(t) = \operatorname{argmax}_{H(t)} f(t, \cdot) = \{x \in H(t) : f(t, x) = f^\vee(t)\} .$$

1.10. tétel (Berge (1959)). *A tétel az alábbi állításokból áll.*

1. *Ha a $H : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés alulról félig folytonos és az $f : \operatorname{graph} H \rightarrow \mathbb{R}$ célfüggvény alulról folytonos, akkor az $f^\vee : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény is alulról folytonos.*
2. *Ha a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ kompakt halmaz értékű leképezés felülről félig folytonos és az $f : \operatorname{graph} H \rightarrow \mathbb{R}$ célfüggvény felülről folytonos, akkor az $f^\vee : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény is felülről folytonos.*
3. *Ha a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ kompakt halmaz értékű leképezés felülről félig folytonos, az $f : \operatorname{graph} H \rightarrow \mathbb{R}$ célfüggvény folytonos, valamint az $f^\vee : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény folytonos, akkor az $\mathcal{X} : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ kompakt értékű és felülről félig folytonos halmazértékű leképezés.*

Bizonyítás. Az 5.69. tétel bizonyításánál megtalálható a függelékben. ■

A későbbiekben erre, éppúgy, mint a Kakutani-féle fixponttételre, csak mint Berge-tétel hivatkozunk. Természetesen a bizonyításokban ennek a tételnek is megadjuk a dolgozatbeli számát.

A dolgozatban később bevezetett egyik új egyensúlyfogalom létezésének bizonyításához szükséges kiterjeszteni a Berge-tételt olyan célfüggvénnyel rendelkező feladatok esetére, amik nem feltétlenül egy valós számot adnak eredményül, hanem valós számok egy vektorát. Mivel az általunk ismert irodalmak között ez az általánosítás sehol sem szerepel, így a tétel kimondása és bizonyítása is önálló munka, azzal a megjegyzéssel, hogy mind a kimondás, mind a bizonyítás sokban épít a Berge-tétel Szabó (2012b) jegyzetből átvett menetére. A tétel kimondása előtt szükséges még néhány fogalmat definiálni.

Mint ismert, többdimenziós vektorok esetében a valós számoknál megszokott $\leq$ reláció nem ad teljes rendezést, továbbá maga a $\leq$ jel is több jelentésű lehet. Ezért bevezetjük (a valós számok esetében is) a következő jelöléseket.

1.11. definíció. *Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ teret és legyen $r, r' \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges.*

- $r > r'$, ha $r_i > r'_i$ minden i -re fennáll,

- $r \geq r'$, ha $r_i \geq r'_i$ minden i -re fennáll és létezik j , hogy $r_j > r'_j$,
- $r \geq r'$, ha $r_i \geq r'_i$ minden i -re fennáll, de nem feltétlenül létezik j , hogy $r_j > r'_j$,
- r és r' nem állnak relációban, ha létezik olyan i és j , hogy $r_i > r'_i$ és $r_j < r'_j$.

1.12. *megjegyzés.* Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz, $a \in X$ pedig ennek egy tetszőleges eleme. Az alábbi két állítás ekvivalens.

1. Nem létezik olyan $x \in X$, hogy $x \geq a$.
2. Minden $x \in X$ esetén vagy $a > x$, vagy a és x nem állnak relációban.

Noha az így kapott reláció nem teljes, de a tranzitivitást triviálisan teljesíti. Mivel a Berge-tételben a célfüggvényt maximalizáltuk, ezért ha át szeretnénk írni a tételt vektorértékű függvényekre, akkor definiálni kell, hogy mit értünk az ilyen függvények maximumán.

1.13. definíció. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ teret. Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz. Az alábbi operátorok a következők,

- $\text{vmax } U = \{u \in U : \nexists u' \in U, \text{ hogy } u' \geq u\}$,
- $\text{vsup } U = \{u \in \text{cl } U : \nexists u' \in \text{cl } U, \text{ hogy } u' \geq u\}$.

1.14. definíció. Ha X tetszőleges halmaz és $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ tetszőleges függvény és az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz az f függvény értékkészlete, akkor

- $\text{vmax}_X f(x) = \text{vmax } A$,
- $\text{vsup}_X f(x) = \text{vsup } A$,
- $\text{argvmax}_X f(x) = \{x \in X : f(x) \in \text{vsup}_X f(x)\}$.

Mivel a Berge-tételben a célfüggvény különböző folytonosságait használtuk, ezért az általánosításhoz definiálnunk kell az alulról, illetve a felülről folytonosságot vektorértékű függvényekre is.

1.15. definíció (Alulról folytonosság vektorértékű függvényekre). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény alulról folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}^n$, vagyis $\varepsilon > 0$ vektorra az $\{x \in X : f(x) > f(a) - \varepsilon\}$ halmaz nyílt. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény alulról folytonos, ha minden $x \in X$ pontban alulról folytonos.

1.16. definíció (Felülről folytonosság vektorértékű függvényekre). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény felülről folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}^n$, vagyis $\varepsilon > 0$ vektorra az $\{x \in X : f(x) < f(a) + \varepsilon\}$ halmaz nyílt. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény felülről folytonos, ha minden $x \in X$ pontban felülről folytonos.

1.17. definíció (Folytonosság). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in G$ nyílt halmaz esetén az $\{x \in X : f(x) \in G\}$ halmaz nyílt. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos, ha minden $x \in X$ pontban folytonos.

1.18. megjegyzés. Ha egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény folytonos egy $a \in X$ pontban, akkor abban a pontban alulról és felülről is folytonos. De ha a függvény alulról és felülről is folytonos az $a \in X$ pontban, akkor nem feltétlenül folytonos is abban a pontban.

1.19. megjegyzés. Ha $n = 1$ akkor visszkapjuk a valós értékű függvényekre felírt fogalmakat.

Az így definiált fogalmak segítségével már bevezethetjük a több dimenzióra kiterjesztett Berge-tételt.

Legyenek (T, τ_T) , (X, τ_X) topologikus terek. Legyen $H : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés, a feltételi leképezés, legyen $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}^n$ a célfüggvény és tekintsük a következő $t \in T$ -vel paraméterezett feladatot:

$$\begin{aligned} f(t, x) &\rightarrow \text{vmax} \\ x &\in H(t) . \end{aligned}$$

A feladat értékleképezése, $f^\vee : T \rightarrow \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^n)$, amelyre minden $t \in T$ esetén

$$f^\vee(t) = \text{vsup}_{H(t)} f(t, \cdot) = \text{vsup}_{x \in H(t)} f(t, x) .$$

A feladat megoldásleképezése, $\mathcal{X} : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$, amelyre

$$\mathcal{X}(t) = \text{argvmax}_{H(t)} f(t, \cdot) = \{x \in H(t) : f(t, x) \in f^\vee(t)\} .$$

1.20. tétel. A tétel az alábbi állításokból áll.

1. Ha a $H : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés alulról félig folytonos és az $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}^n$ célfüggvény alulról folytonos, akkor az $f^\vee : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ értékleképezés is alulról félig folytonos.
2. Ha a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ kompakt halmaz értékű leképezés felülről félig folytonos és az $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}^n$ célfüggvény felülről folytonos, akkor az $f^\vee : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ értékleképezés is felülről félig folytonos.
3. Ha a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ kompakt halmaz értékű leképezés felülről félig folytonos, az $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}^n$ célfüggvény folytonos, valamint az $f^\vee : T \rightarrow \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^n)$ értékleképezés folytonos, akkor az $\mathcal{X} : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ kompakt értékű és felülről félig folytonos halmazértékű leképezés.

Bizonyítás. Az 5.79. tétel bizonyításánál megtalálható a függelékben. ■

A Kakutani-féle fixponttétel használatához, mint láttuk szükséges, hogy a leképezés, amire használjuk konvex értékű legyen. Ehhez nyújt segítséget a kvázikonkavitás fogalma, azonban nekünk szükségünk lesz a kvázikonkavitás definíciójára vektorértékű függvények esetében is.

1.21. definíció (Kvázikonkavitás vektorértékű függvényre). Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény kvázikonkáv, ha minden $\alpha \in \mathbb{R}^n$ esetén az

$$\{x : f(x) \not\leq \alpha\}$$

halmaz konvex.

1.22. definíció. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény kvázikonkáv egy $A \subseteq X$ összefüggő halmaz felett, ha minden $\alpha \in \mathbb{R}^n$ esetén az

$$\{x \in A : f(x) \not\leq \alpha\}$$

halmaz konvex.

1.2. Játékelméleti fogalmak és jelölések

A játékelméleti fogalmakat és jelöléseket Forgó et al (2005) jegyzet alapján használjuk. Szintén ebből a jegyzetből vettünk át a részfejezetben szereplő több állítást és bizonyítást is. Szeretnénk megjegyezni, hogy a részfejezetben nem adjuk meg az összes használt fogalmat és jelölést, csupán az alapokat. A jobb megérthetőség kedvéért a bonyolultabb fogalmakat mindig a felhasználásuk helyén definiáljuk.

A fogalmak bevezetését magának a játéknak és a játékelméletnek a meghatározásával kezdjük. Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy a játék egy többszemélyes döntési probléma, a játékelmélet pedig az a tudományterület, ami az ilyen problémákat tárgyalja. A játékelmélet főleg matematikai alapokra épít és normatív jellegű megállapításokat igyekszik tenni, bár léteznek olyan területei is, melyeken kísérletekre helyezik a hangsúlyt.

A játékelmélet két fő irányát különböztetjük meg, a kooperatív és nem-kooperatív játékokat, ennek megfelelően pedig beszélhetünk kooperatív és a nem-kooperatív játékelméletről. A kooperatív játékokban a szereplők dönthetnek összehangoltan, koalíciókat formálva, míg a nem-kooperatív játékokban erre nincsen lehetőségük. A két irány sokszor eltérő modelleket és matematikai megközelítéseket alkalmaz. Előbbinél inkább az algebra és a lineáris programozás, míg utóbbinál inkább az analízis és a valószínűségi számítás játszik kiemelkedő szerepet, persze ez a megállapítás nem általános. A dolgozatban nem-kooperatív játékokkal foglalkozunk.

A nem-kooperatív játékok célja sokféle lehet, a dolgozatban úgynevezett egyensúlyi állapotokat keresünk, amik valamilyen tulajdonságaiknál fogva kívánatosak. A legismertebb

ilyen egyensúlykonceptió a Nash-egyensúly. A nem-kooperatív játékokat több módon is megadhatjuk, a dolgozatban minden esetben a nem-kooperatív játékok úgynevezett stratégiai, vagy normál formában lesznek adottak.

1.23. definíció (Játék). *Egy normál formában adott nem-kooperatív játék egy lista $G = \{N, (S_i)_{i \in N}, (f_i)_{i \in N}\}$, ahol $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a játékosok (véges) halmaza, S_i az i -edik játékos stratégiákhalmaza, $f_i : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ pedig az i -edik játékos kifizetőfüggvénye.*

1.24. megjegyzés. A későbbiekben nem írjuk ki mindig a $G = \{N, (S_i)_{i \in N}, (f_i)_{i \in N}\}$ listát, a G játék alatt mindig a fent megadott listát értjük.

1.25. definíció (Véges játék). *Azokat a játékokat, ahol a stratégiákhalmazok végesek, véges játékoknak nevezzük.*

1.26. definíció. *A játék kimeneteleinek halmaza*

$$S = S_1 \times \dots \times S_n ,$$

elemei pedig az $s = (s_1, \dots, s_n)$ vektorok, amiket stratégiaprofiloknak nevezünk.

Az $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ vektorokat csonka stratégiaprofiloknak nevezzük, az

$$S_{-i} = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n .$$

halmazok pedig a csonka stratégiaprofilok halmazai.

Mint említettük, a nem-kooperatív játékok elemzésének egyik célja, hogy valamilyen szempontból kíváncsi kimeneteket találjon. Egy kimenetelről azt gondoljuk, hogy kihagyható az elemzésből, ha létezik legalább egy olyan $i \in N$ játékos, akire a többiek választásától függetlenül igaz az, hogy tudna úgy a kimeneteli stratégiájától eltérően cselekedni, hogy magasabb (legalább ugyanakkora) kifizetést kapjon, mint a vizsgált kimenetelre. Erre a gondolatra épít a dominancia fogalma.

1.27. definíció (Dominancia). *Legyen egy játékban $s_i, t_i \in S_i$ az i -edik játékos két stratégiája. Ha*

$$f_i(s_i, s_{-i}) > f_i(t_i, s_{-i})$$

minden $s_{-i} \in S_{-i}$ esetén teljesül, akkor az s_i stratégia szigorúan dominálja a t_i stratégiát, vagyis a t_i stratégia szigorúan dominált.

Hasonlóan, ha

$$f_i(s_i, s_{-i}) \geq f_i(t_i, s_{-i})$$

minden $s_{-i} \in S_{-i}$ esetén teljesül, és létezik legalább egy $t_{-i} \in S_{-i}$, amire

$$f_i(s_i, t_{-i}) > f_i(t_i, t_{-i}) ,$$

akkor az s_i stratégia gyengén dominálja a t_i stratégiát, vagyis a t_i stratégia gyengén dominált.

1.28. definíció (Dominált stratégiák iteratív kiküszöbölése). *A dominált stratégiák iteratív kiküszöbölése egy olyan eljárás, ami a következő lépésekből áll. Induljunk ki egy G játékból.*

1. *Hagyjuk el a G játékból az összes szigorúan (gyengén) dominált stratégiát, így megkapjuk a G_1 redukált játékot.*
2. *Hagyjuk el a G_1 redukált játékból az összes szigorúan (gyengén) dominált stratégiát, így megkapjuk a G_2 redukált játékot.*
3. *Hagyjuk el a G_2 redukált játékból az összes szigorúan (gyengén) dominált stratégiát, így megkapjuk a G_3 redukált játékot.*
4. $\dots$

Az eljárást addig folytatjuk, amíg már nincs több szigorúan (gyengén) dominált stratégia.

1.29. állítás. *Véges játékokban a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésének eredménye független a kiküszöbölés sorrendjétől.*

Bizonyítás. A bizonyítás indirekten történik. Tegyük fel, hogy a több stratégia eliminálásával már nem szűkíthető halmaz nem egyértelmű (P és Q), vagyis két különböző sorrend más eredményre vezet. Ekkor létezik legalább egy i játékos és neki legalább egy p stratégiája, amire $p \in P$, de $p \notin Q$. Tegyük fel, hogy Q -hoz jutva p -t elimináltuk először a $P \setminus Q$ -ból. Ekkor p -t egy u stratégia dominálta, de $u \notin P$, hiszen akkor p -t dominálná. Ekkor vagy $u \in Q$, vagy $u \notin Q$, de ekkor létezik v , ami dominálja. Tehát ekkor tudunk stratégiák egy olyan sorozatát adni, aminek a végén p áll, az elején pedig w és minden elem dominálja az előtte levőt. Ekkor vagy $w \in P$, de ekkor p nem lehetett volna benne, vagy $w \notin P$, de ekkor valami dominálta, ami p -t is dominálná. Ezt, mivel véges játékról beszélünk, csak véges sok lépésig lehet ismételni, vagyis ellentmondásra jutottunk. ■

Mielőtt bevezetnénk a kevert bővítés fogalmát, megjegyeznénk, hogy az eddig definiált s_i stratégiákat, hogy megkülönböztethetők legyenek a kevert stratégiáktól tiszta stratégiáknak szokás nevezni. A dolgozatban azonban csupán a következő definíciónál használjuk a tiszta jelzöt, ugyanis a későbbiekben olyan általánosan kezeljük a stratégiákat, hogy az elmondottakat mind a két fogalomra lehet használni, vagyis a jelző hiánya nem okoz félreértést.

1.30. definíció (Kevert bővítés). *Egy véges játék kevert bővítésén a következő játékot értjük, $G_K = \{N, (T_i)_{i \in N}, (h_i)_{i \in N}\}$, ahol minden T_i egy $|S_i|$ -dimenziós egységszimplex és a $h_i : T \rightarrow \mathbb{R}$ függvények pedig a*

$$h_i(t) = \sum_{s \in S} t_s f_i(s)$$

módon írhatók fel, ahol $t_s = (t_1^{s_1}, \dots, t_n^{s_n})$ az $s \in S$ tiszta stratégiához rendelt valószínűségek vektora. Tehát a h_i függvény nem más, mint a G játékban felírt, tiszta stratégiákhoz tartozó kifizetések, a kevert stratégiák szerinti várható értéke.

1.31. *megjegyzés.* A későbbiekben az állításainkat nem a játékok kevert bővítéseire mondjuk ki, de felhívjuk rá a figyelmet, hogy a kevert bővítés definíciójának értelmében a kevert T_i stratégiahalmazok nemüresek, konvexek és kompaktak és a h_i függvények folytonosak.

2. fejezet

Nash-egyensúly

A Nash-egyensúly a nem-kooperatív játékelmélet egyik legismertebb egyensúlykonceptiója. A fogalom a nem-kooperatív játékelmélet sok területén elfordul és mondhatni, ez az egyensúlyfogalom egyfajta alapként szolgál a kutatók számára, az új eredményeket és fogalmakat igyekeznek egy már ismert fogalmon keresztül bemutatni. E dolgozatban mi sem teszünk másképp. A fejezetben definiáljuk az egyensúlyt, majd bemutatjuk, hogy milyen ismert tételek adhatók a létezésének bizonyítására. Ezután bemutatjuk a dolgozatban bevezetett eljárást, és a Berge-tétel segítségével bizonyítjuk az egyensúly létezését. A fejezet közben példák segítségével mutatjuk be a leírtakat.

2.1. Definíció és létezés

Az egyensúlyt Nash (1950) és Nash (1951) vezette be, mi is a két cikk alapján használjuk. Először definiáljuk a fogalmat, majd kimondunk és be is bizonyítunk néhány fontosabb tételt, ezeket Forgó et al (2005) jegyzet alapján adjuk meg.

2.1. definíció (Nash-egyensúly). *Egy s^* stratégiaprofil Nash-egyensúly, ha*

$$f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i, s_{-i}^*)$$

minden $s_i \in S_i$ -re és minden $i \in N$ -re teljesül.

Jól látható, hogy az egyensúly szó használata jogos, ugyanis egyik játékosnak sem éri meg megváltoztatnia az egyensúlyi stratégiáját, ha az összes többi játékos továbbra is a saját egyensúlyi stratégiáját játssza. Ez azt is jelenti, hogy egyik játékos sem tudja növelni a kifizetését azzal, hogy egyénileg eltér az egyensúlyi stratégiájától. Az elméleti szép eredményeket a gyakorlatban azonban nem mindig sikerül igazolni.

Most megmutatjuk azt, hogy egy Nash-egyensúlyi pont sohasem szigorúan dominált, vagyis a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésével egyetlen Nash-egyensúlyt

sem veszíthetünk el. Ezt azért szükséges megmutatni, hogy lássuk, a Nash-egyensúly elvileg sohasem kerülendő.

2.2. állítás. *Egy játékban a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésével egyetlen Nash-egyensúlyi pontot sem küszöbölünk ki.*

Bizonyítás. A bizonyítás indirekten történik. Tegyük fel, hogy s^* Nash-egyensúly, de mégis ki lett küszöbölve. Ekkor létezik olyan i játékos, és az i -edik játékos olyan t_i stratégiája, hogy t_i szigorúan dominálja az s_i^* stratégiát, vagyis

$$f_i(t_i, s_{-i}) \geq f_i(s_i^*, s_{-i})$$

minden $s_{-i} \in S_{-i}$ esetén fennáll. Ekkor viszont az egyenlőtlenség igaz az s_{-i}^* csonka stratégiaprofilra is, vagyis

$$f_i(t_i, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i^*, s_{-i}^*) .$$

De mivel s^* Nash-egyensúly, ezért

$$f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i, s_{-i}^*)$$

minden $s_i \in S_i$ -re és minden $i \in N$ -re teljesül. Ez viszont ellentmondás. ■

A Nash-egyensúly fogalmát és a dominanciát a következő példán keresztül mutatjuk be.

2.3. *példa* (Fogolydilemma). Vegyük a következő játékot,

- $N = \{a, b\}$ a játékosok halmaza,
- $S_a = S_b = \{v, t\}$ a stratégiahalmazok,
- a kifizetéseket az alábbi mátrix tartalmazza.

		b	
		v	t
a	v	1; 1	3; 0
	t	0; 3	2; 2

2.1. táblázat. Fogolydilemma kifizetőmátrixa

A bal oldalon lévő számok az a , a jobb oldalon lévők a b játékos kifizetései. Ekkor mind a két játékos esetében a v stratégia szigorúan dominálja a t stratégiát, ugyanis például az a játékosra

$$f_a(v, v) = 1 > 0 = f_a(t, v) ,$$

$$f_a(v, t) = 3 > 2 = f_a(t, t) .$$

Mivel ugyanez igaz a b játékosra is, ezért a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölése után csak a (v, v) kimenetel marad meg. Vagyis a 2.2. segédttétel miatt tudjuk, hogy ha a játéknak létezik Nash-egyensúlya, akkor az csak a (v, v) kimenetel lehet. Ellenőrizzük le, hogy ez valóban Nash-egyensúly-e. Ekkor

$$f_a(v, v) = 1 > 0 = f_a(t, v) ,$$

$$f_b(v, v) = 1 > 0 = f_b(v, t) .$$

Tehát a (v, v) kimenetel tényleg Nash-egyensúly. Megjegyezzük, hogy ekkor a Nash-egyensúly nem Pareto-optimális, ugyanis a (t, t) kimenetelre váltva mindkét játékos kifizetése emelkedne.

2.4. definíció (Legjobbválasz leképezés). *Az i -edik játékos $B'_i : S \rightarrow \mathcal{P}(S_i)$ legjobbválasz leképezése a következő,*

$$B'_i(s) = \{s'_i \in S_i : f_i(s'_i, s_{-i}) \geq f_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i\} .$$

Minden $s_i \in B'(s)$ stratégiára azt mondjuk, hogy az i -edik játékos legjobb válasza az s stratégiára, vagy röviden, s_i legjobb válasz.

Az egész játékra vonatkozó $B' : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ legjobbválasz leképezés a következő,

$$B'(s) = \{s \in S : s_i \in B'_i(s_{-i}), \forall s_i \in S_i\} .$$

2.5. megjegyzés. A legjobbválasz leképezést általában B módon szokás jelölni. A dolgozatban azért B' -ként jelöljük, mert a későbbiekben bevezetett Nash-feladat megoldásleképezésére használjuk a B betűt.

2.6. segédttétel. *Az $s^* \in S$ stratégiaprofil akkor és csak akkor Nash-egyensúlya egy játéknak, ha s^* fixpontja a B' legjobbválasz leképezésnek, vagyis ha $s^* \in B'(s^*)$.*

Bizonyítás.

1. Ha s^* a B' leképezés fixpontja, akkor Nash-egyensúly.

Legyen s^* a B' közös legjobbválasz leképezés fixpontja. Ekkor $s^* \in B'(s^*)$, vagyis minden i -re $s_i^* \in B'_i(s^*)$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i, s_{-i}^*)$$

minden $s_i \in S_i$ és minden i esetén, ami pontosan a Nash-egyensúly definíciója.

2. Ha s^* Nash-egyensúly, akkor a B' leképezés fixpontja.

Mivel s^* Nash-egyensúly, ezért $f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i, s_{-i}^*)$ minden $s_i \in S_i$ -re és minden $i \in N$ -re teljesül. Ekkor $s_i^* \in B'_i(s^*)$ minden i esetén a legjobbválasz definíciója miatt fennáll, vagyis a közös legjobbválasz leképezés definíciója miatt $s^* \in B'(s^*)$.

■

A szakirodalomban számos feltételrendszer szerepel, amik mellett bizonyítható a Nash-egyensúly létezése. Ezek közül, a teljesség igénye nélkül megemlítjük a Debreu-Friedman tételt és a Nikaido-Isoda tételt (Nikaido és Isoda, 1955). A jelölések és a bizonyítások, mint eddig is Forgó et al (2005) jegyzet alapján szerepelnek. A tételek szerepeltetésének oka az, hogy a létezéshez szükséges feltételeket össze tudjuk hasonlítani a Berge-tétel segítségével felírt tételben szereplő feltételekkel.

Először lássuk be a következő segéd-tételt.

2.7. segéd-tétel. *Ha az $f_i(\cdot, s_{-i})$ függvény kvázikonkáv, akkor a $B'_i(s)$ halmaz konvex minden $s \in S$ és minden $i \in N$ esetén.*

Bizonyítás. Mivel az $f_i(\cdot, s_{-i})$ függvény kvázikonkáv, ezért az $f_i(s) = f_i(s_i, s_{-i})$ számhoz tartozó felső nívóhalmazai konvexek, ami a következő módon írható

$$\{s'_i \in S_i : f_i(s'_i, s_{-i}) \geq f_i(s_i, s_{-i})\} .$$

Ez pedig pontosan a $B'_i(s)$ definíciója.

■

2.8. következmény. *Ha az $f_i(\cdot, s_{-i})$ függvény kvázikonkáv, akkor minden $s \in S$ esetén $B'(s)$ halmaz konvex.*

A Debreu-Friedman-tétel a következő.

2.9. tétel (Debreu-Friedman). *Ha egy G játékban*

1. S_i nemüres, konvex, kompakt halmaz minden i -re,
2. f_i felülről folytonos minden i -re,
3. $f_i(s_i, \cdot)$ alulról folytonos minden i -re,
4. $B'_i(s)$ nemüres, kompakt, konvex halmaz értékű leképezés, minden i -re,

akkor a játéknak létezik Nash-egyensúlya.

Bizonyítás. Mivel minden S_i kompakt halmaz és minden kifizetőfüggvény felülről folytonos, ezért a $B'_i(s)$ halmazok nemüresek. Megmutatjuk, hogy a B' leképezés felülről félig folytonos. Mivel jelen esetben a legjobbválasz leképezések kompakt topologikus térből képeznek kompakt topologikus térbe, ezért az 1.7. állítás miatt ha a B' leképezés zárt gráfú, akkor felülről félig folytonos.

Tehát azt bizonyítjuk, hogy a B' leképezés $\text{graph } B' = \{(s, t) : s \in S, t \in B'(s)\}$ gráfja zárt halmaz. Indirekten tegyük fel, hogy nem zárt a halmaz, vagyis létezik olyan $(s^0, t^0) \notin \text{graph } B'$, $(s^0, t^0) \in S \times S$, hogy a pont minden U környezetére

$$U \cap \text{graph } B' \neq \emptyset .$$

Ekkor $t^0 \notin B'(s^0)$, vagyis létezik j játékos, hogy s_j^0 nem legjobb válasz. Ekkor létezik olyan $t_j^1 \in S_j$, hogy

$$f_j(t_j^1, s_{-j}^0) > f_j(t_j^0, s_{-j}^0) .$$

Legyen $F : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a következő,

$$F(s, t) = f_j(t_j^1, s_{-j}) - f_j(t_j, s_{-j}) .$$

Mivel f_i felülről folytonos és $f_i(s_i, \cdot)$ alulról folytonos, ezért F alulról folytonos, így a $C = \{(s, t) \in S^2 : F(s, t) \leq 0\}$ halmaz zárt. Minden $(s, t) \in \text{graph } B'$ esetén $F(s, t) \leq 0$, de $F(s^0, t^0) > 0$, ami ellentmond annak, hogy a C halmaz zárt.

Így tehát a B' leképezés zárt gráfú, vagyis felülről félig folytonos. Mivel B' kompakt, konvex halmaz értékű, és az S kompakt, konvex halmaz önmagára való felülről félig folytonos leképezése, ezért a Kakutani-féle fixponttétel miatt létezik fixpontja, ami a 2.6. segéd-tétel miatt Nash-egyensúly. ■

Egy másik feltételrendszer nem tesz fel semmit a B' leképezésről, a megfelelő folytonossági tulajdonságok a kifizetőfüggvények folytonosságából következnek.

2.10. tétel ((Nikaido és Isoda, 1955)). *Ha egy G játékban*

1. S_i nemüres, konvex, kompakt halmaz minden i -re,
2. f_i folytonos minden i -re,
3. $f_i(\cdot, s_{-i})$ konkáv minden i -re,

akkor a játéknak létezik s^ Nash-egyensúlya.*

Bizonyítás. Mivel ha egy tetszőleges függvény konkáv, akkor kvázikonkáv is, ezért a tétel következik a 2.15. tételből. ■

2.2. Létezés bizonyítása a Berge-tétellel

Az általános egyensúlyelméletben is hasonló problémával állunk szemben, mint a Nash-egyensúly létezésének bizonyításánál. Ezt mutatja az is, hogy kezdetben az általános egyensúly létezését, mint egy játék Nash-egyensúlyának létezését bizonyították. Az általános egyensúlyelmélet egyik meghatározó cikke Arrow és Debreu (1954). Jelenleg a bevett módszer az általános egyensúly létezésének bizonyítására a Berge-tétel, majd a Kakutani-féle fixponttétel alkalmazása.

Ez nem túl meglepő, ugyanis a Berge-tételt megvizsgálva láthatjuk, hogy a tétel feltételeinek teljesülése esetén pontosan a Kakutani-féle fixponttétel használatához megfelelő tulajdonságú megoldásleképezést kapunk, csupán a konvex értékűséget kell valahogyan garantálni. Tehát a Nash-egyensúly létezésének bizonyításához csupán meg kell feleltetni a G játékot a Berge-tételben szereplő elemeknek játékosonként, majd a már ismert módon aggregálni kell az egyéni leképezéseket.

2.11. definíció (Nash-feladat). *Feleltessük meg a játékot a Berge-tétel összetevőivel, tesszőleges i -re.*

$$X = S_i ,$$

$$T = S_{-i} ,$$

$$f = f_i ,$$

$$H = H_i ,$$

$$\mathcal{X} = B_i .$$

Írjuk fel a Berge-tételben szereplő feladatot.

$$\begin{aligned} f_i(s_i, s_{-i}) &\rightarrow \max \\ s_i &\in S_i . \end{aligned}$$

Tehát jelen esetben a $H_i : S_{-i} \rightarrow \mathcal{P}(S_i)$ feltételi leképezés minden $s_{-i} \in S_{-i}$ -re a hozzá tartozó összes lehetséges $s_i \in S_i$ -t rendeli, így ez a leképezés felülről félig folytonos és alulról félig folytonos is egyben, vagyis folytonos. $f_i : \text{graph } H_i \rightarrow \mathbb{R}$ a célfüggvény, ezt szeretnék a játékosok maximalizálni. Ekkor az $f_i^\vee : S_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ értékfüggvény a következő,

$$f_i^\vee(s_{-i}) = \sup_{S_i} f_i(\cdot, s_{-i}) = \sup_{s_i \in S_i} f_i(s_i, s_{-i}) .$$

A $B_i : S_{-i} \rightarrow \mathcal{P}(S_i)$ megoldásleképezés pedig a következő módon írható fel,

$$B_i(s_{-i}) = \operatorname{argmax}_{S_i} f_i(\cdot, s_{-i}) = \{s_i \in S_i : f_i(s_i, s_{-i}) = f_i^\vee(s_{-i})\} .$$

Ezt egy kicsit átírva,

$$B_i(s_{-i}) = \{s'_i \in S_i : f_i(s'_i, s_{-i}) \geq f_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i\} .$$

2.12. definíció (A Nash-feladat közös megoldásleképezése). Legyen $B : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$, a Nash-feladat közös megoldásleképezése, ahol

$$B(s) = \{s \in S : s_i \in B_i(s_{-i}), \forall i \in N\} .$$

2.13. segédteétel. A Nash-feladatban definiált $B_i : S_{-i} \rightarrow \mathcal{P}(S_i)$ leképezés és az i -edik játékos $B'_i : S \rightarrow \mathcal{P}(S_i)$ legjobbválasz leképezésének képhalmazai megegyeznek, vagyis minden $s_{-i} \in S_{-i}$ esetén $B(s_{-i}) = B'(s_i, s_{-i})$, ahol s_i tetszőleges.

Bizonyítás. Az állítás triviális, hiszen

$$B_i(s_{-i}) = \{s'_i \in S_i : f_i(s'_i, s_{-i}) \geq f_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i\} ,$$

míg

$$B'_i(s) = B'_i(s_i, s_{-i}) = \{s'_i \in S_i : f_i(s'_i, s_{-i}) \geq f_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i\} ,$$

amely halmazok pedig megegyeznek. ■

2.14. következmény. A Nash-feladat közös megoldásleképezése és a közös legjobbválasz leképezés képhalmazai megegyeznek, vagyis minden $s \in S$ esetén $B(s) = B'(s)$.

2.15. tétel. Ha egy G játékban

1. S_i nemüres, konvex, kompakt halmaz minden i -re,
2. f_i folytonos minden i -re,
3. $f_i(\cdot, s_{-i})$ kvázikonkáv minden i -re,

akkor a játéknak létezik Nash-egyensúlya.

Bizonyítás. A fenti feltételek mellett a Berge-tétel (1.10. tétel) használható és annak három pontja következtében,

- $f_i^\vee$ értékfüggvény alulról folytonos és felülről folytonos is, vagyis folytonos,
- $B_i(s_{-i})$ kompakt értékű és felülről félig folytonos halmazértékű leképezés.

Mivel ez tetszőleges i -re igaz, így a B_i leképezés felülről félig folytonos és kompakt értékű minden i -re, ezért a $B : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ közös leképezés is kompakt értékű és felülről félig folytonos.

Mivel $f_i(\cdot, s_{-i})$ kvázikonkáv függvények minden i -re, ezért a 2.7. segédteétel és a 2.13. segédteétel szerint a B_i leképezés konvex halmaz értékű, tehát a közös $B(s)$ leképezés is konvex értékű.

Így tehát B az S halmaz önmagára való felülről félig folytonos kompakt, konvex halmaz értékű leképezése, ezért használható rá a Kakutani-féle fixponttétel, vagyis létezik $s^* \in S$, hogy $s^* \in B(s^*)$.

A 2.13. segédtétel 2.14. következménye miatt a B közös megoldáisleképezésnek és a játékosok közös legjobbválasz leképezésének képhalmazai megegyeznek, vagyis az így kapott fixpont a 2.6. segédtétel alapján Nash-egyensúly. ■

Az előző fejezetben említettük, hogy bizonyos feltételek mellett a véges játékok kevert bővítése is teljesíti a 2.15. tétel feltételeit. Így visszakaptuk Nash (1951) híres tételét, miszerint véges játékok kevert bővítésének mindig van Nash-egyensúlya.

Könnyen adható olyan példa, amiben nincsen tiszta Nash-egyensúly.

2.16. *példa* (Érmepárosítás). Vegyük a következő játékot,

- $N = \{a, b\}$ a játékosok halmaza,
- $S_a = S_b = \{F, I\}$ a stratégiahalmazok,
- a kifizetéseket az alábbi mátrix tartalmazza.

		b	
		F	I
a	F	1; -1	-1; 1
	I	-1; 1	1; -1

2.2. táblázat. Érmepárosítás kifizetőmátrixa

Könnyen látható, hogy a játékban nincsenek dominált stratégiák és egyik kimenetel sem lehet Nash-egyensúly, ugyanis

$$f_a(F, F) = 1 > -1 = f_a(F, I) ,$$

azonban

$$f_b(F, F) = -1 < 1 = f_b(I, F) ,$$

vagyis a b játékosnak megéri eltérni az F stratégiájától. Könnyen látható, hogy bármely kimenetel esetén vagy a -nak vagy b -nek érdemes eltérnie, vagyis nincs tiszta Nash-egyensúly. Ismét megjegyezzük, hogy mivel ez a játék véges játék, ezért kevert bővítésének létezik kevert Nash-egyensúlya, ami az $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$ -es keverés.

A fejezet utolsó példájában bemutatjuk, hogy ha olyan játékot definiálunk, ahol a 2.15. tétel feltételei igazak, akkor létezik Nash-egyensúly.

2.17. *példa* (Szimmetrikus Cournot-duopólium). Vegyük a következő játékot,

- $N = \{1, 2\}$ a játékosok halmaza,
- $S_i = \{q_i \in \mathbb{R} : q_i > 0\}$ a stratégiahalmazok, ahol $i = 1, 2$,
- a kifizetőfüggvények $f_i(q_1, q_2) = p(q_1, q_2)q_i - cq_i$ alakúak, ahol $i = 1, 2$ és $p(q_1, q_2) = \max\{a - b(q_1 + q_2); 0\}$ és $a, b, c > 0$ tetszőleges számok.

Ekkor könnyen látható, hogy mind a két játékos esetében az olyan stratégiák, amik nem a $[0, \frac{a}{b}]$ intervallumból valók, szigorúan domináltak, ugyanis az ilyen stratégiákra mind a két játékos kifizetése negatív. Tehát a 2.2. segédétel miatt a Nash-egyensúlyokat csak a $[0, \frac{a}{b}]$ intervallumban keressük.

Mivel a kifizetőfüggvények folytonosak és kvázikonkávak, a stratégiahalmazok pedig konvex, kompakt halmazok, ezért a 2.15. tétel miatt létezik Nash-egyensúlya. Mivel a kifizetőfüggvények folytonosak és folytonosan differenciálhatóak, ezért vehetjük a deriváltjaikat. Ekkor a játékosok legjobbválasz leképezései

$$B_1(q_2) = B'_1(q_1, q_2) = \frac{a - 2bq_2 - c}{2b} ,$$

$$B_2(q_1) = B'_2(q_1, q_2) = \frac{a - 2bq_1 - c}{2b} .$$

A két egyenletből pedig azt kapjuk, hogy $q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3b}$, ami pedig Nash-egyensúly.

3. fejezet

Berge-egyensúly

A Berge-egyensúlyt Berge (1957) könyve alapján Zsukovszkij és Csikrij (1994) könyve definiálta először a differenciáljátékok körében. Ezt a definíciót felhasználva mondott ki tételeket, elsősorban az egyensúly létezéséről Nessah et al (2007b). Colman et al (2011) az egyensúlyt pszichológiai szempontból vizsgálja és rámutat arra, hogy milyen feltételek mellett valósulhat meg, de mindezek mellett fontos tételeket is tartalmaz a Nash-egyensúly és a Berge-egyensúly kapcsolatáról. A Berge-egyensúly egy másik definícióját használja Abalo és Kostreva (1996). Abalo és Kostreva (2004) és Abalo és Kostreva (2005) az egyensúly létezésére adnak feltételeket és bizonyításokat, azonban Nessah et al (2007a) és Larbani és Nessah (2008) többek között rámutat az előbbiek hibáira. A fejezetben előbb bemutatjuk az egyensúly fogalmát, majd megadjuk az irodalomban fellelhető létezését igazoló tételeket. Ezután megadjuk, hogy hogyan lehet igazolni az egyensúly létét a Berge-tétel segítségével, majd bevezetünk egy új egyensúlyfogalmat. A fejezetben ismét példákon keresztül mutatjuk be az elhangzottakat.

3.1. Definíciók

A szakirodalomban a Berge-egyensúlynak több definíciója is szerepel. Ennek főleg az az oka, hogy Berge (1957) könyvben a fogalom nincs konkrétan definiálva, az ott leírtak alapján jelen formájában csak Zsukovszkij és Csikrij (1994) definiálta először. A Berge-egyensúlynak két egymástól nem túlzottan eltérő definícióját mutatjuk be, az első Nessah et al (2007b) szerint a Zsukovszkij és Csikrij (1994) könyvből vett definíció átírata normál formában adott játékokra, a másik pedig Abalo és Kostreva (1996) cikkében megadott, a szerzők szerint Berge (1957) könyve alapján hiteles definíció. A szakirodalomban a megkülönböztetés végett az első definíciót gyakran, mint a Zsukovszkij-féle Berge-egyensúly említik, de ebben a dolgozatban mi ezt hívjuk Berge-egyensúlynak.

Kiemelnénk, hogy a részfejezetben szereplő fogalmak közül, csak az egyensúlyok defi-

níciót vettük át a szakirodalomból. Érdekesnek tartjuk, hogy az olvasott és hivatkozott szakirodalomban például a legjobbkérés leképezések vagy a Berge-dominancia nincsenek konkrétan említve, illetve ahol mégis említik, ott nem definiálják őket, csupán körülírásaik szerepelnek.

A definíció Nessah et al (2007b) alapján.

3.1. definíció (Berge-egyensúly). *Egy s^* stratégiaprofil Berge-egyensúly, ha*

$$f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i^*, s_{-i})$$

minden $s_{-i} \in S_{-i}$ -re és minden $i \in N$ -re teljesül.

A definíció Abalo és Kostreva (1996) alapján.

3.2. definíció (Berge-egyensúly Abalo és Kostreva alapján). *Legyen $R = \{R_i\}_{i \in M}$ N egy partíciója és $Q = \{Q_i\}_{i \in M}$ N részhalmazainak együttese. Egy megvalósítható $s \in S$ stratégiaprofil Berge-egyensúlynak hívunk, ha*

$$f_{r_m}(s_{Q_m}^*, s_{-Q_m}^*) \geq f_{r_m}(s_{-Q_m}^*, s_{Q_m})$$

minden $m \in M$, $r_m \in R_m$ és $s_{Q_m} \in S_{Q_m}$ -re.

3.3. megjegyzés. Pontosan a 3.1. definíciót kapjuk vissza, ha $R_i = \{i\}$ minden $i \in N$ -re és $Q_i = \{-i\}$ minden $i \in N$ -re.

Mostantól a Berge-egyensúlyt 3.1. definíció szerint értjük és a második definíciót többet nem használjuk.

A Berge-egyensúly egy lehetséges értelmezését adja Colman et al (2011). A magyarázat szerint a Berge-egyensúly a játékosok altruista magatartása mellett alakul ki, vagyis akkor, ha a játékosok a többiek kifizetőfüggvényeit igyekeznek maximalizálni. Ez a magyarázat hihető, hiszen az egyensúlyban minden játékos pontosan olyan s_i^* -ot játszik, amik mellett mindenki más kifizetése a lehető legnagyobb. A szerzők az altruista magatartással magyarázzák azt is, hogy például a fogolydilemma kísérleti lejátászásai során gyakran miért nem a Nash-egyensúlyt játsszák a résztvevők.

Egy másik értelmezés lehet, hogy minden játékostól, akik a saját kifizetéseiket igyekeznek maximalizálni, nem azt kérdezzük meg, hogy milyen akciót választanak, hanem azt, hogy milyen s_{-i} esetén hajlandók beleegyezni, hogy ők s_i -t válasszanak. Vagyis a kérdés nem arra vonatkozik, hogy az i -edik játékos milyen stratégiát választ, hanem arra, hogy milyen feltételek mellett hajlandó belemenni abba, hogy egy meghatározott stratégiát játsszon. Ez már egy mechanizmustervezési problémára hasonlít, hiszen egy központi döntéshozó előre eldöntheti, hogy a játékosoktól azt kérdezi-e meg, hogy bizonyos s_{-i} mellett milyen s_i -t választanak, vagy azt, hogy milyen s_{-i} esetén hajlandók beleegyezni, hogy ők s_i -t válasszanak.

3.4. definíció. *Egy játékban az*

$$\hat{S} = S_{-1} \times \cdots \times S_{-n}$$

halmazt csonka stratégiákból képzett profilok halmazának nevezzük, míg az $\hat{s} = (s_{-1}, \dots, s_{-n})$ vektorokat csonka stratégiákból képzett profiloknak nevezzük.

3.5. *megjegyzés.* Ekkor a már megszokott jelöléssel

$$\hat{s}_i = s_{-i} ,$$

$$\hat{s}_{-i} = (s_{-1}, \dots, s_{-(i-1)}, s_{-(i+1)}, \dots, s_{-n}) ,$$

$\hat{s}_{i,k} = s_k$, ahol $k \neq i$ és s_k az s_{-i} vektor k -adik komponense.

3.6. *megjegyzés.* Noha $\hat{s}$ és s ugyanazzal a betűvel van jelölve, tetszőlegesen adott $\hat{s} \in \hat{S}$ és $s \in S$ esetén $\hat{s}_i = s_{-i}$ nem feltétlenül áll fenn.

3.7. állítás. *Egy játékban a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésével előfordulhat, hogy kiküszöbölünk Berge-egyensúlyban játszott stratégiákat, sőt az is lehetséges, hogy minden Berge-egyensúlyt eliminálunk.*

Bizonyítás. Vegyük a fogolydilemma (2.3.) példát. Ekkor tudjuk, hogy csak a (v, v) kimenetel marad meg a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölése után, viszont könnyen látható, hogy a fogolydilemma játéknak a (t, t) az egyetlen Berge-egyensúlya, ugyanis

$$f_a(t, t) = 2 > 0 = f_a(t, v) ,$$

$$f_b(t, t) = 2 > 0 = f_b(v, t) .$$

■

Ez azért történhetett meg, mert a Berge-egyensúly és a Nash-egyensúly másfajta értelemben stabil. Mint láttuk egy Nash-egyensúlyi pontban egyik játékosnak sem éri meg egyénileg megváltoztatni az egyensúlyi stratégiáját, ugyanis ekkor biztosan nem kaphat nagyobb kifizetést. A Berge-egyensúly esetén viszont azt mondhatjuk, hogy egy Berge-egyensúlyi kimenetel esetén egyik játékosnak sem éri meg, ha a többi játékos megváltoztatja a stratégiáját, ő pedig nem. Vagyis csak azt állítottuk, hogy létezik olyan Berge-egyensúly, ami nem rendelkezik a Nash-egyensúlyokat jellemző stabilitással, vagyis nem Nash-egyensúly. A Berge-egyensúlyok esetében bevezetjük a Berge-dominancia fogalmát.

3.8. definíció (Berge-dominancia). *Legyen egy játékban $s_{-i}, t_{-i} \in S_{-i}$ két olyan csonka stratégiaprofil, amiből az i -edik játékos stratégiája hiányzik. Ha*

$$f_i(s_i, s_{-i}) > f_i(s_i, t_{-i})$$

minden $s_i \in S_i$ esetén teljesül, akkor az s_{-i} csonka stratégiaprofil szigorúan Berge-dominálja a t_{-i} csonka stratégiaprofil, vagyis a t_{-i} csonka stratégiaprofil szigorúan Berge-dominált.

Hasonlóan, ha

$$f_i(s_i, s_{-i}) \geq f_i(s_i, t_{-i})$$

minden $s_i \in S_i$ esetén teljesül, és létezik legalább egy $t_i \in S_i$, amire

$$f_i(t_i, s_{-i}) > f_i(t_i, t_{-i}) ,$$

akkor az s_{-i} csonka stratégiaprofil gyengén Berge-dominálja a t_{-i} csonka stratégiaprofil, vagyis a t_{-i} csonka stratégiaprofil gyengén Berge-dominált.

3.9. definíció (Berge-dominált stratégiák iteratív kiküszöbölése). *A Berge-dominált stratégiák iteratív kiküszöbölése egy olyan eljárás, ami a következő lépésekből áll. Induljunk ki egy G játékból.*

1. *Hagyjuk el a G játékból az összes szigorúan (gyengén) Berge-dominált stratégiát, így megkapjuk a G_1 redukált játékot.*
2. *Hagyjuk el a G_1 redukált játékból az összes szigorúan (gyengén) Berge-dominált stratégiát, így megkapjuk a G_2 redukált játékot.*
3. *Hagyjuk el a G_2 redukált játékból az összes szigorúan (gyengén) Berge-dominált stratégiát, így megkapjuk a G_3 redukált játékot.*
4. ...

Az eljárást addig folytatjuk, amíg a kapott redukált játékban már nincs több szigorúan (gyengén) Berge-dominált stratégia.

3.10. állítás. *Véges játékokban a szigorúan Berge-dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésének eredménye független a kiküszöbölés sorrendjétől.*

Bizonyítás. A bizonyítás pontosan ugyanaz, mint az 1.29. állítás bizonyítása. ■

3.11. állítás. *A 3.7. állításhoz hasonlóan egy játékban a szigorúan Berge-dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésével előfordulhat, hogy kiküszöbölünk Nash-egyensúlyi strtégiákat, sőt az is lehetséges, hogy minden Nash-egyensúlyi stratégiaprofil eliminálunk.*

Bizonyítás. Mutatunk egy példát. Vegyük ismét a fogolydilemma (2.3 példa) példát. Ekkor mind a két játékos esetében a t stratégia szigorúan Berge-dominálja a v stratégiát, ugyanis például az a játékosra

$$f_a(t, t) = 2 > 0 = f_a(t, v) ,$$

$$f_a(v, t) = 3 > 1 = f_a(v, v) .$$

Mivel ugyanez igaz a b játékosra is, ezért a szigorúan Berge-dominált stratégiák iteratív kiküszöbölése után csak a (t, t) kimenetel marad meg. Erről pedig már láttuk, hogy Berge-egyensúly, de nem Nash-egyensúly. ■

3.12. állítás. *Egy játékban a szigorúan Berge-dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésével egyetlen Berge-egyensúlyi pontot sem küszöbölünk ki.*

Bizonyítás. A bizonyítás indirekten történik. Tegyük fel, hogy s^* Berge-egyensúly, de mégis ki lett küszöbölve. Ekkor létezik olyan $i \in N$ játékos és olyan t_{-i} csonka stratégiaprofil, hogy t_{-i} szigorúan Berge-dominálja az s_{-i}^* csonka stratégiaprofil, vagyis

$$f_i(s_i, t_{-i}) \geq f_i(s_i, s_{-i}^*)$$

minden $s_i \in S_i$ esetén fennáll. Ekkor viszont az egyenlőtlenség igaz az s_i^* stratégiára is, vagyis

$$f_i(s_i^*, t_{-i}) \geq f_i(s_i^*, s_{-i}^*) .$$

De mivel s^* Berge-egyensúly, ezért

$$f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i^*, s_{-i})$$

minden $s_{-i} \in S_{-i}$ -re és minden $i \in N$ -re teljesül. Ez viszont ellentmondás. ■

3.13. definíció (Legjobbkerés leképezés). *Az i -edik játékos $D_i : S_i \rightarrow \mathcal{P}(S_{-i})$ legjobbkerés leképezése a következő,*

$$D_i(s_i) = \{s'_{-i} \in S_{-i} : f_i(s_i, s'_{-i}) \geq f_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}\} .$$

Minden $s_{-i} \in D(s_i)$ stratégiára azt mondjuk, hogy az i -edik játékos legjobb kérése az s_i stratégiára, vagy röviden, s_{-i} legjobb kérés.

Az egész játékra vonatkozó $D : S \rightarrow \mathcal{P}(\hat{S})$ legjobbkerés leképezés a következő,

$$D(s) = \{\hat{s} \in \hat{S} : \hat{s}_i \in D(s_i), \forall s_{-i} \in S_{-i}\} .$$

3.14. segédteétel. *Az $s^* \in S$ stratégiaprofil akkor és csak akkor Berge-egyensúlya egy játéknak, ha $\hat{s}^* \in D(s^*)$, ahol $\hat{s}^* = (s_{-1}^*, \dots, s_{-n}^*)$. Vagyis röviden azt mondhatjuk, hogy s^* fixpontja a közös D legjobbkerés leképezésnek.*

Bizonyítás. Legyen $\hat{s}^* = (s_{-1}^*, \dots, s_{-n}^*)$.

1. Ha s^* a D leképezés fixpontja, akkor Berge-egyensúly.

Legyen s^* a D közös legjobbkerés leképezés fixpontja. Ekkor $\hat{s}^* \in D(s^*)$, vagyis minden i -re $s_{-i}^* \in D_i(s_i^*)$. Ez viszont azt jelenti, hogy $f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i^*, s_{-i})$ minden $s_{-i} \in S_{-i}$ és minden $i \in N$ esetén, ami pontosan a Berge-egyensúly definíciója.

2. Ha s^* Berge-egyensúly, akkor a D leképezés fixpontja.

Mivel s^* Berge-egyensúly, ezért $f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i^*, s_{-i})$ minden $s_{-i} \in S_{-i}$ -re és minden $i \in N$ -re teljesül. Ekkor $s_{-i}^* \in D_i(s_i^*)$ minden i esetén triviálisan fennáll, vagyis a közös legjobbkérés leképezés definíciója miatt $\hat{s}^* \in D(s^*)$.

■

3.15. segédteétel. *Ha az $f_i(s_i, \cdot)$ függvény kvázikonkáv, akkor a $D_i(s_i)$ halmaz konvex minden $s_i \in S_i$ és minden $i \in N$ esetén.*

Bizonyítás. Mivel az $f_i(s_i, \cdot)$ függvény kvázikonkáv, ezért az $f_i(s) = f_i(s_i, s_{-i})$ számhoz tartozó felső nívóhalmazai konvexek, ami a következő módon írható

$$\{s'_{-i} \in S_{-i} : f_i(s_i, s'_{-i}) \geq f_i(s_i, s_{-i})\} .$$

Ez pedig pontosan a $D_i(s_i)$ definíciója.

■

3.16. következmény. *Ha az $f_i(s_i, \cdot)$ függvény kvázikonkáv, akkor minden $s \in S$ esetén $D(s)$ halmaz konvex.*

3.2. Berge-egyensúly létezése

Ebben a részfejezetben megadjuk a szakirodalomban megtalálható feltételrendszereket a Berge-egyensúly létezésére. A bizonyításokat nem közöljük.

Először szükséges bevezetni néhány fogalmat.

3.17. definíció. *Legyen A egy tetszőleges halmaz. Ekkor A határát, vagyis a lezártjának és a belsejének a különbségét $\partial A = \text{cl } A \setminus \text{int } A$ módon jelöljük.*

3.18. definíció. *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges konvex, nemüres halmaz, $y \in C$ egy tetszőleges vektor. Ekkor $Z_C(y) = [T_C(y) + y] \cap C$ halmazt így definiáljuk, ahol $T_C(y)$ a C konvex halmaz érintőkúpja az y pontban.*

3.19. definíció. *Bevezetjük a következő függvényeket.*

- Legyen $g : S \rightarrow \hat{S}$ úgy, hogy $g(s) = (s_{-1}, \dots, s_{-n})$.
- Legyen $\Phi : S \times \hat{S} \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $\Phi(s, \hat{s}) = \sum_{i=1}^n (f_i(s_i, s_{-i}) - f_i(s))$.

3.20. *megjegyzés.* Ekkor a $g : S \rightarrow \hat{S}$ függvény folytonos S -en és, ha az S_i -k konvex, kompakt halmazok, akkor $g(S)$ kompakt és konvex halmaz.

3.21. tétel (Berge-egyensúly létezése (Nessah et al, 2007b)). *Ha egy G játékban*

1. S_i nemüres, kompakt, konvex és egy lokálisan konvex Hausdorff tulajdonságú vektortér részhalmaza minden i -re,
2. f_i folytonos és kvázikonkáv S -en minden i -re,
3. Φ folytonos $S \times \hat{S}$ -on,
4. minden $g(s) \in \partial g(S)$ -re, minden $\hat{s} \in \hat{S}$ -ra, létezik $\hat{s}' \in Z_{g(S)}(g(s))$, hogy $\Phi(s, \hat{s}) \leq \Phi(s, \hat{s}')$,

akkor a játéknak létezik Berge-egyensúlya.

A következő tétel Abalo és Kostreva (2004) és Abalo és Kostreva (2005) alapján szerepel, azonban most a Nessah et al (2007a) szerint javított változatot adjuk meg. Szükséges még megjegyezni, hogy a tételt a dolgozat jelöléseivel igazítottuk.

3.22. tétel (Berge-egyensúly létezése Nessah et al (2007a)). *Ha egy G játékban*

1. S_i nemüres, konvex és kompakt minden $i \in N$ -re,
2. f_i folytonos minden i -re,
3. minden $s \in S$ -re létezik $s' \in S$, hogy $\arg\max f_i(s_i, \cdot) = \{s'_{-i}\}$ minden i -re,

akkor a játéknak létezik Berge-egyensúlya.

3.3. Létezés bizonyítása a Berge-tétellel

Ebben a részfejezetben rátérünk a Berge-egyensúly létezésének bizonyítására a Berge-tétel felhasználásával.

Mint láttuk, a közös legjobbkérés leképezés $D : S \rightarrow \mathcal{P}(\hat{S})$ nem az S halmazba képez, ami már a 3.14. segédtétel esetében is gondokat okozott. Az egyértelmű, hogy bármely $s \in S$ stratégiaprofilból képezhető egy $\hat{s} = (s_{-1}, \dots, s_n)$ csonka stratégiákból képzett profil, azonban nem minden $\hat{s} \in \hat{S}$ csonka stratégiákból képzett profilhoz létezik olyan $s \in S$, amiből származtatható lenne. Ez azt jelenti, hogy a D leképezés nem az S halmaz önmagára való halmazértékű leképezése, vagyis többek között nem lehet rá használni a Kakutani-féle fixponttételt. Viszont Berge-egyensúly csak stratégiaprofil lehet. Tehát új fogalmakat kell bevezetnünk, amikkel garantálhatjuk, hogy a D leképezésre $D : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ is igaz.

3.23. definíció ($\hat{s}$ -konzisztencia). *Egy $\hat{s} \in \hat{S}$ csonka stratégiákból képzett profilra azt mondjuk, hogy $\hat{s}$ -konzisztens, ha minden $i, j \neq k$ -ra $\hat{s}_{i,k} = \hat{s}_{j,k}$, ahol $\hat{s}_{i,k}$ az $\hat{s}$ vektor i -edik komponensének k -adik eleme.*

3.24. definíció ($\hat{S}$ -konzisztens halmaz). Legyen $K_{\hat{S}}$ az $\hat{S}$ -konzisztens halmaz, amit

$$K_{\hat{S}} = \{\hat{s} \in \hat{S} : \hat{s}_{i,k} = \hat{s}_{j,k} \forall i, j \neq k\}$$

módon írhatunk fel.

Ekkor a következő triviális állításhoz jutunk.

3.25. állítás. S és $K_{\hat{S}}$ halmazok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak.

3.26. megjegyzés. Ha S konvex, kompakt, nemüres halmaz, akkor $K_{\hat{S}}$ halmaz is konvex, kompakt és nemüres. Továbbá $K_{\hat{S}} \subseteq \hat{S}$ és a két halmaz megegyezik, ha $n = 2$.

3.27. definíció (Teljes $\hat{S}$ -konzisztencia). Egy G játék teljesen $\hat{S}$ -konzisztens, ha $D : S \rightarrow \mathcal{P}(\hat{S})$ leképezésre igaz, hogy minden $s \in S$ -re $D(s) \subseteq K_{\hat{S}}$, vagyis $\text{im } D \subseteq K_{\hat{S}}$.

Tehát ha egy játék teljesen $\hat{S}$ -konzisztens, akkor a D halmazértékű leképezésre igaz, hogy $D : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$, vagyis az S halmazt önmagára képzi le. Megjegyezzük, hogy ez a feltétel nagyon erős, például helyettesíthető lenne azzal a gyengébb feltétellel, hogy minden $s \in S$ esetén létezik $\hat{s}' \in D(s)$, amire $\hat{s}' \in K_{\hat{S}}$, vagyis $D(s) \cap K_{\hat{S}} \neq \emptyset$. Ekkor viszont elveszítenénk a Kakutani-féle fixponttétel használhatóságát, ami viszont a dolgozat egyik fő eleme.

3.28. definíció (Berge-feladat). Feleltessük meg a játékot ismét a Berge-tétel összetevőivel, tetszőleges i -re.

$$\begin{aligned} X &= S_{-i} , \\ T &= S_i , \\ f &= f_i , \\ H &= H_i , \\ \mathcal{X} &= D_i . \end{aligned}$$

Írjuk fel a Berge-tételben szereplő feladatot.

$$\begin{aligned} f_i(s_i, s_{-i}) &\rightarrow \max \\ s_{-i} &\in S_{-i} . \end{aligned}$$

Tehát jelen esetben a $H_i : S_i \rightarrow \mathcal{P}(S_{-i})$ feltételi leképezés minden $s_i \in S_i$ -hez hozzárendeli az összes lehetséges $s_{-i} \in S_{-i}$ -t, így ez a leképezés felülről félig folytonos és alulról félig folytonos is egyben, vagyis folytonos. $f_i : \text{graph } H_i \rightarrow \mathbb{R}$ a célfüggvény, a játékosok ezt maximalizálják. Ekkor az $f_i^\vee : S_i \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény a következő,

$$f_i^\vee(s_i) = \sup_{s_{-i}} f_i(s_i, \cdot) = \sup_{s_{-i} \in S_{-i}} f_i(s_i, s_{-i}) .$$

A $D_i : S_i \rightarrow \mathcal{P}(S_{-i})$ megoldásleképezés a következő módon írható fel,

$$D_i(s_i) = \operatorname{argmax}_{S_{-i}} f_i(s_i, \cdot) = \{s_{-i} \in S_{-i} : f_i(s_i, s_{-i}) = f_i^\vee(s_i)\} .$$

Ezt egy kicsit átírva,

$$D_i(s_i) = \{s_{-i}^* \in S_{-i} : f_i(s_i, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}\} .$$

3.29. *megjegyzés.* A Berge-faladatban szereplő D_i megoldásleképezések pontosan a játékosok legjobbkérés leképezései. Így azok összetétele pedig megegyezik a D közös legjobbkérés leképezéssel.

Először nézzük meg, hogy mit mondhatunk teljesen $\hat{S}$ -konzisztens esetben.

3.30. tétel. *Ha egy G teljesen $\hat{S}$ -konzisztens játékban*

1. S_i nemüres, konvex, kompakt halmaz minden i -re,
2. f_i folytonos minden i -re,
3. $f_i(s_i, \cdot)$ kvázikonkáv minden i -re,

akkor a játéknak létezik Berge-egyensúlya.

Bizonyítás. A fenti feltételek mellett a Berge-tétel (1.10. tétel) használható és annak három pontja következtében,

- $f_i^\vee$ értékfüggvény alulról folytonos és felülről folytonos is, vagyis folytonos,
- $D_i(s_i)$ kompakt értékű és felülről félig folytonos halmazértékű leképezés.

Mivel $f_i(s_{-i}, \cdot)$ kvázikonkáv függvények minden i -re, ezért a 3.15. segédétel szerint a D_i leképezés konvex halmaz értékű, tehát a közös D leképezés is konvex értékű.

Mivel a G játék teljesen $\hat{S}$ -konzisztens, ami azt jelenti, hogy D a $K_{\hat{S}}$ -be képez, ezért a D leképezés az S halmaz önmagára való felülről félig folytonos kompakt, konvex halmaz értékű leképezése, ezért használható rá a Kakutani-féle fixponttétel, vagyis létezik $s^* \in S$, hogy $\hat{s}^* \in D(s^*)$.

Az így kapott fixpont a 3.14. segédétel miatt Berge-egyensúly. ■

Most mutatunk egy példát arra, hogy ha egy játékban a 3.30. tétel feltételei teljesülnek, akkor létezik Berge-egyensúlya.

3.31. *példa* (Szimmetrikus Cournot-duopólium Berge-egyensúlya). Nézzük meg ismét a szimmetrikus Cournot-duopólium játékot (2.17. péda).

Mivel a kifizetőfüggvények folytonosak és kvázikonkávak, a stratégiahalmazok pedig konvex, kompakt halmazok, és a játék teljesen $\hat{S}$ -konzisztens, ezért a 3.30. tétel miatt a

játéknak létezik Berge-egyensúlya. Mivel a kifizetőfüggvények folytonosak és folytonosan differenciálhatóak, ezért vehetjük a deriváltjaikat. Ekkor a játékosok legjobbkérés leképezései

$$D_1(q_1) = \{q_2^*, \text{ ha } q_1 = 0; 0 \text{ különben} \} ,$$

$$D_2(q_2) = \{q_1^*, \text{ ha } q_2 = 0; 0 \text{ különben} \} .$$

A két egyenletből azt kapjuk, hogy minden $(q_1^*, 0)$ és $(0, q_2^*)$ stratégiapár Berge-egyensúly, ahol $q_i^* \in S_i$.

3.32. állítás. *im $D \subseteq K_{\hat{S}}$ feltétel elégséges, de nem szükséges az egyensúly létezésének bizonyításakor.*

Bizonyítás. Mutatunk egy példát. Vegyük ismét a szimmetrikus Cournot-duopólium játékot (2.17. példa), csak most egészítsük ki egy harmadik játékosal, jelölje őt a 3-as szám. Legyen $S_3 = \{q_3\}$, a harmadik játékos stratégiahalmaza egyelemű és legyen $f_3(q_1, q_2, q_3) = f_1(q_1, q_2, q_3)$. A másik két játékos kifizetőfüggvényei legyenek változatlanok, vagyis $f_i(q_1, q_2, q_3) = p(q_1, q_2)q_3 - cq_i$.

Ekkor a játék nem teljesen $\hat{S}$ -konzisztens, hiszen a 3.31. példában láttuk, hogy az első és a második játékosok csak $(q_1^*, 0)$ és $(0, q_2^*)$ alakú, jelen esetben csonka stratégiaprofilokat hajlandók játszani. Ezen a harmadik játékos szerepeltetése nem változtat, ugyanis az első két játékos kifizetése változatlan maradt. Viszont a harmadik játékos kifizetőfüggvényét deriválva azt kapjuk, hogy

$$D_3(q_3) = \left(\frac{a-c}{2b}, 0 \right) ,$$

ahol az $(\frac{a-c}{2b}, 0)$ stratégiapár az első és a harmadik játékos maximális kifizetését eredményezi. Ekkor nyilván az $(\frac{a-c}{2b}, 0, q_3)$ stratégiaprofil Berge-egyensúly, tehát a játéknak létezik Berge-egyensúlya. ■

A Debreu-Friedman tételhez hasonlóan is fel lehet írni a Berge-egyensúlyra.

3.33. tétel. *Ha egy G teljesen $\hat{S}$ -konzisztens játékban*

- S_i nemüres, konvex, kompakt halmaz minden i -re,
- f_i felülről folytonos minden i -re,
- $f_i(\cdot, s_{-i})$ alulról folytonos minden i -re,
- $D_i(s)$ nemüres, kompakt, konvex halmaz értékű leképezés, minden i -re,

akkor a játéknak létezik Berge-egyensúlya.

Bizonyítás. Mivel minden S_i kompakt halmaz és minden kifizetőfüggvény felülről folytonos, ezért a $D_i(s_i)$ halmazok nemüresek. Megmutatjuk, hogy a D közös legjobbkérés leképezés felülről félig folytonos. Mivel jelen esetben a legjobbkérés leképezések kompakt topologikus térből képeznek kompakt topologikus térbe, ezért az 1.7. állítás miatt ha a D leképezés zárt gráfú, akkor felülről félig folytonos.

Tehát azt bizonyítjuk, hogy a D leképezés $\text{graph } D = \{(s, \hat{t}) : s \in S, \hat{t} \in D(s)\}$ gráfja zárt halmaz. Indirekten tegyük fel, hogy nem zárt a halmaz, vagyis létezik olyan $(s^0, \hat{t}^0) \notin \text{graph } D$, $(s^0, \hat{t}^0) \in S \times \hat{S}$, hogy a pont minden U környezetére

$$U \cap \text{graph } D \neq \emptyset .$$

Ekkor $\hat{t}^0 \notin D(s^0)$, vagyis létezik j játékos, hogy $\hat{t}_j^0 = t_{-j}^0$ nem legjobb kérdés. Ekkor létezik olyan $\hat{t}_j^1 = t_{-j}^1 \in \hat{S}_j$, hogy

$$f_j(s_j^0, \hat{t}_j^1) > f_j(s_j^0, \hat{t}_j^0) .$$

Legyen $F : S \times \hat{S} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a következő,

$$F(s, \hat{t}) = f_j(s_j, t_{-j}^1) - f_j(t_j, s_{-j}) .$$

Mivel f_i felülről folytonos és $f_i(\cdot, s_{-i})$ alulról folytonos, ezért F alulról folytonos, így a $C = \{(s, \hat{t}) \in S \times \hat{S} : F(s, \hat{t}) \leq 0\}$ halmaz zárt. Minden $(s, \hat{t}) \in \text{graph } D$ esetén $F(s, \hat{t}) \leq 0$, de $F(s^0, \hat{t}^0) > 0$, ami ellentmond annak, hogy a C halmaz zárt. Így tehát a D leképezés zárt gráfú, vagyis felülről félig folytonos. Mivel D kompakt, konvex értékű, és a G játék teljesen $\hat{S}$ -konzisztens, ezért az S kompakt, konvex halmaz önmagára való leképezése, ezért a Kakutani-féle fixponttétel miatt létezik fixpontja, ami a 3.14. segédlet miatt Berge-egyensúly. ■

A teljesen $\hat{S}$ -konzisztens játékok körében a Berge-egyensúlyok egy érdekes tulajdonsággal rendelkeznek. Ha tetszőlegesen kiválasztunk két játékost, akkor a játékosok egyéni legjobbkérés leképezéseit felírva és megkeresve azok közös fixpontját, eljutunk az összes Berge-egyensúlyig. Ez abból a természetes tényből adódik, hogy ha egy játékos bejelenti s_{-i} -t, akkor még egy játékos s_{-j} bejelentésével kapunk egy teljes s stratégiaprofil és a teljesen $\hat{S}$ -konzisztens játékok körében minden legjobb kérdés olyan, hogy ha s_{-i} és t_{-j} legjobb kérdések, akkor minden $k \neq i, j$ esetén $s_k = t_k$.

3.4. Gyengített Berge-egyensúly

A Berge-egyensúly létezésének bizonyításakor tehát elégséges feltétel volt, hogy a G játék teljesen $\hat{S}$ -konzisztens legyen, azonban, mint láttuk ez egy nagyon szigorú feltevés. Jogosan merül tehát fel a kérdés, hogy hogyan garantálhatnánk a legjobbkérés vektorok

$\hat{s}$ -konzisztenciáját anélkül, hogy azt előre rögzítenénk. Erre ad lehetőséget a gyengített Berge-egyensúly. Szeretnénk megjegyezni, hogy a gyengített jelző használatát az indokolja, hogy mind a gyenge, mind az erős jelzők már más fogalmakat jelölnek. Az erős Berge-egyensúlyokról és az erős Nash-egyensúlyokról bővebben Larbani és Nessah (2001), Nessah és Tian (2009) és Nessah et al (2008) cikkeket javasoljuk.

Először bevezetünk néhány szükséges fogalmat.

3.34. definíció. *A G játékban az $f : S \times \hat{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorértékű függvény a játékosok közös kifizetőfüggvénye, ahol*

$$f(s, \hat{s}) = (f_1(s_1, \hat{s}_1), \dots, f_n(s_n, \hat{s}_n))$$

minden $(s, \hat{s}) \in S \times \hat{S}$ esetén.

3.35. definíció (Gyengített Berge-egyensúly). *Egy s^* stratégiaprofil gyengített Berge-egyensúly, ha nem létezik olyan $\hat{s} \in K_{\hat{S}}$, hogy*

$$f(s^*, \hat{s}) \geq f(s^*, \hat{s}^*) .$$

3.36. megjegyzés. A gyengített Berge-egyensúlyt a következő módon is definiálhatjuk. Egy s^* stratégiaprofil gyengített Berge-egyensúly, ha nem létezik olyan $\hat{s} \in K_{\hat{S}}$, hogy

$$\begin{aligned} &\text{minden } i \in N\text{-re } f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \leq f_i(s_i^*, \hat{s}_i) , \\ &\text{és létezik } j \in N, \text{ hogy } f_j(s_j^*, s_{-j}^*) < f_j(s_j^*, \hat{s}_j) . \end{aligned}$$

A gyengített Berge-egyensúly tehát egy olyan s^* stratégiaprofil, amire a közös f vektorértékű függvény vektoriálisan maximális. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy egy központi döntéshozóhoz beérkeznek a játékosok kérései, amiből a döntéshozó úgy állít össze egy s^* egyensúlyi stratégiát, hogy ne lehessen olyan $\hat{s}$ -konzisztens kérés együttes, ami mellett mindenki jobban járna.

3.37. definíció (Gyengített legjobbkérés leképezés). *Az egész játékra vonatkozó $\hat{D} : S \rightarrow \mathcal{P}(\hat{S})$ gyengített legjobbkérés leképezés a következő,*

$$\hat{D}(s) = \{\hat{s} \in K_{\hat{S}} : \nexists \hat{t} \in K_{\hat{S}} , \text{ hogy } f(s, \hat{t}) \geq f(s, \hat{s})\} .$$

3.38. segéd-tétel. *Az $s^* \in S$ stratégiaprofil akkor és csak akkor gyengített Berge-egyensúly egy játéknak, ha $\hat{s}^* \in \hat{D}(s^*)$, ahol $\hat{s}^* = (s_{-1}^*, \dots, s_{-n}^*)$. Vagyis röviden azt mondhatjuk, hogy s^* fixpontja a közös $\hat{D}$ gyengített legjobbkérés leképezésnek.*

Bizonyítás. Legyen $\hat{s}^* = (s_{-1}^*, \dots, s_{-n}^*)$.

1. Ha $\hat{s}^* \in \hat{D}(s^*)$, akkor s^* gyengített Berge-egyensúly.

Legyen tehát $\hat{s}^* \in \hat{D}(s^*)$, ami azt jelenti, hogy nem létezik $\hat{t} \in K_{\hat{S}}$, hogy

$$f(s^*, \hat{t}) \geq f(s^*, \hat{s}^*) .$$

Ez viszont pontosan a gyengített Berge-egyensúly definíciója.

2. Ha s^* gyengített Berge-egyensúly, akkor $\hat{s}^* \in \hat{D}(s^*)$.

Mivel s^* gyengített Berge-egyensúly, ezért nem létezik olyan $\hat{s} \in K_{\hat{S}}$, hogy

$$f(s^*, \hat{s}) \geq f(s^*, \hat{s}^*) .$$

Ekkor viszont $\hat{s}^* \in \hat{D}(s^*)$ triviálisan fennáll.

■

3.39. segédtétel. *Ha az $f(s, \cdot)$ függvény kvázikonkáv a $K_{\hat{S}}$ halmaz felett, akkor a $\hat{D}(s)$ halmaz konvex minden $s \in S$ esetén.*

Bizonyítás. Mivel az $f(s, \cdot)$ függvény kvázikonkáv, ezért az $f(s, \hat{s})$ vektorhoz tartozó felső nívóhalmazai konvexek, ami a következő módon írható

$$\{\hat{s}' \in K_{\hat{S}} : f(s, \hat{s}') \not\geq f(s, \hat{s})\} ,$$

vagyis

$$\{\hat{s} \in K_{\hat{S}} : \nexists \hat{t} \in K_{\hat{S}} , \text{ hogy } f(s, \hat{t}) \geq f(s, \hat{s})\} .$$

Ez pedig pontosan a $\hat{D}(s)$ definíciója.

■

3.40. definíció (Gyengített Berge-feladat). *Feleltessük meg a játékot az 1.20. tétel összetevőivel.*

$$\begin{aligned} X &= S , \\ T &= \hat{S} , \\ f &= f , \\ H &= H , \\ \mathcal{X} &= \hat{D} . \end{aligned}$$

Írjuk fel az 1.20. tételben szereplő feladatot.

$$\begin{aligned} f(s, \hat{s}) &\rightarrow \text{vmax} \\ \hat{s} &\in K_{\hat{S}} . \end{aligned}$$

Tehát jelen esetben a $H : S \rightarrow \mathcal{P}(\hat{S})$ feltételi leképezés hozzárendeli minden $s \in S$ -hez az összes lehetséges $\hat{s} \in K_{\hat{S}}$ -t, így ez a leképezés felülről félig folytonos és alulról félig folytonos is egyben, vagyis folytonos. $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}^n$ a célfüggvény, ezt szeretnénk vektoriálisan maximalizálni. Ekkor az $f^\vee : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ értékleképezés a következő,

$$f^\vee(s) = \text{vsup}_{\hat{s}} f(s, \cdot) = \text{vsup}_{\hat{s} \in \hat{S}} f(s, \hat{s}) .$$

A $\hat{D} : S \rightarrow \mathcal{P}(\hat{S})$ megoldásleképezés a következő módon írható fel,

$$\hat{D}(s) = \text{argvmax}_{\hat{s}} f(s, \cdot) = \{\hat{s} \in \hat{S} : f(s, \hat{s}) \in f^\vee(s)\} .$$

Ezt egy kicsit átírva,

$$\hat{D}(s) = \{\hat{s} \in K_{\hat{S}} : \nexists \hat{t} \in K_{\hat{S}} , \text{ hogy } f(s, \hat{t}) \geq f(s, \hat{s})\} .$$

3.41. tétel. *Ha egy G játékban*

1. S_i nemüres, konvex, kompakt halmaz minden i -re,
2. f folytonos,
3. $f(s, \cdot)$ kvázikonkáv $K_{\hat{S}}$ felett,

akkor a játéknak létezik gyengített Berge-egyensúlya.

Bizonyítás. A fenti feltételek mellett az 1.20. tétel használható és annak három pontja következtében,

- $f^\vee$ értékleképezés alulról félig folytonos és felülről félig folytonos is, vagyis folytonos,
- $\hat{D}(s)$ kompakt értékű és felülről félig folytonos halmazértékű leképezés.

A 3.39. segédttétel szeint ekkor $\hat{D}$ konvex értékű. Mivel $\hat{D}$ definíció szerint az S halmaz önmagára való leképezése, ezen túl felülről félig folytonos, konvex, és kompakt értékű is, ezért használható rá a Kakutani-féle fixponttétel, vagyis létezik fixpontja. Ez a fixpont pedig a 3.38. segédttétel miatt gyengített Berge-egyensúly. ■

A gyengített Berge-egyensúllyal az volt a célunk, hogy megkerüljük a teljes $\hat{S}$ -konzisztencia feltételét. Azonban csak akkor jártunk sikerrel, ha a következő állítás igaz.

3.42. állítás. *Egy G játék minden Berge-egyensúlya gyengített Berge-egyensúly is.*

Bizonyítás. Legyen s^* a G játék Berge-egyensúlya. Ekkor

$$f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i^*, s_{-i})$$

minden $s_{-i} \in S_{-i}$ -re és minden $i \in N$ -re teljesül. Ekkor viszont triviálisan nem létezik olyan $\hat{s} \in K_{\hat{S}}$, hogy

$$f(s^*, \hat{s}) \geq f(s^*, \hat{s}^*) ,$$

vagyis s^* gyengített Berge-egyensúly is. ■

3.43. megjegyzés. Ha a játék teljesen $\hat{S}$ -konzisztens, akkor a játék minden gyengített Berge-egyensúlya Berge-egyensúly is.

A gyengített Berge-egyensúlyok, mint láttuk a játék teljes $\hat{S}$ -konzisztenciájának hiányában is léteznek. Ha a játék teljesen $\hat{S}$ -konzisztens, akkor minden egyensúlyi pont olyan lesz, hogy ott minden játékos az egyéni legjobbkérés leképezéséből választ csonka stratégiaprofilt, vagyis az egyensúlyi pontot már két tetszőlegesen kiválasztott játékos leképezéseinek felírásából is megkaphatjuk. A következő példa Nessah et al (2007b) példája arra, hogy egy játékban nem létezik Berge-egyensúly. Mi megmutatjuk, hogy gyengített Berge-egyensúly viszont létezik.

3.44. *példa.* Vegyük a következő játékot,

- $N = \{1, 2, 3\}$ a játékosok halmaza,
- $S_i = [0, 1]$ a stratégiahalmazok, ahol $i = 1, 2, 3$,
- a kifizetőfüggvények

1. $f_1(s) = s_1 + s_2^2 + s_3$,

2. $f_2(s) = s_1 - s_3^3$,

3. $f_3(s) = s_1 - 3s_2^2$,

Ekkor a játékosok legjobbkérés leképezései

- $D_1(s_1) = (1, 1)$,
- $D_2(s_2) = (1, 0)$,
- $D_3(s_3) = (1, 0)$.

Látható, hogy a játék nem teljesen $\hat{S}$ -konzisztens, ugyanis a legjobb kérésekből nem lehet egy s^* stratégiaprofilt kiválasztani. Viszont az is jól látható, hogy például az $s^* = (0, 1, 1)$ stratégiaprofil gyengített Berge-egyensúly, ugyanis ekkor az első és a harmadik játékosnak nem lehet sehogy sem növelni a kifizetését.

4. fejezet

Berge-Nash-egyensúly és az összetett egyensúly

A fejezet elején bemutatjuk Colman et al (2011) eredményeit a Nash-egyensúlyok és a Berge-egyensúlyok összekapcsolásáról. A második alfejezetben bevezetjük a Berge-Nash-egyensúlyt, és a már megszokott módon a Berge-tétel segítségével belátjuk a létezését. Mint láttuk a Berge-egyensúlyok és a Nash-egyensúlyok egymástól különböző, jó tulajdonságokkal rendelkeznek. Ha tehát sikerül találni egy olyan egyensúlyt, ami Berge-egyensúly és Nash-egyensúly is egyben, akkor például ha egy játéknak több Nash-egyensúlya van, akkor azokból a Berge-egyensúly stabilitása miatt érdemes lehet az egybeeső egyensúlyt választani. Tehát az úgynevezett Berge-Nash egyensúlyok segíthetnek a Nash-egyensúlyok szelektálásánál. A fejezet végén definiáljuk az összetett egyensúlyt. Ez egy kísérlet arra, hogy a Berge-Nash-egyensúly bizonyításakor fellépő szigorú feltételeket megkerüljük és megőrizzünk valamennyit a közös egyensúly jó tulajdonságaiból.

4.1. Berge-egyensúly és Nash-egyensúly kapcsolata

A Nash-egyensúly és a Berge-egyensúly kinézetre nagyon hasonló, mindössze a Berge-egyensúlynál kicseréljük S_i -t S_{-i} -re, vagyis minden játékos ott nem a saját stratégiájáról dönt, hanem a többiekéről. Mint azt eddig láttuk az átírás nem olyan egyszerű, ugyanis oda kell figyelni az $\hat{s}$ -konzisztenciára is. Mindezek ellenére Colman et al (2011) ad két állítást arról, hogy Nash keretek között hogyan számítható a Berge-egyensúly.

4.1. állítás. *Ha az s^* stratégiaprofil egy G játék Berge-egyensúlya, akkor Nash-egyensúly minden G_σ játékban is, ahol σ a játékosok egy olyan permutációja, hogy minden játékos új helyet kap, vagyis $\sigma : N \rightarrow N$ úgy, hogy minden $i \in N$ -re $\sigma(i) \neq i$.*

Bizonyítás. Legyen s^* a G játék Berge-egyensúlya. Ha minden $i \in N$ -re meg tudjuk

mutatni, hogy

$$f_{\sigma(i)}(s_i, s_{-i}^*) \leq f_{\sigma(i)}(s^*)$$

teljesül minden $s_{-i} \in S_{-i}$, minden $i \in N$ és minden megengedett σ permutációra, akkor beláttuk az állítást. Legyen $i \in N$ tetszőleges és tegyük fel, hogy $\sigma(i) = j$.

Mivel s^* Berge-egyensúly, ezért

$$f_i(s_i^*, s_{-i}) \leq f_i(s^*)$$

teljesül minden $s_i \in S_i$ és minden $i \in N$ esetén. Ezért speciálisan az $s'_{-i} \in S_{-i}$, $s'_{-i} = (s_1^*, \dots, s_{j-1}^*, s_j, s_{j+1}^*, \dots, s_n)$ esetén is teljesül, hogy

$$f_i(s_i^*, s'_{-i}) \leq f_i(s^*) .$$

Viszont ez az egyenlőtlenség minden $s_j \in S_j$ esetén fennáll, vagyis s^* Nash-egyensúly, tehát beláttuk az állítást. ■

4.2. következmény. *Ha egy G játékhoz tartozó bármely G_σ játékban nem létezik Nash-egyensúly, akkor a G játéknak biztosan nem létezik Berge-egyensúly.*

A következő állítás összekapcsolja egy G játék Berge-egyensúlyát n darab speciális kétszereplős játék Nash-egyensúlyaival.

4.3. definíció. *Legyen $G = \{N, (S_i)_{i \in N}, (f_i)_{i \in N}\}$ egy játék. Ekkor minden $j \in N$ esetén legyen G_j a következő,*

$$G_j = \{\{I, J\}, (S_I, S_J), (f_I, f_J)\}$$

úgy, hogy $S_I = S_j$ és $S_J = S_{-j}$, továbbá

$$f_I(s_j, s_{-j}) = \sum_{i \neq j} f_i(s_j, s_{-j}) ,$$

$$f_J(s_j, s_{-j}) = f_j(s_j, s_{-j}) .$$

4.4. állítás. *Egy s^* stratégiaprofil a G játék Berge-egyensúlya, akkor és csak akkor, ha s^* Nash-egyensúly minden $j \in N$ -hez tartozó G_j játékban.*

Bizonyítás. A bizonyítást két részre bontjuk,

1. Ha s^* Berge-egyensúly, akkor minden $j \in N$ esetén s^* a G_j játék Nash-egyensúlya is.

Legyen $j \in N$ tetszőleges, ekkor megmutatjuk, hogy s^* a G_j játék Nash-egyensúlya.

Mivel s^* a G játék Berge-egyensúlya, ezért

$$f_i(s_i^*, s_{-i}) \leq f_i(s^*)$$

teljesül minden $s_{-i} \in S_{-i}$ és minden $i \in N$ esetén. Ekkor tehát

$$f_i(s_1^*, \dots, s_{j-1}^*, s_j, s_{j+1}^*, \dots, s_n^*) \leq f_i(s^*)$$

teljesül minden $s_j \in S_j$ esetén. Összeadva ezeket minden $i \neq j$ -re

$$\sum_{i \neq j} f_i(s_1^*, \dots, s_{j-1}^*, s_j, s_{j+1}^*, \dots, s_n^*) \leq \sum_{i \neq j} f_i(s^*) .$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $f_I(s_j, s_{-j}^*) \leq f_I(s^*)$ fenáll minden $s_i \in S_i$ esetén.

Másrészt, viszont mivel

$$f_i(s_i^*, s_{-i}) \leq f_i(s^*)$$

teljesül minden $s_i \in S_i$ és minden $i \in N$ esetén, ezért

$$f_j(s_j^*, s_{-j}) \leq f_j(s^*) .$$

Vagyis $f_J(s_j^*, s_{-j}) \leq f_J(s^*)$ minden $s_{-j} \in S_{-j}$ esetén, vagyis s^* Nash egyensúly a G_j játékban.

2. Ha s^* minden $j \in N$ esetén a G_j játék Nash-egyensúlya, akkor s^* Berge-egyensúly az eredeti G játékban.

Legyen $j \in N$ tetszőleges, ekkor megmutatjuk, hogy

$$f_j(s_j^*, s_{-j}) \leq f_j(s^*)$$

teljesül minden $s_{-j} \in S_{-j}$ esetén. Ekkor viszont, felhasználva f_J definícióját, azt kapjuk, hogy $f_J(s_j^*, s_{-j}) \leq f_J(s^*)$ teljesül minden $s_{-j} \in S_{-j}$ esetén, vagyis az s^* Nash-egyensúly a G_j játékban.

■

4.5. következmény. *Ha egy G játékhoz tartozó bármely G_j játékban nem létezik Nash-egyensúly, akkor a G játéknak biztosan nem létezik Berge-egyensúlya.*

4.2. Berge-Nash-egyensúly

Természetesen adódik a kérdés, hogy a bemutatott Nash-egyensúly és Berge-egyensúly milyen feltételek mellett garantálható, hogy egybeesnek. Először megmutatjuk, hogy mikor létezik mind a két egyensúly egyszerre egy játékban.

4.6. állítás. *Ha egy G teljesen $\hat{S}$ -konzisztens játékban*

- S_i nemüres, konvex, kompakt halmaz minden i -re,
- f_i folytonos minden i -re,
- $f_i(s_i, \cdot)$ kvázikonkáv minden i -re,
- $f_i(\cdot, s_{-i})$ kvázikonkáv minden i -re,

akkor a játéknak létezik Nash-egyensúlya és Berge-egyensúlya is.

Bizonyítás. Az állítás a 2.15. tétel és a 3.30. tétel egyértelmű következménye. ■

Most bevezetjük a Berge-Nash-egyensúlyt.

4.7. definíció (Berge-Nash-egyensúly). Egy s^* stratégiaprofil Berge-Nash-egyensúly, ha

$$\begin{aligned} f_i(s_i^*, s_{-i}^*) &\geq f_i(s_i, s_{-i}^*) , \\ f_i(s_i^*, s_{-i}^*) &\geq f_i(s_i^*, s'_{-i}) \end{aligned}$$

minden $s_i \in S_i$ -re, minden $s'_{-i} \in S_{-i}$ -re és minden $i \in N$ -re fennáll.

4.8. megjegyzés. Vegyük észre, hogy egy s^* stratégiaprofil pontosan akkor Berge-Nash-egyensúly, ha az Berge-egyensúly és Nash-egyensúly is egyben.

Most bemutatjuk, hogy Nessah et al (2007b) cikk milyen feltételek mellett igazolja a Berge-Nash-egyensúly létét. Először bevezetünk néhány új fogalmat.

4.9. definíció. Bevezetjük a következő függvényeket.

- Legyen $\tilde{g} : S \rightarrow \hat{S} \times S$ úgy, hogy $\tilde{g}(s) = ((s_{-1}, \dots, s_{-n}), s)$.
- Legyen $\tilde{\Phi} : S \times (\hat{S} \times S) \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $\tilde{\Phi}(s, (\hat{s}, s')) = \sum_{i \in N} (f_i(s_i, \hat{s}_i) + f_i(s_{-i}, s'_i))$.

4.10. megjegyzés. Triviális, hogy ekkor a $\tilde{g} : S \rightarrow \hat{S} \times S$ függvény folytonos S -en és, ha az S_i -k konvex, kompakt halmazok, akkor $\tilde{g}(S)$ kompakt és konvex halmaz.

4.11. tétel (Berge-Nash-egyensúly létezése (Nessah et al, 2007b)). Tegyük fel, hogy

1. S_i nemüres, kompakt, konvex és egy lokálisan konvex Hausdorff tulajdonságú vektortér részhalmaza minden i -re,
2. f_i folytonos és kvázikonkáv S -en minden i -re,
3. $\tilde{\Phi}$ folytonos $S \times (\hat{S} \times S)$ -en,
4. minden $\tilde{g}(s) \in \partial \tilde{g}(S)$ -re, minden $(\hat{s}, t) \in \hat{S} \times S$ -re, létezik $(\hat{s}', t') \in Z_{\tilde{g}(S)}(\tilde{g}(s))$, hogy $\tilde{\Phi}(s, (\hat{s}, t)) \leq \tilde{\Phi}(s, (\hat{s}', t'))$.

Ekkor a játéknak létezik Berge-Nash-egyensúlya.

Az egyensúly létezését Abalo és Kostreva (1996) is vizsgálja, azonban Nessah et al (2007a) és Larbani és Nessah (2008) rávilágít ennek hibáira. A tételleket itt nem említjük, mert a felépítésükből adódóan túl messzire vezetnének.

Most megkezdjük a Berge-tételt használó bizonyítás felépítését.

4.12. definíció. Legyen $S'_i = S_i$ minden $i \in N$ -re, továbbá $S' = S$.

4.13. definíció. Legyen $\tilde{f}_i : S' \times S \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $\tilde{f}_i(s', s) = f_i(s'_i, s_{-i}) + f_i(s_i, s'_{-i})$.

4.14. *megjegyzés.* Ekkor $\tilde{f}_i$ maximuma ugyanott van, ahol $f_i(s'_i, s_{-i})$ -nek és $f_i(s_i, s'_{-i})$ -nek külön-külön, ugyanis a két függvény maximalizálandó változói egymástól függetlenek. Ezért fogjuk a később definiált Berge-Nash-feladatban az $\tilde{f}_i$ függvényeket szerepeltetni.

4.15. *megjegyzés.* Ha $f_i(\cdot, s_{-i})$ kvázikonkáv minden i -re és $f_i(s_i, \cdot)$ kvázikonkáv minden i -re, akkor az $\tilde{f}_i(\cdot, s)$ függvények is azok minden i -re.

4.16. definíció ($\tilde{S}$ -konzisztencia). Egy $\tilde{s} \in S^n = \tilde{S}$ stratégiaprofilokból képzett profilra azt mondjuk, hogy $\tilde{s}$ -konzisztens, ha minden i, j -re $\tilde{s}_i = \tilde{s}_j$, ahol $\tilde{s}_i$ a $\tilde{s}$ vektor i -edik komponense.

4.17. definíció ($\tilde{S}$ -konzisztens halmaz). Legyen $K_{\tilde{S}}$ az $\tilde{S}$ -konzisztens halmaz, amit

$$K_{\tilde{S}} = \{\tilde{s} \in \tilde{S} : \tilde{s}_i = \tilde{s}_j \forall i, j \in N\}$$

módon írhatunk fel.

4.18. *megjegyzés.* Vegyük észre, hogy $\tilde{S}$ és $K_{\tilde{S}}$ halmazok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy $K_{\tilde{S}}$ is konvex, kompakt és nemüres halmaz. Vegyük észre azt is, hogy $K_{\tilde{S}} \subseteq \tilde{S}$.

4.19. definíció (Teljes $\tilde{S}$ -konzisztencia). Egy G játék teljesen $\tilde{S}$ -konzisztens, ha $A : S \rightarrow \mathcal{P}(\tilde{S})$ leképezésre igaz, hogy minden $s \in S$ -re $A(s) \subseteq K_{\tilde{S}}$, vagyis $\text{im } A \subseteq K_{\tilde{S}}$.

4.20. definíció (Berge-Nash-feladat). Feleltessük meg a játékot a Berge-tétel összetevőivel.

$$\begin{aligned} X &= S , \\ T &= S' , \\ f &= \tilde{f}_i , \\ H &= H , \\ \mathcal{X} &= A_i . \end{aligned}$$

Írjuk fel a Berge-tételben szereplő feladatot.

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(s', s) &\rightarrow \max \\ s &\in S . \end{aligned}$$

Tehát jelen esetben a $H_i : S \rightarrow \mathcal{P}(S')$ feltételi leképezés minden $s \in S$ -hez hozzárendeli az összes lehetséges $s' \in S'$ -t, így ez a leképezés felülről félig folytonos és alulról félig folytonos is egyben, vagyis folytonos. $\tilde{f}_i : \text{graph } H_i \rightarrow \mathbb{R}$ a célfüggvény, a játékosok ezt maximalizálják. Ekkor az $f_i^\vee : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény a következő,

$$f_i^\vee(s) = \sup_{S'} \tilde{f}_i(s, \cdot) = \sup_{s' \in S'} \tilde{f}_i(s', s) .$$

Az $A_i : S \rightarrow \mathcal{P}(S')$ megoldáisleképezés következő módon írható fel,

$$A_i(s) = \operatorname{argmax}_{S'} \tilde{f}_i(s, \cdot) = \{s' \in S' : \tilde{f}_i(s', s) = f_i^\vee(s)\} .$$

Ezt egy kicsit átírva,

$$A_i(s) = \{s'' \in S' : \tilde{f}_i(s'', s) \geq \tilde{f}_i(s', s), \forall s' \in S'\} .$$

4.21. tétel. Ha egy G teljesen $\tilde{S}$ -konzisztens játékban

1. S_i nemüres, konvex, kompakt halmaz minden i -re,
2. f_i folytonos minden i -re,
3. $f_i(\cdot, s_{-i})$ kvázikonkáv minden i -re,
4. $f_i(s_i, \cdot)$ kvázikonkáv minden i -re,

akkor a játéknak létezik Berge-Nash-egyensúlya.

Bizonyítás. A fenti feltételek mellett a Berge-tétel (1.10. tétel) használható és annak három pontja következtében,

- $f_i^\vee$ értékfüggvény alulról folytonos és felülről folytonos is, vagyis folytonos,
- $A_i(s)$ kompakt értékű és felülről félig folytonos halmazértékű leképezés.

Mivel ez tetszőleges i -re igaz, így az A_i leképezés felülről félig folytonos minden i -re. Legyen $A : S \rightarrow \mathcal{P}(\tilde{S})$, továbbá

$$A(s) = \{\tilde{s} \in \tilde{S} : s' \in A_i(s) \forall i\} .$$

Mivel A a $K_{\tilde{S}}$ -be képez, ezért az A leképezés az S halmaz önmagára való felülről félig folytonos kompakt, konvex halmaz értékű leképezése, ezért használható rá a Kakutani-féle fixponttétel, vagyis

$$\exists s \in S , \text{ hogy } s \in A(s) .$$

Az így kapott fixpont pedig triviálisan Berge-Nash-egyensúly. ■

Szeretnénk megjegyezni, hogy Colman et al (2011) megmutatta, hogy a 12, ordinálisan különböző, szimmetrikus, két játékosos, két stratégiás játékok közül pontosan 6 játék esetén esik egybe a Berge-egyensúly és a Nash-egyensúly.

A következő példán keresztül mutatjuk be a Berge-Nash-egyensúlyt.

4.22. *példa.* Vegyük a következő játékot,

- $N = \{a, b\}$ a játékosok halmaza,
- $S_a = S_b = \{v, t\}$ a stratégiahalmazok,
- a kifizetéseket az alábbi mátrix tartalmazza.

		b	
		v	t
a	v	5; 5	1; 1
	t	1; 1	0; 0

4.1. táblázat. 4.22. példa kifizetőmátrixa

A bal oldalon lévő számok az a , a jobb oldalon lévők a b játékos kifizetései. Ekkor könnyen látható, hogy a játéknak a (v, v) kimenetel a Berge-Nash-egyensúlya, ugyanis egyik játékosnak sem éri meg egyénileg eltérni az egyensúlyi stratégiájától és egyik játékos sem kaphat jobb kifizetést, ha a másik játékos vált stratégiát.

4.3. Az összetett egyensúly

A Berge-Nash-egyensúly létezésének bizonyításához ismét elég erős elégséges feltételeket használtunk (im $A \subseteq K_{\mathcal{S}}$). Azonban maga a Berge-Nash-egyensúly arról szól, hogy két külön leképezésnek keressük a közös fixpontját. Ehhez egyszerűen csak képezni kell egy összetett függvényt a leképezésekből, majd annak keresni a fixpontjait. Ez a megoldás azonban több fixpontot adhat vissza, mint a Berge-Nash-egyensúly, viszont ha létezik Berge-Nash-egyensúly, akkor azt triviálisan visszaadja. További előnye, hogy a Berge-Nash-egyensúly létezésének bizonyításakor használt erős feltételek helyett elég egyszerűek mellett is igazolható az egyensúly léte.

Vegyük észre, hogy a Nash-egyensúly B_i leképezéseit és a Berge-egyensúly D_i leképezéseit egy összetett függvényben lehet szerepeltetni. Legyen ez a leképezés C_i . Mivel $D_i : S_i \rightarrow \mathcal{P}(S_{-i})$ és $B_i : S_{-i} \rightarrow \mathcal{P}(S_i)$, ezért a két leképezés összetételének van értelme. Az összetett leképezés tehát

$$C_i : S_i \rightarrow \mathcal{P}(S_i) ,$$

$$C_i(s_i) = B_i(D_i(s_i))$$

alakban írható.

Látható, hogy a B_i leképezések tulajdonságai miatt nem érdekes, hogy a D_i leképezések esetleg inkonzisztens eredményre vezetnek, C_i mindig konzisztens. Éppen ezért a közös C leképezés felírásakor nem kell külön megfontolásokat tenni, hanem elég koordinátáinként elvégezni az C_i leképezéseket.

4.23. definíció (Összetett egyensúly). *Egy s^* stratégiaprofil összetett egyensúly, ha*

$$f_i(s_i^*, s_{-i}) \geq f_i(s_i, s_{-i}) ,$$

ahol $s_{-i} \in D_i(s_i^*)$, minden $s_i \in S$ -re és minden $i \in N$ -re teljesül.

4.24. *megjegyzés.* Vagyis az összetett egyensúly a közös $C : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ leképezés s^* fixpontja.

4.25. tétel. *Ha egy G játékban*

1. S_i nemüres, konvex, kompakt halmaz minden i -re,
2. f_i folytonos minden i -re,
3. $f_i(\cdot, s_{-i})$ kvázikonkáv minden i -re,
4. $f_i(s_i, \cdot)$ kvázikonkáv minden i -re,

akkor a játéknak létezik összetett egyensúlya.

Bizonyítás. Mivel a 2.15. és a 3.30. tételek szerint ekkor B_i és D_i leképezések felülről félig folytonosak és kompakt, konvex értékűek, ezért C_i is felülről félig folytonos és kompakt, konvex értékű. Továbbá C az S halmazt önmagára képezi le, így a Kakutani-féle fixponttétel miatt létezik fixpontja, ami összetett egyensúly. ■

4.26. *példa.* Nézzük ismét a 4.22. példát. Könnyű látni, hogy ebben a példában egyetlen összetett egyensúly létezik, a (v, v) kimenetel, ugyanis ez a v stratégia az egyetlen legjobb kérdés mind a két játékos számára, és erre a stratégiára adott legjobb válaszuk is ugyanez. Tehát a játék Berge-Nash egyensúlya lett az összetett egyensúlya is.

4.27. *példa* (Gyáva nyúl). Vegyük a következő játékot,

- $N = \{a, b\}$ a játékosok halmaza,
- $S_a = S_b = \{v, t\}$ a stratégiahalmazok,
- a kifizetéseket az alábbi mátrix tartalmazza.

		b	
		v	t
a	v	6; 6	2; 7
	t	7; 2	0; 0

4.2. táblázat. Gyáva nyúl játék kifizetőmátrixa

A bal oldalon lévő számok az a , a jobb oldalon lévők a b játékos kifizetései. Ekkor könnyen látható, hogy a játéknak két (tiszt) Nash-egyensúlya is van, (v, t) és (t, v) . A játék egyetlen Berge-egyensúlya a (v, v) stratégiaprofil. Vagyis a játéknak nem létezik Berge-Nash-egyensúlya.

De ha megnézzük a játékosok legjobb kéréseit, ami minden esetben a v stratégia, akkor észrevehetjük, hogy a játéknak létezik összetett egyensúlya, éspedig (t, t) , ugyanis mind a két játékos számára a v stratégiára adott legjobb válasz a t stratégia.

Összefoglalás

Összefoglaljuk a dolgozat fő eredményeit. Mint a bevezetésben írtuk, a dolgozat célja az volt, hogy bemutassa a Berge-egyensúlyt és, hogy rámutasson a Berge-tétel alkalmazhatóságára.

Az első fejezetből a Berge-tétel vektorértékű általánosítását emelnénk ki, ami szükséges volt a gyengített Berge-egyensúly létezésének bizonyításánál.

A második fejezetben beláttuk, hogy a Berge-tétel alkalmazható a Nash-egyensúly létezésének bizonyításához és meg is adtunk egy olyan feltételrendszert, ami bizonyos szempontból egyszerűbb, mint a szakirodalomból bemutatottak.

A Berge-egyensúly esetében definiáltuk a Berge-dominanciát és a legjobbkérés leképezéseket. Továbbá definiáltuk a teljesen $\hat{S}$ -konzisztens játékok osztályát. A Berge-egyensúlyhoz is sikerült olyan feltételeket adnunk a játékokra, hogy azok mellett a Berge-tétel használatával bizonyítható legyen az egyensúly létezése. Definiáltuk a gyengített Berge-egyensúlyt és megmutattuk, hogy ez az egyensúly olyan játékok esetén is létezhet, amik esetében nem tudjuk igazolni a Berge-egyensúly létét.

A harmadik fejezetben ismét megadtunk egy olyan feltételrendszert, ami mellett létezik Berge-Nash-egyensúly és a Berge-tételt használtuk a bizonyításhoz. Definiáltuk teljesen $\tilde{S}$ -konzisztens játékok osztályát és definiáltuk a Berge-Nash-feladat A_i leképezéseit. Bevezettük az összetett egyensúly fogalmát és megmutattuk, hogy ez valamilyen értelemben a Berge-Nash-egyensúlyok gyengítése.

További kutatások célja lehet a dolgozatban említett $\hat{S}$ -konzisztencia kikerülése, illetve a bevezetett, illetve bemutatott egyensúlyok gyakorlati alkalmazása.

Függelék

Először bevezetünk néhány fogalmat.

5.1. definíció. Legyen $A \subseteq X$ tetszőleges halmaz. Ekkor

- A^c az A halmaz komplementerét jelöli,
- $\text{int } A$ az A halmaz belsejét jelöli,
- $\text{cl } A$ és $\overline{A}$ az A halmaz lezártját jelölik.

5.2. definíció. Legyen $f : X \rightarrow Y$ tetszőleges függvény. Ekkor $\text{im } f$ az f függvény képhalmazát jelöli.

5.3. definíció. Legyen (X, d) metrikus tér. Egy $x \in X$ pontnak egy $A \subseteq X$ halmaztól való távolsága

$$d(x, A) = d_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a) .$$

5.4. definíció (Gömb). Legyen (X, d) metrikus tér. Egy $x \in X$ pont középpű, $r > 0$ sugarú gömb

$$B(x, r) = \{z \in X : d(z, x) < r\} .$$

5.5. definíció (Parallel tartomány). Egy $A \subseteq X$ halmaz $\varepsilon > 0$ sugarú parallel tartománya

$$B(A, \varepsilon) = \{x \in X : d_A(x) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) .$$

Ez tulajdonképpen az A halmaz körüli gömb.

5.6. definíció. Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz.

- $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz összes részhalmazainak halmaza, vagyis a hatványhalmaz,
- $\mathcal{G}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ az X halmaz összes nyílt részhalmazainak halmaza,
- $\mathcal{Z}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ az X halmaz összes zárt részhalmazainak halmaza,
- $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ az X halmaz összes kompakt részhalmazainak halmaza,

- $\mathcal{C}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ az X halmaz összes konvex részhalmazainak halmaza.

5.7. *megjegyzés.* Megszokott jelölés még a $\mathcal{P}(X)$ helyett a 2^X is, de a dolgozatban nem ezt használjuk.

5.8. definíció (Kvázikonkavitás). *Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kvázikonkáv, ha minden felső nívóhalmaza konvex, vagyis minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a*

$$\{x : f(x) \geq \alpha\}$$

halmaz konvex.

5.9. *megjegyzés.* Ha egy függvény konkáv, akkor kvázikonkáv is.

5.10. definíció (Kvázikonkavitás vektorértékű függvényre). *Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény kvázikonkáv, ha minden $\alpha \in \mathbb{R}^n$ esetén az*

$$\{x : f(x) \not\leq \alpha\}$$

halmaz konvex.

5.11. definíció. *Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény kvázikonkáv egy $A \subseteq X$ halmaz felett, ha minden $\alpha \in \mathbb{R}^n$ esetén az*

$$\{x \in A : f(x) \not\leq \alpha\}$$

halmaz konvex.

A szükséges topológiai alapfogalmak a következők.

5.12. definíció (Topológia, topologikus tér, nyílt halmazok). *Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz. Egy $\tau_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ halmazrendszert topológiának nevezünk, ha*

1. *uniózárt, vagyis minden Γ indexhalmaz mellett minden $\gamma \in \Gamma$ és $G_\gamma \in \tau_X$ esetén*

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma \in \tau_X ,$$
2. *véges metszetzárt, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ mellett minden i és $G_i \in \tau_X$ esetén $\bigcap_{i=1}^n G_i \in \tau_X$,*
3. *$X \in \tau_X$ és $\emptyset \in \tau_X$.*

Az (X, τ_X) párt topologikus térnek, a $\tau_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ elemeit nyílt halmazoknak nevezük.

5.13. definíció (Környezet, környezetrendszer). *Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $x \in X$ pont környezetének nevezük az $U \subseteq X$ halmazt, ha létezik $G \subseteq X$ nyílt halmaz, hogy $x \in G \subseteq U$. Egy $x \in X$ pont környezeteinek a halmazrendszerét környezetrendszernek nevezük,*

$$\tau_X(x) = \{U \subseteq X : \exists G \in \tau_X, x \in G \subseteq U\} .$$

5.14. definíció (Topológia bázisa és szubbázisa). Legyen (X, τ_X) topologikus tér.

1. Egy $\beta \subseteq \tau_X$ halmazrendszer a τ_X topológia bázisának nevezzük,

$$[\beta]^\cup = \left\{ \bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \beta \right\} = \tau_X .$$

2. Egy $\sigma \subseteq \tau_X$ halmazrendszer a τ_X topológia szubbázisának nevezzük,

$$[[\sigma]^\cap]^\cup = \tau_X , \text{ ahol } [\sigma]^\cap = \left\{ \bigcap_{i=1}^n \sigma_i : \sigma_i \in \sigma \forall i \right\} .$$

5.15. definíció (τ_Y -folytonosság). Legyenek (X, τ_X) , (Y, τ_Y) topologikus terek. Egy $f : X \rightarrow Y$ függvényt egy $a \in X$ pontban τ_Y -folytonosnak nevezünk, ha az $f(a) \in Y$ pont minden $V \in \tau_Y(f(a))$ környezetéhez létezik az $a \in X$ pontnak olyan $U \in \tau_X(a)$ környezete, hogy $f(U) \subseteq V$. Egy $f : X \rightarrow Y$ függvényt τ_Y -folytonosnak nevezünk, ha minden $x \in X$ pontban τ_Y -folytonos.

5.16. definíció (Alsó topológia). Az alsó topológia az $\mathbb{R}$ -en értelmezett alábbi topológia.

$$\tau_a = \{\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} .$$

5.17. definíció (Felső topológia). A felső topológia az $\mathbb{R}$ -en értelmezett alábbi topológia.

$$\tau_f = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} .$$

5.18. definíció (Euklideszi topológia). Az $\mathbb{R}$ -en értelmezett alsó és felső topológia által közösen generált topológiát euklideszi topológiának nevezzük és τ_{eukl} -val jelöljük.

5.19. definíció (Alulról folytonosság). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény alulról folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra létezik U környezete az a pontnak, hogy minden $x \in U$ esetén $f(a) - \varepsilon < f(x)$. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény alulról folytonos, ha minden $x \in X$ pontban alulról folytonos.

5.20. definíció (Felülről folytonosság). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény felülről folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra létezik U környezete az a pontnak, hogy minden $x \in U$ esetén $f(x) < f(a) + \varepsilon$. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény felülről folytonos, ha minden $x \in X$ pontban felülről folytonos.

5.21. definíció (Folytonosság). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra létezik U környezete az a pontnak, hogy minden $x \in U$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, ha minden $x \in X$ pontban folytonos.

5.22. következmény. Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos egy $a \in X$ pontban, ha az $a \in X$ pontban alulról folytonos és felülről folytonos. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, ha minden $x \in X$ pontban felülről folytonos és alulról folytonos.

5.23. megjegyzés. Az 5.19., 5.20. és 5.21. definíciókat felírhatjuk az 5.15. definíció és az 5.16., 5.17. és 5.18. definíciók segítségével. Legyen (X, τ_X) topologikus tér.

1. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény alulról folytonos egy $a \in X$ pontban, ha $\mathbb{R}$ -en az alsó topológiát értelmezzük és az f függvény τ_a -folytonos. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény alulról folytonos, ha minden $x \in X$ pontban alulról folytonos.
2. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény felülről folytonos egy $a \in X$ pontban, ha $\mathbb{R}$ -en a felső topológiát értelmezzük és az f függvény τ_f -folytonos. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény felülről folytonos, ha minden $x \in X$ pontban felülről folytonos.
3. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos egy $a \in X$ pontban, ha $\mathbb{R}$ -en az euklideszi topológiát értelmezzük és az f függvény τ_{eukl} -folytonos. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, ha minden $x \in X$ pontban folytonos.

5.24. definíció (Halmazértékű leképezés). Legyenek (X, τ_X) , (Y, τ_Y) topologikus terek. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ leképezést halmazértékűnek (pont-halmaz leképezésnek) nevezünk. A későbbiekben a halmazértékű leképezéseket nagy latin betűkkel fogjuk jelölni.

5.25. megjegyzés. Megszokottak még a halmazértékű leképezések jelölésére az $F : X \rightrightarrows Y$ és az $F : X \rightarrow 2^Y$ jelölések is, de mi a későbbiekben az $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ jelölést használjuk.

5.26. definíció. Legyenek (X, τ_X) , (Y, τ_Y) topologikus terek és legyen $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ egy halmazértékű leképezés.

- F nyílt értékű, ha minden $x \in X$ esetén $F(x) \subseteq Y$ halmaz nyílt, jelölésben $F : X \rightarrow \mathcal{G}(Y)$,
- F zárt értékű, ha minden $x \in X$ esetén $F(x) \subseteq Y$ halmaz zárt, jelölésben $F : X \rightarrow \mathcal{Z}(Y)$,
- F kompakt értékű, ha minden $x \in X$ esetén $F(x) \subseteq Y$ halmaz kompakt, jelölésben $F : X \rightarrow \mathcal{K}(Y)$,
- F konvex értékű, ha minden $x \in X$ esetén $F(x) \subseteq Y$ halmaz konvex, jelölésben $F : X \rightarrow \mathcal{C}(Y)$,

5.27. megjegyzés. Egy halmazértékű leképezés lehet például konvex, kompakt értékű is. Ekkor nyilván minden $x \in X$ esetén $F(x) \subseteq Y$ halmaz konvex és kompakt halmaz.

5.28. definíció. Legyen X adott halmaz és $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ adott halmazrendszer. Egy $H \subseteq X$ halmaz esetén

- $\mathcal{A}_H = \{A \in \mathcal{A} : A \cap H \neq \emptyset\}$,
- $\mathcal{A}^H = \{A \in \mathcal{A} : A \cap H = \emptyset\}$.

5.29. definíció (Alsó-Vietoris-topológia). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. A $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}$ hatványhalmazon alsó-Vietoris-topológiának nevezzük azt a topológiát, amelynek egy szubbázisa

$$\sigma_{\text{a-V}} = \{\mathcal{P}_G : G \in \mathcal{G}(X)\}.$$

5.30. definíció (Felső-Vietoris-topológia). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. A $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}$ hatványhalmazon felső-Vietoris-topológiának nevezzük azt a topológiát, amelynek egy bázisa

$$\beta_{\text{f-V}} = \{\mathcal{P}^Z : Z \in \mathcal{Z}(X)\}.$$

5.31. definíció (Vietoris-topológia). $\mathcal{P}(X)$ -en Vietoris-topológiának hívjuk az alsó-Vietoris és a felső-Vietoris topológiák által együtt generált topológiát és τ_V -vel jelöljük.

5.32. definíció (Alulról félig folytonosság). Legyenek $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ topologikus terek. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés alulról félig folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $G \subseteq Y$ nyílt halmaz esetén, amelyre $F(a) \cap G \neq \emptyset$, létezik $U \in \tau_X(a)$ környezet, hogy minden $x \in U$ esetén $F(x) \cap G \neq \emptyset$. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés alulról félig folytonos az X halmazon, ha minden $G \subseteq Y$ nyílt halmaz esetén $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\} \subseteq X$ halmaz nyílt.

5.33. definíció (felülről félig folytonosság). Legyenek $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ topologikus terek. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $Z \subseteq Y$ zárt halmaz esetén, amelyre $F(a) \cap Z = \emptyset$, létezik $U \in \tau_X(a)$ környezet, hogy minden $x \in U$ esetén $F(x) \cap Z = \emptyset$. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos az X halmazon, ha minden $Z \subseteq Y$ zárt halmaz esetén $\{x \in X : F(x) \cap Z = \emptyset\} \subseteq X$ halmaz nyílt.

5.34. megjegyzés. Az 5.33. definíció átfogalmazható nyílt halmazokra. Legyen $G = Z^c$. Ekkor egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $G \subseteq Y$ nyílt halmaz esetén, amelyre $F(a) \subseteq G$, létezik $U \in \tau_X(a)$ környezet, hogy minden $x \in U$ esetén $F(x) \subseteq G$. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos az X halmazon, ha minden $G \subseteq Y$ nyílt halmaz esetén $\{x \in X : F(x) \subseteq G\} \subseteq X$ halmaz nyílt.

5.35. definíció (Folytonosság). *Legyenek (X, τ_X) , (Y, τ_Y) topologikus terek. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés folytonos egy $a \in X$ pontban, ha alulról félig folytonos és felülről félig folytonos az $a \in X$ pontban. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés folytonos az X halmazon, ha alulról félig folytonos és felülről félig folytonos az X halmazon.*

5.36. *megjegyzés.* Az 5.32., 5.33. és 5.35. definíciókat felírhatjuk az 5.15. definíció és az 5.29., 5.30. és 5.31. definíciók segítségével. Legyenek (X, τ_X) , (Y, τ_Y) topologikus terek.

1. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés alulról félig folytonos egy $a \in X$ pontban, ha Y -on az alsó-Vietoris-topológiát értelmezzük és az F halmazértékű leképezés τ_{a-V} -folytonos. $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ alulról félig folytonos, ha minden $x \in X$ pontban alulról félig folytonos.
2. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos egy $a \in X$ pontban, ha Y -on a felső-Vietoris-topológiát értelmezzük és az F halmazértékű leképezés τ_{f-V} -folytonos. $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ felülről félig folytonos, ha minden $x \in X$ pontban felülről félig folytonos.
3. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés folytonos egy $a \in X$ pontban, ha Y -on a Vietoris-topológiát értelmezzük és az F halmazértékű leképezés τ_V -folytonos. $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ folytonos, ha minden $x \in X$ pontban folytonos.

5.37. definíció (Zárt gráfúság). *Legyenek (X, τ_X) , (Y, τ_Y) topologikus terek. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezést zárt gráfunak nevezünk, ha*

$$\text{graph } F = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X, y \in F(x)\} \subseteq X \times Y$$

gyenge gráfja zárt halmaz.

5.38. *megjegyzés.* Egyértelmű, hogy ha egy $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés zárt gráfú, akkor zárt értékű is. Ez az állítás visszafelé nem feltétlenül igaz.

5.39. definíció (Reguláris topologikus tér). *Egy (X, τ_X) topologikus tér reguláris, ha minden Z zárt halmazon kívüli x pontnak létezik diszjunkt, zárt V környezete, vagyis $Z \cap V = \emptyset$.*

5.40. definíció (Kompakt topologikus tér). *Egy (X, τ_X) topologikus tér kompakt, ha X kompakt halmaz.*

5.41. állítás. *Legyenek (X, τ_X) , (Y, τ_Y) topologikus terek.*

1. *Legyen az (Y, τ_Y) reguláris topologikus tér. Ha az $F : X \rightarrow \mathcal{Z}(Y)$ felülről félig folytonos, zárt halmaz értékű leképezés, akkor zárt gráfú.*

2. Legyen (Y, τ_Y) kompakt topologikus tér. Ha az $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés zárt gráfú, akkor felülről félig folytonos.
3. Legyen (Y, τ_Y) kompakt és reguláris topologikus tér. Egy $F : X \rightarrow \mathcal{Z}(Y)$ zárt, kompakt halmaz értékű leképezés pontosan akkor felülről félig folytonos, ha zárt gráfú.

Bizonyítás.

1. Megmutatjuk, hogy a $(\text{graph } F)^c \subseteq X \times Y$ halmaz nyílt.

Legyen $(x, y) \in (\text{graph } F)^c$ tetszőleges pont, azaz $y \notin F(x)$. Mivel $F(x) \subseteq Y$ zárt halmaz, és az (Y, τ_Y) topologikus tér reguláris, azért létezik $V \in \tau_Y(y)$ zárt környezet, hogy $F(x) \cap V = \emptyset$. Mivel az $F : X \rightarrow \mathcal{Z}(Y)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos, ezért létezik $U \in \tau_X(x)$ környezet, hogy minden $z \in U$ esetén $F(z) \cap V = \emptyset$. Ezek szerint minden $u \in U$ és minden $v \in V$ esetén $v \notin F(u)$, azaz $u \in (\text{graph } F)^c$, így $U \times V \subseteq (\text{graph } F)^c$. Ez pedig azt jelenti, hogy $(\text{graph } F)^c \subseteq X \times Y$ nyílt halmaz.

2. Legyen $x \in X$ tetszőleges. Belátjuk, hogy az $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos az x pontban.

Legyen $Z \in \mathcal{Z}(Y)$ zárt halmaz, amelyre $F(x) \cap Z = \emptyset$. Meg kell mutatni, hogy létezik $U_x \in \tau_X(x)$ környezete az $x \in X$ pontnak, hogy minden $z \in U_x$ esetén $F(z) \cap Z = \emptyset$. Tekintsük az (Y, τ_Y) topologikus tér a következő nyílt halmazokból álló lefedését.

$$\{(\text{cl } F(U) \cap Z)^c : U \in \tau_X(x)\} \cup \{Z^c\} .$$

Ez a halmazrendszer valóban lefedése az Y halmaznak,

$$\bigcup_{U \in \tau_X(x)} (\text{cl } F(U) \cap Z)^c \cup Z^c = Y .$$

Ugyanis legyen $y \in Y$ tetszőleges. Ekkor két eset lehetséges.

- (a) $y \in F(x)$. Mivel $F(x) \cap Z = \emptyset$, ezért $y \in Z^c$,
- (b) $y \notin F(x)$. Ekkor $(x, y) \notin \text{graph } F$, azaz $(x, y) \in (\text{graph } F)^c$. Mivel $\text{graph } F \subseteq X \times Y$ zárt halmaz, vagyis $(\text{graph } F)^c \subseteq X \times Y$ nyílt halmaz, ezért az (x, y) pontnak létezik $W \in \tau_{X \times Y}(x, y)$ környezete, amelyre $W \subseteq (\text{graph } F)^c$, ezért létezik $U \in \tau_X(x)$ és létezik $V \in \tau_Y(y)$ nyílt környezet, hogy

$$U \times V \subseteq W \subseteq (\text{graph } F)^c .$$

Ezek szerint minden $z \in U$, $v \in F(z)$ esetén $v \notin V$, vagyis $F(U) \subseteq V^c$, azaz

$$V \subseteq (F(U))^c .$$

Mivel $V \subseteq Y$ nyílt halmaz, ezért $V \subseteq \text{int}(F(U))^c$, azonban

$$\text{int}(F(U))^c = (\text{cl } F(U))^c \subseteq (\text{cl } F(U) \cap Z)^c ,$$

ezért $V \subseteq (\text{cl } F(U) \cap Z)^c$.

Mivel $V \in \tau_Y(y)$, így $y \in V$, ezért

$$y \in (\text{cl } F(U) \cap Z)^c .$$

Ezek szerint létezik $U \in \tau_X(x)$ környezet, hogy $y \in (\text{cl } F(U) \cap Z)^c$.

Mivel az (Y, τ_Y) topologikus tér kompakt, ezért a fenti lefedésből kiválasztható véges lefedés, azaz létezik $U_1, \dots, U_n \in \tau_X(x)$ véges sok környezet, hogy

$$Y = \bigcup_{i=1}^n (\text{cl } F(U_i) \cap Z)^c \cup Z^c \subseteq \bigcup_{i=1}^n (F(U_i) \cap Z)^c \cup Z^c ,$$

mivel $\cap F(U_i) \supseteq F(\cap U_i)$, ezért

$$\emptyset = \left(\bigcup_{i=1}^n (F(U_i) \cap Z)^c \cup Z^c \right)^c = \bigcap_{i=1}^n (F(U_i) \cap Z) \cap Z \supseteq F \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) \cap Z .$$

Ezek szerint az $U_x = \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_X(x)$ környezetre teljesül, hogy $F(U_x) \cap Z = \emptyset$, azaz minden $z \in U_x$ esetén $F(z) \cap Z = \emptyset$.

3. Az előző két pontból következik.

■

Most pedig elkezdjük felépíteni a szükséges fixponttételeket.

5.42. definíció (Affin függetlenség). Az $X = \{x^0, \dots, x^n\}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$ halmaz *affin független*, ha $\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i = 0$ és ha $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$, akkor minden $\lambda_i = 0$.

5.43. definíció (Szimplex). Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^m$ *affin független halmaz*, $X = \{x^0, \dots, x^n\}$.

1. Az X halmaz elemeinek szigorúan pozitív konvex kombinációiból álló T halmazt *n-szimplexnek* nevezzük.
2. Az X halmaz konvex burkát, $T = \text{co } X$ zárt *n-szimplexnek* hívjuk.

5.44. *megjegyzés*. Egy szimplexet alkotó x^i vektorokat csúcsoknak nevezzük, míg minden k -szimplexet, ahol $k \leq n$, lapoknak nevezünk. A k -szimplex csúcsai a $\{x^{i_0}, \dots, x^{i_k}\}$ vektorok.

5.45. definíció (Tartó). Legyen $y = \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i = 0 \in \text{co}\{x^0, \dots, x^n\}$. Legyen $\chi(y) = \{i : \lambda_i > 0\}$. Ha $\chi(y) = \{x_0, \dots, x_k\}$, akkor y benne van az egyik k -szimplexben, vagyis rajta van az egyik lapon. Ezt a lapot szokás y tartójának hívni.

5.46. definíció (Sztenderd n -szimplex). Sztenderd n -szimplexnek nevezzük az $\mathbb{R}^{n+1}$ egységvektoraiból, mint csúcsokból képzett szimplexet. Ezt a következő módon írhatjuk.

$$\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y_i > 0, i = 0, \dots, n; \sum_{i=0}^n y_i = 1\}.$$

A sztenderd n -szimplex lezártját nevezzük sztenderd zárt n -szimplexnek és Δ^n -nel jelöljük.

5.47. megjegyzés. Az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér egységvektorait most $\{e^0, \dots, e^n\}$ módon írhatjuk fel, megszokottabb az $\{e_0, \dots, e_n\}$ jelölés.

5.48. megjegyzés. Könnyen belátható, hogy ha $x, z \in \Delta^n$ és $x \leq z$, akkor $x = z$.

5.49. definíció (Szimplex felosztás). Legyen T egy n -szimplex. A $\bar{T}$ zárt n -szimplex szimplex felosztásának nevezzük a $\{T_i : i \in I\}$ véges sok szimplex összességét, amire $\bigcup_{i \in I} T_i = \bar{T}$ és minden $i, j \in I$ -re $\bar{T}_j \cap \bar{T}_i$ vagy üres, vagy a közös lap lezártja.

5.50. definíció (Címkézés). Legyen a $\bar{T}$ zárt n -szimplex és tekintsük ennek egy szimplex felosztását. Jelölje V az összes részszelex összes csúcsát és legyen $\lambda : V \rightarrow \{0, \dots, n\}$ egy olyan függvény, amire $\lambda(v) = \chi(v)$. Ekkor a λ függvényt a felosztás címkézésének nevezzük. Egy részszelex teljesen címkézett, ha a λ függvény felvesz minden értéket 0 és n között a részszelex csúcsain.

5.51. segédtétel (Sperner-lemma). Legyen $\bar{T}$ egy zárt n -szimplex és tekintsük ennek egy olyan szimplex felosztását, amit a λ függvény címkéz. Ekkor a felosztásban páratlan számú teljesen címkézett részszelex van.

Bizonyítás. A bizonyítás teljes indukcióval történik n -re. Az $n = 0$ eset triviális, hiszen ekkor a szimplex egyetlen pontból áll, legyen ez x^0 . Ekkor ez a pont szükségképpen a 0-s címkét kell, hogy kapja, vagyis pontosan egy teljesen címkézett részszelex van, x^0 maga.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $(n - 1)$ -re és bizonyítsuk be n -re. Jelölje

- C , a teljesen címkézett n -szimplexek halmazát,
- A , a majdnem teljesen címkézett n -szimplexek halmazát, például azok, amik csúcsai az n címke kivételével minden címkét viselnek,
- B , az összes olyan $(n - 1)$ -szimplexek halmazát, amik az eredeti n -szimplex határán vannak és a $\{0, \dots, n - 1\}$ címkéket viselik,

- E , az olyan $(n - 1)$ -szimplexek halmazát, amik a $\{0, \dots, n - 1\}$ címkéket viselik.

Egy $(n - 1)$ -szimplex vagy a határon van és egy, a szimplex felosztásbeli n -szimplex lapja, vagy két n -szimplex közös lapja. A problémát azonosíthatjuk egy gráffal. Legyen $D = C \cup A \cup B$ a csúcsok halmaza és E pedig az élek halmaza. Az $e \in E$ él össze van kötve a $d \in D$ csúccsal, ha

(i) vagy $d \in A \cup C$ és e a d egy lapja,

(ii) vagy $e = d \in B$.

Jelölje $\delta(d)$ a d csúcs fokszámát, vagyis a beeső élek számát. Ha $d \in A$, akkor egy címke többször szerepel és a d pontosan két lapja tartozik E -hez, vagyis a fokszáma kettő. Ha $d \in B \cup C$, akkor a csúcs fokszáma pontosan egy. Viszont minden él pontosan két csúcsot köt össze, vagyis ha egy $(n - 1)$ -szimplex a határon van és a $\{0, \dots, n - 1\}$ címkéket viseli, akkor saját magával és egy n -szimplexszel van összekötve, hiszen ő maga egy B -beli csúcs, míg az n -szimplex vagy A -ban vagy C -ben van. Ha egy $(n - 1)$ -szimplex két n -szimplex közös lapja, akkor mind a két n -szimplex A -ban vagy C -ben van.

Így

$$\delta(d) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } d \in B \cup C \\ 2 & , \text{ ha } d \in A . \end{cases}$$

Egyszerűen látható, hogy $\sum_{d \in D} \delta(d) = 2|E|$, hiszen minden él pontosan két csúcsot köt össze. A fokszámok előző számolása szerint pedig $\sum_{d \in D} \delta(d) = 2|A| + |B| + |C|$. Vagyis azt kapjuk, hogy $2|E| = 2|A| + |B| + |C|$, vagyis $|B| + |C|$ szükségszerűen páros. Mivel $|B|$ az indukciós feltevés szerint páratlan, ezért $|C|$ is páratlan, amivel beláttuk az állítást. ■

5.52. megjegyzés. A Sperner-lemma állítása szerint van legalább egy teljesen címkézett részsimplex, hiszen páratlan számú létezik.

5.53. definíció (Fixpont). Legyen X tetszőleges halmaz. Egy $f : X \rightarrow X$ függvény fixpontjának nevezzük az x^* pontot, ha

$$f(x^*) = x^* .$$

5.54. megjegyzés. Halmazértékű leképezések esetén, az x^* pont az $F : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ leképezés fixpontja, ha

$$x^* \in F(x^*) .$$

5.55. segédtétel. Ha az $f : \Delta^m \rightarrow \Delta^m$ függvény folytonos, akkor f -nek létezik fixpontja.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott és vegyük Δ^m egy olyan szimplex felosztását, ahol minden részsimplex átmérője nem nagyobb, mint ε . Jelölje V a felosztás csúcsainak halmazát és legyen $\lambda : V \rightarrow \{0, \dots, m\}$ az alábbi címkézés. Legyenek $\{x^{i_0}, \dots, x^{i_k}\}$ a T_i részszipmlex csúcsai és legyen $v \in T_i$ tetszőleges. Ekkor,

$$\lambda(v) \in \{i_0, \dots, i_k\} \cap \{i : f_i(v) \leq v_i\} .$$

Ez a metszet nemüres, ugyanis ha $f_i(v) > v_i$ állna fenn minden $i \in \{i_0, \dots, i_k\}$ esetén, akkor

$$1 = \sum_{i=0}^m f_i(v) > \sum_{j=0}^k v_{i_j} = \sum_{i=0}^m v_i = 1 ,$$

hiszen $v \in T_i$. Így pedig ellentmondásra jutunk, vagyis a metszet tényleg nemüres.

Az így definiált λ címkézés teljesíti a Sperner-lemma (5.51.) feltételeit, vagyis létezik legalább egy teljesen címkézett részsimplex. Vagyis létezik egy T_p^ε szimplex, aminek csúcsai a $\{p_\varepsilon^0, \dots, p_\varepsilon^k\}$ pontok és $f_i(p_\varepsilon^i) \leq p_{\varepsilon,i}^i$ teljesül minden i -re. Mivel Δ^m egy szimplex és így kompakt halmaz, megadható szimplexek egy konvergens sorozata úgy, hogy ha $\varepsilon \searrow 0$, akkor $p_{\varepsilon,i}^i \rightarrow z$, minden $i = 1, \dots, m$ esetén. Mivel f folytonos függvény, ezért $f_i(z) \leq z_i$, $i = 1, \dots, m$, tehát az 5.48. megjegyzés alapján azt kapjuk, hogy $f(z) = z$. ■

5.56. definíció (Homeomorfizmus). *Egy tetszőleges A halmaz homeomorf egy B halmazzal, ha létezik olyan kölcsönösen egyértelmű, folytonos, $h : A \rightarrow B$ megfeleltetés a halmazok között, aminek a h^{-1} módon jelölt inverze is folytonos. Az ilyen h függvényeket homeomorfizmusnak nevezzük.*

5.57. megjegyzés. Minden T zárt n -szimplex homeomorf a Δ^n sztenderd zárt n -szimplexszel.

5.58. következmény. *Legyen K homeomorf Δ^m -mel és legyen $f : K \rightarrow K$ egy folytonos függvény. Ekkor f -nek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $h : \Delta^m \rightarrow K$ egy homeomorfizmus. Ekkor $h^{-1} \circ f \circ h : \Delta^m \rightarrow \Delta^m$ folytonos, vagyis az 5.55. segédtétel alapján létezik z' , amire $h^{-1}(f(h(z')))) = z'$. Legyen $z = h(z')$, ekkor $h^{-1}(f(z)) = h^{-1}(z)$, vagyis $f(z) = z$, mivel h egy kölcsönösen egyértelmű leképezés. ■

5.59. segédtétel (Heine-Borel). *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ egy halmaz. Ekkor a következő két állítás ekvivalens.*

1. K korlátos és zárt halmaz,
2. K kompakt, vagyis minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges sok, K -t lefedő nyílt halmaz.

5.60. tétel (Brouwer-féle fixponttétel). Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex és kompakt halmaz. Ha az $f : K \rightarrow K$ függvény folytonos, akkor f -nek létezik fixpontja.

Bizonyítás. Mivel K kompakt, az 5.59. segédttétel miatt létezik egy megfelelően nagy szimplex, ami tartalmazza, legyen ez T . Legyen $h : \bar{T} \rightarrow K$ függvény olyan, hogy minden $x \in \bar{T}$ -hez hozzárendeli az x -hez legközelebbi K -beli pontot. Ekkor a h folytonos és mivel K konvex is, ezért ez a függvény jól meghatározott és minden $x \in K$ -ra megegyezik az identitás függvénnyel. Ekkor a $f \circ h : \bar{T} \rightarrow K \subseteq \bar{T}$ függvénynek az 5.58. következmény miatt létezik z fixpontja. A fixpont biztosan nem lehet a $\bar{T} \setminus K$ halmazban, hiszen $f \circ h$ a K halmazba képez. Így $z \in K$ és $f(h(z)) = z$, de $h(z) = z$, tehát $f(z) = z$. ■

5.61. *megjegyzés.* A Brouwer-féle fixponttétel egy általánosabb megfogalmazása a következő.

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér. Ha $K \subseteq X$ konvex, kompakt halmaz és $f : K \rightarrow K$ folytonos leképezés, akkor létezik fixpontja.

5.62. segédttétel (Carathéodory). Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Ha $x \in \text{co } A$, akkor x -et legfeljebb $m + 1$ pont konvex kombinációjaként írhatjuk fel, vagyis léteznek olyan $a^0, \dots, a^m \in A$ vektorok és $\lambda_0, \dots, \lambda_m$, $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ nemnegatív számok, hogy $x = \sum_{i=0}^m \lambda_i a^i$.

Bizonyítás. Mivel $x \in \text{co } A$, ezért x felírható $k + 1$ darab A -beli vektor konvex kombinációjaként, vagyis $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a^i$, ahol $\lambda_0, \dots, \lambda_k > 0$ és $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$. Tegyük fel, hogy $k + 1 > m + 1$. Ekkor az $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$ vektorok lineárisan összefüggőek, vagyis léteznek olyan $\mu_1 \dots \mu_k$ számok, hogy

$$\sum_{i=1}^k \mu_i (a_i - a_0) = 0 ,$$

és létezik legalább egy $\mu_j \neq 0$. Legyen $\mu_0 = -\sum_{i=1}^k \mu_i$. Ekkor

$$\sum_{i=0}^k \mu_i a_i = 0 ,$$

$$\sum_{i=0}^k \mu_i = 0 .$$

Mivel legalább egy $\mu_i > 0$, ezért

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i - \alpha \sum_{i=0}^k \mu_i a_i = \sum_{i=0}^k (\lambda_i - \alpha \mu_i) a_i ,$$

minden valós α szám esetén. Válasszuk az α számot a következő módon,

$$\alpha = \min_i \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} : \mu_i > 0 \right\} = \frac{\lambda_j}{\mu_j} .$$

Ekkor $\alpha > 0$ és minden i -re $\lambda_i - \alpha\mu_i \geq 0$. Ekkor $x = \sum_{i=0}^k (\lambda_i - \alpha\mu_i)a_i$, ahol $\sum_{i=0}^k (\lambda_i - \alpha\mu_i) = 1$. Ezen túl $\lambda_j - \alpha\mu_j = 0$, vagyis az előbbi felírás x -et k vektor konvex kombinációjaként írja fel. Mivel $x \in \text{co } A$ triviálisan felírható $m + 1$ vektor konvex kombinációjaként és most megmutattuk, hogy ha felírható $k + 1 > m + 1$ vektor konvex kombinációjával, akkor biztosan felírható k -val is, ezért legfeljebb $m + 1$ vektor konvex kombinációjaként írható fel. ■

5.63. segédtétel (Cellina-féle approximációs tétel). *Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt halmaz és legyen $B \subseteq \mathbb{R}^k$ konvex halmaz. Legyen $F : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$ nemüres, konvex, kompakt értékű, felülről félig folytonos leképezés. Minden $\delta > 0$ számra legyen F_δ olyan, hogy $F_\delta(x) = \text{co} \bigcup_{z \in B(x, \delta)} F(z)$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy*

$$\text{graph } F_\delta \subseteq B(\text{graph } F, \varepsilon) .$$

Bizonyítás. A bizonyítás indirekten történik, tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Ekkor léteznie kell egy olyan (x^n, y^n) sorozatnak, amelyre $(x^n, y^n) \in \text{graph } F_{\frac{1}{n}}$ és $d((x^n, y^n), \text{graph } F) \geq \varepsilon > 0$ teljesül. Mivel $(x^n, y^n) \in \text{graph } F_{\frac{1}{n}}$ fennáll, ezért

$$y^n \in F_{\frac{1}{n}}(x^n) , \text{ tehát } y^n \in \text{co} \bigcup_{z \in B(x^n, \frac{1}{n})} F(z) .$$

Carathéodory tétele (5.62.) miatt léteznek olyan

$$y^{0,n}, \dots, y^{k,n} \in \bigcup_{z \in B(x^n, \frac{1}{n})} F(z)$$

vektorok és olyan $\lambda_0^n, \dots, \lambda_k^n$, $\sum_{i=0}^k \lambda_i^n = 1$ nemnegatív számok, hogy $y^n = \sum_{i=0}^k \lambda_i^n y^{i,n}$ és $y^{i,n} \in F(z^{i,n})$ és $d(z^{i,n}, x^n) < \frac{1}{n}$. Mivel A kompakt és F felülről félig folytonos, ezért az 5.41. állítás miatt F zárt gráfú is, vagyis megadhatók olyan sorozatok, amelyekre $x^n \rightarrow x$, $y^{i,n} \rightarrow y^i$, $\lambda_i^n \rightarrow \lambda_i$ és $z^{i,n} \rightarrow x$ minden i -re és $y = \sum_{i=0}^k \lambda_i y^i$ és $(x, y^i) \in \text{graph } F$ minden i -re. Mivel F konvex értékű, ezért $(x, y) \in \text{graph } F$, ami ellentmondás, hiszen $d((x^n, y^n), \text{graph } F) \geq \varepsilon > 0$. ■

5.64. definíció (Egységosztás). *Tekintsük egy K halmaz $\{U_\alpha\}$ nyílt lefedését. $\{U_\alpha\}$ egységosztása alatt véges sok függvényt értünk, $f_1, \dots, f_k : K \rightarrow \mathbb{R}_+$, úgy hogy $\sum_{i=1}^k f_i \equiv 1$ és minden i indexhez létezik olyan U_{α_i} , hogy f_i értéke nulla azokon a halmazokon kívül.*

5.65. segédtétel (Neumann-féle approximációs lemma). *Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt halmaz és legyen $B \subseteq \mathbb{R}^k$ konvex halmaz. Legyen $F : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$ egy nemüres, kompakt, konvex halmaz értékű, felülről félig folytonos leképezés. Ekkor, minden $\varepsilon > 0$ számra létezik egy olyan f folytonos függvény, hogy $\text{graph } f \subseteq B(\text{graph } F, \varepsilon)$.*

Bizonyítás. Az 5.63. segédttétel miatt létezik olyan $\delta > 0$, amire $\text{graph } F_\delta \subseteq B(\text{graph } F, \varepsilon)$. Mivel A kompakt halmaz, léteznek olyan $x^1, \dots, x^n$ vektorok, amikre $\{B(x^i, \delta)\}$ halmazok az A halmaz egy nyílt lefedését adják. Legyen $y^i \in F(x^i)$. Legyen $f^1, \dots, f^n$ a lefedés egy egységesztása és legyen $g(x) = \sum_i^n f^i(x)y^i$. Ekkor a g függvény folytonos és mivel f^i értéke nulla a $B(x^i, \delta)$ gömbön kívül, ezért abból, hogy $f^i(x) > 0$ következik, hogy $|x^i - x| < \delta$, vagyis $g(x) \in F_\delta(x)$. ■

5.66. segédttétel (Cellina). *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^m$ egy nemüres, konvex, kompakt halmaz és $F : K \rightarrow \mathcal{P}(K)$. Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt, konvex halmaz és legyen $H : K \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ egy zárt gráfú, nemüres, konvex, kompakt halmaz értékű leképezés és legyen $f : K \times Z \rightarrow K$ egy folytonos függvény, amire minden $x \in K$ esetén*

$$F(x) = \{f(x, y) : y \in H(x)\} .$$

Ekkor az F leképezésnek van fixpontja, vagyis létezik $x^ \in K$, hogy $x^* \in F(x^*)$.*

Bizonyítás. Az 5.65. segédttétel miatt ekkor létezik egy olyan $g_n : K \rightarrow Z$ függvény-sorozat, hogy $\text{graph } g_n \in B(\text{graph } H, \frac{1}{n})$. Legyen $h_n : K \rightarrow K$ a következő, $h_n(x) = f(x, g_n(x))$. A Brouwer-féle fixponttétel (5.60.) miatt minden h_n függvénynek létezik fixpontja, $x_n^* = f(x_n^*, g_n(x_n^*))$. Mivel K és Z kompakt halmazok, ezért minden halmazbeli sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat, az általánosság megsértése nélkül legyenek ezek $x_n \rightarrow x'$ és $g_n(x_n) \rightarrow y'$. Ekkor $(x', y') \in \text{graph } F$, hiszen F zárt gráfú és így $x' = f(x', y') \in H(x')$. ■

A Kakutani-féle fixponttétel a következő. Erre később fontossága miatt, csak mint Kakutani-féle fixponttétel fogunk hivatkozni.

5.67. tétel (Kakutani (1941)). *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^m$ konvex, kompakt halmaz és legyen $F : K \rightarrow \mathcal{P}(K)$ nemüres, konvex, kompakt értékű, felülről félig folytonos halmazértékű leképezés. Ekkor az F leképezésnek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Az 5.66. segédttétel következménye. ■

5.68. megjegyzés. A Kakutani-féle fixponttétel egy általánosabb megfogalmazása a következő.

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ tetszőleges normált tér. Ha $K \subseteq X$ konvex, kompakt halmaz és $F : K \rightarrow \mathcal{K}(K)$ nemüres, konvex, kompakt értékű, felülről félig folytonos halmazértékű leképezés, akkor létezik fixpontja.

A következőkben a Berge-tételt írjuk le. Ennek használata elengedhetetlen lesz az egyensúlyok létezésének bizonyításához.

Legyenek (T, τ_T) , (X, τ_X) topologikus terek. Legyen $H : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés, a feltételi leképezés, legyen $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}$, célfüggvény és tekintsük a következő $t \in T$ -vel paraméterezett feladatot:

$$f(t, x) \rightarrow \max_{x \in H(t)} .$$

A feladat értékfüggvénye, $f^\vee : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, amelyre minden $t \in T$ esetén

$$f^\vee(t) = \sup_{H(t)} f(t, \cdot) = \sup_{x \in H(t)} f(t, x) .$$

A feladat megoldásleképezése, $\mathcal{X} : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$, amelyre

$$\mathcal{X}(t) = \operatorname{argmax}_{H(t)} f(t, \cdot) = \{x \in H(t) : f(t, x) = f^\vee(t)\} .$$

5.69. tétel (Berge (1959)). *A tétel az alábbi állításokból áll.*

1. *Ha a $H : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés alulról félig folytonos és az $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}$ célfüggvény alulról folytonos, akkor az $f^\vee : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény is alulról folytonos.*
2. *Ha a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ kompakt halmaz értékű leképezés felülről félig folytonos és az $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}$ célfüggvény felülről folytonos, akkor az $f^\vee : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény is felülről folytonos.*
3. *Ha a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ kompakt halmaz értékű leképezés felülről félig folytonos, az $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}$ célfüggvény folytonos, valamint az $f^\vee : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény folytonos, akkor az $\mathcal{X} : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ kompakt értékű és felülről félig folytonos halmazértékű leképezés.*

Bizonyítás.

1. Belátjuk, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ szám esetén $(f^\vee)^{-1}((\alpha, \infty]) \subseteq T$ halmaz nyílt.

Legyen α tetszőleges és legyen $t_0 \in (f^\vee)^{-1}((\alpha, \infty])$ tetszőlegesen adott. Ekkor $f^\vee(t_0) > \alpha$, vagyis

$$\alpha < f^\vee(t_0) = \sup_{x \in H(t_0)} f(t_0, x) ,$$

ami szerint létezik olyan $x_0 \in H(t_0)$, hogy $\alpha < f(t_0, x_0)$, azaz $(t_0, x_0) \in f^{-1}((\alpha, \infty])$. Mivel az f függvény alulról folytonos, ezért létezik olyan $W \in \tau_{T \times X}(t_0, x_0)$ környezet, hogy minden $(t, x) \in W$ esetén $(t, x) \in f^{-1}((\alpha, \infty])$, azaz $\alpha < f(t, x)$. Ekkor léteznek olyan $U \in \tau_T(t_0)$ és nyílt $V \in \tau_X(x_0)$ környezetek, hogy $U \times V \subseteq W$.

Mivel $x_0 \in H(t_0)$ és $x_0 \in V$, így $x_0 \in H(t_0) \cap V$, így $H(t_0) \cap V \neq \emptyset$. Mivel $H : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ alulról félig folytonos és $V \subseteq X$ halmaz nyílt, ezért létezik olyan $U_0 \in \tau_T(t_0)$, $U_0 \subseteq U$ környezet, hogy minden $t \in U_0$ esetén $H(t) \cap V \neq \emptyset$, azaz létezik $x \in H(t) \cap V$. Ekkor

$$(t, x) \in \text{graph } H \cap (U_0 \times V) \subseteq \text{graph } H \cap (U \times V) \subseteq \text{graph } H \cap W ,$$

ezért minden $t \in U_0$ esetén létezik $x \in H(t)$, hogy

$$\alpha < f(t, x) \leq \sup_{x \in H(t)} f(t, x) = f^\vee(t) .$$

Ezek szerint a t_0 pont $U_0 \in \tau_T(t_0)$ környezetére teljesül, hogy $U_0 \subseteq (f^\vee)^{-1}((\alpha, \infty])$. Ez azt jelenti, hogy $t_0 \in \text{int}(f^\vee)^{-1}((\alpha, \infty])$, vagyis a halmaz minden pontja belső pont, tehát a halmaz nyílt.

2. Belátjuk, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ szám esetén $(f^\vee)^{-1}([-\infty, \alpha)) \subseteq T$ halmaz nyílt.

Legyen α tetszőleges és legyen $t_0 \in (f^\vee)^{-1}([-\infty, \alpha))$ tetszőlegesen adott. Ekkor $f^\vee(t_0) < \alpha$, vagyis

$$f^\vee(t_0) = \sup_{x \in H(t_0)} f(t_0, x) < \alpha .$$

Innentől két eset lehetséges.

Első eset: $H(t_0) = \emptyset$. Mivel a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos, $H(t_0) \subseteq \emptyset$ és az üres halmaz nyílt, ezért létezik olyan $U \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy minden $t \in U$ esetén $H(t) = \emptyset$, azaz $H(t) = \emptyset$. Ezért minden $t \in U$ esetén

$$f^\vee(t_0) = \sup_{x \in H(t_0)} f(t_0, x) = -\infty < \alpha ,$$

vagyis a t_0 pont $U \in \tau_T(t_0)$ környezetére teljesül, hogy $U \subseteq (f^\vee)^{-1}([-\infty, \alpha))$, ami azt jelenti, hogy $t_0 \in \text{int}(f^\vee)^{-1}([-\infty, \alpha))$.

Második eset: $H(t_0) \neq \emptyset$. Ekkor létezik olyan β szám, hogy

$$f^\vee(t_0) = \sup_{x \in H(t_0)} f(t_0, x) < \beta < \alpha ,$$

így minden $x \in H(t_0)$ esetén $f(t_0, x) < \beta$, azaz $(t_0, x) \in f^{-1}([-\infty, \beta))$. Mivel f felülről folytonos, ezért minden $x \in H(t_0)$ esetén létezik $W_x \in \tau_{T \times X}(t_0, x)$ környezet, hogy minden $(t, z) \in \text{graph } H \cap W_x$ esetén $(t, z) \in f^{-1}([-\infty, \beta))$, azaz $f(t, z) < \beta$. Ekkor minden $x \in H(t_0)$ esetén létezik $U_x \in \tau_T(t_0)$ és $V_x \in \tau_X(x_0)$ nyílt környezet,

hogy $U_x \times V_x \subseteq W_x$. Mivel $\{V_x : x \in H(t_0)\}$ nyílt lefedése a $H(t_0) \subseteq X$ kompakt halmaznak, ezért léteznek $x_1, \dots, x_n \in H(t_0)$, hogy

$$H(t_0) \subseteq \bigcap_{k=1}^n V_{x_k} .$$

Mivel a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos, ezért létezik $U_0 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy minden $t \in U$ esetén

$$H(t) \subseteq \bigcap_{k=1}^n V_{x_k} .$$

Legyen $U = U_0 \cap U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$. Mivel $U = U_0, U_{x_1}, \dots, U_{x_n} \in \tau_T(t_0)$ és $\tau_T(t_0)$ véges metszetzárt, ezért $U \in \tau_T(t_0)$. Mivel $U \subseteq U_0$, ezért minden $t \in U$ esetén is

$$H(t) \subseteq \bigcap_{k=1}^n V_{x_k} ,$$

ezért minden $x \in H(t)$ esetén létezik $1 \leq k \leq n$ úgy, hogy ha $x \in V_{x_k}$, akkor

$$(t, x) \in U \times V_{x_k} \subseteq U_{x_k} \times V_{x_k} \subseteq W_{x_k} .$$

Ezek szerint minden $t \in U$ és $x \in H(t)$ esetén $(t, x) \in \text{graph } H \cap W_{x_k}$, és ezért $f(t, x) < \beta$. Ebből következik, hogy minden $t \in U$ esetén

$$f^\vee(t_0) = \sup_{x \in H(t_0)} f(t_0, x) \leq \beta < \alpha .$$

Ezek szerint a t_0 pont $U \in \tau_T(t_0)$ környezetére teljesül, hogy $U \subseteq (f^\vee)^{-1}([-\infty, \beta))$. Ez pedig azt jelenti, hogy $t_0 \in (f^\vee)^{-1} \text{int}([-\infty, \beta))$, vagyis a halmaz minden pontja belső pont, tehát a halmaz nyílt.

3. A bizonyítást két részre bontjuk, először a kompakt értékűséget, majd a felülről félig folytonosságot bizonyítjuk.

Kompakt értékűség: Legyen $t \in T$ tetszőleges pont. A definíció szerint

$$\mathcal{X}(t) = f^{-1}(t, \cdot)(\{f^\vee(t)\}) \subseteq H(t) ,$$

ezek szerint az $\{f^\vee(t)\} \subseteq \mathbb{R}$ egyelemű, így (az euklideszi topológiában) zárt halmaznak az $f(t, \cdot) : H(t) \rightarrow \mathbb{R}$ a feltétel szerint folytonos függvénnel vett inverzképe, emiatt zárt halmaz. Mivel a $H(t)$ kompakt halmaz zárt részhalmaza, ezért kompakt.

Felülről félig folytonosság: Legyen $t_0 \in T$ tetszőleges pont. Legyen $G \subseteq X$ tetszőleges olyan τ_X -nyílt halmaz, amelyre $\mathcal{X}(t_0) \subseteq G$. Belátjuk, hogy létezik $U \in \tau_T(t_0)$

környezet, hogy minden $t \in U$ esetén $\mathcal{X}(t) \subseteq G$, ami azt jelenti, hogy az $\mathcal{X}$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos a t_0 pontban. Innentől újabb két esetre bomlik a bizonyítás.

1. eset: $\mathcal{X}(t_0) = H(t_0)$.

Mivel $H(t_0) = \mathcal{X}(t_0) \subseteq G$ és a $H : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos, ezért létezik $U \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy minden $t \in U$ esetén $H(t) \subseteq G$, így

$$\mathcal{X}(t) \subseteq H(t) \subseteq G.$$

2. eset: $\mathcal{X}(t_0) \neq H(t_0)$

Legyen $x \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)$ tetszőleges, ekkor

$$f(t_0, x) < \sup_{H(t_0)} f(t_0, \cdot) = f^\vee(t_0) ,$$

ezért létezik $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy

$$f(t_0, x) < \alpha < f^\vee(t_0) .$$

Mivel az f függvény felülről folytonos a (t_0, x) pontban, ezért létezik $W \in \tau_{T \times X}(t_0, x)$ környezet, hogy minden $(t, z) \in W \cap \text{graph } H$ esetén

$$f(t, z) < \alpha .$$

Ekkor létezik $U_1 \in \tau_T(t_0)$ és létezik $V_x \in \tau_X(x)$ nyílt környezet, hogy $U_1 \times V_x \subseteq W$. Mivel az $f^\vee$ függvény alulról folytonos a t_0 pontban, ezért létezik $U_2 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy minden $t \in U_2$ esetén

$$\alpha < f^\vee(t) .$$

Legyen $U_x = U_1 \cap U_2 \in \tau_T(t_0)$, ekkor minden $(t, z) \in (U_x \times V_x) \cap \text{graph } H$ esetén

$$f(t, z) < f^\vee(t) .$$

Mivel $\mathcal{X}(t_0) \subseteq G$, ezért $H(t_0) \subseteq (H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)) \cup G$, így

$$H(t_0) \subseteq \left(\bigcup_{x \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)} V_x \right) \cup G ,$$

ahol minden $x \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)$ esetén $V_x \in \tau_X(x)$ a fent definiált környezet. Mivel minden $x \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)$ esetén $V_x \in \tau_X(x)$ nyílt halmaz, így a

$$\{V_x : x \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)\} \cup \{G\}$$

halmazrendszer nyílt lefedése a $H(t_0) \subseteq X$ kompaktnak, ezért kiválasztható belőle véges lefedés, azaz létezik $x_1, \dots, x_n \in H(t_0)$, hogy

$$H(t_0) \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{x_k} \cup G .$$

Mivel az $\bigcup_{k=1}^n V_{x_k} \cup G \subseteq X$ halmaz nyílt, valamint a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos t_0 -ban, ezért létezik $U_0 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy minden $t \in U_0$ esetén

$$H(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{x_k} \cup G ,$$

mivel $\mathcal{X}(t_0) \subseteq H(t)$, ezért

$$\mathcal{X}(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{x_k} \cup G .$$

Legyen

$$U = U_0 \cap U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n} \in \tau_T(t_0) ,$$

ahol minden $x_i \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)$ esetén $V_{x_i} \in \tau_X(x_i)$ a fent definiált környezet. Ekkor minden $t \in U$ esetén

$$\mathcal{X}(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{x_k} \cup G .$$

Belátjuk, hogy minden $t \in U$ esetén $\mathcal{X}(t) \subseteq G$.

Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik $t \in U$, amelyre létezik $z \in \mathcal{X}(t)$, de $z \notin G$. Mivel

$$\mathcal{X}(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{x_k} \cup G ,$$

ezért létezik $1 \leq k \leq n$, hogy $z \in \mathcal{X}(t) \subseteq H(t)$. Mivel $t \in U \subseteq U_{x_k}$, ezért $(t, z) \in U_{x_k} \times V_{x_k}$. Mivel pedig $z \in \mathcal{X}(t) \subseteq H(t)$, ezért

$$(t, z) \in (U_{x_k} \times V_{x_k}) \cap \text{graph } H ,$$

így $f(t, z) < f^\vee(t)$, emiatt $z \notin \mathcal{X}(t)$, ami ellentmondás.

■

A későbbiekben erre, mint Berge-tétel hivatkozunk.

A Berge-tétel egy általánosítása szükséges lesz a későbbiekben, az ismert irodalmak között ez az általánosítás sehol sem szerepel. A tétel kimondása és a bizonyítás a Berge-tétel alapján történik. A tétel kimondása előtt szükséges még néhány fogalmat definiálni.

Többdimenziós vektorok esetében a következő jelöléseket alkalmazzuk.

5.70. definíció. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ teret és legyen $r, r' \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges.

- $r > r'$, ha $r_i > r'_i$ minden i -re fennáll,
- $r \geq r'$, ha $r_i \geq r'_i$ minden i -re fennáll és létezik j , hogy $r_j > r'_j$,
- $r \geq r'$, ha $r_i \geq r'_i$ minden i -re fennáll, de nem létezik j , hogy $r_j > r'_j$,
- r és r' nem állnak relációban, ha létezik olyan i és j , hogy $r_i > r'_i$ és $r_j < r'_j$.

5.71. megjegyzés. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz, $a \in X$ pedig ennek egy tetszőleges eleme. Az alábbi két állítás ekvivalens.

1. Nem létezik olyan $x \in X$, hogy $x \geq a$.
2. Minden $x \in X$ esetén vagy $a > x$, vagy a és x nem állnak relációban.

5.72. megjegyzés. Valós számok esetében, $r \geq r'$ és $r > r'$ ugyanazt jelentik, vagyis ekkor a relációk leírására elég a $>$ és a $\geq$ jelek használata.

5.73. definíció. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ teret. Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz. Az alábbi operátorok a következők,

- $\text{vmax } U = \{u \in U : \nexists u' \in U, \text{ hogy } u' \geq u\}$,
- $\text{vsup } U = \{u \in \text{cl } U : \nexists u' \in \text{cl } U, \text{ hogy } u' \geq u\}$.

5.74. definíció. Ha X tetszőleges halmaz, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ tetszőleges függvény és az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz az f függvény értékkészlete, akkor

- $\text{vmax}_X f(x) = \text{vmax } A$,
- $\text{vsup}_X f(x) = \text{vsup } A$,
- $\text{argvmax}_X f(x) = \{x \in X : f(x) \in \text{vsup}_X f(x)\}$.

Most definiáljuk az vektorértékű függvényekre is az alulról illetve felülről folytonosságot.

5.75. definíció (Alulról folytonosság vektorértékű függvényekre). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény alulról folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}^n$, vagyis $\varepsilon > 0$ vektorra az $\{x \in X : f(x) > f(a) - \varepsilon\}$ halmaz nyílt. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény alulról folytonos, ha minden $x \in X$ pontban alulról folytonos.

5.76. definíció (Felülről folytonosság vektorértékű függvényekre). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény felülről folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}^n$, vagyis $\varepsilon > 0$ vektorra az $\{x \in X : f(x) < f(a) + \varepsilon\}$ halmaz nyílt. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény felülről folytonos, ha minden $x \in X$ pontban felülről folytonos.

5.77. definíció (Folytonosság). Legyen (X, τ_X) topologikus tér. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény folytonos egy $a \in X$ pontban, ha minden $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in G$ nyílt halmaz esetén az $\{x \in X : f(x) \in G\}$ halmaz nyílt. Egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos, ha minden $x \in X$ pontban folytonos.

5.78. megjegyzés. Ha egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény folytonos egy $a \in X$ pontban, akkor abban a pontban alulról és felülről is folytonos. Viszont, ha a függvény alulról és felülről is folytonos az $a \in X$ pontban, akkor nem feltétlenül folytonos is.

Így már bevezethetjük a több dimenzióra kiterjesztett Berge-tételt.

Legyenek (T, τ_T) , (X, τ_X) topologikus terek. Legyen $H : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés, a feltételi leképezés, legyen $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}^n$ a célfüggvény és tekintsük a következő $t \in T$ -vel paraméterezett feladatot:

$$\begin{aligned} f(t, x) &\rightarrow \text{vmax} \\ x &\in H(t) . \end{aligned}$$

A feladat értékleképezése, $f^\vee : T \rightarrow \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}^n})$, amelyre minden $t \in T$ esetén

$$f^\vee(t) = \text{vsup}_{H(t)} f(t, \cdot) = \text{vsup}_{x \in H(t)} f(t, x) .$$

A feladat megoldáisleképezése, $\mathcal{X} : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$, amelyre

$$\mathcal{X}(t) = \text{argvmax}_{H(t)} f(t, \cdot) = \{x \in H(t) : f(t, x) \in f^\vee(t)\} .$$

5.79. tétel. A tétel az alábbi állításokból áll.

1. Ha a $H : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés alulról félig folytonos és az $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}^n$ célfüggvény alulról folytonos, akkor az $f^\vee : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ értékleképezés is alulról félig folytonos.
2. Ha a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ kompakt halmaz értékű leképezés felülről félig folytonos és az $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}^n$ célfüggvény felülről folytonos, akkor az $f^\vee : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ értékleképezés is felülről félig folytonos.
3. Ha a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ kompakt halmaz értékű leképezés felülről félig folytonos, az $f : \text{graph } H \rightarrow \mathbb{R}^n$ célfüggvény folytonos, valamint az $f^\vee : T \rightarrow \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}^n})$ értékleképezés folytonos, akkor az $\mathcal{X} : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ kompakt értékű és felülről félig folytonos halmazértékű leképezés.

Bizonyítás.

1. Legyen $t_0 \in T$ tetszőleges pont. Legyen $G \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ tetszőleges olyan nyílt halmaz, amelyre $f^\vee(t_0) \cap G \neq \emptyset$ és $G = \{y \in \mathbb{R}^n : y > \alpha_a\}$, ahol $\alpha_a \in \mathbb{R}^n$ olyan, hogy

tetszőleges $a \in f^\vee(t_0)$ esetén $a \in G$. Belátjuk, hogy létezik $U \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy minden $t \in U$ esetén $f^\vee(t) \cap G \neq \emptyset$, ami azt jelenti, hogy az $f^\vee$ halmazértékű leképezés alulról félig folytonos a t_0 pontban.

Ekkor minden $a \in f^\vee(t_0)$ esetén létezik olyan $\alpha_a \in \overline{\mathbb{R}}^n$ vektor, hogy

$$\alpha_a < a \in \text{vsup}_{x \in H(t_0)} f(t_0, x) ,$$

ami szerint létezik olyan $x_0 \in H(t_0)$, hogy $\alpha_a < f(t_0, x_0)$. Mivel az f függvény alulról folytonos, ezért létezik olyan $W \in \tau_{T \times X}(t_0, x_0)$ környezet, hogy minden $(t, x) \in W$ esetén $\alpha_a < f(t, x)$. Ekkor léteznek olyan $U \in \tau_T(t_0)$ és nyílt $V \in \tau_X(x_0)$ környezetek, hogy $U \times V \subseteq W$.

Mivel $x_0 \in H(t_0)$ és $x_0 \in V$, így $x_0 \in H(t_0) \cap V$, így $H(t_0) \cap V \neq \emptyset$. Mivel $H : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ alulról félig folytonos és $V \subseteq X$ halmaz nyílt, ezért létezik olyan $U_0 \in \tau_T(t_0)$, $U_0 \subseteq U$ környezet, hogy minden $t \in U_0$ esetén $H(t) \cap V \neq \emptyset$, azaz létezik $x \in H(t) \cap V$. Ekkor

$$(t, x) \in \text{graph } H \cap (U_0 \times V) \subseteq \text{graph } H \cap (U \times V) \subseteq \text{graph } H \cap W ,$$

ezért minden $t \in U_0$ esetén létezik $x \in H(t)$ és $a \in f^\vee(t)$, hogy

$$\alpha_a < f(t, x) \leq a \in \text{vsup}_{x \in H(t)} f(t, x) = f^\vee(t) .$$

Ezek szerint a t_0 pont $U_0 \in \tau_T(t_0)$ környezetére teljesül, hogy minden $\overline{\mathbb{R}}^n$ -beli olyan G nyílt halmazra, amelyre $f^\vee(t_0) \cap G \neq \emptyset$, minden $t \in U_0$ esetén $f^\vee(t) \cap G \neq \emptyset$, vagyis az $f^\vee$ függvény alulról félig folytonos.

2. Legyen $t_0 \in T$ tetszőleges pont. Legyen $G \subseteq \overline{\mathbb{R}}^n$ tetszőleges olyan nyílt halmaz, amelyre $f^\vee(t_0) \subseteq G$ és $G = \{y \in \mathbb{R}^n : y < \alpha\}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}^n$ olyan, hogy minden $a \in f^\vee(t_0)$ esetén $a \in G$. Belátjuk, hogy létezik $U \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy minden $t \in U$ esetén $f^\vee(t) \subseteq G$, ami azt jelenti, hogy az $f^\vee$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos a t_0 pontban.

Ekkor minden $a \in f^\vee(t_0)$ vektorra létezik olyan $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}^n$ vektor, hogy minden $a \in f^\vee(t_0)$ esetén

$$\alpha > a \in \text{vsup}_{x \in H(t_0)} f(t_0, x) .$$

Innentől két eset lehetséges.

Első eset: $H(t_0) = \emptyset$. Mivel a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos, $H(t_0) \subseteq \emptyset$ és az üres halmaz nyílt, ezért létezik olyan $U \in \tau_T(t_0)$ környezet,

hogy minden $t \in U$ esetén $H(t_0) = \emptyset$, azaz $H(t) = \emptyset$. Ezért minden $t \in U$ esetén

$$\alpha > -\infty = a \in f^\vee(t_0) = \sup_{x \in H(t_0)} f(t_0, x) ,$$

vagyis a t_0 pont $U \in \tau_T(t_0)$ környezetére teljesül, hogy minden $\overline{\mathbb{R}}^n$ -beli olyan G nyílt halmazra, amelyre $f^\vee(t_0) \subseteq G$ és minden $t \in U$ esetén $f^\vee(t) \subseteq G$.

Második eset: $H(t_0) \neq \emptyset$. Ekkor minden $a \in f^\vee(t_0)$ esetén létezik olyan β_a vektor, hogy

$$a < \beta_a < \alpha ,$$

így minden $x \in H(t_0)$ esetén vagy $f(t_0, x) < \beta_a$, vagy $f(t_0, x)$ és β_a nem állnak relációban. Mivel f felülről folytonos, ezért minden $x \in H(t_0)$ esetén létezik $W_x \in \tau_{T \times X}(t_0, x)$ környezet, hogy minden $(t, z) \in \text{graph } H \cap W_x$ esetén $f(t, z) < \beta_a$. Ekkor minden $x \in H(t_0)$ esetén létezik $U_x \in \tau_T(t_0)$ és $V_x \in \tau_X(x_0)$ nyílt környezet, hogy $U_x \times V_x \subseteq W_x$. Mivel $\{V_x : x \in H(t_0)\}$ nyílt lefedése a $H(t_0) \subseteq X$ kompakt halmaznak, ezért léteznek $x_1, \dots, x_n \in H(t_0)$, hogy

$$H(t_0) \subseteq \bigcap_{k=1}^n V_{x_k} .$$

Mivel a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos, ezért létezik $U_0 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy minden $t \in U_0$ esetén

$$H(t) \subseteq \bigcap_{k=1}^n V_{x_k} .$$

Legyen $U = U_0 \cap U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$. Mivel $U = U_0 \cap U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$ és $\tau_T(t_0)$ véges metszetzárt, ezért $U \in \tau_T(t_0)$. Mivel $U \subseteq U_0$, ezért minden $t \in U$ esetén is

$$H(t) \subseteq \bigcap_{k=1}^n V_{x_k} ,$$

ezért minden $x \in H(t)$ esetén létezik $1 \leq k \leq n$ úgy, hogy ha $x \in V_{x_k}$, akkor

$$(t, x) \in U \times V_{x_k} \subseteq U_{x_k} \times V_{x_k} \subseteq W_{x_k} .$$

Ezek szerint minden $t \in U$ és $x \in H(t)$ esetén $(t, x) \in \text{graph } H \cap W_{x_k}$, és ezért $f(t, x) < \beta_a$. Ebből következik, hogy minden $t \in U$ és minden $a \in f^\vee(t_0)$ esetén

$$a \leq \beta_a < \alpha .$$

vagyis a t_0 pont $U \in \tau_T(t_0)$ környezetére teljesül, hogy minden $\overline{\mathbb{R}}^n$ -beli olyan G nyílt halmazra, amelyre $f^\vee(t_0) \subseteq G$, minden $t \in U$ esetén $f^\vee(t) \subseteq G$, vagyis az $f^\vee$ értékleképezés felülről félig folytonos.

3. A bizonyítást két részre bontjuk, először a kompakt értékűséget, majd a felülről félig folytonosságot bizonyítjuk.

Kompakt értékűség: Legyen $t \in T$ tetszőleges pont. A definíció szerint

$$\mathcal{X}(t) = f^{-1}(t, \cdot)(\{f^\vee(t)\}) \subseteq H(t) ,$$

ezek szerint az $\{f^\vee(t)\} \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ zárt halmaznak (hiszen a függvény $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}^n})$ -be képez) az $f(t, \cdot) : H(t) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a feltétel szerint folytonos függvénnyel vett inverzképe, emiatt zárt halmaz. Mivel a $H(t)$ kompakt halmaz zárt részhalmaza, ezért kompakt.

Felülről félig folytonosság: Legyen $t_0 \in T$ tetszőleges pont. Legyen $G \subseteq X$ tetszőleges olyan τ_X -nyílt halmaz, amelyre $\mathcal{X}(t_0) \subseteq G$. Belátjuk, hogy létezik $U \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy minden $t \in U$ esetén $\mathcal{X}(t) \subseteq G$, ami azt jelenti, hogy az $\mathcal{X}$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos a t_0 pontban. Innentől újabb két esetre bomlik a bizonyítás.

1. eset: $\mathcal{X}(t_0) = H(t_0)$.

Mivel $H(t_0) = \mathcal{X}(t_0) \subseteq G$ és a $H : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos, ezért létezik $U \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy minden $t \in U$ esetén $H(t) \subseteq G$, így

$$\mathcal{X}(t) \subseteq H(t) \subseteq G.$$

2. eset: $\mathcal{X}(t_0) \neq H(t_0)$.

Legyen $x \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)$ tetszőleges, ekkor nem létezik olyan $a' \in \text{vsup}_{H(t_0)} f(t_0, \cdot) = f^\vee(t_0) \subseteq \mathbb{R}^n$, hogy $a' \leq f(t_0, x)$, vagyis minden $a \in f^\vee(t_0)$ esetén vagy

$$f(t_0, x) < a ,$$

vagy a és $f(t_0, x)$ nem állnak relációban. Ezért létezik minden $a \in f^\vee(t_0)$ vektorhoz $\alpha_a \in \mathbb{R}^n$, hogy vagy

$$f(t_0, x) < \alpha_a < a ,$$

vagy α_a és $f(t_0, x)$ nem állnak relációban. Mivel az f függvény felülről folytonos a (t_0, x) pontban, ezért létezik $W \in \tau_{T \times X}(t_0, x)$ környezet, hogy minden $(t, z) \in W \cap \text{graph } H$ esetén vagy

$$f(t, z) < \alpha_a ,$$

vagy $f(t, z)$ és α_a nem állnak relációban, de $\alpha_a < a$. Ekkor létezik $U_1 \in \tau_T(t_0)$ és létezik $V_x \in \tau_X(x)$ nyílt környezet, hogy $U_1 \times V_x \subseteq W$. Mivel az $f^\vee$ függvény alulról

félig folytonos a t_0 pontban, ezért létezik $U_2 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy minden $t \in U_2$ esetén és minden $G_1 \subseteq \overline{\mathbb{R}}^n$ nyílt halmaz esetén

$$f^\vee(t) \cap G_1 \neq \emptyset .$$

Legyen például $G_2 = \bigcup_{a \in f^\vee(t)} \{b \in \overline{\mathbb{R}}^n : b > \alpha_a\}$, egy $\overline{\mathbb{R}}^n$ -beli nyílt halmaz és U_2 pedig az ehhez tartozó környezet. Ekkor minden $t \in U_2$ és minden $a \in f^\vee(t)$ esetén

$$\alpha_a < a .$$

Ugyanis, ha valamely $a' \in f^\vee(t)$ esetén $a' < \alpha_a$ állna fenn, akkor mivel $f^\vee(t) \cap G_1 \neq \emptyset$, és az $f^\vee$ függvény alulról félig folytonos, ezért $a \in f^\vee(t)$, tehát $\alpha_a < a$, de ekkor $a' < \alpha_a < a$, ami ellentmond $f^\vee(t)$ definíciójának. Legyen $U_x = U_1 \cap U_2 \in \tau_T(t_0)$, ekkor minden $(t, z) \in (U_x \times V_x) \cap \text{graph } H$ esetén és minden $a \in f^\vee(t)$ -re vagy

$$f(t, z) < a ,$$

vagy $f(t, z)$ és a nem áll relációban. Mivel $\mathcal{X}(t_0) \subseteq G$, ezért $H(t_0) \subseteq (H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)) \cup G$, így

$$H(t_0) \subseteq \left(\bigcup_{x \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)} V_x \right) \cup G ,$$

ahol minden $x \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)$ esetén $V_x \in \tau_X(x)$ a fent definiált környezet. Mivel minden $x \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)$ esetén $V_x \in \tau_X(x)$ nyílt halmaz, így a

$$\{V_x : x \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)\} \cup \{G\}$$

halmazrendszer nyílt lefedése a $H(t_0) \subseteq X$ kompakt halmaznak, ezért kiválasztható belőle véges lefedés, azaz létezik $x_1, \dots, x_n \in H(t_0)$, hogy

$$H(t_0) \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{x_k} \cup G .$$

Mivel az $\bigcup_{k=1}^n V_{x_k} \cup G \subseteq X$ halmaz nyílt, valamint a $H : T \rightarrow \mathcal{K}(X)$ halmazértékű leképezés felülről félig folytonos t_0 -ban, ezért létezik $U_0 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy minden $t \in U_0$ esetén

$$H(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{x_k} \cup G ,$$

mivel $\mathcal{X}(t_0) \subseteq H(t)$, ezért

$$\mathcal{X}(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{x_k} \cup G .$$

Legyen

$$U = U_0 \cap U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_n} \in \tau_T(t_0) ,$$

ahol minden $x_i \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)$ esetén $V_{x_i} \in \tau_X(x_i)$ a fent definiált környezet. Ekkor minden $t \in U$ esetén

$$\mathcal{X}(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{x_k} \cup G .$$

Belátjuk, hogy minden $t \in U$ esetén $\mathcal{X}(t) \subseteq G$.

Ugyanis: Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik $t \in U$, amelyre létezik $z \in \mathcal{X}(t)$, de $z \notin G$. Mivel

$$\mathcal{X}(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{x_k} \cup G ,$$

ezért létezik $1 \leq k \leq n$, hogy $z \in \mathcal{X}(t) \subseteq H(t)$. Mivel $t \in U \subseteq U_{x_k}$, ezért $(t, z) \in U_{x_k} \times V_{x_k}$. Mivel pedig $z \in \mathcal{X}(t) \subseteq H(t)$, ezért

$$(t, z) \in (U_{x_k} \times V_{x_k}) \cap \text{graph } H ,$$

így minden $a \in f^\vee(t)$ esetén vagy $f(t, z) < a$, vagy $f(t, z)$ és a nem állnak relációban, emiatt $z \notin \mathcal{X}(t)$, ami ellentmondás.

■

Irodalomjegyzék

- Abalo KY, Kostreva MM (1996) Fixed points, Nash games and their organizations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis (Journal of the Juliusz Schauder Center)* 8:205–215
- Abalo KY, Kostreva MM (2004) Some existence theorems of Nash and Berge equilibria. *Applied Mathematics Letters* 17:569–573
- Abalo KY, Kostreva MM (2005) Berge equilibrium: some recent results from fixed-point theorems. *Applied Mathematics and Computation* 169:624–638
- Arrow KJ, Debreu G (1954) Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica* 22(3):265–290
- Berge C (1957) *Théorie générale des jeux à n-personnes*. Gauthier-Villars, Paris
- Berge C (1959) *Espaces topologiques et fonctions multivoques*. Dunod, Paris
- Border KC (1985) *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*. Cambridge University Press
- Colman AM, Körner TW, Musy O, Tazdaït T (2011) Mutual support in games: Some properties of Berge equilibria. *Journal of Mathematical Psychology* 55:166–175
- Forgó F, Pintér M, Simonovits A, Solymosi T (2005) *Játékelmélet (Elektronikus jegyzet)*
- Kakutani S (1941) A generalization of Brouwer’s fixed point theorem. *Mathematical Journal* 8:416–427
- Larbani M, Nessah R (2001) Sur l’équilibre fort selon Berge. *RAIRO Operations Research* 35:439–451
- Larbani M, Nessah R (2008) A note on the existence of Berge and Berge-Nash equilibria. *Mathematical Social Sciences* 55:258–271
- Nash JF (1950) Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36(1):48–49

- Nash JF (1951) Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics* 54(2):286–295
- Nessah R, Tian G (2009) On the existence of strong Nash equilibria. Working paper
- Nessah R, Larbani M, Tazdaït T (2007a) A note on Berge equilibrium. *Applied Mathematics Letters* 20:926–932
- Nessah R, Larbani M, Tazdaït T (2007b) On Berge equilibrium. Working paper
- Nessah R, Tazdaït T, Larbani M (2008) Strong Berge and Pareto equilibrium existence for a noncooperative game. Working paper
- Nikaido H, Isoda K (1955) Note on noncooperative convex games. *Pacific Journal of Mathematics* 5:807–815
- Szabó I (2011) Topológia (Jegyzet)
- Szabó I (2012a) Fixponttételek (Jegyzet)
- Szabó I (2012b) Halmazértékű leképezések (Jegyzet)
- Zhukovskii VJ, Chikrii AA (1994) *Lineino–kvadratichtnye differentsialnye igry*. Naoukova Doumka, Kiev