

Kétformájú játékok externáliákkal

Diplomamunka

Írta: Szabó Márta

Alkalmazott közgazdaságtan szak

Témavezetők:

Radványi Anna Ráhel, Ph.D. hallgató

Pintér Miklós Péter, egyetemi docens

Matematika Tanszék

Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar



Budapesti Corvinus Egyetem

Közgazdaságtudományi Kar

2013

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Partíciós függvény formában adott játékok	3
2.1. PFF játékok	3
2.2. Rekurzív mag	5
3. Kétformájú játékok	8
4. Példa a rekurzív magra	13
5. Shapley-érték	28
6. Összegzés	31
Függelék	32
Irodalomjegyzék	33

1. fejezet

Bevezetés

A játékelmélet egy olyan átfogó, önálló terület, amely az ésszerű emberi viselkedés szabályaival foglalkozik. Segítségével elemezni tudjuk a különböző döntési helyzetek kimeneteleit, nem csak a tudományoknál (matematika, közgazdaságtan, pszichológia, politológia), hanem az élet szinte bármely területén (pl.: sport).

A játékelméletnek két ágát különböztetjük meg: a nem-kooperatív és a kooperatív játékelméletet.

Nem-kooperatív játékelméletről akkor beszélünk, amikor a játékosok egyéni stratégiai döntéseket tudnak hozni. A kooperatív játékelméletnél viszont a játékosok összefoghatnak, és együtt maximalizálhatják a kifizetéseiket. A kooperatív játékelméletnél fontos meghatározni, hogy az adott koalícióban kinek mekkora a hozzáadott értéke. A kooperatív játékokról bővebben Solymosi (2007) jegyzetében olvashatunk.

Vannak olyan szituációk, ahol a két típus nem különül el egymástól. Ilyen példákat találhatunk az üzleti szférában, ahol a játékosok először hoznak egy nem-kooperatív döntést saját stratégiahalmazukról (pl.: hogy belépjenek-e a piacra), és a második fázisban dönthetnek, hogy a létrejött környezetben a piac többi szereplőjével együtt mekkora értéket tudnak teremteni, és hogy a teremtetett érték hogyan oszlik el a kooperáló felek között. Az ilyen játékokat hívjuk kétformájú játékoknak.

A kétformájú játékokat először Brandenburger és Stuart (2006) dolgozta fel, de előtte már foglalkoztak üzleti stratégiákkal (Brandenburger és Stuart, 1996) Ezen kívül foglalkozott vele Lippman és Rumelt (2003a), MacDonald és Ryall (2002), MacDonald és Ryall (2004), Oster (1999), Spulber (2004) és Stuart Jr. (2002). A dolgozatban a kétformájú játékokat Brandenburger (2007) cikke alapján mutatjuk be.

A kétformájú játékok mellett bevezetjük a partíciós függvény formában adott játékokat. Erre azért van szükség, hogy később meg tudjuk határozni az egyes játékosok döntéseinek értékeit. Ez függ attól, hogy a többi játékos együtt vagy külön cselekszik-e. Ezt fogjuk externáliának hívni.

Externáliáról akkor beszélünk, amikor egy gazdasági szereplő tevékenysége nem szándékosan befolyásolja egy másik gazdasági szereplő helyzetét, ez lehet pozitív vagy negatív hatás. Ahhoz, hogy ezt a hatást vizsgálni tudjuk, bevezetjük a partíciós függvény formában adott játékokat. A játékosok egyéni kifizetéseit a rekurzív mag és Shapley-érték segítségével elemezzük.

Az externáliák fontosságáról sok tanulmány készült, köztük Yi (1996) kereskedelmi blokkokról szóló tanulmánya, Funaki és Yamato (1999) közjavak használatáról szóló cikke vagy a nemzetközi környezetvédelmi egyezségek Eyckmans és Tulkens (2003). A legtöbb tanulmány viszont nem tudja megoldani az externáliás játékokat. Erre vezette be a partíciós függvény formában adott játékokat Thrall és Lucas (1963), amit Kóczy (2007) is feldolgozott, akinek a cikke alapján mutatjuk be a partíciós függvény formában adott játékokat.

A dolgozatban különböző alkalmazási területeket vizsgálunk, majd bemutatunk egy olyan kétformájú játékot, amelynek megoldásához szükségünk lesz a partíciós függvény formában adott játékokra. A kapott játékok a rekurzív mag, illetve a Shapley-érték segítségével elemezzük, majd levonjuk a következtetéseket.

A bevezetés után a második fejezetben definiáljuk a partíciós függvény formában adott játékokat, majd nézünk egy rövid példát az alkalmazásukra. A harmadik fejezetben bemutatjuk a kétformájú játékokat. Végül a negyedik-ötödik fejezetekben megvizsgálunk egy példát először a rekurzív mag, majd a Shapley-érték segítségével.

2. fejezet

Partíciós függvény formában adott játékok

Az externáliák manapság fontos szerepet játszanak a közgazdasági problémák elemzésében. Ahhoz, hogy meg tudjuk vizsgálni ezek hatásait, bevezetjük a partíciós függvény formában adott játékokat (később PFF), hogy könnyebben tudjuk elemezni az adott problémákat. A PFF-játékok megmutatják, hogy hogyan változik a koalíció értéke, ha a benn nem lévő tagok különböző koalíciókat alkothatnak. Ezek értékeit adják meg a különböző partíciók a koalíciókon belül.

2.1. PFF játékok

Legyen N a játékosok véges, nemüres halmaza. Az átruházható hasznosságú játék (TU) egy olyan $v \in \mathbb{R}^{2^N}$ függvény, hogy $v(\emptyset) = 0$.

Tekintsünk példának egy termelőt és egy szállítót. Külön-külön megvan a piaci értékük, de sokkal többet érnek el együtt, ha kooperálnak, mintha külön néznénk a hasznosságaik összegét. Az ilyen kooperatív döntési módszereket hívjuk TU-játékoknak.

2.1. *példa.* TU-játék

Vegyünk két termelőt (jelöljük őket t_1 -el és t_2 -vel) és egy szállítót (sz). Jelöljük S -es a lehetséges összefogásokat, azaz a koalíciókat, $v(S)$ -sel pedig az egyes koalíciók értékét (hasznát). Vizsgáljuk meg a kifizetéseiket a különböző helyzetekben:

S	$\emptyset$	$\overline{t_1}$	$\overline{t_2}$	$\overline{sz}$	$\overline{t_1 t_2}$	$\overline{t_1 sz}$	$\overline{t_2 sz}$	$\overline{t_1 t_2 sz}$
$v(S)$	0	0	0	0	0	1	1	2

Láthatjuk, hogy ugyan a játékosoknak külön-külön nincs hasznosságuk, mert egyedül a piacon semmit sem tudnak elérni, például hiába tud a termelő termelni,

ha nincs egy szállító, aki a termékeit eljuttatja a piacra. Ugyanez fordítva, a szállító sem tud elérni semmilyen hasznot, ha nem tudja valamelyik termelőnek a termékeit elszállítani. Viszont ha egy termelő és egy szállító áll össze, akkor együtt képesek piaci részesedést szerezni, míg ha a másik termelővel is összeállnak, együtt nagyobb részesedésre tehetnek szert.

A valóságban azonban előfordulhatnak olyan esetek is, amikor számít, hogy a koalícióban nem szereplő piaci szereplők együtt vagy külön-külön tevékenykednek. Az ilyen externáliás hatások elemzésére vezetjük be a PFF-játékokat.

Az N játékosalmaz $S \subseteq N$ részhalmazait N koalíciónak nevezzük. Az S halmaz partícióit jelöljük $\Pi(S)$ -sel, aminek egy konkrét eleme $\mathcal{P}_s \in \Pi(S)$. Legyen CL az összes koalíció N -en belül, $ECL = (S, \mathcal{P}_N \mid S \in \mathcal{P}_N) \in \Pi(N)$ pedig a beágyazott koalíciók. A következőkben általánosítjuk az eltérést és a magot a partíciós függvény formában adott játékokra (PFF).

A PFF-játék $V \in \mathbb{R}^{ECL}$ koalíciós függvénye meghatározza az átruházható hasznosságú függvényt mindegyik partícióra.

2.2. példa. Tekintsünk egy $N = \{1, 2, 3\}$ játékosalmazon adott játékot. Vegyük a következő partíciókat:

Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{23}$	$\bar{123}$
$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	
$\bar{3}$				

Itt adhatjuk meg, hogy a különböző partíciókban ki kivel kooperál. 3 játékos összesen 5 féle partíciót hozhat létre. Legyenek a partíciók értékei rendre a következők:

Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
5	9	8	5	16
3	2	3	4	
1				

Ebben a lépésben pedig megadtuk a partíciók kifizetéseit, viszont nem tudjuk, hogy a kooperációból származó összhaszon hogyan oszlik el a játékosok között.

2.3. definíció. Az $(x, \mathcal{P})$ kimenetel eleget tesz a következő feltételeknek:

- $x_i \geq 0$, minden $i \in N$ (ami erős feltevése annak, hogy $\min_{\mathcal{P} \ni \{i\}} V(\{i\}, \mathcal{P}) \geq 0$),
- $x(S) = v(S)$, minden $S \in \mathcal{P}$ -re.

A két kimenetel fogalma a két különböző helyzetben nem cserélhető fel. Jelölje $\Omega(V)$ -vel a $\bar{V}$ játék kimeneteleit, ami megadja, hogy a kooperáló játékosok pontosan milyen kifizetést realizálnak az egyes esetekben.

2.4. *példa.* Az előző példát (2.2) folytatva adjuk meg a $\bar{V}$ játék által mindegyik játékos kifizetését (a kooperáción belül is). A kifizetések az adott partíciók esetén legyenek a következők:

Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
5	4	6	4	6
3	5	3	2	6
1	2	2	3	4

A TU-játékoknál adott játékos kifizetése nem függ a többi játékos reakciójától, tehát nincs externális hatás a modellben. A partíciós függvény formában adott játékoknál viszont minden megmaradt partíció más értéket adhat az eltérő játékosnak azáltal, hogy az eltérés után a megmaradt játékosok új partíciókat hoznak létre, ezzel büntetve az eltérő játékost, aki megváltoztathatja a koalíció kifizetését, ami amúgy sértetlen lenne. Eltérő játékosról akkor beszélünk, ha az adott játékos az eredeti helyzetben meghozott válaszát a következő döntési helyzetben megváltoztatja (például: ha egy vállalat eredetileg az x -edik időszakig magasan árazta a termékeit, majd $x+1$ -edik időszakban elkezd alacsonyan árazni, akkor az a vállalat x időszakra $x+1$ -edik időszakra egy eltérő játékos).

2.2. Rekurzív mag

A rekurzív mag segítségével szeretnénk meghatározni a játékosok kifizetéseit, figyelembe véve a különböző döntési helyzetekben vett hozzáadott értéküket, amivel egyfajta igazságos elosztást határozzunk meg.

2.5. definíció (Reziduális játék). *Tekintsük a $\bar{V}$ játékot, ahol $R \subsetneq N$. Feltételezzük, hogy az $N \setminus R$ a $\mathcal{P}_{N \setminus R}$ partíciót alkotja. Ekkor a $(R, V_{\mathcal{P}_{N \setminus R}})$ reziduális játék egy partíciós függvény formában adott játék az R játékosok halmazán, és a partíciós függvényt a $V_{\mathcal{P}_{N \setminus R}}(S, \mathcal{P}_R) = V(S, \mathcal{P}_R \cup \mathcal{P}_{N \setminus R})$ egyenlőség adja meg.*

A reziduális játékoknál, ha a rekurzív mag megoldása $\bar{V}$ -nek, akkor a rekurzív mag $(R, V_{\mathcal{P}_{N \setminus R}})$ -nek is megoldása. Tehát az eltérő játékosok egy rekurzív magbeli kimenetelt várnak a koalíciók kialakításához. Ha a rekurzív mag üres, akkor nem mutatja meg a kimeneteleket, és minden lehetséges reakciónak indokoltnak kell lennie. Ha a rekurzív mag nem üres, akkor tartalmazhat kimeneteleket különböző felosztásokban. Ez vezet a következő definícióhoz:

2.6. definíció. A rekurzív mag

Legyen $\bar{V}$ egy PFF-játék.

1. *Triviális játék:* A $\bar{V}$ játék magjának az egyetlen kimenetele triviális partíciónál, amikor $N = 1$: $C(\bar{V}) = \bar{V}(\bar{1}, \{\bar{1}\})$
2. *Indukciós feltevés:* Miután definiáltuk a játékot $k = 1$ játékosra, nézzük meg mi történik $k \geq 2$ játékos esetén. Tegyük fel, hogy a $C(R, V)$ játék rekurzív magja definiálva van minden olyan $\bar{V} \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ játékban, ahol $k - 1$ játékos van. Az (R, V) játékról feltesszük, hogy:

$$A(R) = \begin{cases} C(\bar{V}), & \text{ha } C(\bar{V}) \neq \emptyset \\ \Omega(V) & \text{különben} \end{cases}.$$

3. *Dominancia:* Az $(x, \mathcal{P})$ kimenetel dominálva van az S koalícióhoz tartozó partíció által, ha létezik $(y_{N \setminus S}, \mathcal{P}_{N \setminus S}) \in A(N \setminus S, V_{\mathcal{P}_S})$ kimenetel, hogy $((y_S, y_{N \setminus S}), \mathcal{P}_S \cup \mathcal{P}_{N \setminus S}) \in \Omega(N, V)$ kimenetel, amire $y_S > x_S$.

Az $(x, \mathcal{P})$ kimenetel dominált, ha van olyan koalíció, amin keresztül dominált.

4. A rekurzív mag, jelöljük $C(N, V)$ -vel: a nem dominált kimenetek halmaza.

2.7. példa. Példa rekurzív magra

Tekintsünk a PFF játékoknál bemutatott 2.2 példát és annak 2.4 példánál bemutatott kifizetéseit. A rekurzív mag segítségével elemezzük a példa lehetséges kimeneteleit. Látható, hogy a játékosok kifizetései a Π_5 -ös partícióban a legmagasabbak, ezért először vizsgáljuk meg, hogy a Π_5 -ös partíció benne lesz-e a rekurzív magban, és vizsgáljuk meg, hogy lesz-e más eleme is a rekurzív magnak.

- Dominálható-e a Π_5 -ös partíció az $\bar{1}$ -es játékoson keresztül?

Az $\bar{1}$ -es játékos a Π_1 -es és a Π_4 -es partícióban szerepel. Ezek kifizetései:

$\Pi_1 \rightarrow \bar{2}, \bar{3}$ kifizetései: $(3, 1)$, amiről láthatjuk, hogy $(3, 1) \not\geq (6, 4)$, és

$\Pi_4 \rightarrow \bar{2}\bar{3}$ kifizetései: $(2, 3)$, aminél szintén láthatjuk, hogy $(2, 3) \not\geq (6, 4)$.

Tehát az $\bar{1}$ -es játékos nem dominálja a Π_5 -ös partíciót.

- Dominálható a $\bar{2}$ -es játékoson keresztül?

$\Pi_1 \rightarrow \bar{1}, \bar{3}$ kifizetései: $(5, 1)$, amiből következik, hogy $(5, 1) \not\geq (6, 4)$, és

$\Pi_3 \rightarrow \bar{1}\bar{3}$ kifizetései: $(6, 2)$, aminél szintén láthatjuk, hogy $(6, 2) \not\geq (6, 4)$.

Tehát az $\bar{2}$ -es játékos sem dominálja a Π_5 -ös partíciót.

- Dominálható a $\bar{3}$ -as játékoson keresztül?

$\Pi_1 \rightarrow \bar{1}, \bar{2}$ kifizetései: (5,3), amiből következik, hogy (5,3) $\not\geq$ (6,6), és

$\Pi_2 \rightarrow \bar{1}\bar{2}$ kifizetései: (4,5), aminél szintén láthatjuk, hogy (4,5) $\not\geq$ (6,6).

Tehát az $\bar{3}$ -as játékos sem dominálja a Π_5 -ös partíciót. Ebből következik, hogy a Π_5 -ös partíciót nem dominálja egyik partíció sem, tehát benne van a rekurzív magban.

A Π_1 -es, Π_2 -es és Π_4 -es partíciókat a Π_5 -ös partíció rendre dominálja (mind-egyik partícióban a játékosok kifizetése kisebb, mint a Π_5 -ös partíciónál), de a Π_3 -as partícióban az $\bar{1}$ -es játékos kifizetése megegyezik a Π_5 -ös partícióban meglévő kifizetéssel.

Vizsgáljuk meg, hogy a Π_3 -as partíció benne van-e a rekurzív magban:

- Az $\bar{1}$ -es játékos esetében a kifizetések:

$\Pi_1 \rightarrow \bar{2}, \bar{3}$ kifizetései: (3,1), amiről láthatjuk, hogy (3,1) $\not\geq$ (3,2), és

$\Pi_4 \rightarrow \bar{2}\bar{3}$ kifizetései: (2,3), aminél szintén láthatjuk, hogy (2,3) $\not\geq$ (3,2).

Tehát az $\bar{1}$ -es játékos nem dominálja a Π_1 -es partíciót.

- A $\bar{2}$ -es játékos csak a Π_1 -es partícióban szerepel önállóan, ott a kifizetések:

$\Pi_1 \rightarrow \bar{1}, \bar{3}$ kifizetései: (5,1), amiből következik, hogy (5,1) $\not\geq$ (6,2)

Tehát az $\bar{2}$ -es játékos sem dominálja a Π_1 -es partíciót.

- Dominálható a $\bar{3}$ -as játékoson keresztül?

$\Pi_1 \rightarrow \bar{1}, \bar{2}$ kifizetései: (5,3), amiből következik, hogy (5,3) $\not\geq$ (6,3), és

$\Pi_2 \rightarrow \bar{1}\bar{2}$ kifizetései: (4,5), aminél szintén láthatjuk, hogy (4,5) $\not\geq$ (6,3).

Nagykoalícióon keresztül:

$\Pi_5 \rightarrow \bar{1}\bar{2}\bar{3}$ kifizetései: (6,6,4), ahonnan (6,6,4) $\not\geq$ (6,3,2)

Tehát a Π_5 -ös partíció sem dominálja a Π_3 -as partíciót, így az is benne van a rekurzív magban.

3. fejezet

Kétformájú játékok

A játékelmélet segítségével olyan szituációkat lehet elemezni, amikor egy ember sorsa egy másiktól függ. Kétféle típusa létezik: a nem-kooperatív és kooperatív játékelmélet. A nem-kooperatív játékelméletben a játékosok a többi játékostól függetlenül hoznak döntéseket, és nem kényszeríthetők ki különböző kimenetek, míg a kooperatív játékelméletben a játékosok közösen törekednek a lehető legjobb kimenetelt elérni.

A kétformájú játékoknál a két típus egyszerre van jelen. A játék első részében a játékosok egy nem-kooperatív játékot játszanak, amiben a játékosok egy stratégiai döntést hoznak, ezzel megalapozva a játék környezetét. A játék második részében egy kooperatív játék valósul meg, amiben a játékosok a létrehozott stratégiai környezetből már nem tudnak kilépni. A kooperatív elemzés segítségével kiszámíthatjuk a játékosok hozzáadott értékét, és azt is, hogy a teremtetett értéket hogyan tudják felosztani egymás között. A Kétformájú játékokról Adam M. Brandenburg és Harborne W. Stuart cikkében Brandenburger (2007) olvashatunk bővebben.

Általános definíciók:

3.1. definíció. *Egy N játékosal rendelkező kétformájú játék egy olyan $(N, \{A_i\}_{i \in N}, F)$ lista, ahol:*

- A_i az i játékos véges stratégiiahalmaza, $i = 1, \dots, n$ -re, $A = \times_{i \in N} A_i$;
- a $F : A \rightarrow \mathcal{G}_P^N$ függvény minden $a \in A$ stratégiaprofilhoz egy PFF játékot rendel.

A kétformájú játékokra a legjobb példákat a való életben az üzleti szférában találhatjuk.

"Az üzlet egy háború". Sokan gondolkoztak így az üzleti szférában. Túljárni a versenytársak eszén, minél nagyobb piaci részesedésre szert tenni, létrehozni egy

mindent elsőpró márkát. Ez a győztes-vesztes szemlélet, ahol csak a győztesek maradnak, a veszteseket pedig teljesen ki kell zárni. De ez már nem így van. Manapság fontos, hogy odafigyeljenek a vásárlókra, együttműködjenek a beszállítókkal. Tehát különböző partíciókat hozzanak létre, akikkel létrehozhatnak egy stratégiai együttműködést, akár a többi versenyző vállalattal is.

Megállapíthatjuk, hogy egyes üzletek csak akkor lesznek sikeresek, ha a többi hasonló üzlet is az. Vegyük példának a színházakat. Egy adott városban a színházak egymással versenyeznek a nézőkért, de előnyükre is válik, ha több színház van a városban, mert együtt több látogatót vonzanak a városba, így nagyobb nézőközönségen tudnak osztozni, mintha egyedül lennének. Vehetjük példának akár az antikváriumokat is, minél több van belőlük a városban, annál nagyobb valószínűséggel találják meg a vásárlók a kedvükre való terméket. Ezáltal többször vissza fognak nézni a boltokba, így nő az egyes antikváriumok profitja. Ezek egyfajta győztes-győztes szituációk, amikor mindkét vállalat nyer a másik jelenléteért. További példákat Adam M. Brandenburger és Barry J. Nalebuff könyvében (Brandenburger és Nalebuff (1997)) olvashatunk.

Az üzlet valóban ilyen békés lenne? Ez sem igaz.

3.2. *példa* (Intel, Microsoft, Apple). Vegyük példának az Intel, Microsoft és Apple cégeket. Az Intel kereslete növekszik, ha a Microsoft sokkal nagyobb teljesítményű szoftvereket készít. Ha a Microsoft szoftverei ezáltal értékesebbek lesznek, akkor az Intel motiválva van arra nézve, hogy sokkal gyorsabb chipeket hozzon létre, és így folytatódik a sor. Ez egy győztes-győztes szituáció a két vállalatra nézve. De a piacon megjelenik az Apple is, aki közömbös az Intel termékeivel szemben, viszont a Microsofttal versenyez a vásárlókért. Illusztráljuk a szituációt egy PFF-játékkal, és vizsgáljuk meg a játék rekurzív magját:

Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
$\bar{I}$	$\overline{IM}$	$\overline{IA}$	$\overline{MA}$	$\overline{IMA}$
$\overline{M}$	$\overline{A}$	$\overline{M}$	$\bar{I}$	
$\overline{A}$				

Legyenek a partíciók értékei rendre a következők:

Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
2	15	8	9	16
3	6	3	2	
7				

A kifizetések az adott partíciók esetén:

Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
2	7	2	2	4
3	8	3	4	6
7	6	6	5	6

Vizsgáljuk meg a különböző kimeneteleket, és állapítsuk meg, hogy rekurzív magbeliek-e a megoldások:

- Dominálható-e a Π_1 -es partíció az Intelen keresztül?

Az Intel a Π_4 -es partícióban szerepel, melynek kifizetései:

$\Pi_4 \rightarrow \overline{MA}$ kifizetései: $(4, 5)$, amiből: $(4, 5) \not\succ (3, 7)$.

Tehát az Intel nem dominálja a Π_1 -es partíciót.

- Dominálható-e a Microsofton keresztül?

Az Microsoft a Π_3 -as partícióban szerepel, melynek kifizetései:

$\Pi_3 \rightarrow \overline{IA}$ kifizetései: $(2, 6)$, amiből: $(2, 6) \not\succ (2, 7)$.

Tehát a Microsoft sem dominálja a Π_1 -es partíciót.

- Dominálható-e az Apple-n keresztül?

Az Apple a Π_2 -es partícióban szerepel, melynek kifizetései:

$\Pi_2 \rightarrow \overline{IM}$ kifizetései: $(7, 8)$, aminél láthatjuk, hogy $(7, 8) > (2, 3)$.

Tehát a Π_2 -es partíció dominálja a Π_1 -es partíciót, így a Π_1 -es partíció nincs benne a rekurzív magban. Vizsgáljuk meg, hogy Π_2 -es partíció dominálja-e a többi partíciót:

- Intelen keresztül:

$\Pi_1 \rightarrow \overline{M}, \overline{A}$ kifizetései: $(3, 7)$, amiből $(3, 7) \not\succ (8, 6)$, és

$\Pi_4 \rightarrow \overline{MA}$ kifizetései: $(4, 5)$, aminél $(4, 5) \not\succ (8, 6)$.

Tehát az Intel nem dominálja a Π_2 -es partíciót.

- Microsofton keresztül:

$\Pi_1 \rightarrow \overline{I}, \overline{A}$ kifizetései: $(2, 7)$, amiből következik, hogy $(2, 7) \not\succ (7, 6)$ és

$\Pi_3 \rightarrow \overline{IA}$ kifizetései: $(2, 6)$, amiből $(2, 6) \not\succ (7, 6)$.

Tehát a Microsoft sem dominálja a Π_2 -es partíciót.

- Apple-ön keresztül:

$\Pi_1 \rightarrow \bar{I}, \bar{M}$ kifizetései: $(2, 3)$, amiből következik, hogy $(2, 3) \not\geq (7, 8)$.

Tehát az Apple sem dominálja a Π_2 -es partíciót.

- A nagykoalíción (Π_5 -ön) keresztül:

$\Pi_3 \rightarrow \bar{I}\bar{M}\bar{A}$ kifizetései: $(4, 6, 6)$, amiből $(4, 6, 6) \not\geq (7, 8, 6)$.

Tehát a Π_2 -es partíció benne van a rekurzív magban.

Vizsgáljuk meg a többi partíciót:

- Π_3 : Apple-n keresztül:

$\Pi_1 \rightarrow \bar{I}, \bar{M}$ kifizetései: $(2, 3)$, amiből következik, hogy $(2, 3) \not\geq (2, 3)$, és

$\Pi_2 \rightarrow \bar{I}\bar{M}$ kifizetései: $(7, 8)$, amiből $(7, 8) > (2, 3)$.

Tehát Π_3 nincs benne a rekurzív magban.

- Π_4 : Apple-n keresztül:

$\Pi_1 \rightarrow \bar{I}, \bar{M}$ kifizetései: $(2, 3)$, amiből következik, hogy $(2, 3) \not\geq (2, 4)$, és

$\Pi_2 \rightarrow \bar{I}\bar{M}$ kifizetései: $(7, 8)$, amiből $(7, 8) > (2, 4)$.

Tehát Π_4 sincs benne a rekurzív magban.

- Π_5 -ös partíció dominálja-e a Π_2 -es partíciót?

$\Pi_5 \rightarrow \bar{I}\bar{M}\bar{A}$ kifizetései: $(4, 6, 6)$, amiből következik, hogy $(4, 6, 6) \not\geq (7, 8, 6)$, tehát Π_5 dominálja Π_2 -öt. Vizsgáljuk meg, hogy Π_5 benne van-e a rekurzív magban:

- Intelen keresztül:

$\Pi_1 \rightarrow \bar{M}, \bar{A}$ kifizetései: $(3, 7)$, amiből $(3, 7) \not\geq (6, 6)$, és

$\Pi_4 \rightarrow \bar{M}\bar{A}$ kifizetései: $(4, 5)$, aminél $(4, 5) \not\geq (6, 6)$.

Tehát az Intel nem dominálja a Π_5 -ös partíciót.

- Microsofton keresztül:

$\Pi_1 \rightarrow \bar{I}, \bar{A}$ kifizetései: $(2, 7)$, amiből következik, hogy $(2, 7) \not\geq (4, 6)$ és

$\Pi_3 \rightarrow \bar{I}\bar{A}$ kifizetései: $(2, 6)$, amiből $(2, 6) \not\geq (4, 6)$.

Tehát a Microsoft sem dominálja a Π_5 -ös partíciót.

- Apple-ön keresztül:

$\Pi_1 \rightarrow \bar{I}, \bar{M}$ kifizetései: $(2, 3)$, amiből következik, hogy $(2, 3) \not> (4, 6)$,

$\Pi_2 \rightarrow \bar{I}\bar{M}$ kifizetései: $(7, 8)$, amiből $(7, 8) > (4, 6)$.

Tehát a Π_2 -es partíció dominálja a Π_5 -ös partíciót Apple-n keresztül. Ebből következik, hogy csak a Π_2 -es partíció rekurzív magbeli megoldás.

Ezután felmerül a kérdés, hogy ha az üzlet nem háború és nem is béke, akkor mi? Az üzlet kooperáció, ha arról beszélünk, hogy megteremtsük az értéket, és versengés, hogy hogyan osszuk fel egymás között az elért hasznot. Tehát az üzlet háború és béke, de nem a végtelenségig egymást váltogatva, hanem a két dolog egyidőben létezik.

Az előző példában a játékosok egy kooperatív játékelméleti szituációban dönthettek együttműködés és különválás között. A következő fejezetben egy olyan példát vizsgálunk meg, ahol egy kétformájú játékszituáció áll fenn.

4. fejezet

Példa a rekurzív magra

4.1. *példa* (Apple, Samsung, Nokia). Vegyünk három mobilgyártó céget: az Apple-t, Samsungot és a Nokiát. Tegyük fel, hogy első körben a vállalatok dönthetnek, hogy IOS vagy Android rendszerrel gyártsák tovább a mobiltelefonokat. Jelen esetben feltételezzük, hogy a Nokia nem költött a windows operációs rendszer megalkotására (erre azért van szükség, hogy a kifizetések között ne legyenek nagy eltérések, a kifizetések meghatározásánál azt vettem figyelembe, hogy az Apple volt az első a mobilértékesítésből befolyt összeg alapján, utána jött a Samsung, majd a Nokia a harmadik helyen). Majd a második körben alkossanak partíciókat. Feltételezzük, hogy az Apple IOS, míg a Samsung és Nokia Android operációs rendszert alkalmaznak a kiinduló helyzetnél. Erre azért van szükség, hogy a kifizetések felírásánál a megadott értékeknél figyelembe vegyünk azt is, hogy az átállásnál (tehát ha másik rendszert választanak) és az esetleges kooperációk esetén felmerülhetnek költségek is, de előfordulhat az is, ha ugyanazt a rendszert használták, hogy a fejlesztési költségek csökkennek. Vegyük az alábbi kifizetési mátrixokat, ami a cégek nyereségét mutatják meg:

		<i>Samsung</i>	
		<i>IOS</i>	<i>Android</i>
<i>Apple</i>	<i>IOS</i>	$\overline{ANS} = 10$	$\overline{ANS} = 12$
		$\overline{AS} = 8$	$\overline{AS} = 10$
		$\overline{AN} = 7$	$\overline{AN} = 10$
		$\overline{SN} = 9$	$\overline{SN} = 7$
		$\overline{A} = 7$	$\overline{A} = 6$
		$\overline{S} = 2$	$\overline{S} = 6$
		$\overline{N} = 2$	$\overline{N} = 1$
<i>Android</i>		$\overline{ANS} = 11$	$\overline{ANS} = 13$
		$\overline{AS} = 8$	$\overline{AS} = 8$
		$\overline{AN} = 7$	$\overline{AN} = 7$
		$\overline{SN} = 9$	$\overline{SN} = 6$
		$\overline{A} = 3$	$\overline{A} = 2$
		$\overline{S} = 3$	$\overline{S} = 5$
		$\overline{N} = 2$	$\overline{N} = 3$

		<i>IOS(Nokia)</i>	
		<i>Samsung</i>	
		<i>IOS</i>	<i>Android</i>
<i>Apple</i>	<i>IOS</i>	$\overline{ANS} = 12$	$\overline{ANS} = 16$
		$\overline{AS} = 12$	$\overline{AS} = 11$
		$\overline{AN} = 8$	$\overline{AN} = 8$
		$\overline{SN} = 9$	$\overline{SN} = 11$
		$\overline{A} = 6$	$\overline{A} = 7$
		$\overline{S} = 3$	$\overline{S} = 6$
		$\overline{N} = 4$	$\overline{N} = 5$
<i>Android</i>		$\overline{ANS} = 11$	$\overline{ANS} = 15$
		$\overline{AS} = 6$	$\overline{AS} = 7$
		$\overline{AN} = 10$	$\overline{AN} = 6$
		$\overline{SN} = 9$	$\overline{SN} = 9$
		$\overline{A} = 7$	$\overline{A} = 2$
		$\overline{S} = 6$	$\overline{S} = 4$
		$\overline{N} = 5$	$\overline{N} = 3$

Android(Nokia)

Vizsgáljuk meg a nyolc esetet, és nézzük meg, hogy az adott döntések mellett melyik partíciók lesznek a rekurzív magban. A partíciók legyenek minden esetben a következők:

Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
$\overline{A}$	$\overline{AS}$	$\overline{AN}$	$\overline{SN}$	$\overline{ASN}$
$\overline{S}$	$\overline{N}$	$\overline{S}$	$\overline{A}$	
$\overline{N}$				

A kifizetési mátrix alapján felírhatók az egyes játékosoknál. Először abban az esetben, ha minden játékos az IOS rendszert választja:

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
Apple	7	6	4	8	5
Samsung	2	3	2	4	3
Nokia	2	2	3	4	2

A kifizetések felírásánál azt vettük figyelembe, hogy a Samsungnak és Nokiának külön-külön költséges lenne az átállás, viszont ha együttműködnek, akkor a költségek megoszlanak, de ha az Apple-el szövetkeznek, akkor az Apple a szabadalom miatt nagyobb nyereségre tesz szert.

- Dominálható a Π_1 -es partíció $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} \text{ kifizetései: } (6, 3) \not> (7, 2)$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (4, 3) \not> (7, 2).$$

- $\overline{A}$ -n keresztül?

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (4, 4) > (2, 2).$$

Tehát Π_4 dominálja Π_1 -et. Vizsgáljuk meg, hogy Π_4 dominálható-e $\overline{A}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (2, 2) \not> (4, 4),$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (7, 2) \not> (8, 4),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (4, 3) \not> (8, 4).$$

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{S} : (7, 2) \not> (8, 4),$$

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} : (6, 3) \not> (8, 4).$$

- Nagykoalíció keresztül:

$$\Pi_5 \rightarrow \overline{ASN} : (5, 3, 2) \not> (8, 4, 4).$$

Megállapíthatjuk, hogy Π_4 benne van a rekurzív magban. Vizsgáljuk meg Π_2 -öt is $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (7, 2) \not> (3, 2),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (4, 4) > (3, 2).$$

Tehát Π_4 dominálja Π_2 -öt. Ezután vizsgáljuk meg Π_3 is benne van-e a rekurzív magban.

- Dominálható-e $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (7, 2) \not> (2, 3),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (4, 4) > (2, 3).$$

Π_4 dominálja Π_3 -at is.

- Végül vizsgáljuk meg a nagykoalíció keresztül:

$$\Pi_5 \rightarrow \overline{ASN} : (5, 3, 2) \not> (8, 4, 4).$$

Π_4 dominálja a nagykoalíciót is.

Tehát a rekurzív magban csak a Π_4 -es partíció van, ha az Apple, Samsung és Nokia az IOS rendszert választja. Vizsgáljuk tovább azt az esetet, amikor az Apple és Nokia az IOS rendszert, a Samsung pedig Androidot választ. Ebben az esetben a játékosokhoz rendelt kifizetések az adott partíció megalakulása mellett:

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
Apple	6	6	7	6	6
Samsung	6	4	7	5	4
Nokia	1	2	3	2	2

A kifizetések felírásánál itt azt vettük figyelembe, hogy csak a Nokiának kell váltania, tehát a költségeket az átváltásra vagy csak maga állja, ami kisebb profitot eredményez, vagy kooperál az Apple-el. A Samsung viszont jobban jár, ha egyedül van, mert így megtarthatja egyediségét a többi versenyzővel szemben. Az Apple-nél figyelembe kell venni, hogy a kooperálásnak költsége van, viszont legalább a fejlesztések és átállás költségét nem kell annyira figyelembe venni, mint a Nokiánál.

Ezután vizsgáljuk meg a partíciókat:

- Dominálható a Π_1 -es partíció $\overline{A}$ -n keresztül?

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} \text{ kifizetései: } (5, 2) \not> (6, 1).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (6, 1) \not> (7, 3).$$

Tehát Π_3 dominálja Π_1 -et.

- Vizsgáljuk meg, hogy Π_3 dominálható-e $\overline{A}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (6, 1) \not> (7, 3),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (5, 2) \not> (7, 3).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (6, 1) \not> (7, 3).$$

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{S} : (6, 6) \not> (7, 7),$$

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} : (6, 4) \not> (7, 7).$$

- Nagykoalícióon keresztül:

$$\Pi_5 \rightarrow \overline{ASN} : (6, 4, 2) \not> (7, 7, 3).$$

Tehát Π_3 benne van a rekurzív magban.

- Ezután vizsgáljuk meg Π_2 -at $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (6, 1) \not> (6, 2),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (7, 3) > (6, 2).$$

Tehát Π_2 nincs benne a rekurzív magban.

- Vizsgáljuk meg Π_4 -et $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (6, 1) \not> (6, 2),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (7, 3) > (6, 2).$$

- Tehát Π_4 sincs benne a rekurzív magban. Végül vizsgáljuk meg a nagykoalíciót $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (6, 1) \not> (6, 2),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (7, 3) > (6, 2).$$

Tehát a nagykoalíció sincs a rekurzív magban, ha az Apple és a Nokia az IOS rendszert, a Samsung az Androidot választja. Tehát az egyetlen rekurzív magbeli partíció a Π_3 .

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor az Apple Androidot, a Samsung és a Nokia pedig IOS rendszert választ. Ebben az esetben a játékosokhoz rendelt kifizetések az adott partíció megalakulása esetén:

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
Apple	3	4	4	5	4
Samsung	3	4	3	5	4
Nokia	2	2	3	4	3

Ez a legrosszabb kimenetel, hiszen ebben az esetben mindegyik gyártónak át kell térnie a másik operációs rendszerre, és így az átállási és fejlesztési költségek magasak, ami miatt a profit csökken. Ezzel szemben a Samsung és a Nokia az átállás és fejlesztés költségeit kooperáció segítségével csökkenteni tudják.

Nézzük meg melyik partíció kerül be a rekurzív magba:

- Dominálható a Π_1 -es partíció $\overline{A}$ -n keresztül?

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} \text{ kifizetései: } (5, 4) > (3, 2)$$

Tehát Π_4 dominálja Π_1 -et.

- Vizsgáljuk meg, hogy Π_4 dominálható-e $\overline{A}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (3, 2) \not> (5, 4).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (3, 2) \not> (5, 4),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (4, 3) \not> (5, 4).$$

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{S} : (3, 3) \not> (5, 5),$$

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} : (4, 4) \not> (5, 5).$$

- Nagykoalícióon keresztül:

$$\Pi_5 \rightarrow \overline{ASN} : (4, 4, 3) \not> (5, 5, 4).$$

Tehát Π_4 benne van a rekurzív magban.

- Ezután vizsgáljuk meg Π_2 -őt a $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (3, 2) \not> (4, 2),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (5, 4) > (4, 2).$$

Tehát Π_2 nincs benne a rekurzív magban.

- Vizsgáljuk meg Π_3 -at a $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (3, 2) \not> (3, 3),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (5, 4) > (3, 3).$$

Tehát Π_3 nincs benne a rekurzív magban.

- Végül vizsgáljuk meg a nagykoalíciót $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (3, 2) \not> (4, 3),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (5, 4) \not> (4, 3).$$

Tehát a nagykoalíció nincs a rekurzív magban, ha az Apple Androidot, a Samsung és a Nokia pedig IOS rendszert választja.

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor az Apple és a Samsung az Android, a Nokia az IOS rendszert választ. A játékosok kifizetései ebben az esetben a következőképpen alakulnak:

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
Apple	2	3	3	2	4
Samsung	5	5	6	4	6
Nokia	3	1	4	2	3

- Dominálható a Π_1 -es partíció $\overline{A}$ -n keresztül?

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} \text{ kifizetései: } (4, 2) \not> (5, 3).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (3, 4) > (2, 3).$$

Tehát Π_3 dominálja Π_1 -et.

- Vizsgáljuk meg, hogy Π_3 dominálható-e $\overline{A}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (5, 3) \not> (6, 4),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (4, 2) \not> (6, 4).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (2, 3) \not> (3, 4).$$

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{S} : (2, 5) \not> (3, 6),$$

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} : (3, 5) \not> (3, 6).$$

- Nagykoalíció keresztül:

$$\Pi_5 \rightarrow \overline{ASN} : (4, 6, 3) \not> (3, 6, 4).$$

Tehát Π_3 benne van a rekurzív magban.

- Ezután vizsgáljuk meg Π_2 -öt a $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (5, 3) \not> (5, 1),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (4, 2) \not> (5, 1).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (2, 3) \not> (3, 1),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (3, 4) > (3, 1).$$

Tehát Π_2 nincs benne a rekurzív magban.

- Vizsgáljuk meg Π_4 -et a $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (5, 3) > (4, 2).$$

Mivel Π_1 dominálja a Π_4 -es partíciót, ezért a Π_4 -es partíció biztos nincs benne a rekurzív magban.

- Végül vizsgáljuk meg a nagykoalíciót $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (5, 3) \not> (6, 3),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (4, 2) \not> (6, 3).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (2, 3) \not> (4, 3),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (3, 4) \not> (4, 3).$$

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{S} : (2, 5) \not> (4, 6),$$

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} : (3, 5) \not> (4, 6).$$

Tehát a nagykoalíció is benne van a rekurzív magban, ha az Apple és a Samsung az Android, a Nokia az IOS rendszert választja.

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor az Apple és a Samsung az IOS, a Nokia pedig az Android rendszer mellett dönt. A játékosok kifizetései ebben az esetben a következőképpen alakulnak:

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
Apple	6	7	5	5	5
Samsung	3	5	3	4	3
Nokia	4	5	3	4	4

Itt az egyetlen eltérő játékos a Samsung, aki dönthet, hogy összefog az Apple-el összefog, és megspórolja az átállási költségeket, vagy egyedül fejleszt.

- Π_1 -es partíció dominálható-e az $\overline{A}$ partíción keresztül?

$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN}$ kifizetései: $(4, 4) \not> (3, 4)$.

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (5, 3) \not> (6, 4)$.

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$\Pi_2 \rightarrow \overline{A}, \overline{S} : (7, 5) > (6, 3)$.

Tehát Π_2 dominálja Π_1 -et.

- Vizsgáljuk meg, hogy Π_2 dominálható-e $\overline{A}$ -n keresztül?

$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (3, 4) \not> (5, 5)$,

$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (4, 4) \not> (5, 5)$.

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (6, 4) \not> (7, 5)$,

$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (5, 3) \not> (7, 5)$.

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{S} : (6, 3) \not> (7, 5)$.

- Nagykoalícióon keresztül:

$\Pi_5 \rightarrow \overline{ASN} : (5, 3, 4) \not> (7, 5, 5)$.

Tehát Π_2 benne van a rekurzív magban.

- Ezután vizsgáljuk meg Π_3 -at a $\overline{A}$ -n keresztül:

$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (3, 4) \not> (3, 3)$,

$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (4, 4) > (3, 3)$.

Tehát Π_4 dominálja Π_3 -at.

- Vizsgáljuk meg, hogy Π_4 dominálható-e $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (3, 4) \not\succ (4, 4).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (6, 4) \not\succ (5, 4),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (5, 3) \not\succ (5, 4).$$

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{S} : (6, 3) \not\succ (5, 4),$$

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} : (7, 5) \not\succ (5, 4).$$

Tehát Π_4 nem domináns stratégia.

- Végül vizsgáljuk meg a nagykoalíciót $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (3, 4) \not\succ (3, 4),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (4, 4) \not\succ (3, 4).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (3, 4) \not\succ (5, 4),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (5, 3) \not\succ (5, 4).$$

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{S} : (6, 3) \not\succ (5, 3),$$

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} : (7, 5) > (5, 3).$$

Tehát a nagykoalíció sincs benne van a rekurzív magban, az egyetlen domináns stratégia a Π_2 -es partíció.

Nézzük meg azt az esetet, amikor az Apple IOS, a Samsung és Nokia Android rendszert alkalmaz. Ekkor a következőképpen alakulnak a kifizetések:

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
Apple	7	6	5	5	6
Samsung	6	5	5	6	5
Nokia	5	4	3	5	4

Ez az a partíció, ami az eredeti helyzetet mutatja, tehát itt nincsenek átállási költségek és a gyártók saját termékük fejlesztésére vagy egy esetleges kooperáció kialakítására koncentrálhatnak.

- Dominálható a Π_1 -es partíció $\overline{A}$ -n keresztül?

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} \text{ kifizetései: } (6, 5) \not> (6, 5)$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (5, 3) \not> (7, 5).$$

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} : (6, 4) \not> (7, 5).$$

- Nagykoalícióon keresztül:

$$\Pi_5 \rightarrow \overline{ASN} : (6, 5, 4) \not> (7, 6, 5).$$

Tehát Π_1 benne van a rekurzív magban.

- Ezután vizsgáljuk meg Π_2 -őt a $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (6, 5) > (5, 4),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (5, 4) \not> (5, 4).$$

Tehát Π_1 dominálja Π_2 -őt.

- Nézzük meg Π_3 -nál mi lesz:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (6, 5) > (5, 3),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (5, 4) \not> (5, 3).$$

Tehát Π_1 Π_3 -at is dominálja.

- Vizsgáljuk meg Π_4 -et a $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (6, 5) \not> (6, 5).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (2, 5) \not> (4, 6),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (5, 3) \not> (5, 5).$$

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (7, 6) \not> (5, 6),$$

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} : (6, 5) \not> (5, 6).$$

- Nagykoalícióon keresztül:

$$\Pi_5 \rightarrow \overline{ASN} : (6, 5, 4) \not> (5, 6, 5).$$

Tehát Π_4 is benne van a rekurzív magban.

- Végül vizsgáljuk meg a nagykoalíciót $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (6, 5) > (5, 4),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (5, 4) \not> (5, 4).$$

Tehát az egyetlen partíció, ami benne van a rekurzív magban a Π_1 , ha az Apple IOS, a Samsung és Nokia Android rendszer használata mellett dönt.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a Samsung IOS, az Apple és a Nokia Android rendszert alkalmaz, tehát a Samsung és az Apple változtatnak eddigi stratégiájukon. Ekkor a következőképpen alakulnak a kifizetések:

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
Apple	2	3	4	3	3
Samsung	2	3	4	2	3
Nokia	5	4	6	4	5

- Dominálható a Π_1 -es partíció $\overline{A}$ -n keresztül?

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} \text{ kifizetései: } (2, 4) \not> (2, 5).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (4, 6) \not> (2, 5).$$

Tehát Π_3 dominálja Π_1 -et.

- Vizsgáljuk meg Π_3 -at a $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (2, 5) \not> (4, 6),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (2, 4) \not> (4, 6).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (2, 5) \not> (4, 6).$$

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (2, 2) \not> (4, 4),$$

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} : (3, 3) \not> (4, 4).$$

- Nagykoalícióon keresztül:

$$\Pi_5 \rightarrow \overline{ASN} : (3, 3, 5) \not> (4, 4, 6).$$

Tehát Π_3 benne van a rekurzív magban.

- Ezután vizsgáljuk meg, hogy Π_2 dominálható-e $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (2, 5) \not> (3, 4),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (2, 4) \not> (3, 4).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (3, 6) \not> (3, 4),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (4, 6) > (3, 4).$$

Tehát Π_3 nincs benne a rekurzív magban.

- Vizsgáljuk meg Π_4 -et a $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (2, 5) \not> (2, 4).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (2, 5) \not> (3, 4),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (4, 6) > (3, 4).$$

Tehát Π_4 is dominálja Π_3 .

- Végül vizsgáljuk meg a nagykoalíciót $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (2, 5) \not> (3, 5),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (2, 4) \not> (3, 5).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (2, 5) \not> (3, 5),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (4, 6) > (3, 5).$$

Tehát a nagykoalíció sem tagja a rekurzív magnak, ha az Apple és a Samsung IOS, a Nokia Android rendszert alkalmaz.

Végül vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor mindhárom játékos az Android stratégia mellett dönt, tehát csak az Apple dönt a változtatás mellett. Ebben az esetben:

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
Apple	2	3	3	2	4
Samsung	4	4	5	5	6
Nokia	3	3	3	4	5

- Dominálható a Π_1 -es partíció $\overline{A}$ -n keresztül?

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} \text{ kifizetései: } (5, 4) > (4, 3)$$

Tehát Π_4 dominálja Π_1 -et.

- Vizsgáljuk meg Π_4 -et a $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (4, 3) \not\succ (5, 4).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (2, 3) \not\succ (2, 4),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (3, 3) \not\succ (2, 4).$$

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{S} : (2, 4) \not\succ (2, 5),$$

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} : (3, 5) \not\succ (2, 5).$$

- Nagykoalícióon keresztül:

$$\Pi_5 \rightarrow \overline{ASN} : (4, 6, 5) > (2, 5, 4).$$

Tehát a nagykoalíció dominálja a Π_4 -es partíciót.

- Vizsgáljuk meg a nagykoalíciót $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (4, 3) \not\succ (6, 5),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (5, 4) \not\succ (6, 5).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (2, 3) \not\succ (4, 5),$$

$$\Pi_3 \rightarrow \overline{AN} : (3, 3) \not\succ (4, 5).$$

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{S} : (2, 4) \not\succ (4, 6),$$

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} : (3, 4) \not\succ (4, 6).$$

Tehát a nagykoalíció benne van a rekurzív magban.

- Vizsgáljuk meg, hogy Π_2 dominálható-e $\overline{A}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (4, 3) \not\succ (4, 3),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (5, 4) > (4, 3).$$

Tehát Π_4 dominálja Π_2 , amit dominál a nagykoalíció, tehát a nagykoalíció dominálja Π_2 -őt is, tehát Π_2 nincs benne a rekurzív magban.

- Végül vizsgáljuk meg Π_3 -at a $\overline{A}$ -n keresztül:

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{S}, \overline{N} : (4, 3) \not\succ (5, 3),$$

$$\Pi_4 \rightarrow \overline{SN} : (5, 4) \not\succ (5, 3).$$

- $\overline{S}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (2, 3) \not> (3, 3).$$

- $\overline{N}$ -n keresztül?

$$\Pi_1 \rightarrow \overline{A}, \overline{N} : (2, 4) \not> (3, 5),$$

$$\Pi_2 \rightarrow \overline{AS} : (3, 4) \not> (3, 5).$$

- Nagykoalícióon keresztül:

$$\Pi_5 \rightarrow \overline{ASN} : (4, 6, 5) > (3, 5, 3).$$

Tehát Π_3 nem része a rekurzív magnak, ha mindhárman az Androidot választják.

A különböző partíciók mellett a játékosok kifizetései, ha egy másik játékosal partíciót alkotnak a következők:

		<i>Samsung</i>	
		<i>IOS</i>	<i>Android</i>
<i>Apple</i>	<i>IOS</i>	8, 4, 4	7, 7, 3
	<i>Android</i>	5, 5, 4	(3, 6, 4), (4, 6, 3)

IOS(Nokia)

		<i>Samsung</i>	
		<i>IOS</i>	<i>Android</i>
<i>Apple</i>	<i>IOS</i>	7, 5, 5	{(7, 6, 5), (5, 6, 5)}
	<i>Android</i>	4, 4, 6	4, 6, 5

Android(Nokia)

Láthatjuk, hogy vannak olyan esetek, amikor a rekurzív mag többelemű, tehát nem tudjuk pontosan megállapítani, hogy melyik döntés lesz Nash-egyensúlybeli kifizetés.

5. fejezet

Shapley-érték

Mivel az előző példánál (4.1) nem jöttek ki egyértelmű eredmények, csak néhány helyzetben lett egyelemű a rekurzív mag, ezért nem tudunk konkrét megoldást mondani.

Ezért vizsgáljuk meg az előző példát Shapley-értékkel is, és nézzük meg, hogy milyen kifizetéseket realizálnak az egyes játékosok a különböző helyzetekben, és végül mely érték(ek) lesznek Nash-egyensúlyok, és több Nash-egyensúly esetén Pareto-hatékony kifizetéseket kapunk-e. Ebben az esetben viszont nem adjuk meg, hogy a koalíciók belül az egyes játékosok mekkora kifizetéseket realizálnak, csak a koalíciók értékeit ismerjük.

A Shapley-érték használata a célszerű, mert a játékosokat a játékban betöltött szerepük szerint értékeli. Segítségével meg lehet adni a játékosok hasznosságát az egyes koalíciókban belül.

Ahhoz, hogy Shapley-értéket tudjunk számolni, bevezetjük Myerson (1977) cikke alapján definiáljuk a Shapley-értéket PFF-játékokra.

5.1. definíció.

$$\phi_N(w) = \sum_{(S, \Pi(N)) \in ECL} \left[(-1)^{|Q|-1} \cdot (|Q| - 1)! \cdot \left(\frac{1}{|N|} - \sum_{\substack{S \neq \tilde{S} \in \Pi(N) \\ n \notin \tilde{S}}} \frac{1}{(|Q| - 1)(|N| - |\tilde{S}|)} \right) w_{S, \Pi(N)} \right]$$

Ez alapján a háromszereplős példánkban az egyes játékosok Shapley-értékét a következőképpen számoljuk:

$$\begin{aligned}
\phi_1(w) = & (1/3) \cdot w_{\{1,2,3\},\{\{1,2,3\}\}} \\
& + (1/6) \cdot w_{\{1,2\},\{\{1,2\},\{3\}\}} - (1/3) \cdot w_{\{3\},\{\{1,2\},\{3\}\}} \\
& + (1/6) \cdot w_{\{1,3\},\{\{1,3\},\{2\}\}} - (1/3) \cdot w_{\{2\},\{\{1,3\},\{2\}\}} \\
& + (2/3) \cdot w_{\{1\},\{\{1\},\{2,3\}\}} - (1/3) \cdot w_{\{2,3\},\{\{1\},\{2,3\}\}} \\
& + (1/6) \cdot w_{\{2\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\}} + (1/6) \cdot w_{\{3\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\}} \\
& - (1/3) \cdot w_{\{1\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(w) = & (1/3) \cdot w_{\{1,2,3\},\{\{1,2,3\}\}} \\
& + (1/6) \cdot w_{\{1,2\},\{\{1,2\},\{3\}\}} - (1/3) \cdot w_{\{3\},\{\{1,2\},\{3\}\}} \\
& + (1/6) \cdot w_{\{2,3\},\{\{1\},\{2,3\}\}} - (1/3) \cdot w_{\{1\},\{\{1\},\{2,3\}\}} \\
& + (2/3) \cdot w_{\{2\},\{\{2\},\{1,3\}\}} - (1/3) \cdot w_{\{1,3\},\{\{2\},\{1,3\}\}} \\
& + (1/6) \cdot w_{\{1\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\}} + (1/6) \cdot w_{\{3\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\}} \\
& - (1/3) \cdot w_{\{2\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(w) = & (1/3) \cdot w_{\{1,2,3\},\{\{1,2,3\}\}} \\
& + (1/6) \cdot w_{\{1,3\},\{\{1,3\},\{2\}\}} - (1/3) \cdot w_{\{2\},\{\{1,3\},\{2\}\}} \\
& + (1/6) \cdot w_{\{2,3\},\{\{2,3\},\{1\}\}} - (1/3) \cdot w_{\{1\},\{\{2,3\},\{1\}\}} \\
& + (2/3) \cdot w_{\{3\},\{1,2\},\{\{3\}\}} - (1/3) \cdot w_{\{1,2\},\{1,2\},\{\{3\}\}} \\
& + (1/6) \cdot w_{\{1\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\}} + (1/6) \cdot w_{\{2\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\}} \\
& - (1/3) \cdot w_{\{3\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\}}
\end{aligned}$$

A fenti képletek segítségével már meg tudjuk határozni a játék szereplőinek kifizetéseit.

Például az egyes játékosok Shapley-értékei, ha mindenki IOS-t választ:

$$\begin{aligned}
\phi_1(w) = & (1/3) \cdot 10 + (1/6) \cdot 8 - (1/3) \cdot 2 + (1/6) \cdot 7 \\
& - (1/3) \cdot 2 + (2/3) \cdot 8 - (1/3) \cdot 8 + (1/6) \cdot 2 \\
& + (1/6) \cdot 2 - (1/3) \cdot 7 = 11/2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(w) &= (1/3) \cdot 10 + (1/6) \cdot 9 - (1/3) \cdot 2 + (1/6) \cdot 8 \\
&\quad - (1/3) \cdot 8 + (2/3) \cdot 2 - (1/3) \cdot 7 + (1/6) \cdot 7 \\
&\quad + (1/6) \cdot 2 - (1/3) \cdot 2 = 8/3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(w) &= (1/3) \cdot 10 + (1/6) \cdot 7 - (1/3) \cdot 2 + (1/6) \cdot 8 \\
&\quad - (1/3) \cdot 8 + (2/3) \cdot 2 - (1/3) \cdot 9 + (1/6) \cdot 7 \\
&\quad + (1/6) \cdot 2 - (1/3) \cdot 2 = 5/3
\end{aligned}$$

A 4.1 példában szereplő kifizetéseket felhasználva a többi esetben is meg tudjuk adni a Shapley-értéket, így a következő kifizetéseket kapjuk:

		<i>Samsung</i>	
		<i>IOS</i>	<i>Android</i>
<i>Apple</i>	<i>IOS</i>	$(\frac{11}{2}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3})$	$(\frac{31}{6}, \frac{14}{3}, \frac{25}{6})$
	<i>Android</i>	$(\frac{14}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3})$	$(\frac{9}{2}, \frac{13}{2}, 2)$

IOS(Nokia)

		<i>Samsung</i>	
		<i>IOS</i>	<i>Android</i>
<i>Apple</i>	<i>IOS</i>	$(\frac{9}{2}, 4, \frac{7}{2})$	$(\frac{14}{3}, \frac{19}{3}, 5)$
	<i>Android</i>	$(\frac{25}{6}, \frac{19}{6}, \frac{8}{3})$	$(\frac{10}{3}, \frac{41}{6}, \frac{35}{6})$

IOS(Nokia)

Megállapíthatjuk, hogy a Shapley-értékek kiszámításai után sincs rekurzív magbeli kifizetés, sem pedig Nash-egyensúly. TU-játékok esetében sem mindig kapunk magbeli eredményt, PFF-játékoknál viszont nem tudjuk, hogy milyen esetekben kapnánk biztosan rekurzív magbeli kifizetéseket. A 3 szereplős példánk esetében (4.1) viszont láthatjuk, hogy egy egyszerű esetben sem triviális, hogy rekurzív magbeli megoldást kapunk.

6. fejezet

Összegzés

A dolgozatban a játékelmélet rövid bemutatása után megvizsgáltuk a kétformájú játékokat. Arra kerestük a megoldást, hogy hogyan lehet megadni az egyes játékosok kifizetéseit egy adott kooperáción belül, hogy az összhasznot úgy osszák el egymás között, hogy az minden játékos számára elfogadható és igazságos legyen.

Ahhoz, hogy jobban le tudjuk írni a valós élet szituációit a modell segítségével, bevezettük a PFF-játékokat. Erre azért volt szükség, hogy meg tudjuk vizsgálni az externális hatásokat, amik értékeit a különböző partíciók mutatták meg a koalíciókon belül.

A PFF-játékok bemutatása után bevezettük a kétformájú játékokat. A kétformájú játékok egy nemkooperatív és egy kooperatív részből áll. Az ilyen típusú játékokat főleg az üzleti szférában lehet használni. Például a nemkooperatív szakaszban a játékosok dönthetnek arról, hogy megéri-e belépni egy piacra, és ha igen, akkor egy kooperatív játékban adhatjuk meg, hogy mekkora hasznot tudnak realizálni a piacra való belépéssel.

Ahhoz, hogy meg tudjuk adni a játékosok kifizetéseit két módszert alkalmaztunk: a rekurzív mag és a Shapley-érték számítását.

A játékosok kifizetését először a rekurzív mag segítségével adtuk meg. Erre azért volt szükség, mert a rekurzív mag vette figyelembe, hogy a különböző helyzetekben a játékosok milyen hozzáadott értékkel rendelkeztek, így egy igazságos kifizetést lehetett meghatározni vele.

Ez a módszer viszont azért nem működött, mert az egyszerű 3 szereplős példánknál sem kaptunk minden esetben egyértelmű eredményeket. Ezért kiszámoltuk az egyes koalíciókban a játékosok Shapley-értékét.

Habár itt minden koalícióban egyértelműen megkaptuk az egyes játékosok kifizetéseit, mégsem kaptunk rekurzív magbeli megoldást, se Nash-egyensúlyt.

Ebből megállapíthattuk, hogy habár TU-játékok esetében sem mindig kapunk

magbéli eredményt, egy egyszerű 3 szereplős példánál sem triviális, hogy rekurzív magbéli kifizetéseket kapjunk.

Irodalomjegyzék

- Brandenburger Adam M., Stuart H.W. (2006) Biform games: Additional online material. URL <http://pages.stern.nyu.edu/~abranden/online-bg-07-02-06.pdf>
- Brandenburger Adam M., Stuart H.W. (1996) Value-based Business Strategy. Journal of Economics and Management Strategy, 5, 1996, 5-24.
- Brandenburger Adam M., Nalebuff Barry J. (1997) Co-opetition. Currency Doubleday
- Brandenburger Adam M. és Stuart H.W. (2007) Biform games. Management Science 53(4):pp. 537–549, URL <http://EconPapers.repec.org/RePEc:inm:ormnsc:v:53:y:2007:i:4:p:537-549>
- Gyevai Attila és Török Tamás (2012) Biform játékok. Tudományos Diákköri Dolgozat
- Eyckmans J., Tulkens H. (2003) Simulating coalitionally stable burden sharing agreements for the climate change problem. Resource and Energy Economics 25(4):299–324
- Funaki Y., Yamato T. (1999) The core of an economy with a common pool resource: a partition function form approach. International Journal of Game Theory 28(2):157–171
- Kóczy László (2007) A recursive core for partition function form games. Springer 63:41–51
- Lippman S., Rumelt R. (2003a) The payments perspective: Micro-foundations of resource analysis. Strategic Management Journal 24:903–927
- MacDonald G., Ryall M. (2002) The structure of individual payoffs in superadditive coalitional games. URL <http://apps.olin.wustl.edu/faculty/macdonald/>

- MacDonald G., Ryall M. (2004) How do value creation and competition determine whether a firm appropriates value? *Management Science* 50:1319–1333
- Myerson R.B. (1977) Values of games in partition function form. *International Journal of Game Theory* 6:23–31
- Oster S. M. (1999) *Modern Competitive Analysis*. No. 9780195119411 in OUP Catalogue, *Modern Competitive Analysis*, URL <http://ideas.repec.org/b/oxp/obooks/9780195119411.html>
- Solymosi Tamás (2007) *Kooperatív játékok, elektronikus jegyzet. Transl.: Cooperative games. Electronic notes.* URL: http://portal.uni-corvinus.hu/fileadmin/user_upload/hu/tanszekek/kozgazdasagtudomanyi/tsz-opkut/files/opkut/solymosi_tamas/Solymosi-KooperativJatekok-2007maj31.pdf
- Spulber D. (ed) (2004) *Management Strategy*. McGraw-Hill
- Stuart Jr. H.W. (2002) *Cooperative Games and Business Strategy*. Springer US
- Thrall R.M., Lucas WF (1963) n -person games in partition function form. *Naval Research Logistics Quarterly* 10(4):281–298
- Yi S.-S. (1996) Endogenous formation of customs unions under imperfect competition: open regionalism is good. *Journal of International Economics* 41(1-2):153–177