

OTDK-DOLGOZAT

2014

**KÖLTSÉGALLOKÁCIÓS MÓDSZEREK ÉS AZ EQUAL PROFIT
METHOD**

**COST ALLOCATION METHODS AND THE EQUAL PROFIT
METHOD**

Kézirat lezárva: 2013. március 24.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Költségallokációs módszerek	2
2.1 Elméleti bevezető	2
2.2 A Shapley-érték.....	4
2.3 A nukleolusz	5
2.4 Alternative Cost Avoided Method	6
2.5 Az Equal Profit Method	6
2.6 Egy gyakorlati példa.....	7
3. Az EPM vizsgálata	13
3.1 Tulajdonságok	13
3.2 Megoldhatóság	15
4. EPM alternatívák	19
4.1 Az EPM egyértelműsítése.....	19
4.2 Magbeli ACAM.....	23
5. Összegzés	26
Irodalomjegyzék	27

Ábrák jegyzéke

- 1. A mag síkbeli ábrázolása három játékos esetén.....11
- 2. Egyenlő relatív megtakarításokat garantáló feltétel ábrázolása három játékos esetén .18

Táblázatok jegyzéke

- 1. A nukleolusz kiszámításának lépései.....9
- 2. Költségallokációs módszerek összehasonlítása relatív megtakarítások alapján10
- 3. Költségallokációs módszerek összehasonlítása többletek alapján.....10

1. Bevezetés

A vállalatok közti együttműködés releváns a mai gazdasági világban, hiszen az egyes vállalatok jelentős költségeket spórolhatnak meg erőforrásaik megosztásával, összehangolásával. Fontos felmerülő probléma azonban a közös költségek igazságos allokációja. A dolgozatban az együttműködés során megtakarított költségek lehető legjobb szétosztását vizsgáljuk.

A kérdés elsőre egyszerűnek tűnhet, de mint később látni fogjuk, a probléma összetettebb módszerek segítségével oldható meg, melyek a kooperatív játékelméleten alapulnak. Több ilyen módszer létezik, amelyek a Shapley értéken, a nukleoluszon, illetve a szeparálható és nem szeparálható költségeken alapulnak. A dolgozatban ezek mellett kiemelt szerepet kap a Frisk et al. (2010) által felvetett Equal Profit Method, mely egy érdekes, új megközelítése a költségallokációs problémának.

Az ismert módszerekről számos elemzés készült, azonban az Equal Profit Methodnál nem ez a helyzet. A dolgozat célja az Equal Profit Method részletes vizsgálata, megoldhatóságának, tulajdonságainak bemutatása.

A dolgozat felépítése a következő. A második fejezet egy rövid játékelméleti bevezetővel kezdődik, majd az egyes módszerek bemutatása következik. A fejezet végén egy gyakorlati példa segítségével szemléltetjük a módszerek közti különbségeket. A harmadik fejezetben az Equal Profit Method megoldhatóságával és tulajdonságaival foglalkozunk, mely során egy olyan feltételt is adunk mely nagyban megkönnyítheti a kiszámítását. A negyedik fejezetben az Equal Profit Method egyéb alternatíváit vizsgáljuk, javasoljuk az Equal Profit Method egy alternatív felírását, továbbá megnézzük, hogy miként lehetne átültetni az Equal Profit Methodnál látott elvet egyéb költségallokációs módszerekbe.

2. Költségallokációs módszerek

Ebben a részben alapvető játékelméleti fogalmak, tulajdonságok bemutatása, majd a költségallokációs módszerek ismertetése következik. A fejezet megírásában segítségemre voltak Frisk et al. (2010), Solymosi (2006), Tijs és Driessen (1986) munkái.

2.1 Elméleti bevezető

A probléma vizsgálatához játékelméleti fogalmakra van szükségünk. Jelölje N a résztvevő játékosok véges halmazát, elemei $N := \{1, 2, \dots, n\}$. A játékosok egy $S \subseteq N$ halmazát *koalíciónak*, magát az N -t pedig *nagykoalíciónak* nevezzük. Általában feltesszük, hogy minden társulás lehetséges, így 2^N számú koalíció jöhet létre. Az S koalíció együttműködése során $c(S)$ költség keletkezik, melyet a $c : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ karakterisztikus költségfüggvény segítségével kapunk. Az üres koalíció költsége 0. Az (N, c) párt *költségjátéknak* hívjuk.

A költségfüggvény *monoton*, ha teljesül, hogy $c(S) \leq c(T)$, $S \subset T \subset N$. Ez azt jelenti, hogy ha új játékos csatlakozik a koalícióhoz, az összköltség nem csökkenhet. Ha teljesül, hogy $c(S) + c(T) \geq c(S \cup T)$, $S \cap T = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy a költségfüggvény *szubadditív*. Ilyen esetben profitábilis minél nagyobb koalíciót alkotni.

Egy φ költségallokációs módszer, mely szétosztja a $c(N)$ költséget a $j \in N$ játékosok közt:

- *hatékony (Pareto optimális)*, ha $\sum_{j \in N} y_j = c(N)$, ahol y_j a j játékosnak allokált költség, azaz a j játékos befizetése.

- *egyéniileg elfogadható*, ha $y_j \leq c(\{j\})$, $\forall j \in N$ -re, azaz senki sem fizet többet, mint ha egyedül működne.
- *párszimmetrikus*, ha tetszőleges $i, j \in N$ -re teljesül, hogy amennyiben $c(S \cup \{i\}) = c(S \cup \{j\})$ minden $S \subset N$ -re ($i, j \notin S$), akkor $y_i = y_j$. Azaz, ha két játékos minden tekintetben felcserélhető, akkor az allokált költségük is legyen ugyanannyi.
- *sallangmentes*, ha $c(S \cup i) - c(S) = c(\{i\})$ minden $S \subset N - i$ koalícióra, akkor $y_i = c(\{i\})$, azaz ha az i játékos semleges a koalíciókra nézve, akkor az allokált költsége legyen az egyéni költsége.
- *additív*, ha $\varphi(c_1 + c_2) = \varphi(c_1) + \varphi(c_2)$ teljesül tetszőleges c_1, c_2 költségfüggvényre, ahol $c_1 + c_2$ értelmezése: $(c_1 + c_2)(S) = c_1(S) + c_2(S)$ minden $S \subseteq N$ koalícióra. Azaz legyen mindegy, hogy a c_1, c_2 költségfüggvényekre külön-külön alkalmazzuk az allokációs módszert és ezután összegezzük a befizetéseket, vagy pedig előbb aggregáljuk a két költségfüggvényt és a befizetéseket a $c_1 + c_2$ alapján számítjuk.

A költségjáték *magja* azon költség allokációk halmaza, melyekre teljesül, hogy

$$\sum_{j \in N} y_j = c(N)$$

$$\sum_{j \in S} y_j \leq c(S), \quad \forall S \subset N$$

Az első feltétel a hatékonyságot, a második pedig a stabilitást biztosítja, azaz ne érje meg kisebb koalíciókat létrehozni, így semelyik egyénnek vagy koalíciónak sem allokalunk nagyobb költséget, mintha egyedül dolgozna. A mag lehet üres is, de ha nem az, akkor tipikusan sok elosztást tartalmaz, ritkán ad egyértelmű megoldást. Shapley (1971) belátta, hogy ha a c költségfüggvény konkáv, azaz $c(S \cup T) + c(S \cap T) \leq c(S) + c(T)$, $\forall S, T \subseteq N$, akkor a mag nem üres.

2.2 A Shapley-érték

A Lloyd Shapley (1953) által bevezetett és róla elnevezett Shapley-érték egy olyan megoldás koncepció, mely egyértelmű megoldást eredményez. A Shapley-értéknél azt feltételezzük, hogy a nagykoalíció tagjai véletlenszerű sorrendben lépnek be. Amikor egy játékos belép, hozzárendeljük a határköltségét, azt az összeget, amellyel belépése miatt növeli a koalíció összköltségét. A határköltség nagysága függ a belépési sorrendtől. A j játékoshoz rendelt Shapley érték a határköltségeinek átlaga, és az alábbi képlettel számolható ki:

$$y_j = \sum_{S \subset N: j \in S} \frac{(|S| - 1)! (|N| - |S|)!}{|N|!} [c(S) - c(S - \{j\})]$$

A $| \cdot |$ jelölés a koalíció számosságát jelöli. A formulában azon koalíciókra történik az összegzés, melyeknek a j játékos tagja. A $c(S) - c(S - \{j\})$ különbség a j játékos határköltségét jelöli a $c(S - \{j\})$ koalícióra nézve.

Shapley (1953) megmutatta, hogy ha egy költségallokációs szabálytól megköveteljük a hatékonyságot, a párszimmetriát, a szállingmentességet, és az additivitást, akkor (a költségjátékok kellően tág osztályán) egyedül a Shapley értéket alkalmazhatjuk. Általában azonban azt semmi sem garantálja, hogy a megoldás egyénileg vagy csoportosan elfogadható lesz, így a Shapley-érték nincs mindig a magban.

2.3 A nukleolusz

A nukleolusz kiszámításakor olyan költségallokációt keresünk, mely minimalizálja a legrosszabb egyenlőtlenséget (igazságtalanságot), úgy, hogy az egyénileg elfogadhatóság teljesüljön. Költségjátékok esetén ezt úgy tehetjük meg, hogy maximalizáljuk a koalíciók elégedettségének minimumát. Az elégedettséget a *többség* segítségével mérjük, ami alatt a

$$e(S, y) = c(S) - \sum_{j \in S} y_j$$

különbséget, vagyis a koalíció költségmegtakarítását értjük.

Solymosi (2006) jegyzete alapján: először keressük tehát az olyan elosztásokat, ahol a legkisebb többség a lehető legmagasabb. Amennyiben több ilyen elosztás is van, akkor közülük stabilabbnak tartjuk azokat, amelyeknél a második legkisebb többség is a lehető legmagasabb. Ilyenkor keressük tehát azokat az elosztásokat, amelyek a legkisebb többség maximalizálása mellett a második legkisebb többséget is a lehető legmagasabb szintre hozzák fel. Ha még több ilyen elosztás is van, akkor keressük közöttük azokat, amelyeknél a harmadik legkisebb többség is a lehető legmagasabb, és így tovább egészen addig, amíg ezen újabb és újabb kívánalmak alapján még különbséget tudunk tenni az elosztások között. Ennek az optimalizálás-sorozatnak a kimenete a nukleolusz.

A nukleolusz egyértelmű megoldást ad, és teljesíti a párszimmetria és a szállingmentesség követelményét. Ha a mag nem üres, akkor a nukleolusz a magban van.

2.4 Alternative Cost Avoided Method

Ez a módszer azon a tényen alapul, hogy a nagykoalíció költségét két részre lehet osztani: a szeparálható, és nem szeparálható költségekre. Az ilyen módszerek először mindenkinek hozzárendelik a szeparálható költségüket, majd valamilyen súlyozás alapján szétosztják a nem szeparálható költséget. Egy adott játékos szeparálható költsége egyenlő a nagykoalícióra vett határköltségével, vagyis $m_j = c(N) - c(N - \{j\})$. A maradék szétosztandó összeg a nem szeparálható költség, amit a $g(N) = c(N) - \sum_{j \in N} m_j$ alapján kapunk. Ennek szétosztására több módszer van, az Alternative Cost Avoided Method (ACAM) a $w_j = c(\{j\}) - m_j$ súlyokat használja, ami azt fejezi ki, hogy a játékos mennyit takarít meg a saját (alternatív) költségéből akkor, ha belép a nagykoalícióba és csak a határköltségét fizeti. A szeparálható és nem szeparálható költségen alapuló módszerek az alábbi képlet szerint osztják szét a költségeket:

$$y_j = m_j + \frac{w_j}{\sum_{i \in N} w_i} g(N) .$$

Az ACAM segítségével kiszámolt megoldások teljesítik a hatékonyságot és a párszimmetriát, továbbá $n \leq 3$ -ra a magban vannak. Tijs és Driessen (1986) cikkében részletesen olvashatunk a módszerről.

2.5 Az Equal Profit Method

A Frisk et al. (2010) által felvetett módszert a különböző gazdasági szereplők közötti költségelosztási tárgyalási szituációk megkönnyítése inspirálta, célja a résztvevők relatív megtakarításának kiegyenlítése.

Az i játékos relatív megtakarítását a $\frac{c(\{i\})-y_i}{c(\{i\})} = 1 - \frac{y_i}{c(\{i\})}$ kifejezéssel adhatjuk meg. Egyénileg elfogadhatóság esetén $c(\{i\}) \geq y_i$. Ez azt jelenti, hogy az i és j játékos relatív megtakarítása közti különbség $\frac{y_i}{c(\{i\})} - \frac{y_j}{c(\{j\})}$ -vel egyenlő. Ezek alapján a kívánatos költségelosztást az alábbi LP segítségével kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} \min f \\ \text{s.t.} \quad f &\geq \frac{y_i}{c(\{i\})} - \frac{y_j}{c(\{j\})}, \quad \forall (i, j) \\ \sum_{j \in N} y_j &= c(N) \\ \sum_{j \in S} y_j &\leq c(S), \quad S \subset N \end{aligned}$$

A feladatban f és az összes y változó előjelkötetlen. Az első feltétel az f változó segítségével minimalizálja a relatív megtakarítások közti legnagyobb különbséget. A második és harmadik feltétel azt biztosítja, hogy magbeli megoldást kapjunk. Üres mag esetén Frisk et al. (2010) az epsilon mag alkalmazását javasolja, mely során büntetés fejében lazítjuk a feltételeket. Előfordulhat olyan eset, hogy $f > 0$, ami azért van, mert van olyan játékos aki egyenlő relatív megtakarítások esetén kilépne a nagykoalícióból, azonban a megoldásnak a magban kell lennie, így az f korlát növekedni kezd.

2.6 Egy gyakorlati példa

Az alábbi részben egy gyakorlati példán keresztül mutatunk rá a módszerek közti különbségekre. A példa vizsgálatának módszertana Frisk et al. (2010) cikke alapján készült, saját számok és számítások felhasználásával.

2.1.Példa. Nézzünk meg egy 3 szereplős számpéldát az említett módszerek bemutatására. A koalíciók költségei legyenek $c(\{1\}) = 4$, $c(\{2\}) = 5$, $c(\{3\}) = 6$, $c(\{1, 2\}) = 8$, $c(\{1, 3\}) = 8$, $c(\{2, 3\}) = 9$, $c(\{1, 2, 3\}) = 12$.

Először vizsgáljuk meg, hogy milyen megoldást ad a Shapley-érték. A megoldóképletébe való behelyettesítés után kapjuk, hogy

$$y_1 = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!} (4-0) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} (8-5) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} (8-6) + \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!} (12-9) = 3\frac{1}{6}$$

Hasonlóan kiszámítható, hogy $y_2 = 4\frac{1}{6}$, $y_3 = 4\frac{2}{3}$.

Nézzük mit kapunk az ACAM-mel. Először meg kell határozni a határkölségeket, ahol $m_1 = 12 - 9 = 3$, hasonlóan $m_2 = 12 - 8 = 4$, illetve $m_3 = 12 - 8 = 4$. Ezek alapján a nem szeparálható költség $g(N) = 12 - (3 + 4 + 4) = 1$. A következő lépés a súlyok meghatározása, amik most a következők: $w_1 = 4 - 3 = 1$, $w_2 = 5 - 4 = 1$, és $w_3 = 6 - 4 = 2$. Ezután meg tudjuk határozni a játékosoknak allokált költséget az ACAM-nél említett képlet segítségével:

$$y_1 = 3 + \frac{1}{1+1+2} = 3,25$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $y_2 = 4,25$, $y_3 = 4,5$.

A harmadik módszer a nukleolusz, kiszámításának lépéseit az alábbi tábla mutatja:

<i>koalíciók</i>	1	2	3	12	13	23	123
<i>c(S)</i>	4	5	6	8	8	9	12
<i>y(S)</i>	4	4	4	8	8	8	12
<i>e(S)</i>	0	1	2	0	0	1	0
<i>y(S)</i>	3,33	4,33	4,33	7,66	7,66	8,66	12
<i>e(S)</i>	0,66	0,66	1,66	0,33	0,33	0,33	0

1. Táblázat: A nukleolusz kiszámításának lépései

A nukleolusz szerint $y_1 = 3,33$, $y_2 = 4,33$, $y_3 = 4,33$.

Végül nézzük az EPM-et, amit az alábbi LP segítségével oldhatunk meg:

$$\begin{aligned}
 &\min f \\
 \text{s.t.} \quad &f \geq \frac{y_1}{4} - \frac{y_2}{5} \\
 &f \geq \frac{y_1}{4} - \frac{y_3}{6} \\
 &f \geq \frac{y_2}{5} - \frac{y_1}{4} \\
 &f \geq \frac{y_2}{5} - \frac{y_3}{6} \\
 &f \geq \frac{y_3}{6} - \frac{y_1}{4} \\
 &f \geq \frac{y_3}{6} - \frac{y_2}{5} \\
 &y_1 \leq 4 \\
 &y_2 \leq 5 \\
 &y_3 \leq 6 \\
 &y_1 + y_2 \leq 8 \\
 &y_1 + y_3 \leq 8 \\
 &y_2 + y_3 \leq 9 \\
 &y_1 + y_2 + y_3 = 12 \\
 &\text{ahol az összes változó előjelkötetlen}
 \end{aligned}$$

A megoldás: $y_1 = 3,2$, $y_2 = 4$, $y_3 = 4,8$, továbbá $f = 0$, így minden játékos relatív megtakarítása megegyezik.

Hasonlítsuk össze a kapott eredményeket, először a relatív megtakarítások alapján:

játékos	egyéni költség	Shapley	%	nukleolusz	%	ACA M	%	EPM	%
1	4	3,166	20,833	3,333	16,666	3,25	18,75	3,2	20
2	5	4,166	16,666	4,333	13,333	4,25	15	4	20
3	6	4,666	22,222	4,333	27,777	4,5	25	4,8	20

2. Táblázat: Költségallokációs módszerek összehasonlítása relatív megtakarítások alapján

A példánkban a relatív megtakarítások szemszögéből a nukleolusz adja a legrosszabb megoldást, itt a 2-es és 3-as játékos relatív megtakarításai között 14,444 százalékpontos különbség van. Ennél kicsit jobb eredményt ad az ACAM (10 százalékpontos különbség), majd pedig a Shapley-érték (5,555 százalékpontos különbség). A legegyszerűsebb relatív megtakarításokat az EPM-el kapjuk, ez minden játékos esetén 20%-ot jelentett.

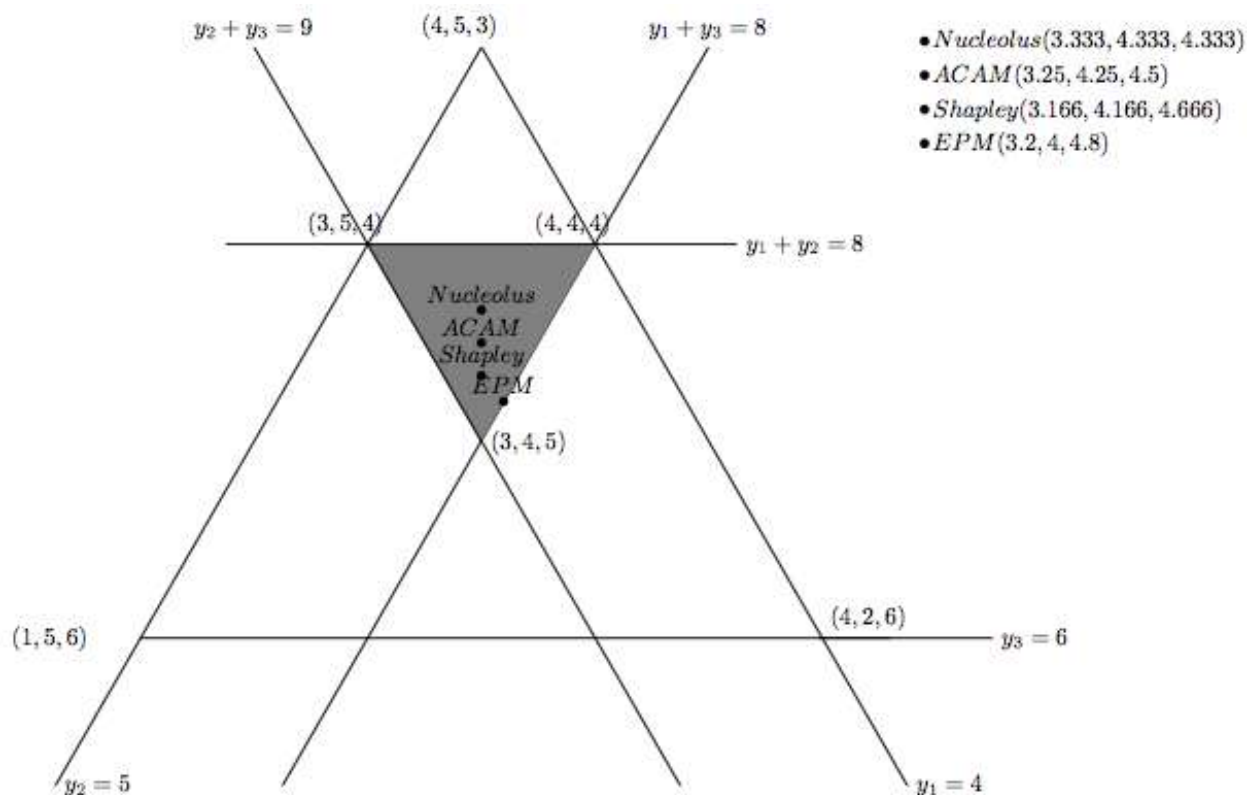
Most nézzük a többletek alapján:

koalíció	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}
Shapley	0,833	0,833	1,333	0,666	0,166	0,166
nukleolusz	0,666	0,666	1,666	0,333	0,333	0,333
ACAM	0,75	0,75	1,5	0,5	0,25	0,25
EPM	0,8	1	1,2	0,8	0	0,2

3. Táblázat: Költségallokációs módszerek összehasonlítása többletek alapján

Egy költségallokációnál a többletek vektora megmutatja milyen messze van az eloszlás a magtól. Itt mindegyik allokáció a magban van, hiszen egyik többlet sem negatív. A többletek alapján a nukleolusz a legjobb, mivel a legkisebb többlet nála a legnagyobb. Az EPM esetén a legkisebb többlet 0, ami arra utal, hogy érinti a mag határát, valóban, az $\{1,3\}$ koalícióra vonatkozó feltétel egyenlőséggel teljesül.

Érdemes ábrázolni a megoldásokat. Három játékos esetén a lehetséges költségallokációkat egy háromszögben ábrázolhatjuk, melynek minden pontjára teljesül, hogy $y_1 + y_2 + y_3 = 12$. A háromszög éleit a játékosok egyéni költsége határozza meg, hiszen minden játékosnak van egy maximálisan allokalható költsége. A csúcsokat példánkban az $(1,5,6)$, $(4,2,6)$, $(4,5,3)$ pontok adják. Ha ábrázoljuk a kétszereplős koalíciók költségeit is, akkor a koalíció által elfogadható költségek félsíkjainak metszete meghatározza azon pontok halmazát, ahol a nagykoalíció stabil, vagyis a magot.



1. Ábra: A mag síkbeli ábrázolása három játékos esetén

Az egyes változók értékei az oldalak felől csökkennek a csúcsok felé, így például az $y_1 + y_3 = 7$ egyenes egyenlő az $y_2 = 5$ egyenessel. Az ábrán a szürke terület jelöli a magot.

3. Az EPM vizsgálata

Ebben a fejezetben az Equal Profit Method részletes vizsgálatával foglalkozunk. A módszer jellemzőiről elemzés még nem készült, így a fejezetben előbb az Equal Profit Method tulajdonságait, majd pedig a megoldhatóságát vizsgáljuk. A fejezetben található megállapítások és számítások új, saját eredmények.

3.1 Tulajdonságok

A definíciója miatt az Equal Profit Method mindig egy magbeli elosztás ad, így a *hatékonyság* és az *egyéni elfogadhatóság* feltételeit mindig kielégíti. A magbeliségből következik a *sallangmentesség* teljesülése is. Az i semleges játékos esetén $c(N) = c(N - \{i\}) + c(\{i\})$, és $y_i = c(\{i\})$, mivel $y_i < c(\{i\})$ csak akkor teljesülhetne, ha $\sum_{j \in N - \{i\}} y_j > c(N - \{i\})$ lenne, ekkor azonban az N -i koalíció kilépne a nagykoalícióból.

Az Equal Profit Method azonban *nem additív*. Tekintsük a következő saját szerkesztésű példát.

3.1. Példa. Legyenek a c_1 költségfüggvény szerinti költségek $c_1(\{1\}) = 9$, $c_1(\{2\}) = 6$, $c_1(\{3\}) = 5$, $c_1(\{1, 2\}) = 10$, $c_1(\{1, 3\}) = 14$, $c_1(\{2, 3\}) = 11$, $c_1(\{1, 2, 3\}) = 15$. A feladat megoldása $y_1 = 6$, $y_2 = 4$, $y_3 = 5$. A c_2 szerinti költségek legyenek $c_2(\{1\}) = 4$, $c_2(\{2\}) = 5$, $c_2(\{3\}) = 6$, $c_2(\{1, 2\}) = 8$, $c_2(\{1, 3\}) = 8$, $c_2(\{2, 3\}) = 9$, $c_2(\{1, 2, 3\}) = 12$. A feladat megoldása $y_1 = 3,2$, $y_2 = 4$, $y_3 = 4,8$. A $c_1 + c_2$ költségek ezek alapján $c_{1+2}(\{1\}) = 13$, $c_{1+2}(\{2\}) = 11$, $c_{1+2}(\{3\}) = 11$, $c_{1+2}(\{1, 2\}) = 18$, $c_{1+2}(\{1, 3\}) = 22$, $c_{1+2}(\{2, 3\}) = 20$, $c_{1+2}(\{1, 2, 3\}) = 27$. A feladat megoldása $y_1 = 9,75$, $y_2 = 8,25$,

$y_3 = 9$, ami alapján látható, hogy az elosztás *nem additív*, hiszen $\varphi(c_1 + c_2) \neq \varphi(c_1) + \varphi(c_2)$.

Az Equal Profit Method továbbá nem teljesíti a *párszimmetriát* sem, ráadásul a módszer nem is ad feltétlenül egy *egyértelmű* megoldást, ami a Frisk et al. (2010) által javasolt felírás egy jelentős hátránya. Nézzük a következő saját szerkesztésű példát.

3.2. Példa Legyen $c(\{1\}) = 4$, $c(\{2\}) = 4$, $c(\{3\}) = 5$, $c(\{4\}) = 6$, $c(\{5\}) = 8$, $c(\{1, 2\}) = 6$, $c(\{3, 4\}) = 7,7$, $c(\{1,2,3,4,5\}) = 21$ (a többi koalíció költségét pedig adjuk meg a tagok költségének az összegeként). A feladatra az Equal Profit Method nem ad egyértelmű megoldást. Vegyük észre, hogy az $y_1 + y_2 \leq 6$, és az $y_3 + y_4 \leq 7,7$ feltétel is egyenlőséggel teljesül, ugyanis az (1,2) és (3,4) koalíció is nagyobb profitot érne el külön, mint a nagykoalícióban egyenlő relatív megtakarítások mellett. A (3,4) koalíciónak az $1 - \frac{7,7}{11} = 30\%$ -os, az (1,2) koalíciónak az $1 - \frac{6}{8} = 25\%$ profitrátát kell garantálni, hogy a nagykoalíció megmaradjon. Az (5)-ös játékosnak a maradék profit, $1 - \frac{7,3}{8} = 8,75\%$ marad, így a relatív megtakarítások közti legnagyobb különbség $f = 30\% - 8,75\% = 21,25\%$ lesz. Az y_3, y_4, y_5 költségek egyértelműen meghatározottak, ugyanis ha nem a megfelelő profitráta szerint alakulnának, akkor f növekedne. A megoldásban tehát $y_3 = 3,5$, $y_4 = 4,2$, $y_5 = 7,3$. Az y_1, y_2 költségek azonban nem egyértelműek, egymás kárára változhatnak az optimális relatív megtakarítások alsó, és felső korlátja között. A megfelelő érzékenységvizsgálat elvégzése után láthatjuk, hogy $y_1 = [2,8, 3,2]$ és $y_2 = 6 - y_1$. Mivel az 1-es és 2-es játékos egymással minden tekintetben felcserélhető volt, de nem feltétlen egyezik meg az allokált költségük, ezért az Equal Profit Method $n \geq 5$ játékos esetén *nem párszimmetrikus* és *nem egyértelmű*.

Állítás: $n < 5$ játékos esetén az EPM egyértelmű allokációt ad, és teljesíti a párszimmetria követelményét.

Bizonyítás. Az olyan esetekben, ahol $f = 0$, a relatív megtakarítások megegyeznek, így mindenkinek az átlagos $R = \frac{c(N)}{\sum_{i \in N} c(\{i\})}$ megtakarítási ráta alapján allokáljuk költségét,

azaz $y_i = Rc(\{i\})$, így a megoldás *egyértelmű* lesz. A *párszimmetria* is teljesül, ugyanis ha $c(\{i\}) = c(\{j\})$ és $f = 0$, akkor $\frac{y_i}{c(\{i\})} = \frac{y_j}{c(\{j\})}$ is teljesülni fog. Ha $f > 0$ akkor valamely $K \subset N$ koalíció nagyobb profitot érhetne el ha kilép a nagykoalícióból, így a $\sum_{j \in K} y_j \leq c(K)$ feltétel egyenlőséggel teljesül. K legalább két elemű, mivel c költségfüggvény szubadditív. Mivel a legkisebb és legnagyobb megtakarítással rendelkező játékosok költségei egyértelműen meghatározottak, ezért a legfeljebb négy költségből legalább hármat ismerünk, és mivel a nagykoalíció költségét is tudjuk ezért $n < 5$ esetén a megoldás *egyértelmű*. Mivel felcserélhető játékosok esetén $c(S \cup \{i\}) = c(S \cup \{j\})$, ezért vagy egyszerre vannak K -ban vagy $N - K$ -ban, így $n < 5$ esetén a *párszimmetria* is teljesül. ■

Megjegyzés: Az előbbi gondolatmenet szerint $f = 0$ esetben általánosan is igaz a *párszimmetria* és az *egyértelműség* teljesülése, továbbá az *additivitás* is teljesül, így érdemes megvizsgálni, hogy milyen esetekben tudunk egyenlő relatív megtakarításokat allokálni az Equal Profit Method segítségével. A következő részben erre a problémára adunk megoldást egy új feltétel segítségével.

3.2 Megoldhatóság

Az EPM feltételeiből látható, hogy a módszernek pontosan akkor van megoldása, ha a mag nem üres. Az ilyen esetekben azonban semmi sem garantálja, hogy olyan allokációt kapunk, amelynél megegyeznek a relatív megtakarítások.

A 2.1.-es példában láttuk, hogy az EPM által javasolt allokáció éppen a mag határán van, így az $\{1, 3\}$ koalíció költségére vonatkozó feltétel egyenlőséggel teljesül. Nézzük meg mi történik, ha ennek a koalíciónak a költsége lecsökken 7,5-re, oldjuk meg a következő feladatot:

3.3. Példa. $c(\{1\}) = 4$, $c(\{2\}) = 5$, $c(\{3\}) = 6$, $c(\{1, 2\}) = 8$, $c(\{1, 3\}) = 7,5$, $c(\{2, 3\}) = 9$, $c(\{1, 2, 3\}) = 12$. A megoldás: $y_1 = 3$, $y_2 = 4,5$, $y_3 = 4,5$. Az elosztás ismét a maghatárán van, a relatív megtakarítások azonban nem egyenlőek, $f = 0,15$. A kérdés tehát, hogy milyen esetekben lesz $f = 0$, azaz mikor tudunk olyan költségallokációt mondani, ahol mindenkinek egyenlő a relatív megtakarítása, illetve hogyan kellene változtatni a korlátokat ahhoz, hogy ezt elérjük.

A megoldás a következő. Olyan költségallokációk esetén lesz $f = 0$, ahol mindenkinek az átlagos $R = \frac{c(N)}{\sum_{i \in N} c(\{i\})}$ megtakarítási ráta szerint szabjuk meg a költségét. Az R megmutatja, hogy az eredeti egyéni költségek összegének hányszorosára változik a nagykoalíció költsége, így minél kisebb az R , annál nagyobb megtakarítást érünk el. Ahhoz, hogy mindenkinek R szerint tudjuk megszabni a költségét, a következő feltételnek kell teljesülnie:

Állítás: Az EPM azon esetekben ad olyan megoldást, ahol mindenkinek megegyezik a relatív megtakarítása, azaz $f = 0$, ha minden $S \subset N$ koalícióra teljesül, hogy

$$c(S) \geq R \left[\sum_{i \in S} c(\{i\}) \right]$$

, ahol $R = \frac{c(N)}{\sum_{i \in N} c(\{i\})}$. Ellenkező esetben $f > 0$.

Bizonyítás. Akkor lesz $f > 0$, ha valamelyik játékosnak egyenlő relatív megtakarítások mellett megérné kilépni a nagykoalícióból, ezért csak úgy maradhat magbeli a megoldás, ha a többiek kárára növeljük a relatív megtakarítását. A fent egyenlőtlenségbe R képletével való behelyettesítés, és $\sum_{i \in S} c(\{i\})$ - vel való osztás után kapjuk, hogy

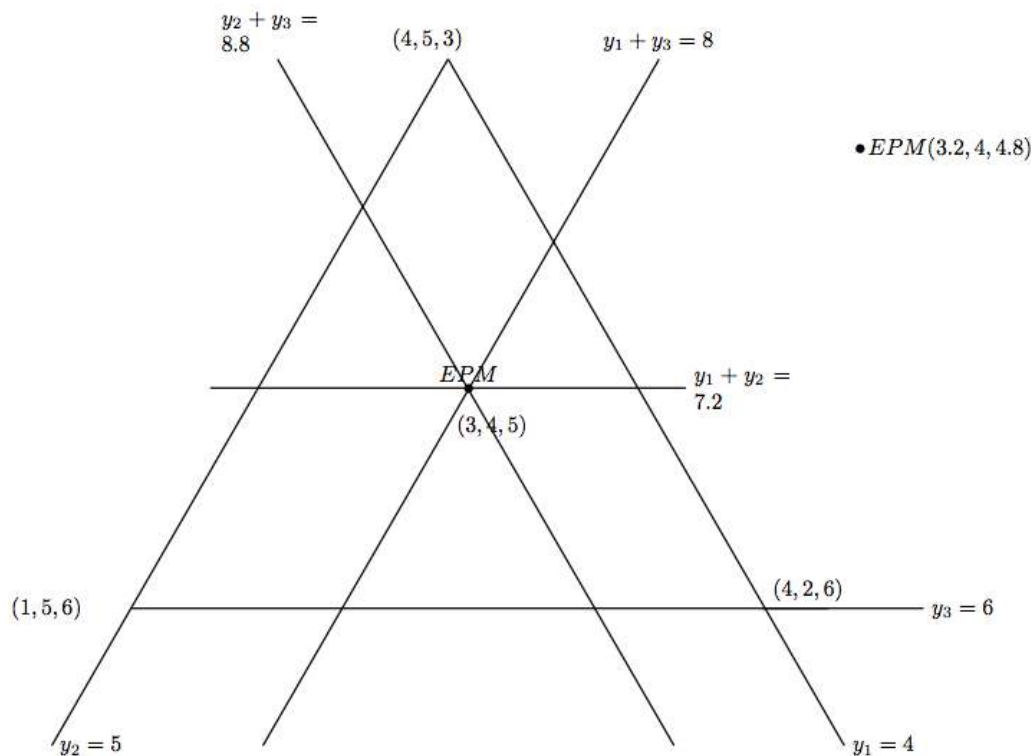
$$\frac{c(S)}{\sum_{i \in S} c(\{i\})} \geq \frac{c(N)}{\sum_{j \in N} c(\{j\})}$$

Azaz a feltétel teljesülése esetén olyan játékot kapunk, ahol egyik játékosnak sem éri meg kilépni a nagykoalícióból, itt érheti el a legnagyobb relatív megtakarítást, így $f=0$ lesz. ■

A fent tárgyaltaknak igen hasznos gyakorlati következménye van. Az EPM egyik hátránya, hogy egy sok feltétellel rendelkező LP segítségével tudjuk meghatározni. Azonban azokban az esetekben, ahol az imént bemutatott feltétel teljesül, pillanatok alatt, az LP megoldása nélkül ki tudjuk számolni az EPM-et, csupán meg kell szorozni az egyéni költségeket az R rátával. Az ilyen játékokban az EPM a mag tulajdonságain felül teljesíti még az *additivitást*, a *párszimmetriát* és az *egyértelműséget*. Ezen felül azt is tudjuk, hogy egy olyan feladatnál, ahol $f > 0$, meddig kell növelni a korlátokat, hogy egyenlő relatív megtakarításokat kapjunk. Ehhez a kimerülő korlátotokat addig kell növelnünk, amíg nem lesznek egyenlőek a korlátokban szereplő játékosok egyéni költségei összegének az R -szeresével.

Nézzük meg ezeket a megállapításokat példáink esetében. A 2.1-es példában teljesül a feltétel, hiszen $\frac{12}{15}(4 + 5) \leq 8$, $\frac{12}{15}(4 + 6) \leq 8$, és $\frac{12}{15}(5 + 6) \leq 10$, így az allokált költségek $\frac{12}{15}4 = 3,2$, $\frac{12}{15}5 = 4$, és $\frac{12}{15}6 = 4,8$, ugyanazok, mint amit az LP megoldásával kaptunk. A 3.3-as példában a feltétel nem teljesül, ugyanis $\frac{12}{15}(4 + 6) \geq 7,5$, így egyenlő relatív megtakarítások esetén az 1-es és 3-es játékos jobban járna, ha kilépne, és új koalíciót alkotna. Egyenlő relatív megtakarításokat akkor kapnánk, ha az $\{1, 3\}$ koalíció költsége megnőne legalább $\frac{12}{15}(4 + 6) = 8$ -ra, ekkor az eredeti példában látott megoldást kapnánk.

Vizsgáljuk meg, hogy pontosan mit is jelent a feltétel, nézzük azt az esetet, amikor az összes feltétel egyenlőséggel teljesül, azaz $y_1 + y_2 = \frac{12}{15}(4 + 5) = 7,2$, $y_1 + y_3 = \frac{12}{15}(4 + 6) = 8$, $y_2 + y_3 = \frac{12}{15}(5 + 6) = 8,8$. Mivel csak egyenlőségünk van, ezért a megoldás egyértelmű, és ez pont az $f=0$ melletti EPM megoldás. Ábrázolva ez a következőt jelenti:



2. Ábra: Egyenlő relatív megtakarításokat garantáló feltétel síkbeli ábrázolása három játékos esetén

A feltételt tehát úgy is értelmezhetjük, mint a legszűkebb mag, ahol $f=0$, így a feltétel olyan játékokat feltételez, amelyeknek a magjában van az egyenlő relatív megtakarításokat eredményező pont.

4. EPM alternatívák

Az előző fejezetben láttuk, hogy az Equal Profit Method nem mindig ad egyértelmű megoldást. Továbbá azt is láttuk, hogy ha az eredeti módszernél maradunk, akkor ezt a problémát úgy orvosolhatjuk, hogy megkeressük azokat a játékokat ahol $f=0$, így biztosan egyértelmű megoldást kapunk. Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy milyen alternatíváit lehetne adni az Equal Profit Methodnak, illetve hogyan lehetne felhasználni más költségallokációs módszerek módosítására. Az fejezet első részében megnézzük, hogy miként tehetnénk egyértelművé az Equal Profit Methodot, majd a második részben az Alternative Cost Avoided Methodnak adjuk meg egy alternatíváját, amely mindig egy magbéli allokációt ad.

4.1 Az EPM egyértelműsítése

A harmadik fejezetben láttuk, hogy az Equal Profit Method eredeti LP-jét megoldva nem feltétlen kapunk egyértelmű megoldást. Felírhatjuk azonban a problémát egy több lépcsős optimalizálásként, ahol véges sok lépés után biztosan egyértelmű megoldást kapunk. A megoldás módszere hasonlít a nukleolusz általános megoldására, amiről például Engevall et al. (1998) cikkében olvashatunk. A probléma megoldásához az első lépésben oldjuk meg az eredeti LP-t, vagyis:

$$\begin{aligned} \text{[P1]} \quad & \min f_I \\ \text{s.t.} \quad & f_1 \geq \frac{y_i}{c(\{i\})} - \frac{y_j}{c(\{j\})}, \quad \forall (i, j) \\ & y(N) = c(N) \\ & y(S) \leq c(S), \quad S \subset N \\ & \text{ahol az összes változó előjelkötetlen} \end{aligned}$$

Azok az elemek lesznek egyértelműen meghatározva, amelyeknél az első feltétel az LP optimális megoldásainak halmazán végig egyenlőséggel teljesül. Ha n változónk van és $n-1$ változó egyértelműen meghatározott, akkor a megoldásunk már egyértelmű, hiszen tudjuk $c(N)$ -t.

Ha egynél több nem egyértelmű változónk van, akkor egy újabb LP-t kell megoldani, ahol az első feladat egyértelmű megoldásai rögzítettek. Ez az eset akkor fordulhat elő, ha egynél több koalíció érhetne el nagyobb átlagos relatív megtakarítást a nagykoalíción kívül. Jelöljük ezeket a koalíciókat $(S'_1 \dots S'_{m-1})$ -el, és legyenek az S'_i -k az átlagos $1 - \frac{c(S'_i)}{\sum_{i \in S'_i} c(\{i\})}$ relatív megtakarításuk szerint csökkenő sorrendbe rendezve. Az $(S'_1 \dots S'_{m-1})$ koalíciók magfeltételei egyenlőséggel teljesülnek, azaz $c(S'_i) = y(S'_i)$, $i \in (1, \dots, m-1)$, így az S'_i koalíciók tagjainak allokált költségek csak egymás kárára változhatnak az adott S'_i koalíción belül. Az S'_m koalíció tagjai a nagykoalíción belül érik el a legnagyobb relatív megtakarítást. Az f minimalizálása érdekében ez azt jelenti, hogy az egyénileg legnagyobb átlagos relatív megtakarítást elérő S'_1 koalíció tagjainak allokált költségek, és a legkisebb átlagos relatív megtakarítást elérő S'_m koalíció tagjainak allokált költségek egyértelműek, így rögzíthetjük őket. Ellenkező esetben f növekedne, vagy valamely koalíciónak nagyobb költséget allokálnánk, mint az egyéni költsége. Rögzítsük azokat a játékosokat, akiknél $\frac{y_i}{c(\{i\})} - \frac{y_j}{c(\{j\})} = f_1^*$, ahol f_1^* a [P1] feladat optimális megoldása. Az y_i -k az S'_1 koalícióból, az y_j -k az S'_m koalícióból valók. Ezután a következő LP-t kell megoldanunk:

$$\begin{aligned}
& \text{[P2]} \quad \min f_2 \\
& \text{s.t.} \quad f_2 \geq \frac{y_k}{c(\{k\})} - \frac{y_l}{c(\{l\})}, \quad k, l \in (S'_2 \dots S'_{m-1}) \\
& \quad f_l^* = \frac{y_{i_1}}{c(\{i_1\})} - \frac{y_{j_1}}{c(\{j_1\})}, \quad i_1 \in S'_1, j_1 \in S'_m \\
& \quad y(N) = c(N) \\
& \quad y(S) \leq c(S), \quad S \subset N \\
& \text{ahol az összes változó előjelkötetlen.}
\end{aligned}$$

Ha [P2] nem egyértelmű, akkor újabb LP-t kell megoldani, amit a következő képpen általánosíthatunk:

$$\begin{aligned}
& \text{[Pt]} \quad \min f_t \\
& \text{s.t.} \quad f_t \geq \frac{y_m}{c(\{m\})} - \frac{y_n}{c(\{n\})}, \quad m, n \in (S'_t, S'_{m-t-1}) \\
& \quad f_q^* = \frac{y_{i_q}}{c(\{i_q\})} - \frac{y_{j_q}}{c(\{j_q\})}, \quad i_q \in S'_q, j_q \in S'_{m-q-1}, q = 1 \dots t-1 \\
& \quad y(N) = c(N) \\
& \quad y(S) \leq c(S), \quad S \subset N \\
& \text{ahol az összes változó előjelkötetlen.}
\end{aligned}$$

Ezt az optimalizálás-sorozatot addig kell folytatni, amíg [Pt] nem ad egyértelmű (y^*, f_t^*) megoldást. Látható, hogy minden lépésben az optimális relatív megtakarítások alsó és felső korlátját határozzuk meg, újabb lépésre pedig akkor van szükség, ha a két korlát között vannak nem egyértelmű változók. Az optimalizálás sorozat végén a megoldás egyértelmű lesz, mivel minden lépésben legalább két változót határozzuk meg, így véges sok lépésben eljutunk az optimális megoldásig.

Nézzük meg hogyan működik a módszer a **3.2-es példa** esetében, ahol a megoldás nem volt egyértelmű. Az optimalizáció első lépésében $f_1^* = 21,25\%$ értéket veszi fel. Láthattuk, hogy az (3,4) koalíció, és az (1,2) koalíció magfeltételei egyenlőséggel teljesülnek, mivel nagyobb relatív megtakarítást érhetnének el a nagykoalíción kívül. Mivel a (3,4) koalíció érhetné el a legnagyobb relatív megtakarítást egyénileg működve,

ezért ő lesz az S'_1 koalíció, és az (1,2) koalícióból lesz az S'_2 koalíció. Az S'_3 koalíciót az (5)-ös játékos alkotja. Mivel az S'_1, S'_2 koalíciók költsége állandó, ezért a tagjainak allokált költségek csak egymás kárára változhatnak a koalíción belül. Az f_1^* akkor nem növekszik, ha az S'_1 koalíció tagjainak a 30%-os, az S'_3 koalíció tagjának pedig a 8,75%-os relatív megtakarítást garantáljuk, így ezek az értékek rögzítettek. Azonban láttuk, hogy az (1,2) koalíciónak allokált költségek nem egyértelműek, így a következő LP-t kell megoldanunk:

$$\begin{aligned}
 \text{[P2]} \quad & \min f_2 \\
 \text{s.t.} \quad & f_2 \geq \frac{y_1}{4} - \frac{y_2}{4}, \\
 & f_2 \geq \frac{y_2}{4} - \frac{y_1}{4} \\
 & 0,2125 = \frac{y_3}{5} - \frac{y_5}{8} \\
 & 0,2125 = \frac{y_4}{6} - \frac{y_5}{8} \\
 & y_1 \leq 4 \\
 & y_2 \leq 4 \\
 & y_3 \leq 5 \\
 & y_4 \leq 6 \\
 & y_5 \leq 8 \\
 & y_1 + y_2 \leq 6 \\
 & y_3 + y_4 \leq 7,7 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21 \\
 & \text{ahol az összes változó előjelkötetlen.}
 \end{aligned}$$

Az LP megoldása $f_2 = 0, y_1 = 3, y_2 = 3, y_3 = 3,5, y_4 = 4,2, y_5 = 7,3$. A kapott megoldás pedig egyértelmű.

4.2 Magbeli ACAM

Nézzük most meg, hogy miként lehet az Equal Profit Method-nál látott módszert alkalmazni egy ismert költségallokációs módszer, az Alternative Cost Avoided Method módosítására.

A módszer felírásához először definiáljuk a *költségjátékkal* szoros kapcsolatban lévő *megtakarítási játékot* (N, v) , ahol

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)$$

$v(S)$ tehát az S koalíció által realizálható megtakarítást jelöli. A v függvény *0-normalizált*, azaz $v(\{i\}) = 0 \forall i \in N$ -re. Egy $(y_1, \dots, y_n)$ költségallokáció ekvivalens egy $(x_1, \dots, x_n)$ megtakarítás allokációval, hiszen minden i -re

$$x_i = c(\{i\}) - y_i$$

A magot meghatározó feltételek a következőkre módosulnak,

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \forall S \subset N$$

Gately 1974-ben felvetett egy új költségallokációs módszert, melynek célja a nagykoalíció megbontására való legerősebb hajlam minimalizálása. Az i játékosnak a nagykoalíció megbontására való hajlamát a következő módon írhatjuk fel:

$$d_i = \frac{\sum_{j \neq i} x_j - v(N - i)}{x_i - v(i)} = \frac{v(N) - x_i - v(N - i)}{x_i} = \frac{v(N) - v(N - i)}{x_i} - 1$$

A d_i arány megmutatja, hogy ha az i játékos megbontaná a nagykoalíciót, a komplementer $N-i$ koalíció tagjai mennyit veszítenének az i játékoshoz képest. Ha ez az arány magas, akkor az i játékosnak erős késztetése (hajlama) van a nagykoalíció megbontására, hacsak nem növelik a kifizetését. A legnagyobb d_i -t úgy tudjuk

minimalizálni, ha minden d_i -t egyenlővé teszünk, azaz az x_i -ket a $v(N) - v(N - i)$ -k arányában szabjuk meg. Straffin és Heaney (1981) cikkében azonban láthattuk, hogy ez az allokáció pontosan megegyezik az ACAM-mel, ugyanis a megtakarítási játékokra felírt ACAM a következő formát ölti:

$$x_i = \frac{v(N) - v(N - i)}{\sum_{j=1}^n v(N) - v(N - j)} v(N)$$

Láthatjuk, hogy itt is a $v(N) - v(N - i)$ marginális különbségek arányainak megfelelően határozódik meg az x_i . Gately költségallokációja tehát nem új, azonban nagy segítséget nyújt az ACAM egy módosított változatának felírásában. Az ACAM hátránya, hogy csak $n \leq 3$ játékos esetén van mindig a magban. Gately felírása és az EPM segítségével azonban felírhatunk egy az ACAM-en alapuló allokációt, amely a magban van. Ehhez a következő LP-t kell megoldani:

$$\begin{aligned} \min \quad & g \\ \text{s.t.} \quad & g \geq \frac{v(N) - v(N - i)}{x_i} - \frac{v(N) - v(N - j)}{x_j}, \quad \forall (i, j) \\ & \sum_{i \in N} x_i = v(N) \\ & \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \forall S \subset N \end{aligned}$$

ahol az összes változó előjelkötetlen.

Az első feltétel a közös felső korlátot jelentő g változó segítségével minimalizálja a megbontásra való hajlamok közti különbséget, ugyanis

$$d_i - d_j = \frac{v(N) - v(N - i)}{x_i} - 1 - \frac{v(N) - v(N - i)}{x_i} + 1 = \frac{v(N) - v(N - i)}{x_i} - \frac{v(N) - v(N - j)}{x_j}$$

A második két feltétel pedig a magbeliséget biztosítja. A fenti módszer az ACAM módosítása, hiszen ha az ACAM a magban van, akkor az ACAM-et adja eredményül, mivel $g=0$ lesz, és így pontosan az ACAM Gately féle felírását kapjuk. Ha azonban az ACAM nincs a magban, akkor egy olyan magbeli allokációt kapunk, melynél a megbontásra való hajlam a lehető legkisebb.

A fenti módszerben egyesítettük Gately módszerének alapelvét, a nagykoalíció megbontására való legerősebb késztetés (hajlam) minimalizálását, és a magbeliséget. A módszer hátránya, hogy a fentebbi optimalizálási modell tartalmaz nemlineáris feltételeket is, ami a számítógép nélküli kiszámítás esetén nehézségeket okozhat. Előfordulhat továbbá, hogy $g > 0$ esetén nem ad egyértelmű megoldást, ekkor azonban egy többlépcsős optimalizálás segítségével a megoldás egyértelművé tehető.

5. Összegzés

A dolgozatban egy rövid elméleti bevezető után bemutattunk négy költségallokációs módszert, köztük a meglehetősen új Equal Profit Method-ot. Egy rövid példán keresztül megnéztük az egyes módszereket, és láttuk, hogy mindegyik különböző elgondolás alapján osztja szét a költségeket.

A harmadik fejezetben részletesen megvizsgáltuk az EPM-et. Előbb megvizsgáltuk a tulajdonságait, ahol láttuk, hogy teljesíti az egyénileg elfogadhatóságot, a hatékonyságot, és a szállingmentességet. A módszer hátránya azonban, hogy nem párszimmetrikus, nem additív, továbbá nem feltétlenül ad egyértelmű megoldást. A fejezet második felében megnéztük a megoldhatóságát, megvizsgáltuk, hogy milyen esetekben tudunk egyenlő relatív megtakarításokat allokálni az egyes játékosoknak, és adtunk egy könnyen ellenőrizhető feltételt, amelynek a teljesülése esetén ezt megtehetjük. Láttuk, hogy a megadott feltétel segítheti az allokációs feladat megoldását, hiszen ekkor az LP feladat megoldása nélkül, gyorsan kiszámítható az EPM. A feltétel továbbá abban is segít, hogy hogyan lazítsuk a feltételeket olyan feladatok esetén, ahol az EPM nem ad egyenlő relatív megtakarításokat. A feltétel teljesülése továbbá olyan játékokat feltételez, amelyek esetén az EPM teljesíti az egyértelműséget, a párszimmetriát, és az additivitást is.

A negyedik fejezetben javasoltuk az EPM egy alternatív felírását, mely kiküszöböli a módszer egyértelműségének hiányából fakadó problémákat. A fejezet második felében, az EPM-nél látott módszer segítségével, az ACAM egy olyan módosítását adtuk meg, mely mindig magbéli allokációt eredményez.

Irodalomjegyzék

Audy, J.F., D'Amours, S., Rousseau J.M. (2011): Cost Allocation in the establishment of a collaborative transportation agreement, an application to the furniture industry, *Journal of the Operational Research Society*, 62. szám, 960-970. old

Engvall, S., Göthe-Lundgren M., Värbrand P. (1998): The traveling salesman game: An application of cost allocation in a gas and oil company, *Annals of Operation Research*, 82. évfolyam, 0. szám, 203-218. old.

Forgó, F., Pintér, M., Simonovits, A., Solymosi, T. (2006): Kooperatív Játékelmélet (elektronikus jegyzet). Letölthető:

http://web.uni-corvinus.hu/~pmiklos/Works/PDF/solymosi_jatekelmelet.pdf

Letöltve: 2012. november 29., 18 óra

Frisk, M., Göthe-Lundgren, M., Jörnsten, K., Rönnqvist, M. (2010): Cost allocation in collaborative forest transportation. *European Journal of Operational Research*, 205. évf., 2. szám, 448-458. old.

Gately, D. (1974): Sharing the gains from regional cooperation: a game theoretic application to planning investment in electric power, *International Economic Review*, 15. évfolyam, 1. szám, 195-208. old.

Young, H.P. (Ed.) (1985), Cost allocation: Methods, principles, applications, North Holland, New York, 3–29. old.

Rideout, D., Wagner, J. E. (1988): Testing cost-sharing techniques on a multiple-use timber sale, *Forest Ecology and Management*, 23. évfolyam, 4. szám, 285-296. old.

Shapley, L.S. (1953): A value for n-person Games, *Annals of Mathematics Studies*, 28. szám, 307-317. old.

Solymosi, T. (2009): Kooperatív Játékok, *Magyar Tudomány*, 170. évfolyam, 5. szám, 547-558. old.

Straffin, P., Heaney J. P. (1981): Game Theory and the Tennessee Valley Authority, *Int. Journal of Game Theory*, 10. évfolyam, 1. szám, 35-43. old.

Tijs, S.H. és Driessen, T.S.H. (1986): Game theory and cost allocation problems, *Management and Science*, 32. évf, 8. szám, 1015-1028. old.