

OTDK-DOLGOZAT

2015

**Teljesen additív és teljesen multiplikatív döntési
modellek**

**Purely additive and purely multiplicative decision
models**

Kézirat lezárva: 2013. március 31.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Analytic Hierarchy Process, a vegyes modell	3
1.1. AHP eljárás	3
1.2. Páros összehasonlítás mátrixok	5
1.3. Súlyvektor számítás	7
1.4. Páros összehasonlítás mátrixok aggregálása	8
1.5. Észrevételek	11
1.6. Példák	12
2. AHP kiegészítése, a multiplikatív modell	16
2.1. Mértani módszerek	16
2.2. Példák	18
3. Páros összevetés mátrixok, az additív modell	19
3.1. Additív modellek	19
3.2. Páros összevetés mátrixok	21
3.3. Súlyvektor számítás LSMA eljárással	27
3.4. Páros összevetés mátrixok aggregálása	29
3.5. AHP és a páros összevetés mátrixok	32
3.6. Példák	32
4. Összevetés és összehasonlítás kapcsolata	36
4.1. Kölcsönös átszámítás	36
4.2. Példák	39
Összefoglalás	42
Irodalomjegyzék	44

Ábrák jegyzéke

1.1. AHP általános szerkezete	4
---	---

Bevezetés

A döntéselméletben megszokott az Analytic Hierarchy Process (AHP) eljárás alkalmazása. Az eljárás során úgynevezett páros összehasonlítás mátrixokba rendezzük a döntéshozók preferenciáit. A döntéshozók az egyes alternatívákat páronként hasonlítják össze és megadják, hogy az éppen összehasonlított alternatívák közül az egyik hányszor jobb a másiknál. Az így kapott adatok multiplikatív jellegűek, hiszen minden egyes összehasonlítás eredménye az összehasonlított két alternatíva súlyainak hányadosát tükrözi. Éppen ebből a multiplikatív jellegből látszik az is, hogy az adatokat megfelelően mátrixba rendezve, a mátrixokból mértani közép segítségével érdemes súlyvektort számolni és így is lehet a mátrixokat több döntéshozó esetén aggregálni. Ennek ellenére az AHP eljárás folyamán a szempontok szerinti összegzéseket számtani középpel szokásos végezni. Így azt mondhatjuk, hogy az AHP egy vegyes eljárás, mert multiplikatív és additív elemeket is tartalmaz.

Mindezek mellett jogosan merül fel az a kérdés is, hogy magukat a súlyvektorokat több döntéshozó esetén miért ne lehetne számtani középpel aggregálni, ahogyan azt az AHP-ben az alternatívák súlyaival tesszük. Több döntéshozó esetén azt gondolnánk, hogy ha mindegyik döntéshozónak van egy sorrendje az alternatívákról, súlyok formájában megadva, akkor ezeket a sorrendeket átlagolhatnánk és az átlagos sorrendet tekintenénk a közös sorrendnek. Azonban a páros összehasonlítás mátrixok körében a mértani középpel vett aggregálás bizonyítottan jól működő eljárás, míg a számtani középpel vett aggregálás támadható. Így ha azt szeretnénk, hogy a számtani középpel vett, intuitíven jónak látszó aggregálás helyes legyen, a megszokott multiplikatív páros összehasonlítás mátrixok helyett át kell térnünk egy additív modellre.

A dolgozat fő célja tehát az, hogy feloldja az AHP keretek között fellépő ellentmondásokat, vagyis az, hogy szétválasszuk egymástól az additív és a multiplikatív elemeket és teljesen additív és teljesen multiplikatív modelleket írjunk fel. A dolgozatban megadunk két lehetőséget az ismert AHP modell javítására. Először bevezetjük a mértani módszert, ami segítségével az AHP folyamán a vektorok mellett a mátrixok is összegeezhetők. Ekkor a modellünk teljesen multiplikatív lesz. Másodszor pedig rátérünk, hogy milyen teljesen additív modelleket lehetne elképzelni, majd a páros összevetés mátrixok bevezetésével ki-

alakítunk egy olyan teljesen additív modellt, melyben a számtani középnek kiemelkedő szerepe van. Megmutatjuk, hogy hogyan lehet páros összevetés mátrixokból súlyvektort számolni és azt is, hogy hogyan lehet több döntéshozó esetén a mátrixokat aggregálni és hogy ez mit jelent. Végezetül megmutatjuk, hogy a páros összehasonlítás és a páros összevetés mátrixok hogyan kapcsolódnak egymáshoz és megmutatjuk, hogy a megszokott páros összehasonlítás mátrixok esetében is értelmes a súlyvektorok számtani átlagolása.

A dolgozatban az alábbi jegyzetek anyagaira nagyban támaszkodtunk, Rapcsák (2007), Bozóki (2012b), Aczél és Saaty (1983), Kindler és Papp (1977) és Kéri (2011). Az alapfogalmakat és a jelöléseket Rapcsák (2007) alapján használjuk. Bozóki (2012b) alapján írtuk fel az LLSM feladatot és később az LSMA feladatot is, külön felhívánk a figyelmet a jegyzetben szereplő bizonyításra. Aczél és Saaty (1983) (magyar nyelven Bozóki (2012a)) a páros összehasonlítás mátrixok aggregálásánál fontos állítások gyűjtőhelye. A Kéri (2011) cikkből használt bizonyítás magyar nyelven Kéri (2005) cikkben megtalálható.

Az AHP eljárásról bővebben lehet olvasni Saaty (1980), Saaty (1986), Saaty (1990) és Saaty (1994) munkáiban. Magyar nyelven Temesi (2002) és Rapcsák (2007) adnak remek bevezetőt a témához.

1. fejezet

Analytic Hierarchy Process, a vegyes modell

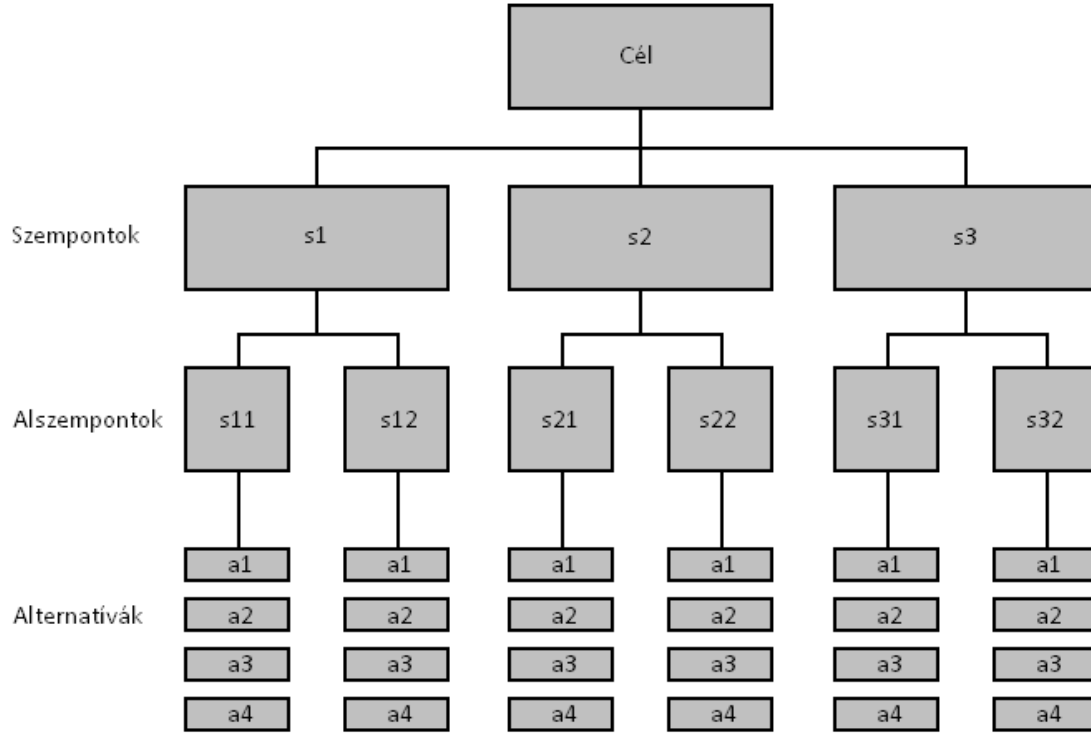
Ebben a fejezetben bemutatjuk az irodalomban és az alkalmazások terén elterjedt Analytic Hierarchy Process eljárást. Később nagyobb terjedelemben kitérünk a páros összehasonlítás mátrixok tulajdonságaira és a megszokott kezelésükre. Ebben a fejezetben mutatjuk be a döntési helyzet általános leírását is, ennek alapjai az egész dolgozatra érvényesek, az esetleges eltérésekre mindig külön felhívjuk a figyelmet.

1.1. AHP eljárás

Jelen dolgozat keretében a Saaty (1980) által bevezetett AHP eljárást tekintjük a döntési helyzetek általános leírásának. Az AHP eljárás a döntési helyzetet egy jól kezelhető és logikus struktúrába rendezi.

Az AHP eljárásban a döntési feladatot egy fa struktúrában adjuk meg, ahol a fa gyökere az úgynevezett cél. Ez a cél lehet például a legjobb alternatíva kiválasztása, vagy az alternatívák egy sorrendjének megadása. Ezután következnek a szempontok és az alszempontok, végül pedig a levélszempontok. A levélszempontok a további alszempontokra már nem bontott (vagy bontható) szempontok, amik alatt már csak az egyes alternatívák helyezkednek el. A fát úgy kell értelmezni, hogy az alternatívák a döntési lehetőségek, a szempontok pedig a fa reprezentációnak megfelelően viszonyulnak egymáshoz. Fontos megjegyezni, hogy az összes alternatíva minden levélszempont alatt szerepel. A feladat megoldása úgy zajlik, hogy lentről, vagyis az alternatíváktól indulva, felfelé, egészen a célig meghatározzuk az alternatívák súlyait, majd ezeket az egyes részfákon valamilyen módon aggregáljuk. A modell szerkezetét az 1.1 ábra mutatja.

1.1. ábra. AHP általános szerkezete



A döntéshozó megadja minden részfára az egyes részfákon található alternatívák, vagy szempontok közötti preferenciáit, majd ezeket összesítjük lentől felfelé haladva. A preferenciák megadásának módja (kezdetben) az úgynevezett páros összehasonlítás mátrixok alkalmazása, amikről a következő alfejezetekben lesz bővebben szó. A másik sarkalatos pont a szempontonkénti eredmények aggregálása. Tegyük fel, hogy a bemutatott fa minden részfáján valamilyen módon ismert az egyes alternatívák, illetve szempontok súlyrendszere. A kérdés, hogy hogyan vonhatók össze a súlyok a különböző szempontok szerint.

Legyen n alternatívánk és tekintsük a megadott fa struktúra valamely részfájának második szintjét (ha a gyökér az első szint). Legyen ezen a szinten m különböző szempont. Ekkor legyen az adott szinten a j -edik alternatíva súlya az i -edik szempont szerint y_{ij} úgy, hogy $\sum_{j=1}^n y_{ij} = 1$ minden i -re. Legyen az adott szinten az i -edik szempont súlya w_i úgy, hogy $\sum_{i=1}^m w_i = 1$. Fontos megjegyezni, hogy általában a súlyok összegéről nem szükséges feltenni, hogy egy lenne, de a dolgozat keretei között ez mindig így lesz. Jelölje x_j a j -edik alternatíva m darab szempont szerinti összesített súlyát. A súlyok összegzésére az AHP módszertanban három megszokott mód van.

1. Disztributív mód esetén

$$x_j^D = \sum_{i=1}^m w_i y_{ij} ,$$

vagyis a vektorok súlyozott számtani átlagát vesszük a w_i súlyokkal.

2. Ideális mód esetén

$$x_j^I = \sum_{i=1}^m w_i \frac{y_{ij}}{\max_k y_{ik}} .$$

3. Minősítő mód esetén

$$x_j^M = \sum_{i=1}^m w_i \frac{y_{ij}}{y_i^*} ,$$

ahol y_i^* az i -edik szempont szerint adható legnagyobb érték, ami nem a preferenciáktól, hanem az előre rögzített mérési skálától függ.

A későbbiekben a disztributív mód fog fontos szerepet játszani a dolgozatban. A fán végighaladva folyamatosan új szempontokat vonunk be, majd a célt elérve szintén a fent leírt három módszer egyikével kaphatjuk meg az alternatívák végleges súlyait. Érdemes megjegyezni, hogy a megadott feltételek mellett a három módszer közül csak a disztributív által adott súlyvektort nem kell számolás után újra normálni.

1.2. Páros összehasonlítás mátrixok

Ebben az alfejezetben bemutatjuk a páros összehasonlítás mátrixokat. A fejezetben leírtak alapján a későbbiekben, az additív modellről elmondottak könnyen és jól láthatóan összevethetők lesznek a sztenderd AHP modellel és több, később használt fogalmat és jelölést is bevezetünk itt. Ebben a részben csak a legfontosabb definíciók és állítások szerepelnek, a fontos tételek bizonyításait csupán hivatkozzuk.

Az előző fejezetben bemutatottak alapján tehát egy döntési helyzet úgy írható le, hogy egy, vagy később több döntéshozó valamennyi (n darab) alternatíváról dönt úgy, hogy végcélként az alternatívák egy sorrendjét, pontosabban egy, az alternatívákon értelmezett súlyvektort szeretne megkapni. Feltételezzük, hogy az alternatíváknak létezik valamilyen valós sorrendje, amit a döntéshozó esetleg nem ismer, vagy nem képes pontosan meghatározni. A súlyvektort ennek megfelelően úgy kívánjuk közelíteni, hogy a döntéshozóval páros összehasonlításokat végeztetünk, vagyis minden alternatívát minden alternatívával összehasonlít úgy, hogy megmondja, melyiknek gondolja nagyobbak a súlyát és hányszor. Ezt a módszert hívjuk páros összehasonlításnak.

1.1. definíció (Egyre normált súlyvektor). *Az n alternatíva melletti döntéshez tartozó egyre normált súlyvektornak olyan $\mathbb{R}^n$ -beli w vektorokat nevezünk, amelyekre igaz, hogy $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ és $w_i > 0$ minden i -re.*

1.2. *megjegyzés.* A továbbiakban elhagyjuk az egyre normált jelzőt és w -re csak mint súlyvektorra hivatkozunk, a w_i elemekre pedig, mint az i -edik alternatíva súlyára.

Vizsgálódásunkat kezdjük a legkönnyebb esettel. Tegyük fel, hogy ismertek az alternatívák azon tulajdonságai, amiről a döntéshozók dönteni szeretnének, jelöljük ezeket $l_1, \dots, l_n$ módon és legyen minden $l_i > 0$. Ezek mértékegységgel rendelkező számok, például az alternatívák hasznosságai. Ha ez így lenne, akkor innen megadhatók lennének az alternatívák súlyai, $w_i = \frac{l_i}{\sum_{j=1}^n l_j}$ módon minden i -re. Mivel feltettük, hogy az alternatívák-nak létezik valamilyen valós realizációja, ezért ha azok ismertek lennének, a döntéshozó a fentebb leírt páros összehasonlításokkal a következő mátrixhoz jutna:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{l_1}{l_1} & \frac{l_1}{l_2} & \dots & \frac{l_1}{l_n} \\ \frac{l_2}{l_1} & \frac{l_2}{l_2} & \dots & \frac{l_2}{l_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{l_n}{l_1} & \frac{l_n}{l_2} & \dots & \frac{l_n}{l_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix}.$$

Az egyenlőség triviálisan fennáll, hiszen

$$\frac{l_i}{l_j} = \frac{\frac{l_i}{\sum_{k=1}^n l_k}}{\frac{l_j}{\sum_{k=1}^n l_k}} = \frac{w_i}{w_j}.$$

Észrevehetjük, hogy a megadott mátrixban főátlójában mindig az 1-es szám szerepel és a mátrix elemeire igaz, hogy $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$. Így már definiálhatjuk a páros összehasonlítás mátrixok osztályát, amiktől pontosan ezt a két tulajdonságot várjuk el.

1.3. definíció (Páros összehasonlítás mátrix). *A páros összehasonlítás mátrix olyan, $A = [a_{ij}]$, négyzetes mátrix, amire igaz, hogy $a_{ii} = 1$ minden i -re és $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$ (reciprocitás) és $a_{ij} > 0$ minden i, j -re.*

1.4. *megjegyzés.* A továbbiakban elvárjuk, hogy a reciprocitás mindig teljesüljön, vagyis a döntéshozóktól $\frac{n^2-n}{2}$ darab összehasonlítást kérünk be. Megjegyezzük, hogy előfordulhat, hogy ennél kevesebb adatunk van, ekkor a páros összehasonlítás mátrix nem teljesen kitöltött. Az ilyen mátrixokkal a dolgozat nem foglalkozik.

A páros összehasonlítás módszere az A mátrix elemeire kérdez rá egyesével. Ha a döntéshozó nem ismeri a tényleges értékeket, vagy csak hibázik, akkor az a hiba inkonzisztencia formájában jelenhet meg a mátrixban. Fontos megjegyezni, hogy a valós problémákban az inkonzisztencia mérése és meghatározása sarkalatos kérdés, ebben a dolgozatban azonban ezeket a kérdéseket nem vizsgáljuk. A témáról bővebben Bozóki és Rapcsák (2008) cikket és magyar nyelven Rapcsák (2007) és Bozóki (2012a) jegyzeteket javasoljuk.

1.5. definíció (Konzisztencia). *Egy A páros összehasonlítás mátrix konzisztens, ha minden i, j, k esetén $a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot a_{ki} = 1$.*

1.6. definíció. *Egy A páros összehasonlítás mátrix inkonzisztens, ha nem konzisztens, vagyis léteznek olyan i, j, k indexek, amelyekre $a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot a_{ki} \neq 1$.*

1.7. állítás. *Ha egy páros összehasonlítás mátrix konzisztens, akkor tetszőleges $q \geq 2$ számra igaz, hogy $a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \dots \cdot a_{i_q i_1} = 1$.*

1.8. megjegyzés. Ha $q = 2$, akkor a reciprocitást kapjuk vissza, ami az inkonzisztens páros összehasonlítás mátrixokra is igaz.

Így tehát azt mondhatjuk, hogy az eredeti súlyok ismeretében könnyen előállítható egy konzisztens páros összehasonlítás mátrix, azonban a valós lekérdezések esetén előfordulhat, hogy inkonzisztens páros összehasonlítás mátrixhoz jutunk. Megjegyezzük, hogy a valós adatokra az inkonzisztencia a jellemző, ritka a konzisztens mátrix.

1.3. Súlyvektor számítás

A mátrixok definiálása után már megadhatunk olyan eljárásokat, amelyekkel a páros összehasonlítás mátrixokból számíthatók a súlyvektor elemei. Számos ilyen eljárás ismert, ebben a dolgozatban a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerét, röviden LLSM-et használjuk. A módszer használatának fő oka, hogy így is megmutassuk az additív és a multiplikatív modellek közötti különbségeket, továbbá az 1.18. tétel értelmében így felcserélhető lesz a súlyvektor számítás és a megfelelő összegzés. A többi módszerről (EM, LSM) bővebben ismét Rapcsák (2007) egyetemi jegyzetét javasoljuk. A szakirodalomban az AHP-nek szerves része a sajátvektor módszer és az alternatív súlyozási eljárások (LSM, LLSM) ilyen értelemben nem az AHP, hanem az általánosabb páros összehasonlítás mátrixok témájába tartoznak. Az AHP irodalmához szokott Olvasó figyelmét ezért felhívjuk, hogy jelen dolgozatban az LLSM súlyozási módszert is az AHP témakörébe valónak tekintjük.

1.9. definíció (Logaritmikus legkisebb négyzetek módszere). *Az LLSM módszer a súlyvektort az alábbi feladat optimális megoldásából származtatja:*

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\ln a_{ij} - \ln \left(\frac{w_i}{w_j} \right) \right]^2$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$w_i > 0, \text{ minden } i = 1, \dots, n \text{ esetén.}$$

1.10. tétel. *Az LLSM módszer használatával kapott súlyvektor az A páros összehasonlítás mátrix sorelemeinek mértani közepéből normálással kapható, vagyis*

$$w_i = \frac{\prod_{j=1}^n (a_{ij})^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^n (a_{kj})^{\frac{1}{n}}} .$$

Bizonyítás. A bizonyítást itt nem közöljük, Bozóki (2012a) jegyzetben megtalálható. ■

Észrevehető, hogy ha az A mátrix konzisztens, akkor az LLSM eljárás a valós w súlyvektort adja eredményül. Megjegyezzük, hogy innentől a páros összehasonlításból kapott súlyvektor alatt mindig az LLSM módszerrel számított súlyvektort értünk.

1.4. Páros összehasonlítás mátrixok aggregálása

Képzeld el, hogy több döntéshozó szeretne meghozni közösen egy döntést. Jelöljük a döntéshozókat $1, \dots, D$ módon és legyenek a páros összehasonlítás mátrixaik $A^{(1)}, \dots, A^{(D)}$. A célunk az, hogy a döntéshozók preferenciáit egy csoportos páros összehasonlítás mátrixban szerepeltessük, az eredeti mátrixokat elemenként aggregálva. Ehhez meg kell vizsgálnunk, hogy milyen aggregálási szabályokat lehet elképzelni. Vizsgálódásainkat az úgynevezett kváziaritmetikai közepek között végezzük, ugyanis ezek lefedik a gyakorlatban használatos átlagoló és közép számító eljárásokat.

1.11. definíció (Kváziaritmetikai közép). *Legyenek $x_1, \dots, x_D$ pozitív valós számok és $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges folytonos és szigorúan monoton növekvő függvény. Az $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ aggregáló függvényt kváziaritmetikai középnek nevezzük, ha*

$$f(x_1, \dots, x_D) = \phi^{-1} \left[\frac{\sum_{d=1}^D \phi(x_d)}{D} \right] .$$

Az aggregálástól azt szeretnénk elvárni, hogy az eredménye páros összehasonlítás mátrix legyen, vagyis a kapott aggregált mátrixnak teljesítenie kell a reciprocitást és elemeinek pozitívnak kell lennie, vagyis

$$f\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_D}\right) = \frac{1}{f(x_1, \dots, x_D)} .$$

1.12. tétel (Aczél és Saaty (1983)). *A kváziaritmetikai közepek közül csak az*

$$f(x_1, \dots, x_D) = e^{\psi^{-1} \left[\frac{\sum_{d=1}^D \psi(\ln x_d)}{D} \right]}$$

alakú aggregáló függvények tartják meg a reciprocitást, ahol $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges szigorúan monoton növekvő páratlan függvény.

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Aczél és Saaty (1983) cikkben. ■

Az összegzőfüggvénytől továbbá elvárjuk, hogy teljesítse az úgynevezett pozitív homogenitást is.

1.13. definíció (Pozitív homogenitás). Az f aggregáló függvény rendelkezik a pozitív homogenitás tulajdonságával, ha

$$f(sx_1, \dots, sx_D) = sf(x_1, \dots, x_D)$$

teljesül minden $s > 0$ esetén.

Ez nem létfontosságú az aggregálás helyességéhez, azonban intuitíven úgy érezzük, hogy teljesülnie kellene. Gondoljuk meg ugyanis, hogy ha minden aggregálni kívánt értéket, vagyis a döntéshozók megadott mátrixelemeit s -szeresére növeljük, akkor annak a szempontnak a közös fontosságának is s -szeresére kellene nőnie.

1.14. tétel (Jessen (1930)). A kváziaritmetikai közepek közül csak az

$$f(x_1, \dots, x_D) = \sqrt[\alpha]{\frac{\sum_{d=1}^D x_d^\alpha}{D}},$$

alakú hatványközepek ($\alpha \neq 0$) és az

$$f(x_1, \dots, x_D) = \sqrt[D]{\prod_{d=1}^D x_d}$$

mértani közép teljesíti a pozitív homogenitás feltételét.

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Jessen (1930) cikkében. ■

1.15. tétel (Aczél és Saaty (1983)). A kváziaritmetikai közepek között egyetlen olyan aggregálási szabály van, amely teljesíti a reciprocitást és a pozitív homogenitást is, ez pedig a mértani közép, vagyis

$$f(x_1, \dots, x_D) = \sqrt[D]{\prod_{d=1}^D x_d}.$$

Bizonyítás. Az 1.12. tétel következtében a kváziaritmetikai közepek körében csak az

$$f(x_1, \dots, x_D) = e^{\psi^{-1}\left[\frac{\sum_{d=1}^D \psi(\ln x_d)}{D}\right]}$$

függvények teljesítik a reciprocitást, míg az 1.14. tétel szerint csak a hatványközepek és a mértani közép teljesíti a pozitív homogenitást. A két alaki feltételnek egyszerre csak a mértani közép felel meg. ■

A későbbiekben szükségünk lesz arra is, hogy a mértani közép súlyozott változatára is igaz az 1.15. tétel. Először is tegyük fel, hogy minden x_d értékhez létezik egy $w_d > 0$ súly úgy hogy $\sum_{d=1}^D w_d = 1$. Ekkor a következő állítást fogalmazhatjuk meg.

1.16. állítás. *A $w \in \mathbb{R}^D$, $\sum_{d=1}^D w_d = 1$ súlyvektorral súlyozott mértani közép, vagyis*

$$f(x_1, \dots, x_D) = \prod_{d=1}^D x_d^{w_d}$$

is teljesíti a pozitív homogenitást és a reciprocitást.

Bizonyítás. Könnyű megmutatni, hogy a súlyozott mértani közép teljesíti a két alaki feltételt. Legyen $s > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$f(sx_1, \dots, sx_D) = \prod_{d=1}^D (sx_d)^{w_d} = s \prod_{d=1}^D x_d^{w_d},$$

hiszen $\sum_{d=1}^D w_d = 1$. Vagyis teljesíti a pozitív homogenitást.

Teljesíti a reciprocitást is, ugyanis

$$f\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_D}\right) = \prod_{d=1}^D \left(\frac{1}{x_d}\right)^{w_d} = \frac{1}{\prod_{d=1}^D x_d^{w_d}} = \frac{1}{f(x_1, \dots, x_D)}.$$

Tehát beláttuk az állítást. ■

1.17. megjegyzés. Noha úgy tűnhet, hogy az 1.16. állítás ellentmond az 1.15. tételnek, azonban a fent definiált súlyozott mértani közép tetszőleges, a $w_d = \frac{1}{D}$ (minden d -re) súlyoktól eltérő súlyozással nem kváziaritmetikai közepe az $x_1, \dots, x_D$ számoknak.

Ezek szerint több döntéshozó esetén csak az elemenkénti mértani középpel aggregálhatunk, ha szeretnénk, hogy az aggregálás teljesítse a reciprocitást és a pozitív homogenitást. Továbbá, a súlyozott mértani középről is beláttuk, hogy az egyetlen, ami teljesíti a feltételeket, így a szempontok szerinti súlyok aggregálásánál használható ez az eljárás. A későbbi fejezetekben az 1.15. tétel és az 1.16. állítás nagy szerepet fognak játszani.

Az összegzésről belátunk még egy fontos tételt.

1.18. tétel. *Legyenek $A^{(1)}, \dots, A^{(D)}$ páros összehasonlítás mátrixok. Ekkor az A -val jelölt, mértani középpel aggregált páros összehasonlítás mátrixból származó súlyvektor normáltja megegyezik a mátrixokból külön-külön LLSM eljárással számolt súlyvektorok mértani átlagának normáltjával.*

Bizonyítás. Az aggregált mátrix A , ahol $a_{ij} = \prod_{d=1}^D \left(a_{ij}^{(d)}\right)^{\frac{1}{D}}$, vagyis a mátrixok elemenkénti mértani közepe. Ekkor az LLSM módszerrel az A -ból számolt súlyvektor i -edik eleme,

$$w_i = \frac{\prod_{j=1}^n (a_{ij})^{\frac{1}{n}}}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_{ij})^{\frac{1}{n}}} .$$

Ekkor a_{ij} meghatározásából és felhasználva, hogy

$$w_i^{(d)} = \frac{\prod_{j=1}^n \left(a_{ij}^{(d)}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \left(a_{ij}^{(d)}\right)^{\frac{1}{n}}} ,$$

az egyéni mátrixból LLSM-mel számolt súlyvektor i -dik eleme, akkor

$$w_i = \frac{\prod_{j=1}^n \left(\prod_{d=1}^D \left(a_{ij}^{(d)}\right)^{\frac{1}{D}} \right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^n \left(\prod_{d=1}^D \left(a_{kj}^{(d)}\right)^{\frac{1}{D}} \right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\prod_{d=1}^D \left(\prod_{j=1}^n \left(a_{ij}^{(d)}\right)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{D}}}{\sum_{k=1}^n \prod_{d=1}^D \left(\prod_{j=1}^n \left(a_{kj}^{(d)}\right)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{D}}} = \frac{\prod_{d=1}^D \left(w_i^{(d)}\right)^{\frac{1}{D}}}{\sum_{k=1}^n \prod_{d=1}^D \left(w_k^{(d)}\right)^{\frac{1}{D}}} .$$

Ez pedig pontosan az egyénekenkénti súlyvektorok mértani közepe, újra normálva, vagyis beláttuk az állítást. ■

1.19. *megjegyzés.* A tétel triviálisan igaz a súlyozott mértani középére is, a már bemutatott transzformációval élve.

1.5. Észrevételek

Ebben az alfejezetben az eddig elmondottak alapján rámutatunk és bővebben kifejthetjük, hogy mi is a dolgozat motivációja és mi lenne a cél.

Az AHP módszertan bemutatásánál láttuk, hogy a döntési feladat megoldásának négy lépése van. Először meghatározzuk a célt és felírjuk a szempontok viszonyait tükröző fát. Másodszor megadjuk az egyes részfákon található szempontok vagy alternatívák közötti preferenciákat, erre használtuk a páros összehasonlítás mátrixokat. Harmadszor súlyvektorokat számítunk a preferenciákból és végezetül pedig valamilyen módon a fa aljától a cél felé haladva részfánként összegezzük a súlyokat. Az összegzésre három módszert adtunk meg, a disztributív, ideális és minősítő módokat. Mind a három összegzés additív jellegű, külön kiemelve a disztributív összegzés gyakorlatilag a szempontok súlyai szerinti súlyozott számtani közép számítás. Azt vehetjük észre, hogy a lépések közül a második és a harmadik multiplikatív, míg a negyedik additív jellegű, éppen ezért mondhatjuk, hogy az

AHP módszertan ilyen szempontból vegyes. A célunk tehát, hogy az AHP eljárást úgy módosítsuk, hogy teljesen multiplikatív vagy teljesen additív legyen.

Több döntéshozó esetén megmutattuk, hogy a döntéshozók egyéni $A^{(d)}$ páros összehasonlítás mátrixait csak a mértani középpel lehet aggregálni (1.15. tétel), ha szeretnénk, hogy az aggregálásnak jó tulajdonságai legyenek. Azonban azt vehetjük észre, hogy matematikailag a döntéshozók és a szempontok felcserélhetők, vagyis az AHP módszertan és az 1.15. tétel ellentmondásos. Úgy is mondhatnánk, hogy az éppen vizsgált szempont a d döntéshozó szempontja, vagyis mátrixa és ennek a döntéshozónak például $\frac{1}{D}$ súllyal szerepel a véleménye a végeredményben. A szempontokat felcserélve tehát döntéshozókra és a szempontok közötti preferenciákat a döntéshozók közötti fontossági sorrendnek értelmezve viszont az 1.15. tétel miatt nem aggregálhatnánk máshogy, mint a (súlyozott) mértani középpel, mégis egyik használt súlyvektor összegzési mód sem épít erre.

Mielőtt folytatnánk, szeretnénk felhívni a figyelmet arra, hogy az AHP módszertan keretei között nem a mátrixok aggregálása, hanem a mátrixok reprezentálta preferenciák, súlyvektorok összegzése a cél. Magától értetődő, hogy ez megtehető számos módon, többek között a számtani középpel is, viszont így nem tudunk jó aggregálást adni magukra a mátrixokra, amikből megkapnánk az aggregált súlyvektort. Így tehát ha szeretnénk, hogy magukat a mátrixokat is aggregálhassuk, akkor más módon kell a súlyvektorokat aggregálni, vagy kell egy új reprezentációja a preferenciáknak.

A későbbiekben tehát két megoldást javasolunk az itt látható problémára. Először is meghagyjuk a páros összehasonlítás mátrixokat és új súlyvektor összegzési módokat vezetünk be az AHP módszertan számára, így felírva egy teljesen multiplikatív modellt. Másodszor pedig lecseréljük a páros összehasonlítás mátrixokat a később definiált páros összevetés mátrixokra, meghagyjuk a már bemutatott disztributív, ideális és minősítő súlyvektor összegzési módokat és így megadunk egy teljesen additív modellt.

1.6. Példák

Ebben az alfejezetben példákon keresztül bemutatjuk a fejezetben elmondottakat.

Az első példában egy AHP modellben felírt döntési problémát oldunk meg.

1.20. *példa.* Három részleg között kell elosztanunk valamennyi pénzt. Legyenek ezek a, b és c részlegek. Ezek tehát az alternatívák. Három szempontunk van, a részlegekben kifizetett munkabér, a nyersanyagok költsége és a részlegek üzemeinek bérleti költsége. A preferenciák a következők.

Alternatívák a levélszempontok szerint:

- munkabér: az a részleg 2-szer jobb a b részlegnél és 3-szor jobb a c részlegnél, a b részleg 2-szer jobb a c -nél,

- nyersanyag költség: az a részleg 2-szer jobb a b -nél és 5-ször jobb a c -nél, a b pedig 3-szor jobb a c -nél,
- bérleti költség: a c 5-ször jobb az a -nál és 4-szer jobb a b -nél, a b 2-szer jobb az a -nál.

Szemponatok:

- a bérleti költség 6-szor fontosabb az nyersanyag költségnél és 3-szor a munkabéernél, a munkabér 2-szer fontosabb a nyersanyag költségnél.

Ekkor a páros összehasonlítás mátrixok a következők.

Munkabér:

	a	b	c
a	1	2	3
b	$\frac{1}{2}$	1	2
c	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

Nyersanyag költség:

	a	b	c
a	1	2	5
b	$\frac{1}{2}$	1	3
c	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1

Bérleti költség:

	a	b	c
a	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
b	2	1	$\frac{1}{4}$
c	5	4	1

Szemponatok:

	munkabér	nyersanyag	bérlés
munkabér	1	2	$\frac{1}{3}$
nyersanyag	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$
bérlés	3	6	1

Az LLSM módszerrel kapott súlyvektorok a következők,

- Munkabér: $(0,5396; 0,297; 0,1634)$,
- Nyersanyag: $(0,5816; 0,309; 0,1095)$,
- Bérlés: $(0,1169; 0,1998; 0,6833)$,
- Szempontok: $(0,2222; 0,1111; 0,6667)$.

A disztributív módszer szerinti végleges sorrend a $(0,2624; 0,2335; 0,5041)$ vektor, vagyis a pénzt a vektor szerinti arányban kell felosztani.

1.21. *példa.* Tekintsük ugyanezt a feladatot, csak most a munkabér, nyersanyag költség és bérleti költség szempontok helyett legyen három különböző döntéshozónk (P , Q és R), akik közötti szavazóerőt tükrözi az eddig a szempontok között felírt mátrix. Ez tehát a következő

	P	Q	R
P	1	2	$\frac{1}{3}$
Q	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$
R	3	6	1

Ekkor helyesen, mértani középpel aggregálva a mátrixaikat (figyelve, hogy más a súlyuk a döntésben) a következő mátrixhoz jutunk.

	a	b	c
a	1	0,7937	0,522
b	1,2599	1	0,523
c	1,9155	1,9119	1

Ekkor az LLSM eljárással a (0,2361; 0,2756; 0,4882) súlyvektorhoz jutunk, ami nem egyezik meg az előzővel, sőt a b részleg megelőzte az a részleget.

2. fejezet

AHP kiegészítése, a multiplikatív modell

Ebben a fejezetben bemutatjuk az eddig elmagyarázott probléma egyik javasolt feloldási lehetőségét. Az itt tárgyalt kiegészítéssel élve, az ismert AHP eljárás egy teljesen multiplikatív döntési modellé válik, vagyis a preferenciák megadása (páros összehasonlítás mátrixok), a súlyvektorok számítása és azok összegzése is multiplikatív.

2.1. Mértani módszerek

Legyen ismét n alternatívánk és tekintsük a döntési feladatot reprezentáló fa struktúra valamely részfájának második szintjét. Legyen ezen a szinten m különböző szempont. Ekkor legyen az adott szinten a j -edik alternatíva súlya az i -edik szempont szerint y_{ij} úgy, hogy $\sum_{j=1}^n y_{ij} = 1$ minden i -re. Legyen az adott szinten az i -edik szempont súlya w_i úgy, hogy $\sum_{i=1}^m w_i = 1$. Jelölje a j -edik alternatíva szempontok szerinti összesített súlyát x_j . A súlyok összegzésére az alábbi három új módot javasoljuk.

1. Mértani disztributív mód esetén

$$x_j^{MD} = \prod_{i=1}^m y_{ij}^{w_i},$$

vagyis a vektorok szempontok szerinti súlyokkal vett súlyozott mértani közepét vesszük.

2. Mértani ideális mód esetén

$$x_j^{MI} = \left(\prod_{i=1}^m y_{ij}^{\frac{w_i}{\max_k y_{ik}}} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{\max_k y_{ik}}}}.$$

3. Mértani minősítő mód esetén

$$x_j^{MM} = \left(\prod_{i=1}^m \frac{y_{ij}^{w_i}}{y_i^*} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{y_i^*}}},$$

ahol y_i^* ismét az i -edik szempont szerint adható legnagyobb érték, ami nem a preferenciáktól, hanem az előre rögzített mérési skálától függ.

Itt viszont már a megadott feltételek mellett a három módszer közül mindnél újra kell normálni a kapott értékeket, hogy egyre normált vektorokhoz jussunk.

Fontos megjegyezni, hogy hasonlóan a minősítő módhoz, a mértani minősítő mód is $y_i^* = 1$ választással minden i -re a mértani disztributív móddal kapott vektort adja vissza.

2.1. *megjegyzés.* A mértani ideális és a mértani minősítő módokat lehetett volna a következő módon is definiálni:

Mértani ideális mód esetén

$$x_j'^{MI} = \prod_{i=1}^m \frac{y_{ij}^{w_i}}{\max_k y_{ik}}.$$

Mértani minősítő mód esetén

$$x_j'^{MM} = \prod_{i=1}^m \frac{y_{ij}^{w_i}}{y_i^*},$$

ahol y_i^* ismét az i -edik szempont szerint adható legnagyobb érték, ami nem a preferenciáktól, hanem az előre rögzített mérési skálától függ.

De ekkor könnyű látni, hogy mind a két módszer ugyanazt a vektort eredményezné, mint a mértani disztributív módszer.

Most gondoljuk meg, hogy a mértani disztributív módszerrel valóban olyan súlyvektort kapunk-e eredményül egy AHP keretek között adott döntési problémára, mint ha előbb magát a mátrixokat aggregáltuk volna a súlyvektorok által adott súlyok szerinti súlyozott mértani középpel, majd abból számolnánk súlyvektort az LLSM módszerrel. Először is szeretnénk emlékeztetni az 1.15. tételre és az 1.16. állításra. A tétel szerint csak a mértani középpel lehet a kváziaritmetikai közepek köréből aggregálni a páros összehasonlítás mátrixokat úgy, hogy az eredmény is páros összehasonlítás mátrix legyen és az összegzés teljesítse a pozitív homogenitást. Az állítás szerint pedig, ha a mátrixokat súlyozva aggregáljuk a mértani középpel, akkor is páros összehasonlítás mátrixhoz jutunk. Másodszor pedig tudjuk az 1.18. tétel alapján, hogy az aggregálás és az LLSM-mel vett súlyvektor számítás felcserélhető. A felcserélhetőség triviálisan igaz a súlyozott mértani közép-re is, vagyis minden AHP keretben adott döntési feladatot tudunk egyetlen, aggregált mátrixszal reprezentálni.

2.2. állítás. *Ha a súlyvektor számításra az LLSM módszert alkalmazzuk és a súlyvektorok összegzésére a mértani disztributív módot, akkor minden, AHP keretek között adott döntési feladat reprezentálható pontosan egy páros összehasonlítás mátrixszal.*

2.2. Példák

2.3. *példa.* Tekintsük ismét az 1.20. példát, csak most oldjuk meg a mértani disztributív módszerrel. Ekkor a $(0, 2361; 0, 2756; 0, 4882)$ vektorhoz jutunk és a

	a	b	c
a	1	0,7937	0,522
b	1,2599	1	0,523
c	1,9155	1,9119	1

mátrixhoz. Az eredmények pontosan megegyeznek az 1.21. példa eredményeivel.

2.4. *példa.* Tekintsük ismét az 1.20. példát, csak most oldjuk meg a mértani ideális és a mértani minősítő módszerekkel. A mátrixokat most nem aggregáljuk.

Mértani ideális mód esetén a $(0, 2573; 0, 2842; 0, 4585)$ vektorhoz jutunk. Ha az a részlegben adható legmagasabb érték 1,3 lenne, a b -ben 1,5 és a c -ben pedig 0,9 például, akkor a mértani minősítő móddal a $(0, 2004; 0, 2578; 0, 5418)$ vektorhoz jutnánk. Ezek közül mind a kettő eltér a 2.3. példában kapott vektortól.

3. fejezet

Páros összevetés mátrixok, az additív modell

Ebben a fejezetben először általánosan beszélünk az additív modellekről, majd kiemelünk ezek közül egyet, a páros összevetés mátrixokat. Ezeket javasoljuk az AHP módszerben a páros összehasonlítás mátrixok helyettesítésére, ha a megszokott módon szeretnénk összevonni a szempontok súlyait. Így egy teljesen additív modellt adunk meg, vagyis a preferenciákat leíró mátrixok additív módon tartalmazzák az adatokat, a súlyvektorokat és a mátrixok aggregálását is additív módon (számtani átlaggal) végezzük.

3.1. Additív modellek

Ha additív modellt szeretnénk készíteni és a számtani közepet mint aggregáló eljárást és mint súlyvektor számító eljárást használni, akkor szükséges, hogy a modellből kapott mátrixok lineáris (konvex) kombinációi is értelmesek legyenek. Először is megmutatjuk, hogy a páros összehasonlítás mátrixok osztálya nem zárt a lineáris kombinációra nézve.

3.1. állítás. *A páros összehasonlítás mátrixok osztálya nem zárt a lineáris kombinációra nézve.*

Bizonyítás. Könnyű látni, hogy ha $A^{(1)}$ és $A^{(2)}$ két tetszőleges páros összehasonlítás mátrix és i pedig egy tetszőleges index, akkor $a_{ii} = a_{ii}^{(1)} + a_{ii}^{(2)}$ számítással máris nem páros összehasonlítás mátrixot kapunk, hiszen ekkor $a_{ii} = 2$. ■

Ennél egy kicsit többet is lehetne állítani. Ha a páros összehasonlítás mátrixok halmaza nem konvex, akkor számtani átlagaik nem feltétlenül adnak páros összehasonlítás mátrixot.

3.2. állítás. *A páros összehasonlítás mátrixok halmaza nem konvex az $\mathbb{R}_+^{n \times n}$ térben.*

Bizonyítás. Legyen $A^{(1)}$ és $A^{(2)}$ két tetszőleges páros összehasonlítás mátrix, i pedig egy tetszőleges alternatíva. Legyen $A = \lambda A^{(1)} + (1 - \lambda)A^{(2)}$, ahol $\lambda \in [0, 1]$. Ekkor nyilván

$$a_{ij} = \lambda a_{ij}^{(1)} + (1 - \lambda)a_{ij}^{(2)} ,$$

$$a_{ji} = \lambda a_{ji}^{(1)} + (1 - \lambda)a_{ji}^{(2)} .$$

Mivel a két mátrix páros összehasonlítás mátrix, ezért igaz, hogy $a_{ij}^{(1)} = \frac{1}{a_{ji}^{(1)}}$ és $a_{ij}^{(2)} = \frac{1}{a_{ji}^{(2)}}$. De ahhoz, hogy A is páros összehasonlítás mátrix legyen, igaznak kell lennie, hogy $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$. Ekkor a_{ij} képzési szabályát felhasználva

$$\lambda a_{ij}^{(1)} + (1 - \lambda)a_{ij}^{(2)} = a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} = \frac{1}{\lambda a_{ji}^{(1)} + (1 - \lambda)a_{ji}^{(2)}} = \frac{1}{\frac{\lambda}{a_{ij}^{(1)}} + \frac{(1-\lambda)}{a_{ij}^{(2)}}} .$$

Mivel ennek tetszőleges λ esetén fenn kell állni, legyen $\lambda = \frac{1}{2}$. Ekkor

$$\frac{1}{2} \cdot a_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot a_{ij}^{(2)} = \frac{a_{ij}^{(1)} \cdot a_{ij}^{(2)}}{\frac{1}{2} \cdot a_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot a_{ij}^{(2)}} ,$$

amiből az következik, hogy

$$\left(a_{ij}^{(1)} - a_{ij}^{(2)}\right)^2 = 0,$$

ami pedig csak akkor áll fenn, ha $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)}$, ami sérti azt, hogy $A^{(1)}$ és $A^{(2)}$ tetszőleges. ■

Most nézzük meg, hogy hogyan szeretnénk felírni az additív modellünket. Mivel a páros összehasonlítás mátrixok egy már rendelkezésre álló, a döntési helyzetet jól leíró modellt eredményeznek, induljunk ki ezekből. Egy páros összehasonlítás mátrix a_{ij} eleme a w_i és w_j súlyok hányadosának egy közelítése úgy, hogy a reciprocitás teljesüljön. Ha additív modellt szeretnénk, akkor a modellből kapott, additív tulajdonságú B mátrix b_{ij} elemeitől azt várjuk el, hogy ugyanezen súlyok valamilyen transzformáltjait lineáris módon kezeljük, vagyis $b_{ij} = f(w_i) - f(w_j)$, ahol $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény.

Egy ilyen megoldás lehet a páros összehasonlítás mátrixok irodalmában gyakran alkalmazott $b_{ij} = \ln a_{ij}$ transzformáció. Ekkor, ha az eredeti A mátrix konzisztens volt, akkor az ismert logaritmus azonossággal a $b_{ij} = \ln w_i - \ln w_j$ alakhoz jutunk. Ez megfelel az eddigi elvárásainknak, azonban ekkor a b_{ij} értékek nem az alternatívák értékeléseinek különbségét adják vissza, hanem azok logaritmusának különbségét. Ezt nehéz lenne a valóságban alkalmazni, hiszen a döntési alternatívák logaritmusainak különbségét a döntéshozók valószínűleg nehezen becsülnék. Ezen felül, ha ezt a megoldást választanánk, akkor nem jutnánk tovább a már ismert páros összehasonlítás mátrixok nyújtotta lehetőségektől, ugyanúgy mértani középbe vezetne minden, mint eddig. Megjegyezzük, hogy nem csak a természetes alapú logaritmus használható, érdekes lehet megkeresni, hogy milyen alapú logaritmussal transzformálva kapnánk több páros összehasonlítás mátrix súlyozott

számtani átlagát visszaadó páros összehasonlítás mátrixot. Ezzel a kérdéssel a dolgot nem foglalkozik.

Egy másik megoldás, amit a későbbiekben használni fogunk, az alternatívák valós értékeinek különbségét használja. Ennek a megoldásnak az az előnye, hogy viszonylag egyszerűen lekérdezhetők a döntéshozóktól és meglehetősen egyszerűen lehet számolni a kapott eredményekkel. Ebben a megoldásban tehát $b_{ij} = l_i - l_j$, viszont ahhoz, hogy összekapcsoljuk a páros összehasonlítás mátrixokkal, és a súlyok különbségeivel, pótlólagos feltevésekkel kell élnünk. Az így meghatározott mátrix konzisztens esetben nyilván egyszerű, azonban, mint később látni fogjuk, inkonzisztens esetben problémákba ütközünk. A későbbiekben az így kapott mátrixra, mint páros összevetés mátrix hivatkozunk és most ezeknek a tulajdonságait vizsgáljuk meg.

3.2. Páros összevetés mátrixok

Először definiáljuk a páros összevetés mátrixokat.

3.3. definíció (Páros összevetés mátrix). *A páros összevetés mátrixok olyan, $B = [b_{ij}]$ négyzetes mátrixok, amelyekre igaz, hogy $b_{ii} = 0$ minden i -re és $b_{ij} = -b_{ji}$ minden i, j -re.*

3.4. *megjegyzés.* Érdemes megjegyezni, hogy a definícióból láthatóan a páros összevetés mátrixok elemeit páratlan függvényekkel transzformálva páros összevetés mátrixhoz jutunk.

A páros összevetés mátrixok definíciójuk szerint megegyeznek a ferdén szimmetrikus mátrixokkal, a teljesség kedvéért ezeknek is megadjuk a definícióját.

3.5. definíció (Ferde szimmetria). *Egy B tetszőleges mátrix ferdén szimmetrikus, ha $b_{ij} = -b_{ji}$ minden i, j -re.*

3.6. *megjegyzés.* Mivel teljesül a ferde szimmetria, ezért a döntéshozóktól $\frac{n^2-n}{2}$ darab összevetést kérünk be a valós feladatokban.

A páros összevetés mátrixokra is definiálhatjuk a konzisztencia fogalmát.

3.7. definíció (Konzisztencia). *Egy B páros összevetés mátrix konzisztens, ha minden i, j, k esetén $b_{ij} + b_{jk} + b_{ki} = 0$.*

3.8. definíció. *Egy páros összevetés mátrix inkonzisztens, ha nem konzisztens, vagyis léteznek olyan i, j, k indexek, amelyekre $b_{ij} + b_{jk} + b_{ki} \neq 0$.*

3.9. állítás. *Ha egy páros összevetés mátrix konzisztens, akkor tetszőleges $q \geq 2$ számra igaz, hogy $b_{i_1 i_2} + b_{i_2 i_3} + \dots + b_{i_q i_1} = 0$.*

3.10. *megjegyzés.* Ha $q = 2$, akkor a ferde szimmetria tulajdonságot kapjuk vissza, ami az inkonzisztens páros összehasonlítás mátrixokra is igaz.

A következő segédteétel a későbbiekben fontos lesz.

3.11. segédteétel. *Minden páros összevetés mátrix kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy páros összehasonlítás mátrixnak.*

Bizonyítás. Az állítás triviális, hiszen az exponenciális függvény a valós számok és a nem-negatív számok között egy kölcsönösen egyértelmű leképezés, vagyis például $b_{ij} = \ln a_{ij}$ és $a_{ij} = e^{b_{ij}}$ választással megtörtént a megfeleltetés. ■

A 3.11. segédteétel egyértelmű következményei, hogy egy páros összevetés mátrix akkor és csak akkor konzisztens, ha a vele megfeleltetett páros összehasonlítás mátrix konzisztens, illetve akkor és csak akkor inkonzisztens, ha a hozzá tartozó páros összehasonlítás mátrix inkonzisztens. A segédteétel sok későbbi állítás belátásához elengedhetetlen.

A páros összevetés mátrixoknak egy valós döntési problémában két megjelenési formája lehet. Az első az, amit a döntéshozótól lekérdezzük, vagyis azok az értékek, amiket a döntéshozó az éppen összevetett alternatívák valós, tehát mértékegységgel rendelkező értékeinek különbségéről gondol. Ezeket lekérdezett páros összevetés mátrixoknak nevezzük és B módon jelöljük. Ha jelző nélkül, páros összevetés mátrixokról beszélünk, akkor automatikusan lekérdezett páros összevetés mátrixot értünk rajtuk. A másik megjelenési formájukat ezekből származtatjuk, a lekérdezett páros összevetés mátrix minden elemét leosztjuk az elemek valódi, tehát mértékegységben kifejezett értékeinek összegével, ha ez nem áll rendelkezésre, akkor ennek becslésével. Az ilyen mátrixokat súlyokra felírt páros összevetés mátrixnak hívjuk és B_s módon jelöljük, elemeiket pedig b_{ij}^s módon.

Ezt a megkülönböztetést azért fontos megtenni, mert a két mátrix közül a lekérdezett páros összehasonlítás mátrixok bekérése igényel a döntéshozóktól nagyjából ugyanakkora rálátást és erőfeszítést, mint a páros összehasonlítások elvégzése. A lekérdezéshez fel kell tenni, hogy az összevetni kívánt elemek egy mértékegységben vannak kifejezve és létezik egy jól definiált 0 pontja annak a skálának, amiben az értéküket mérjük. Ezt úgy lehet elképzelni például, hogy a döntéshozó különböző lehetőségek hasznosságait veti össze úgy, hogy a lekérdezés előtt már ismeri a rögzített 0 pontot, például 0 pénzegység. A skálamegválasztása nem befolyásolja az eredményeket, bár a pénzegység esetében az is definiált.

A lekérdezett páros összevetés mátrixok tehát konzisztens esetben (vagy ha ismertek az

l_i értékek) a

$$B = \begin{pmatrix} l_1 - l_1 & l_1 - l_2 & \cdots & l_1 - l_n \\ l_2 - l_1 & l_2 - l_2 & \cdots & l_2 - l_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_n - l_1 & l_n - l_2 & \cdots & l_n - l_n \end{pmatrix}$$

módon néznek ki. Inkonzisztens esetben a fenti mátrix közelítő értékei úgy, hogy a főátlóban minden elem 0 és a főátlón kívüli elemekre (is) teljesül a ferde szimmetria.

Az AHP modell keretei között viszont súlyokat szeretnénk kapni. Ez problémás, ugyanis az additív jellegű modellünkből multiplikatív eredményeket kellene produkálnunk. Erre adnak keretet a súlyokra felírt páros összevetés mátrixok, ugyanis ha ezek konzisztensek, akkor a súlyok különbségeit tartalmazzák, inkonzisztens esetben pedig ezek közelítését, természetesen a ferde szimmetria teljesülésének szigorú feltétele mellett.

3.12. definíció (Súlyokra felírt páros összevetés mátrix). *A súlyokra felírt páros összevetés mátrixok olyan, $B_s = [b_{ij}^s]$ négyzetes mátrixok, amelyekre igaz, hogy $b_{ii}^s = 0$ minden i -re, $b_{ij}^s = -b_{ji}^s$ minden i, j -re és $-1 < b_{ij}^s < 1$ minden i, j -re.*

3.13. megjegyzés. A súlyokra felírt páros összevetés mátrixok tehát olyan páros összevetés mátrixok, amikre $-1 < b_{ij}^s < 1$ teljesül minden i, j esetén. Vagyis minden olyan tétel, ami minden páros összevetés mátrixra igaz, igaz lesz a súlyokra felírt mátrixok esetében is. Továbbá előfordulhat az is, hogy pont egy súlyokra felírt páros összevetés mátrixot kapunk eredményül egy valós lekérdezés esetén.

A konzisztens súlyokra felírt páros összevetés mátrixok tehát a

$$B_s = \begin{pmatrix} \frac{l_1 - l_1}{\sum_{i=1}^n l_i} & \frac{l_1 - l_2}{\sum_{i=1}^n l_i} & \cdots & \frac{l_1 - l_n}{\sum_{i=1}^n l_i} \\ \frac{l_2 - l_1}{\sum_{i=1}^n l_i} & \frac{l_2 - l_2}{\sum_{i=1}^n l_i} & \cdots & \frac{l_2 - l_n}{\sum_{i=1}^n l_i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{l_n - l_1}{\sum_{i=1}^n l_i} & \frac{l_n - l_2}{\sum_{i=1}^n l_i} & \cdots & \frac{l_n - l_n}{\sum_{i=1}^n l_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 - w_1 & w_1 - w_2 & \cdots & w_1 - w_n \\ w_2 - w_1 & w_2 - w_2 & \cdots & w_2 - w_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_n - w_1 & w_n - w_2 & \cdots & w_n - w_n \end{pmatrix}$$

módon adhatók meg. Inkonzisztens esetben a fenti mátrix közelítő értékei úgy, hogy a főátlóban minden elem 0 és a főátlón kívüli elemekre (is) teljesül a ferde szimmetria, továbbá fontos feltétel még, hogy mivel itt az egyre normált súlyok különbségei szerepelnek, ezért a mátrix minden elemére igaznak kell lennie, hogy $-1 < b_{ij}^s < 1$. A súlyokra felírt páros összevetés mátrixok számításához viszont szükség lesz kiegészítő információra, például ismert lehet az l_i értékek összege, vagy valamely előre megadott l_i érték. Jó megoldás lehet még az is, hogy a lekérdezésben szerepeltetjük a 0 értékű alternatívát is. Az ilyen mátrixok direkt lekérdezése viszont már több tudást, jobb képességeket igényel a döntéshozótól, éppen ezért nem ezeket, hanem a lekérdezett mátrixokat kérjük a döntéshozóktól.

Így tehát ahhoz, hogy súlyokra felírt páros összevetés mátrixot kapjunk a lekérdezettek-ből, ismernünk kell, vagy legalábbis meg kell becsülnünk a $\sum_{i=1}^n l_i$ összeget, vagy valamely l_i értékét. A dolgozatban nem foglalkozunk a becsléssel, ugyanis a becslés eredménye befolyással lehet a páros összevetésekre, így az eredményeinkre is. Könnyű meggondolni, hogy ha a becsült összeg értékét növeljük, akkor az előre rögzített különbségek arányosan egyre kevesebbet jelentenek, vagyis a súlyok $\frac{1}{n}$ -hez tartanak. Így az alábbi három kiegészítő feltételt javasoljuk:

1. Legyen $\sum_{i=1}^n l_i$ előre rögzített.
2. Legyen l_k előre rögzített, ahol k adott.
3. Szerepeljen az összevetésben egy l_0 , amiről ismert, hogy $l_0 = 0$.

Mind a három esetben meg kell gondolnunk, hogy így valóban eljuthatunk-e egy súlyokra felírt páros összevetés mátrixhoz. Tegyük most fel az egyszerűség kedvéért, hogy l_0 is szerepel a mátrixban, így annak $n+1$ sora és oszlopa van.

Legyen tehát B egy konzisztens lekérdezett páros összevetés mátrix. Adjuk össze a sorait és ekkor a

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^n b_{0j} \\ \sum_{j=0}^n b_{1j} \\ \sum_{j=0}^n b_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^n b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1) \cdot l_0 - \sum_{j=0}^n l_j \\ (n+1) \cdot l_1 - \sum_{j=0}^n l_j \\ (n+1) \cdot l_2 - \sum_{j=0}^n l_j \\ \vdots \\ (n+1) \cdot l_n - \sum_{j=0}^n l_j \end{pmatrix}$$

vektorhoz jutunk, inkonzisztens esetben ennek a közelítéséhez. Ha ezt a vektort elosztjuk $n+1$ -gyel, akkor az i -edik sorban az $l_i - \frac{\sum_{j=0}^n l_j}{n+1}$ különbség közelítését kapjuk, vagyis a vektor a sorhoz tartozó elem átlagos értéktől vett eltérésének közelítését mutatja, konzisztens esetben nyilván pontosan azt. Most pedig nézzük meg, hogy az egyes kiegészítő feltételek mellett mit kapunk.

1. Ha $\sum_{i=0}^n l_i = L$ ismert érték, akkor legyen B_s minden eleme $\frac{b_{ij}^s}{L}$, így egy súlyokra felírt páros összevetés mátrixhoz jutunk.
2. Ha l_k egy előre rögzített érték, akkor vegyük a fenti vektor k -hoz tartozó elemét. Ekkor $\sum_{j=0}^n l_j = nl_k - \sum_{j=0}^n b_{kj}^s$. Ezzel az összeggel leosztva B^s minden elemét, súlyokra felírt páros összevetés mátrixhoz jutunk.

3. Ha $l_0 = 0$ is szerepel a mátrixban, akkor az előző gondolatmenettel $\sum_{j=0}^n l_j = -\sum_{j=0}^n b_{0j}$, amivel leosztva B minden elemét, súlyokra felírt páros összevetés mátrixhoz jutunk. Ekkor w_0 , a 0 értékű alternatíva súlya 0 lesz.

Mint látható, mindegyik megoldás végén elvégzünk egy osztást, vagyis az így kapott számoknak már nincsen mértékegységük. Az eredmény akkor lesz valóban súlyokra felírt páros összevetés mátrix, ha teljesül a ferde szimmetria és minden elem -1 és 1 közé esik. Az első feltétel triviálisan teljesül, hiszen egy ilyen tulajdonságú mátrix minden elemét osztottuk le ugyanazzal a számmal. A második feltétel teljesülése már nem ilyen egyértelmű.

A második feltétel teljesüléséhez az kell, hogy a mátrixban ne legyenek abszolút értékben nagyobb elemek, mint a becsült, vagy elvárt összeg.

3.14. definíció (Átírhatóság). *A B lekérdezett páros összevetés mátrix átírható egy súlyokra felírt páros összevetés mátrixra, ha $|b_{ij}| < L$ minden i, j -re teljesül, ahol $L = \sum_{i=1}^n l_i$.*

Ha tehát a mátrix átírható, akkor a megadott három kiegészítő feltétel egyikével lehet belőle súlyokra felírt páros összevetés mátrixot számítani. Most megmutatjuk, hogy milyen elégséges feltétel adható arra, hogy egy lekérdezett páros összevetés mátrix átírható legyen. Ehhez először lépünk vissza a páros összehasonlítás mátrixokhoz.

3.15. tétel (Kéri (2011)). *Ha egy A páros összehasonlítás mátrixra igaz, hogy ha $a_{ij} > 1$ és $a_{jk} > 1$, akkor $a_{ik} > 1$ minden i, j, k -ra, akkor minden i -hez rendelhető olyan w_i érték, hogy $w_i > w_j$ akkor és csak akkor, ha $a_{ij} > 1$.*

Bizonyítás. A bizonyítás elérhető Kéri (2011) cikkében. ■

3.16. megjegyzés. Az állítás úgy is megfogalmazható, hogy ha a mátrixban nincsenek ordinálisan inkonzisztens hármások, akkor a mátrix az alternatíváknak egy egyértelmű sorrendjét reprezentálja, vagyis a legjobb elem jobb minden másnál, a második legjobb csak a legjobbnál rosszabb és így tovább, vagyis a mátrix ordinálisan konzisztens. Ha a mátrix konzisztens, akkor ordinálisan konzisztens is, de nem minden ordinálisan konzisztens mátrix konzisztens.

A tételt átírhatjuk páros összevetés mátrixokra is.

3.17. tétel. *Ha egy B páros összevetés mátrixra igaz, hogy ha $b_{ij} > 0$ és $b_{jk} > 0$, akkor $b_{ik} > 0$ minden i, j, k -ra, akkor léteznek olyan w_i értékek, hogy $w_i > w_j$ akkor és csak akkor, ha $b_{ij} > 0$.*

Bizonyítás. Feleltessük meg a B páros összevetés mátrixot egy A páros összehasonlítás mátrixnak. Ezt a 3.11. segédétel miatt kölcsönösen egyértelműen meg tudjuk tenni. Legyen minden i, j esetén $a_{ij} = e^{b_{ij}}$. Mivel $b_{ij} > 0$, $b_{jk} > 0$ és $b_{ik} > 0$ minden i, j, k -ra, ezért $a_{ij} = e^{b_{ij}} > e^0 = 1$, $a_{jk} = e^{b_{jk}} > e^0 = 1$ és $a_{ik} = e^{b_{ik}} > e^0 = 1$ minden i, j, k -ra. Ekkor az A mátrixról a 3.15. tétel miatt tudjuk, hogy léteznek olyan w_i értékek, hogy $w_i > w_j$ akkor és csak akkor, ha $a_{ij} > 1$. Ezek a w_i értékek viszont megfelelnek a tételben szereplő értékeknek, hiszen $b_{ij} > 0$ akkor és csak akkor, ha $a_{ij} > 1$. ■

Ezek szerint a következő állítást fogalmazhatjuk meg.

3.18. állítás. *Ha egy B páros összevetés mátrixban nincsenek ordinálisan inkonzisztens hármasok, akkor a mátrix átírható, vagyis valamely kiegészítő feltétel mellett átírható súlyokra felírt páros összevetés mátrixszá.*

Visszatérve a kiegészítő feltételekre, fontos megjegyezni, hogy a három eljárás helyessége még azon is múlik, hogy a döntéshozók a mátrixelemek megadásánál a tényleges értékektől ne túlzottan eltérő becsléseket adjanak. Ha jobban meggondoljuk, az átírhatóság és így az ordinális konzisztencia pontosan valami ilyesmit ragad meg. Természetesen konzisztens esetben a számítások pontos eredményeket adnak.

Most megmutatjuk, hogy a lekérdezett páros összevetés mátrixok alteret alkotnak az $\mathbb{R}^{n \times n}$ térben, a súlyokra felírt páros összevetés mátrixok pedig egy konvex halmazt. Ez azért fontos, mert ekkor számtani átlagaik is megfelelő páros összevetés mátrixot eredményeznek.

3.19. állítás. *A (lekérdezett) páros összevetés mátrixok osztálya zárt a lineáris transzformációkra, vagyis alteret alkot az $\mathbb{R}^{n \times n}$ térben.*

Bizonyítás. Könnyű látni, hogy ha $B^{(1)}$ és $B^{(2)}$ két tetszőleges páros összevetés mátrix és i és j pedig két tetszőleges alternatíva, akkor tetszőleges λ_1 és λ_2 esetén

$$\begin{aligned} b_{ii} &= \lambda_1 \cdot b_{ii}^{(1)} + \lambda_2 \cdot b_{ii}^{(2)} = 0, \\ b_{ij} &= \lambda_1 \cdot b_{ij}^{(1)} + \lambda_2 \cdot b_{ij}^{(2)} = -\lambda_1 \cdot b_{ji}^{(1)} - \lambda_2 \cdot b_{ji}^{(2)} = -b_{ji}. \end{aligned}$$

Mivel a nullmátrix (olyan mátrix, aminek minden eleme 0) is egy páros összevetés mátrix, ezért az állítás igaz. ■

3.20. következmény. *Páros összevetés mátrixokat a számtani középpel aggregálva páros összevetés mátrixhoz jutunk.*

A súlyokkal felírt páros összevetés mátrixokra azonban már csak a következő igaz.

3.21. állítás. *A súlyokra felírt páros összevetés mátrixok osztálya konvex halmazz alkot az $\mathbb{R}^{n \times n}$ térben.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz azt kell látni, hogy mivel a súlyok egyre normáltak, ezért különbségeik nem lehetnek akármilyen nagyok. Legyen $B_s^{(1)}$ és $B_s^{(2)}$ két tetszőleges súlyokra felírt páros összevetés mátrix és i és j pedig két tetszőleges index. Ekkor tetszőleges λ_1 és λ_2 esetén, ahol $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ és $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$.

$$b_{ii}^s = \lambda_1 \cdot b_{ii}^{s,(1)} + \lambda_2 \cdot b_{ii}^{s,(2)} = 0 ,$$

$$b_{ij}^s = \lambda_1 \cdot b_{ij}^{s,(1)} + \lambda_2 \cdot b_{ij}^{s,(2)} = -\lambda_1 \cdot b_{ji}^{s,(1)} - \lambda_2 \cdot b_{ji}^{s,(2)} = -b_{ji}^s .$$

Továbbá minden elemre igaz, hogy $-1 < b_{ij}^s < 1$, hiszen ha $-1 < b_{ij}^{s,(1)} < 1$ és $-1 < b_{ij}^{s,(2)} < 1$, akkor ezek konvex kombinációja is a két szám közé esik. Ezzel be is láttuk az állítást. ■

3.22. következmény. *Súlyokra felírt páros összevetés mátrixokat a számtani középpel aggregálva súlyokra felírt páros összevetés mátrixhoz jutunk.*

3.3. Súlyvektor számítás LSMA eljárással

Mostanra már sok tulajdonságát ismerjük a páros összevetés mátrixoknak, de nem tudjuk, hogy hogyan lehetne belőlük súlyvektort kapni, sőt a lekérdezett mátrixok esetében még az sincs tisztázva, hogy milyen eredményt szeretnénk kapni. Ahhoz tehát, hogy végeredménynek a már megszokott súlyvektorokat kapjunk, először le kell kérdeznünk az adatokat, amikből megkapunk egy B lekérdezett páros összevetés mátrixot. Ebből önmagában is kaphatunk eredményeket, azonban ha a célunk egy súlyvektor megadása, akkor valamely kiegészítő feltevés megléte miatt átszámolhatjuk a mátrixot egy súlyokra felírt páros összevetés mátrixszá. A páros összehasonlítás mátrixok irodalmából tudjuk, hogy ott az LLSM módszer megfelelő eredményt ad, így az a feltételezésünk, hogy itt az úgynevezett legkisebb négyzetek módszerével (LSMA, ahol az A az additív modellre utal) kellene dolgozni. Megjegyezzük, hogy itt is elképzelhetőnek tartunk más megoldásokat is, azonban azokkal a dolgozat nem foglalkozik.

Először nézzük meg, hogy milyen eredményeket kaphatunk a lekérdezett páros összevetés mátrixokból. Mint korábban láttuk, konzisztens esetben a mátrix sorainak összege az összevetett alternatívák, vagy szempontok valós értékeinek az átlagtól vett eltérését mutatják. Vagyis a sorok összegéből olyan eredményt lehet kiolvasni, hogy az egyes összevetett alternatívák mennyivel jobbak vagy rosszabbak az átlagnál. Ebből már egyértelműen kapunk egy sorrendet az alternatívákra, hiszen például az az alternatíva lesz a legjobb, amelyik pozitív irányban a legtöbbel tér el az átlagtól. Ekkor tehát a célunk egy olyan

v vektor számítása lesz, ami az alternatívák átlagtól vett eltérését mutatja, nevezzük ezt eredményvektornak. Ekkor nyilván a vektor elemeinek összege 0. Elképzelhető olyan eset is, ahol valamekkora, K összeg elosztása a cél, ekkor $\sum_{i=1}^n v_i = K$ is felírható, ekkor tehát az összeget K szintre állítjuk be.

3.23. definíció (Eredményvektor). *Az n alternatíva melletti döntéshez tartozó eredményvektornak olyan $\mathbb{R}^n$ -beli v vektorokat nevezünk, amelyekre igaz, hogy $\sum_{i=1}^n v_i = K$. Ha $K = 0$, akkor az eredményvektor az átlagtól vett eltérést mutatja. Ha $K = 1$, akkor a vektort w -vel jelöljük és súlyvektornak hívjuk.*

3.24. definíció (Legkisebb négyzetek módszere lekérdezett páros összevetés mátrixokra). *Az LSMA módszer az eredményvektort az alábbi feladat optimális megoldásából származtatja:*

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [b_{ij} - (v_i - v_j)]^2 \\ \sum_{i=1}^n v_i = K \\ v_i \in \mathbb{R}, \text{ minden } i = 1, \dots, n \text{ esetén.} \end{aligned}$$

3.25. tétel. *Az LSMA módszer használatával kapott eredményvektor a B lekérdezett páros összevetés mátrix sorelemeinek számtani közepeinek és a $\frac{K}{n}$ szám összege, vagyis*

$$v_i = \frac{K + \sum_{j=1}^n b_{ij}}{n}.$$

Bizonyítás. Mivel a feladatban szereplő célfüggvény konvex a $v_i - v_j$ különbségekben és szigorúan konvex a $v_1, \dots, v_n$ változóiban, ezért elegendő az optimalitás elsőrendű feltételeit vizsgálni, vagyis minden k -ra

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [b_{ij} - (v_i - v_j)]^2}{\partial v_k} = 0.$$

A deriválást elvégezve a

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [b_{ij} - (v_i - v_j)]^2}{\partial v_k} = -2 \sum_{j=1}^n (b_{kj} - v_k + v_j) = 2n \cdot v_k - 2 \sum_{j=1}^n b_{kj} - 2 \sum_{j=1}^n v_j = 0$$

egyenlethez jutunk. Felhasználva, hogy $\sum_{j=1}^n v_j = K$, eljutunk a

$$v_i = \frac{K + \sum_{j=1}^n b_{ij}}{n}$$

formában felírható megoldáshoz, ami pont a bizonyítandó állítás volt. ■

3.26. *megjegyzés.* A tétel az 1.10. állítás és a 3.11. segédétel egyértelmű következménye. Sőt a 3.25. tétel és a 3.11. segédétel felhasználásával az 1.10. tétel is bizonyítható.

A súlyokra felírt páros összevetés mátrixok esetében az LSMA módszerrel valódi súlyvektorokat tudunk számolni. Ekkor a kapott súlyvektor $w_i = \frac{1 + \sum_{j=1}^n b_{ij}^s}{n}$, hiszen ekkor $K = 1$.

3.4. Páros összevetés mátrixok aggregálása

Ebben a részfejezetben bemutatjuk, hogyan lehet több döntéshozó esetén a páros összevetés mátrixaikat aggregálni és abból egy közös súlyvektort képezni.

A páros összehasonlítás mátrixoknál láttuk, hogy az 1.15. tétel miatt csak a mértani középpel vett aggregálás teljesítette a reciprocitást és a pozitív homogenitást a kváziaritmetikai közepek közül. Az ott leírt 1.12., 1.14. és 1.15. tételekhez hasonlóan itt is ki tudunk mondani.

Azt mondjuk, hogy egy $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ aggregáló függvény teljesíti a ferde szimmetriát, ha

$$f(-x_1, \dots, -x_D) = -f(x_1, \dots, x_D)$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}^D$ vektorra.

3.27. tétel. *A kváziaritmetikai közepek közül csak az*

$$f(x_1, \dots, x_D) = \psi^{-1} \left[\frac{\sum_{k=1}^D \psi(x_k)}{D} \right]$$

alakú aggregáló függvények tartják meg a ferde szimmetriát, ahol $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges szigorúan monoton növekvő páratlan függvény.

Bizonyítás. Az 1.12. tétel egyértelmű következménye, hiszen az exponenciális függvénnyel a két probléma kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egymásnak. ■

Az összegzőfüggvénytől ismét elvárjuk, hogy teljesítse a pozitív homogenitást is, itt azonban ezt egy kicsit máshogy kell definiálnunk.

3.28. definíció (Additív homogenitás). *Az f aggregáló függvény rendelkezik az additív homogenitás tulajdonságával, ha tetszőleges s számra*

$$f(x_1 + s, \dots, x_D + s) = s + f(x_1, \dots, x_D)$$

teljesül.

3.29. tétel. *A kváziaritmetikai közepek közül csak az*

$$f(x_1, \dots, x_D) = \ln \sqrt[\alpha]{\frac{\sum_{d=1}^D e^{x_d}}{D}},$$

alakú ($\alpha \neq 0$) függvények és az

$$f(x_1, \dots, x_D) = \frac{\sum_{d=1}^D x_d}{D}$$

számtani közép teljesíti az additív homogenitás feltételét.

Bizonyítás. A tétel az 1.14. tétel és a 3.11. segédétel egyértelmű következménye. ■

3.30. tétel. *A kváziaritmetikai közepek között egyetlen olyan aggregálási szabály van, amely teljesíti a ferde szimmetriát és az additív homogenitást is, ez pedig a számtani közép, vagyis*

$$f(x_1, \dots, x_D) = \frac{\sum_{k=1}^D x_k}{D}.$$

Bizonyítás. A 3.27. tétel következtében a kváziaritmetikai közepek körében csak a

$$f(x_1, \dots, x_D) = \psi^{-1} \left[\frac{\sum_{k=1}^D \psi(x_k)}{D} \right]$$

függvények teljesítik a ferde szimmetriát, míg a 3.29. tétel szerint csak a hatványközepek transzformáltjai és a mértani közép teljesíti az additív homogenitást. A két alaki feltételnek egyszerre csak a számtani közép felel meg. ■

3.31. megjegyzés. A 3.30. tételt úgy is be lehetett volna bizonyítani, hogy ismét az exponenciális függvény invertálhatóságára (3.11. segédétel) és az 1.15. tételre hivatkozunk.

A későbbiekben szükségünk lesz arra is, hogy a számtani közép súlyozott változatára is igaz a 3.30. tétel. Először is tegyük fel, hogy minden x_d értékhez létezik egy $w_d > 0$ súly úgy hogy $\sum_{d=1}^D w_d = 1$. Ekkor a következő állítást fogalmazhatjuk meg.

3.32. állítás. *A $w \in \mathbb{R}^D$, $\sum_{d=1}^D w_d = 1$ súlyvektorral súlyozott számtani közép, vagyis*

$$f(x_1, \dots, x_D) = \sum_{d=1}^D w_d x_d$$

is teljesíti az additív homogenitást és a ferde szimmetriát.

Bizonyítás. Könnyű megmutatni, hogy a súlyozott számtani közép teljesíti a két alakú feltételt. Legyen s tetszőleges. Ekkor

$$f(x_1 + s, \dots, x_D + s) = \sum_{d=1}^D (w_d)(x_d + s) = s + \sum_{d=1}^D w_d x_d ,$$

hiszen $\sum_{d=1}^D w_d = 1$. Vagyis teljesíti az additív homogenitást.

Teljesíti a ferde szimmetriát is, ugyanis

$$f(-x_1, \dots, -x_D) = \sum_{d=1}^D -w_d x_d = - \sum_{d=1}^D w_d x_d = -f(x_1, \dots, x_D) .$$

Tehát beláttuk az állítást. ■

3.33. megjegyzés. Noha úgy tűnhet, hogy a 3.32. állítás ellentmond a 3.30. tételnek, azonban a fent definiált súlyozott számtani közép tetszőleges, a $w_d = \frac{1}{D}$ (minden d -re) súlyoktól eltérő súlyozással nem kváziaritmetikai közepe az $x_1, \dots, x_D$ számoknak.

Mint a korábbiakból tudjuk, a páros összevetés mátrixok konvex halmazt képeznek az $\mathbb{R}^{n \times n}$ térben. Így biztos, hogy D darab páros összevetés mátrix számtani közepe és súlyozott számtani közepe is páros összevetés mátrix. Tehát legyen most D döntéshozónk és mindegyiknek legyen egy $B^{(d)}$ páros összevetés mátrixa. A következőkben azt mutatjuk be, hogy a páros összevetés mátrixok számtani közepes aggregálása mit jelent a páros összevetés mátrixokra nézve.

3.34. tétel. *Legyenek $B^{(1)}, \dots, B^{(D)}$ páros összevetés mátrixok. Ekkor a B -vel jelölt számtani középpel aggregált páros összevetés mátrixból LSMA módszerrel kapott eredményvektor megegyezik a mátrixokból külön-külön, LSMA módszerrel számolt eredményvektorok számtani átlagával.*

Bizonyítás. Az aggregált mátrix $B = \frac{1}{D} B^{(d)}$, vagyis minden i, j esetén $b_{ij} = \frac{1}{D} \cdot \sum_{d=1}^D b_{ij}^{(d)}$. Ekkor az LSMA módszerrel a B -ből számolt eredményvektor i -edik eleme,

$$v_i = \frac{K + \sum_{j=1}^n b_{ij}}{n} .$$

Ekkor b_{ij} meghatározásából és felhasználva, hogy $v_i^{(d)} = \frac{K + \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(d)}}{n}$,

$$v_i = \frac{K + \sum_{j=1}^n \sum_{d=1}^D \frac{b_{ij}^{(d)}}{D}}{n} = \frac{\sum_{d=1}^D \sum_{j=1}^n \frac{K + b_{ij}^{(d)}}{n}}{D} = \frac{\sum_{d=1}^D v_i^{(d)}}{D} .$$

Ami pontosan az egyénekenkénti súlyvektorok számtani átlaga, vagyis beláttuk az állítást. ■

3.35. *megjegyzés.* A tétel triviálisan igaz a súlyozott számtani középére is, a már bemutatott transzformációval élve.

3.36. *megjegyzés.* A tétel triviálisan igaz a súlyokra felírt páros összevetés mátrixokra is, $K = 1$ választással.

3.5. AHP és a páros összevetés mátrixok

Mint láttuk, a súlyokra felírt páros összevetés mátrixok alkalmazása sok előfeltételt igényel, azonban ha tudjuk őket használni egy valós példában, akkor az AHP modell remek keretet ad a döntési feladat megoldására. Az eljárás pontosan ugyanaz, mint az eddig ismert, csupán a preferenciák leírására súlyokra felírt páros összevetés mátrixokat használunk és a súlyvektorok összegzésére például a már megszokott disztributív módot használjuk. Ekkor magukat a mátrixokat is tudjuk aggregálni és a döntési feladat egyetlen, súlyokra felírt páros összevetés mátrixszal reprezentálható lesz.

3.37. állítás. *Ha a súlyvektor számításra az LSMA módszert alkalmazzuk és a szempontok szerinti értékelések összegzésére a disztributív módot, akkor minden AHP keretben adott döntési feladat reprezentálható pontosan egy súlyokra felírt páros összevetés mátrixszal.*

Hasonló mondható a lekérdezett páros összevetés mátrixokról. Itt azonban a súlyok helyett az egyes szempontok átlagtól vett eltérését osztjuk szét az alattuk elhelyezkedő szempontok vagy alternatívák között az eredményvektoroknak megfelelően. Ezeket az értékeket egészen a célíg összegezzük, majd az így kapott végleges eredményvektor lesz a döntési feladat megoldása. Ezt a módszert nem részletezzük, de megfogalmazzuk a következő állítást.

3.38. állítás. *Ha az eredményvektor számításra az LSMA módszert alkalmazzuk és a rendelkezésre álló K értéket úgy osztjuk szét, hogy mindig a feljebb lévő szempont eredményvektorbeli értékének megfelelő értéket osztunk szét, akkor minden AHP keretek között adott döntési feladat reprezentálható pontosan egy lekérdezett páros összehasonlítás mátrixszal.*

3.6. Példák

3.39. *példa.* Tegyük fel, hogy egy vállalatnál erőforrásokat kell átcsoportosítani a részlegeik között. Legyenek ezek a részlegek a, b és c részlegek. Döntéshozónk megadja páronként, hogy melyik részlegből mennyi pénz szeretne átcsoportosítani.

	a	b	c
a	0	10	20
b	-10	0	16
c	-20	-16	0

Ekkor az LSMA módszer szerint $(10, 2, -12)$ módon kell az átcsoportosítást elvégeznie, vagyis a c részlegből 10 egységet az a -ba és 2 egységet a b -be. Ha összesen 120 egységet kell szétosztani az egységek között, akkor viszont $(50, 42, 28)$ módon kell elosztani a pénzt. Ha előre tudja, hogy összesen 120 egységet oszt szét, akkor a következő súlyokra felírt páros összevetés mátrixhoz jut.

	a	b	c
a	0	0,08333	0,1667
b	-0,08333	0	0,1333
c	-0,1667	-0,1333	0

Innen az LSMA eljárással a $(0,4167; 0,35; 0,2333)$ súlyvektorhoz jut, ami pont az előző vektor elosztva 120-szal.

3.40. *példa.* Folytassuk az 1.20. példát. Tegyük fel, hogy a rendelkezésünkre állnak a döntéshozótól a súlyokra felírt páros összevetés mátrixai, amik nem feltétlenül egyeznek meg a páros összehasonlítás mátrixokban szereplő preferenciákkal, csak nagyjából.

Legyenek a mátrixok a következők:

Munkabér:

	a	b	c
a	0	0,2174	0,3478
b	-0,2174	0	0,1304
c	-0,3478	-0,1304	0

Nyersanyag költség:

	a	b	c
a	0	0,25	0,5
b	-0,25	0	0,2143
c	-0,5	-0,2143	0

Bérleti költség:

	a	b	c
a	0	-0,102	-0,3469
b	0,102	0	-0,4694
c	0,3469	0,4694	0

Szemponatok:

	munkabér	nyersanyag	bérlés
munkabér	0	0,11	-0,45
nyersanyag	-0,11	0	-0,56
bérlés	0,45	0,56	0

Az LSMA módszerrel kapott súlyvektorok a következők:

- Munkabér: (0,5217; 0,3043; 0,1739),
- Nyersanyag: (0,5833; 0,3214; 0,09524),
- Bérlés: (0,1837; 0,2109; 0,6054),
- Szempontok: (0,22; 0,11; 0,67).

A disztributív módszer szerinti végleges sorrend a (0,302; 0,2436; 0,5454) vektor, vagyis a pénzt a vektor szerinti arányban kell felosztani. Ez nem sokban tér el az 1.20. példa eredményétől.

Most tudjuk aggregálni a mátrixokat is, az aggregált mátrix a következő:

	munkabér	nyersanyag	bérlés
munkabér	0	0,006959	-0,1009
nyersanyag	-0,006959	0	-0,2622
bérlés	0,1009	0,2622	0

Ebből a már ismert súlyvektor jön ki az LSMA eljárással.

3.41. *példa.* Most az 1.21. példához hasonlóan tegyük fel, hogy a szempontok nem szempontok, hanem döntéshozók (P, Q és R) és köztük ismerünk egy szavazati erőt. Ekkor az aggregált mátrix.

	P	Q	R
P	0	0,006959	-0,1009
Q	-0,006959	0	-0,2622
R	0,1009	0,2622	0

Ez pontosan megegyezik a 3.40. példában végeredményül kapottal. Az LSMA-val kapott súlyvektor szintén, a $(0,302; 0,2436; 0,5454)$ vektor.

4. fejezet

Összevetés és összehasonlítás kapcsolata

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy az eredeti AHP keretek között is miért lehet jó megoldás a számtani középpel vett összegzése a szempontok szerinti értékeléseknek, továbbá bemutatjuk azt is, hogy a mértani és a számtani összegzés eltérő eredményekre vezethet. Ennek érdekében bevezetünk a konzisztens páros összehasonlítás mátrixokra és a páros összevetés mátrixokra egy kölcsönös átszámítást.

4.1. Kölcsönös átszámítás

A páros összevetés és a páros összehasonlítás mátrixok kapcsolatára vonatkozó vizsgálatainkat a konzisztens esettel kezdjük. Tegyük fel tehát, hogy rendelkezésünkre áll egy konzisztens páros összehasonlítás mátrix, A és egy konzisztens, súlyokra felírt páros összevetés mátrix, B^s , amik ráadásul ugyanazon alternatívák súlyait írják le. Ezen súlyok, ha a megfelelő mátrix esetén LLSM és LSMA eljárással számoljuk őket, akkor triviálisan megegyeznek. Ekkor az A és a B mátrixok definíciójából egyértelmű, hogy minden i, j esetén

$$b_{ij}^s = w_i - w_j = \frac{w_i}{w_j} \cdot w_j - w_j = (a_{ij} - 1) \cdot w_j \text{ és}$$

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i - w_j}{w_j} + \frac{w_j}{w_j} = \frac{b_{ij}^s}{w_j} + 1 .$$

Inkonzisztens esetben azonban ez a számítás érdekes eredményre vezet, ugyanis ekkor a két mátrixból számított súlyvektorok nem feltétlenül egyeznek meg. A következőkben megmutatjuk, hogy ha inkonzisztens mátrixokból indulunk ki, akkor tetszőleges súlyvektor mellett a fentebb bemutatott számítás nem ad eredményül páros összevetés vagy páros összehasonlítás mátrixokat.

4.1. megjegyzés. Mint már korábban is jeleztük, az átszámítást megtehetjük volna a páros összehasonlítás mátrix elemeinek tetszőleges alapú logaritmálásával, és a súlyokra felírt páros összevetés mátrixok valamilyen alapú hatványra emelésével.

4.2. tétel. *Ha egy A páros összehasonlítás mátrix inkonzisztens, akkor a belőle tetszőleges w súlyvektorral számított B^s mátrixban nem teljesül minden elemre a ferde szimmetria, vagyis a B^s mátrix nem (súlyokra felírt) páros összevetés mátrix.*

Bizonyítás. A bizonyítás indirekten történik. Tegyük fel, hogy a B^s mátrixban mégis teljesül a ferde szimmetria. Legyen i, j tetszőleges. Ekkor két eset áll fenn, vagy $a_{ij} = 1$, vagy $a_{ij} \neq 1$.

Ha $a_{ij} = 1$, akkor $a_{ji} = 1$ és $b_{ij}^s = -b_{ji}^s = 0$, vagyis ekkor nem jutunk ellentmondásra, de mivel A nem konzisztens, ezért nem lehet minden eleme 1.

Ha $a_{ij} \neq 1$, akkor

$$(a_{ij} - 1) \cdot w_j = b_{ij}^s = -b_{ji}^s = -(a_{ji} - 1) \cdot w_i$$

fennáll. Mivel A páros összehasonlítás mátrix, ezért $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$, vagyis

$$(a_{ij} - 1) \cdot w_j = -\left(\frac{1}{a_{ij}} - 1\right) \cdot w_i ,$$

de mivel $a_{ij} \neq 1$, ezért

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} .$$

Tehát minden a_{ij} -re igaz, hogy vagy 1 vagy $\frac{w_i}{w_j}$ -vel egyenlő, tehát A nem lehetett inkonzisztens, vagyis ellentmondásra jutottunk. ■

4.3. megjegyzés. Ha A konzisztens, akkor B^s -re teljesül a ferde szimmetria, vagyis B^s (súlyokra felírt) páros összevetés mátrix.

Természetesen kimondhatjuk a tételt visszafelé is.

4.4. tétel. *Ha egy B^s súlyokra felírt páros összevetés mátrix inkonzisztens, akkor a belőle tetszőleges w súlyvektorral számított A mátrixban nem teljesül minden elemre a reciprocitás, vagyis A nem páros összehasonlítás mátrix.*

Bizonyítás. A bizonyítás indirekten történik. Tegyük fel, hogy az A mátrixban mégis teljesül a reciprocitás. Legyen i, j tetszőleges. Ekkor két eset áll fenn, vagy $b_{ij}^s = 0$, vagy $b_{ij}^s \neq 0$.

Ha $b_{ij}^s = 0$, akkor $b_{ji}^s = 0$ és $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} = 1$, vagyis ekkor nem jutunk ellentmondásra, de mivel B^s nem konzisztens, ezért nem lehet minden eleme 0.

Ha $b_{ij}^s \neq 0$, akkor

$$\frac{b_{ij}^s}{w_j} + 1 = a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} = \frac{1}{\frac{b_{ji}^s}{w_i} + 1}$$

fennáll. Mivel B^s súlyokra felírt páros összevetés mátrix, ezért $b_{ji}^s = -b_{ij}^s$, vagyis

$$\frac{b_{ij}^s}{w_j} + 1 = \frac{1}{-\frac{b_{ij}^s}{w_i} + 1} ,$$

de mivel $b_{ij}^s \neq 0$, ezért

$$b_{ij}^s = w_i - w_j .$$

Tehát minden b_{ij}^s -re igaz, hogy vagy 0 vagy $w_i - w_j$ -vel egyenlő, tehát B^s nem lehetett inkonzisztens, vagyis ellentmondásra jutottunk. ■

4.5. *megjegyzés.* Ha B^s konzisztens, akkor A -ra teljesül a reciprocitás, vagyis A páros összehasonlítás mátrix.

A tételeket logikai értelemben is meg lehetne fordítani, de ezt most nem tárgyaljuk. A tételeknek azonban ebben a formában komoly mondanivalója van. Azt mondják ki, hogy ha egy döntéshozó inkonzisztensen tölti ki valamelyik mátrixot, akkor abból a fenti transzformációt elvégezve hibás mátrixhoz jutunk. Például ha egy döntéshozó megad inkonzisztens módon egy páros összehasonlítás mátrixot, akkor legalább egy páros összevetést hibásan végzett el, vagyis létezik legalább két olyan alternatíva, amelyekről azt állítja, hogy i -t j -vel összevetve és j -t i -vel összevetve a két alternatíva értékének különbsége nem egyezik meg. Ugyanez igaz az alternatívák arányára a fordított esetben. Ez tehát azt mutatja, hogy érdemes egy valós döntési probléma esetén bekérni mind a két mátrixot, ugyanis így több információhoz juthatunk.

Aggregálásnál a következő érdekes eredményre jutottunk. Legyenek $A^{(d)}$ -k páros összehasonlítás mátrixok. Tegyük fel, hogy minden $A^{(d)}$ páros összehasonlítás mátrix konzisztens. Ekkor minden páros összehasonlítás mátrixból képezhető egy konzisztens páros összevetés mátrix, ezeket pedig a számtani középpel lehet aggregálni. Vagyis konzisztens páros összehasonlítás mátrixokat aggregálhatunk úgy is, hogy képezünk belőlük a fentebb megadott módon páros összevetés mátrixokat, majd azokat aggregáljuk a számtani középpel, majd abból számolunk súlyvektort és a kapott súlyvektorral képzünk belőle egy páros összehasonlítás mátrixot. Mivel minden $A^{(d)}$ konzisztens, ezért megtehettük volna azt is, hogy LLSM módszerrel súlyvektorokat számítunk, majd azoknak vesszük a számtani közepét. Ez nem egyezik meg szükségszerűen a mértani középpel aggregált vektorral. Az aggregált mátrix tehát így mindig az aggregált páros összevetés mátrixok visszaszámoltja lesz. Az eljárást a következő részfejezetben egy példán mutatjuk be.

A módszert ki lehet terjeszteni inkonzisztens mátrixok esetére is, ekkor azonban, mint láttuk a páros összevetés mátrixra való átszámolás során, olyan eredményt kapunk, ami sérti a ferde szimmetriát. Viszont az ilyen mátrixokra is kiterjeszthető az LSMA módszer, vagy az, hogy a sorösszeg átlagához hozzáadunk $\frac{1}{n}$ -t. A módszer azért érdekes, mert ad egy új aggregálási eljárást, ami nem feltétlenül egyezik meg a mértani közepes aggregálással, adhat más eredményt, de páros összehasonlítás mátrixot eredményez.

4.6. állítás. *D darab tetszőleges, konzisztens $A^{(d)}$ páros összehasonlítás mátrix esetén a mátrixokból LLSM módszerrel kapott súlyvektorokat számtani középpel aggregálva pontosan*

a mátrixokból egyesével képzett $B^{s,(d)}$ konzisztens súlyokra felírt páros összevetés mátrixokból az LSMA módszerrel számolt súlyvektorok számtani átlagát kapjuk eredményül.

4.7. következmény. Az így kapott $B^{s,(d)}$ mátrix számtani középpel aggregáltját (B^s) a fenti módszerrel visszaszámolva konzisztens páros összehasonlítás mátrixszá (A), a kiindulási $A^{(d)}$ mátrixok egy lehetséges, a mértani középpel vett aggregálással nem feltétlenül megegyező összegzését kapjuk.

4.2. Példák

Ebben a részfejezetben példákon keresztül bemutatjuk a fejezetben elmondottakat.

Az első példában két konzisztens páros összehasonlítás mátrixot aggregálunk mértani középpel, majd átírjuk őket páros összevetés mátrixokká és azokból is számolunk súlyvektort és aggregáljuk őket.

4.8. példa. Legyenek

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

konzisztens páros összehasonlítás mátrixok. Az LLSM eljárással a $w^{(1)} = (0,6923; 0,2308; 0,0769)$ és $w^{(2)} = (0,0769; 0,2308; 0,6923)$ súlyvektorokat kapjuk. Ezek számtani átlaga a $w = (0,3846; 0,2308; 0,3846)$ vektor.

Mértani középpel aggregálva a mátrixokat, majd LLSM módszerrel súlyvektort számolva az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

aggregált mátrixhoz és az $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ súlyvektorhoz jutunk. Ha a kiszámolt $w^{(1)}$ és $w^{(2)}$ súlyvektorokkal átszámítjuk a páros összehasonlítás mátrixokat páros összevetés mátrixokká a $b_{ij}^{s,(d)} = (a_{ij}^{(d)} - 1) \cdot w_j^{(d)}$ képlettel, akkor az alábbi mátrixokat kapjuk:

$$B^{s,(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0,4615 & 0,6154 \\ -0,4615 & 0 & 0,1538 \\ -0,6154 & -0,1538 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^{s,(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1538 & -0,6154 \\ 0,1538 & 0 & -0,4615 \\ 0,6154 & 0,4615 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a mátrixokból az LSMA módszerrel számított súlyvektorok $w^{(1)} = (0,6923; 0,2308; 0,0769)$ és $w^{(2)} = (0,0769; 0,2308; 0,6923)$. Ezek tényleg megegyeznek a páros összehasonlítás mátrixok esetén LLSM módszerrel kapott vektorokkal. A két mátrixot aggregálva a

$$B^s = \begin{pmatrix} 0 & 0,1538 & 0 \\ -0,1538 & 0 & -0,1538 \\ 0 & 0,1538 & 0 \end{pmatrix},$$

mátrixhoz és a $w = (0,3846; 0,2308; 0,3846)$ súlyvektorhoz jutunk. Ez a súlyvektor már nem egyezik meg a páros összehasonlítás mátrixok aggregálásából kapottal. Most az $a_{ij} = \frac{b_{ij}^s}{w_j} + 1$ képlettel számoljuk ki, hogy az aggregált, konzisztens B^s milyen páros összehasonlítás mátrixot ad.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{10}{6} & 1 \\ \frac{6}{10} & 1 & \frac{6}{10} \\ 1 & \frac{10}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

Az így kapott A' mátrixból pedig LLSM módszerrel számítva ugyanazt a súlyvektort kapjuk, mint amit az aggregált B^s -ből LSMA-val.

A második példában megnézzük, hogy inkonzisztens A mátrixokból indulva milyen eredményre jutunk.

4.9. *példa.* Legyenek

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

inkonzisztens páros összehasonlítás mátrixok. Az LLSM eljárással a $w^{(1)} = (0,6817; 0,2363; 0,0819)$ és $w^{(2)} = (0,0819; 0,2363; 0,6817)$ súlyvektorokat kapjuk. Ezek számítani átlaga a $w = (0,3818; 0,2363; 0,3818)$ vektor.

Mértani középkel aggregálva a mátrixokat, majd LLSM módszerrel súlyvektort számolva az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aggregált mátrixhoz és a $w = (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ súlyvektorhoz jutunk. Ha a kiszámolt $w^{(1)}$ és $w^{(2)}$ súlyvektorokkal átszámítjuk a $b_{ij}^{s,(d)} = (a_{ij}^{(d)} - 1) \cdot w_j^{(d)}$ képlettel, akkor az alábbi mátrixokat kapjuk:

$$B^{s,(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0,4727 & 0,5735 \\ -0,4545 & 0 & 0,1639 \\ -0,5965 & -0,1576 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^{s,(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1576 & -0,5965 \\ 0,1639 & 0 & -0,4545 \\ 0,5735 & 0,4727 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel ezek a mátrixok nem teljesítik a ferde szimmetriát, így nem páros összevetés mátrixok, ezért a mátrixokból a $w_i = \frac{\sum_{j=1}^n b_{ij}^s}{n} + \frac{1}{n}$ módszerrel számított súlyvektorok összege nem 1 lesz. Normáljuk le az eredményeket úgy, hogy a súlyok összege 1 legyen, vagyis osszuk le a kiszámított értékek összegével, így a $w^{(1)} = (0,6817; 0,2363; 0,0819)$ és $w^{(2)} = (0,0819; 0,2363; 0,6817)$ vektorokhoz jutunk. Ezek megegyeznek a páros összehasonlítás mátrixok esetén LLSM módszerrel kapott vektorokkal. A két mátrixot aggregálva a

$$B^s = \begin{pmatrix} 0 & 0,1576 & -0,0115 \\ -0,1453 & 0 & -0,1453 \\ -0,0115 & 0,1576 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz és a $w = (0,3818; 0,2362; 0,3818)$ súlyvektorhoz jutunk. Ez a súlyvektor már nem egyezik meg a páros összehasonlítás mátrixok aggregálásából kapottal. Most az $a_{ij} = \frac{b_{ij}^s}{w_j} + 1$ képlettel számoljuk ki, hogy az aggregált B^s milyen mátrixot ad:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1,667 & 0,9699 \\ 0,6194 & 1 & 0,6194 \\ 0,9699 & 1,667 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az így kapott A' mátrixból pedig LLSM módszerrel számítva most más súlyvektort kapunk, mint amit az aggregált B^s -ből, ez $w' = (0,381801; 0,236398; 0,381801)$. Ez a vektor már eltér az előbbtől, de most is sikerült az eredeti A mátrixokból LLSM-mel kapott súlyvektorok számtani átlagát visszakapni a számolt B^s mátrixok számtani középpel vett aggregálásával.

Összefoglalás

A dolgozatban megadtunk egy csak multiplikatív és egy csak additív elemeket tartalmazó döntési modellt, pontosabban fogalmazva kiegészítettük a már jól ismert AHP módszertant. Ezen felül beláttuk azt is, hogy még a jól megszokott AHP keretek között és az 1.15. tétel által behatárolva is lehet értelmes a számtani középpel vett szempontok szerinti aggregálás, bár csak konzisztens mátrixokra.

Az első fejezetben bemutattuk az Analytic Hierarchy Process eljárást és megmutattuk, hogy ez tartalmaz additív és multiplikatív elemeket is, vagyis ebben az értelemben véve vegyes modell. Rámutattunk arra is, hogy ha ragaszkodunk a páros összehasonlítás mátrixok használatához, akkor a súlyvektorok aggregálási módján kell változtatni ahhoz, hogy teljesen multiplikatív modellt kapjunk. Ez az 1.15. tétel miatt volt elengedhetetlen. Továbbá megmutattuk azt is, hogy ha az additív szempontok szerinti összegzéshez ragaszkodunk, akkor a mátrixokat kell lecserélni valamilyen additív eljárásra.

A második fejezetben bemutattuk a teljesen multiplikatív modellt. Új mértani módokat vezettünk be a szempontok szerinti aggregálásra és megmutattuk, hogy ezeket választva minden döntési feladat felírható egyetlen páros összehasonlítás mátrixszal.

A harmadik fejezetben bemutattuk az általunk javasolt teljesen additív modellt. Meghagytuk a szempontok szerinti összegzéseket, csupán a páros összehasonlítás mátrixokat lecseréltük páros összevetés mátrixokra. Megmutattuk, hogy ebben az additív modellben miként lehet eredményvektort és súlyvektort számolni, és beláttuk, hogy ilyen mátrixokat számtani középpel lehet úgy összegezni, hogy az eredmény is páros összevetés mátrix legyen. Mindezek felül beláttuk azt is, hogy a teljesen additív modell keretei között a döntési feladat ismét reprezentálható egyetlen páros összevetés mátrixszal.

A negyedik fejezetben összekapcsoltuk a páros összevetés és a páros összehasonlítás mátrixokat és beláttuk, hogy mind a két mátrixok érdemes lehet lekérni egy valós probléma elemzésénél. Végezetül megmutattuk, hogy az eredeti AHP modellben a szempontok szerinti additív összegzés nem feltétlenül hibás, bár inkonzisztens esetben kétséges, továbbá más eredményre vezethet, mint a multiplikatív összegzés.

További vizsgálat tárgya lehet a dolgozatban csak említett logaritmikus összekapcsolása a két modellnek. Véleményünk szerint ezzel az összekapcsolással több mindent lehetne

állítani az inkonzisztens mátrixok egymásba való átírhatóságáról. Ezen túl érdekes kérdés lehet a mértani módszerek és a páros összevetés mátrixok gyakorlati alkalmazása, pontosabban annak vizsgálata, hogy tényleg többletinformációt ad-e egy valós döntési szituációban a páros összevetés mátrix bekérése is. Végezetül megemlítenénk, hogy a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok irodalmából ismert számos tételt érdemes lehetne átültetni a páros összevetés mátrixokra.

Összegezve tehát arra jutottunk, hogy az AHP modell önmagában kissé ellentmondásos, így hasznos kiegészíteni a mértani módszerekkel és a teljesen additív modellel. A témában még sok a nyitott kérdés, amik vizsgálata további kutatások témája lehet.

Irodalomjegyzék

- Aczél J, Saaty TL (1983) Procedures for synthesizing ratio judgments. *Journal of Mathematical Psychology* 27:93–102
- Bozóki S (2012a) Egyéni páros összehasonlítás mátrixok aggregálása csoportos páros összehasonlítás mátrixszá (Jegyzet). [http://www.sztaki.mta.hu/{\sim\\$}bozoki/oktatas/fejezetekadonteselveletbol/AczelSaaty-hu.pdf](http://www.sztaki.mta.hu/{\sim$}bozoki/oktatas/fejezetekadonteselveletbol/AczelSaaty-hu.pdf)
- Bozóki S (2012b) A logaritmikus legkisebb négyzetek módszere (Jegyzet). [http://www.sztaki.mta.hu/{\sim\\$}bozoki/oktatas/fejezetekadonteselveletbol/LLSM-hu.pdf](http://www.sztaki.mta.hu/{\sim$}bozoki/oktatas/fejezetekadonteselveletbol/LLSM-hu.pdf)
- Bozóki S, Rapcsák T (2008) On Saaty’s and Koczkodaj’s inconsistencies of pairwise comparison matrices. *Journal of Global Optimization* 42(2):157–175
- Jessen B (1930) Über die Verallgemeinerung des arithmetischen Mittels. *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Szeged) 5:108–116
- Kéri G (2005) Kritériumok páros összehasonlítás mátrixokra. *Sigma* 36:139–148
- Kéri G (2011) On qualitatively consistent, transitive and contradictory judgment matrices emerging from multiattribute decision procedures. *Central European Journal of Operations Research* 19(2):215–224
- Kindler J, Papp O (1977) Komplex rendszerek vizsgálata – Összemérési módszerek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- Rapcsák T (2007) Többszemponútú döntési problémák (Elektronikus jegyzet).
- Saaty TL (1980) The analytic hierarchy process. McGraw-Hill, New York
- Saaty TL (1986) Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process. *Management Science* 32:841–855
- Saaty TL (1990) The analytic hierarchy process. University of Pittsburgh, Pittsburgh

Saaty TL (1994) How to make a decision: the analytic hierarchy process. Interfaces 24:19–43

Temesi J (2002) A döntéselmélet alapjai. Aula kiadó, Budapest