

Miskolci Egyetem



Mechanikai Tanszék



KERÉKPÁRVÁZAK DINAMIKAI ÉS SZILÁRDSÁGTANI ÖSSZEHASONLÍTÓ VIZSGÁLATA ÉS VÉGESELEMES ANALÍZISE

TDK dolgozat

Csorba Iván VLGSQX

Konzulens: Dr. Baksa Attila

Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Mechanikai Tanszék

Miskolc, 2013. Április 29.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1. A kerékpár történetének áttekintése	3
1.2. A felhasznált szerkezeti anyagok, anyagjellemzők	3
1.3. Az acél mint kerékpárváz-anyag	4
1.4. Az alumínium mint kerékpárváz-anyag	4
2. A vizsgált vázak ismertetése	5
2.1. A vizsgált vázgeometriák ismertetése	5
2.2. A felhasznált szerkezeti anyagok	7
3. A végeelem-modell felépítése során használt rúdmodell bemutatása	7
3.1. Az Euler-Bernoulli-féle rúdmodell:	7
3.2. A virtuális munka elv az Euler-Bernoulli rúdmodellhez:	9
3.3. Rúdmodellek az Abaqus programban	11
3.4. Hermite-féle interpolációs polinomok	11
4. A dinamikai végeselemes analízis alapjai	12
4.1. Rezgésstan alapjai	12
4.2. Virtuális munka elv	14
4.3. Végeelem módszer alkalmazása	15
4.4. Illesztés	16
4.5. Sajátértékfeladat	17
5. Dinamikai vizsgálat	17
5.1. A geometria felépítése	17
5.2. A statikus terhelés	18
5.3. Egyenes ütközés terhelései	18
5.4. Ferde ütközés terhelései	19
5.5. A rúdelemek, a háló felépítése	22
5.6. A vázszerkezetek végeselemes vizsgálata	22
5.7. Egyenes ütközés	24
5.8. Ferde ütközés	28
5.9. Statikus alapterhelés	30
5.10. A rúderők és nyomatékok	32
5.11. A feszültségek	32
6. Összefoglalás	33

1. Bevezetés

1.1. A kerékpár történetének áttekintése

A kerékpár első említése 1418-ból származik, amikor *Giovanni Fontana* megépítette az első emberi hajtású (négykerekű) kerékpárt. Ezután legközelebb 1493-ból került elő *Leonardo da Vinci* kezdetleges kézi vázlata, amelyet egyesek *Gian Giacomo Caprottinak*, *da Vinci* tanítványának tulajdonítanak. Több ízben felmerült erről a vázlatról, hogy hamisítvány. A következő hiteles forrás nagyobb szünet után a 19. század elejéről, 1817-ből származik. Ez *Karl von Drais* német báró nevéhez fűződik, habár ez hajtómechanizmus nélküli, lábbal hajtott konstrukció volt. *Karl von Drais* a ló alternatívájának szánta a járművet, mivel az 1816-os rossz termés a lovak tömeges pusztulását okozta. 1819-ben Angliában *Denis Jonson* megalkotta *Drais* kerékpárjának elegánsabb változatát, ami egy éven belül nagy divat lett Londonban. Ez a kialakítás ihletett meg 1863-ban egy francia ötvöst, hogy elkészítse az általunk ismert hajtással rendelkező első kerékpárt. 1863-tól rövid időre, 1870-ig volt divatban az úgynevezett „csontrázó”, amely nevét a merev vázának, szinte kizárólag derékszögekből felépülő geometriájának, acél keréktárcsáinak és a macskaköves utaknak köszönhetette. Ez már rendelkezett fix, közvetlen, az első kerékághoz kapcsolt egysebesű hajtással. Az 1870-es évekből változtatás azon az ötleten alapult, hogy a sebesség fokozása úgy érhető el, ha a hajtott első kerék átmérőjét megnövelik, a hátsó kereket pedig a súlycsökkentés érdekében kicsinyítik. Az első kerék méretének határt szabott a kerékpáros lábának a hossza. Így született meg a velocipédként ismert nagykerékű bicikli. (Jelenlegi állás szerint a feltalálója a francia *Eugen Meyer*, akihez a küllős kerék alkalmazása is kötődik, de vitathatatlan tény, hogy több újítás *James Starley* nevéhez fűződik, mint például a tömör gumi használata, illetve az üreges keresztmetszetű csövek alkalmazása). Mivel ezen a konstrukción a kerékpáros magasan ül, és nagy sebességre képes a jármű, ezért leginkább a „kalandvágó ifjúság” használta, az úri közlekedésben hasonló kialakítású 3 vagy 4 kerekű jármű volt jellemző. 1879-ben *Henry Larson* feltalálta az első lánchajtásos kerékpárt. Ez hasonló kialakítás mellett már a kis hátsó kereket hajtotta meg, azonban bukásra volt ítélve a piacon.

1885-ben *John Kemp Starley* (*James Starley* unokaöccse) megalkotja az első sikeres lánchajtású kerékpárt „*Rover*” néven. A fő különbség, hogy ez már azonos méretű kerekekkel rendelkezik. Ezekben az években kezdik el használni a tömör gumi helyett a ballonos gumit, illetve a „gyémánt” alakú vázkialakítás is megjelenik.

Az 1900-as évek elején mind Európában, mind Észak-Amerikában elterjed és nagy népszerűségnek örvend a kerékpár. Ezt az 1910-es évek közepétől a közlekedésből kiszorítja az automobil, ezért a kerékpár elveszti eredeti jelentőségét. Amerikában főként gyerekjátékként gyártják, Európában megjelenik a kerékpár versenyszerű illetve szabadidős felhasználása. Megalkotják a több sebességű kerékpárokat (eleinte a sebességváltás a kerék fordítva visszahelyezésével történt).

1950-ben *Tullio Campagnolo* feltalálja a bovden működtetésű váltót. Az ő nevéhez további 134 szabadalom kapcsolódik, mely mind a kerékpárt tökéletesíti. 1965-re a kerékpárok nagy része 10 sebességű lesz.

Az 1970-es évektől a kerékpár népszerűsége töretlenül nőtt, részben a tudatos környezet- és egészségvédelem, részben a növekedő olajárak hatására. 1977-ben a Marin Co. kiadja a világ első hegyikerékpárját [6].

Az 1980-90-es években megjelennek a különböző rugós csillapítású és geometriájú hegyikerékpár vázok, a hidraulikus fékrendszerek, és a vázak szerkezeti anyagainak a skálája is lényegesen kibővül. Az eredeti szerkezeti acél mellett megjelenik az alumínium, a különböző magnézium- és titánötvözetek és a kompozitok felhasználása is.

1.2. A felhasznált szerkezeti anyagok, anyagjellemzők

A váz anyaga és geometriája a kerékpár számos tulajdonságát befolyásolja. A három legfontosabb szempont, hogy az anyag merevsége, súlya és teherbírása megfelelő legyen. Leggyakrabban az anyagválasztás tehető felelőssé az olyan váratlan hibákért, mint a kifáradás, a repedés vagy a törés. Az anyag rugalmassági modulusának elég magasnak kell lennie a megfelelő merevség biztosítása érdekében, de alacsony modulusú anyagok használata is megengedhető a vázat alkotó csövek keresztmetszetének illetve falvastagságának változtatásával. Fontos anyagtulajdonság továbbá a sűrűség, mivel a sűrűség csökkenésével leggyakrabban csökken a rugalmassági modulus is, ezáltal rontva a váz csillapító képességét. Kis sűrűségű

és modulusú anyagok használata esetén indokoltá válhat az aktív csillapító elemek alkalmazása is. A 20. század vége felé megjelennek ezen a területen is a gyantával erősített, karbonszálalás anyagok, amelyek megfelelő merevséget és teherbírást biztosítanak a kevlárhoz hasonló szívósság mellett. Ezen anyagok felhasználásával majdnem teljesen szabad geometria valósítható meg. Az új „szövet” anyagok, mint például a Zylon alkalmasak különleges geometriájú vázak gyártására.

Mindenesetre a múlt században használt legfőbb kerékpárváz-anyag az acél. Az olcsó kerékpárok alacsony, a közepes árkategóriájúak közepes karbontartalmú acélokból készülnek, míg a felső kategóriás acél kerékpárokat pedig közepes szénttartalmú króm- vagy magnézium-molibdén ötvöztetett acélokból gyártják [2].

1.3. Az acél mint kerékpárváz-anyag

Az acél a vas legfontosabb ötvözte, fő ötvözője a szén. Majdnem minden iparágban az acél a legtöbbet alkalmazott és kutatott, illetve legjobban ismert szerkezeti anyag. Tulajdonságai széles körben módosíthatók a szénttartalom változtatásával, ötvözéssel, hőkezeléssel. A kerékpárgyártásban alkalmazott acélsövek nagyon széles skálája érhető el. További tulajdonságmódosításokra használnak más ötvözőket, ezzel befolyásolják az anyag szilárdságát, képlékenységet, keménységet, rugalmasságát, hajlékonyságát, hő- sav- és korrózióállóságát és kopásállóságát. Leggyakoribb ötvözője a nikkel és a mangán, ezek szilárdságnövelő feladatot látnak el. A szilárdságnövelés mellett a nagy mennyiségű nikkel és króm az acélt rozsdamentessé, korrózióállóvá teszi.

Az acélok tulajdonsága befolyásolható hőkezelésekkel is. Ezeknek célja a fémek különböző tulajdonságainak, esetünkben főként mechanikai tulajdonságainak változtatása. A hőkezelések 3 elemi részből állnak. A hevítés, a hőtartás és a (megfelelő sebességű) hűtés.

Az acél előnye, hogy jó a ciklikus kifáradása, így az alumíniumnál hosszabb élettartamot garantál. Szakítószilárdsága relatíve nagy, képes nyúlásra, aminek eredményeképpen hamarabb hajlik, mint törik. Megmunkálása viszonylag könnyű, vékony falú csövek húzhatók belőle. Az acél ára a szénttartalomtól és az ötvöztéstől függően változik, de általánosan olcsóbb az alumíniumnál. Hátrányként nagy sűrűsége és korróziója említendő. Erre a célra egyik leggyakrabban használt acélanyag a króm-molibdén ötvöztetett acél [2]. A végelem modellek felépítésénél mi is egy ilyen (lásd 1. táblázatban) anyagot vizsgálunk.

1.4. Az alumínium mint kerékpárváz-anyag

Az alumínium könnyűfém. Sűrűsége közel harmada az acélénak, ezáltal könnyebb vázak készíthetők belőle, a nagyobb falvastagságok ellenére. Az alumínium puha fém, kis szakítószilárdsággal, így javítani kell a mechanikai tulajdonságait. Ez jellemzően ötvözéssel, edzéssel és hőkezeléssel érhető el. Az alumínium felszínén levegő hatására összefüggő oxidréteg keletkezik. Az oxidréteg mesterségesen is vastagítható (és színeztető), ez az eloxálás. Kristályrácsa lapközepes köbös, nem mágnesezhető, szakítószilárdsága kicsi, rosszul önthető. A gyártók az 1980-as évek második felében rájöttek, hogyan lehetséges alumíniumból merevebb, könnyebb és erősebb vázat készíteni az acélvázaknál (habár a kis- és nagy ciklusú fárasztó terhelések esetén az acél a mai napig jelentősen jobban teljesít). További előnye az alumíniumnak, hogy a szükséges nagy csőátmérő és a megnövelt falvastagság megkíméli a gyártókat a túl vékony, gyűrődésre, ráncosodásra hajlamos csőfal használatától. Az alumínium-ötvözeteknél jelentős előrelépést mutat a fém mátrixú kompozit, az MMC (metal matrix composit), ami alumínium- és kerámiapor mint például a szilícium-karbid vagy alumínium-oxid keveréke. Az alumínium kerámiákkal való keverése megnöveli mind az anyag erősségét, mind a modulusát, bár képlékenysége, gyártás során fontos alakíthatósági tulajdonságai csökkennek [2].

A kerékpáripárban a leggyakrabban használt alumínium-ötvözet a 6061 és a 7005, és ezeknek különböző változatai.

A végelem modell felépítése során egy népszerű anyaggal, az AA 7005-T6 jelű (lásd 1. táblázatban) alumíniummal számolunk.

2. A vizsgált vázak ismertetése

2.1. A vizsgált vázgeometriák ismertetése

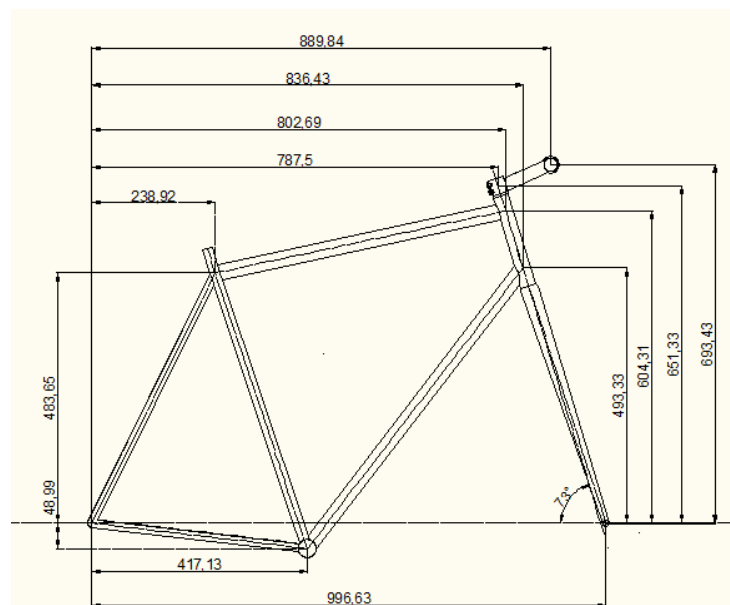
A kerékpárok vázainak kialakításai meglehetősen változatosak, ám nagy általánosságban elmondható, hogy a legnagyobb népszerűségnek az úgynevezett „gyémánt” forma örvend, amely egy első- és egy hátsó háromszögből áll. Az általunk vizsgált két vázkialakítás is ezt a leggyakrabban alkalmazott vonulatot követi. A két kerékpárváz elsősorban felhasználásukban különbözik. Míg az egyiket országúti használatra, addig a másikat hegyi valamint terep felhasználásra szánták.

Az országúti geometriát egy valóságos kerékpár alapján építettük fel. Ezen kerékpárok ismerve a nagyobb nyeregcsőhossz, illetve a felsőcső kis mértékű emelkedése. A nyeregcső hossza az a jellemző méret, amely alapján a vázak méretét szokás megadni. Különbségüket szemléltethetjük azzal a példával, hogy egy 170 cm magas embernek országúti kerékpárból 21 inch-es, hegyi kerékpárból pedig 17–18 inch-es vázra van szüksége. A felépítő csövek falvastagsága országúti kerékpárnál némileg kisebb, mint a hegyi kerékpár esetén. A választott geometria a *Kirk Lee Bicycles* egy országúti váza, melynek megvalósított változata az 1. ábrán látható.



1. ábra. Az országúti kerékpár kialakítása [8]

A kerékpárgyártó oldalán elérhető méretek alapján készítettünk egy vonalas CAD ábrát, amin feltüntethetők a vázat alkotó csövek találkozási helyeinek koordinátái, amelyek alapján el tudjuk készíteni a végelelemes rúdmodell geometriáját is.



2. ábra. Az országúti váz egyszerű CAD rajza

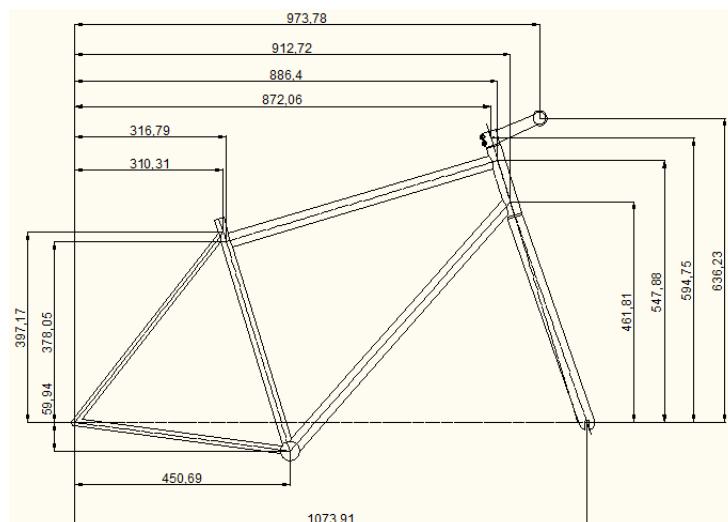
Az 2. ábrán feltüntetett értékek mm-ben illetve fokban értendők. A térbeli modell felépítéséhez szükséges még a hátsókerék tengelyénél a villasaru távolságának ismerete, ez rendszerint 135 mm .

A másik vizsgált szerkezet egy hegyikerékpár-váz, amelynek modellét az előzőhöz hasonlóan egy valóságos kerékpár alapján készítettük el. Különbség az előzőhöz képest, hogy a láncvilla, a nyeregcső és a felsőcső nem egy pontban találkozik. Eltérők továbbá a váz meghatározó szögei, ez az országútihoz képest jelentősen „laposabb” kialakítást eredményez. Meredekebb a felsőcső, ezáltal rövidül meg a nyeregcső, a teljes vázszerkezet merevsége ezzel csökken. Rázósabb terepviszonyok közötti alkalmazásra szánt szerkezet, így reményeink szerint az adott erők hatására nagyobb alakváltozások jönnek létre, mint a merevebb országúti kerékpárnál. A valós vázgeometria a 3. ábrán látható.



3. ábra. A hegyi kerékpár valóságos kialakítása [13]

A gyártó oldalán található adatokból ismételtelen rajzolunk egy egyszerű ábrát, amelyen lemérhetők a modell felépítéséhez szükséges pontok koordinátái. Általában a kerékpárnak csak a jellemző méreteit tüntetik fel a gyártók, ami alapján nem határozható meg egyértelműen az adott kerékpár felépítése.



4. ábra. A hegyi kerékpárváz egyszerű CAD rajza

Mindkét esetben a rendelkezésre álló adatokat alkalmazva, illetve némileg kiegészítve rajzoltuk meg a végeelem-modell alapjául szolgáló CAD ábrát. A villasaruk távolsága ezúttal is 135 mm . A hegyikerékpát méretei a 4. ábrán láthatók.

2.2. A felhasznált szerkezeti anyagok

A vizsgálat során három, jellemzően kerékpárvázaknál alkalmazott anyaggal vizsgáljuk meg az egyes geometriák tulajdonságait. Ezen anyagok tulajdonságaihoz a [14] oldal segítségével jutottunk hozzá, lásd 1. táblázat.

1. táblázat. A sorozatszámításokhoz felhasznált anyagok

Megnevezés	Rugalmassági modulus	Poisson tényező	Sűrűség	Folyáshatár
AISI 4130 krom-molibden acél	200 [GPa]	0,3 [–]	$8030[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$	360,6[MPa]
AA 7005-T6 alumínium ötvözet	75 [GPa]	0,33 [–]	$2800[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$	315[MPa]
ASTM AZ91C-T6 magnézium ötvözet	44,8 [GPa]	0,35 [–]	$1810[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$	195[MPa]

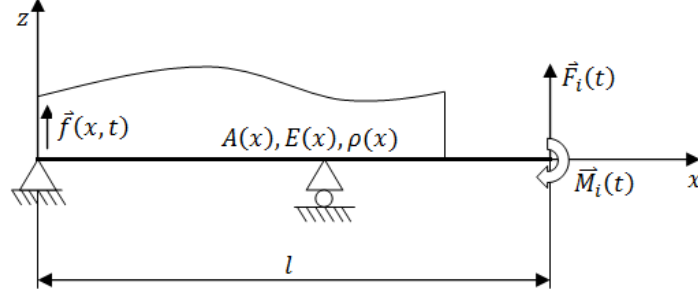
3. A végeelem-modell felépítése során használt rúdmodell bemutatása

A végeelemes módszer egy numerikus módszer, parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására, tömör ismertetése a [1], [9] alapján készült. Esetünkben a modell felépítéséhez Euler-Bernoulli-féle rúdmodellt alkalmazunk, így a végeelem módszer alkalmazását ezen keresztül mutatjuk be.

3.1. Az Euler-Bernoulli-féle rúdmodell:

Ezen rúdmodell alkalmazása esetén feltételezzük, hogy a terhelt rúd középvonala egyenes, terhelése pedig merőleges a rúd középvonalára. Ilyen módon a rúd igénybevétele hajlítás és nyírás. A rúd anyagát izotropnak és lineárisan rugalmasnak feltételezzük. Az alakváltozás közben fellépő hőhatásokat elhanyagoljuk. A rúd keresztmetszetei az alakváltozás során merev lapként fordulnak el és merőlegesek maradnak a megváltozott középvonalra.

Következményképpen az x lapon a z irányban, illetve a z lapon az x irányban fellépő fajlagos nyírási alakváltozás zérus, azaz $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0$. Ezért fennáll, hogy az ε_y és ε_z főalakváltozások, valamint γ_{xy} nyírási alakváltozás szintén zérus a rúdmodell alapfeltételezéseiből kiindulva, azaz $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$. Ennek megfelelően az egyetlen zérustól különböző alakváltozási koordináta $\varepsilon_x \neq 0$.



5. ábra. A vizsgált hajlított-nyírt tartó

Az 5. ábra szerint $A(x)$ [mm²] jelöli a tartó(rúd) változó keresztmetszetét, $E(x)$ [$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \text{MPa}$] a rugalmassági modulusát, $\rho(x)$ [$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$] a rúd anyagára jellemző sűrűséget. Továbbá $f(x, t)$ a rúdra ható vonal mentén megoszló terhelés, $F_i(t)$ és $M_i(t)$ pedig a rúd $x = l$ peremére ható koncentrált erő, illetve nyomaték.

A rúdmodell egyetlen független alapismeretlene a $w(x, t)$ (z irányú) elmozdulás. A keresztmetszet ϕ szögelfordulása ebben a rúdmodellben nem független alapismeretlen, a $w(x, t)$ elmozdulás x szerinti deriváltjaként számítható:

$$\gamma_{xz} = \phi(x, t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0 \rightarrow \phi(x, t) = -\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}. \quad (1)$$

A rúdmodell egyenletrendszere kinematikai egyenletből, anyagegyenletből, valamint a mozgásegyenletekből áll. Kinematikai egyenlet értelmében a kapcsolat az elmozdulás és az alakváltozások között a következő:

$$\kappa(x, t) = \phi'(x, t) = -w''(x, t). \quad (2)$$

ahol κ a középvonal görbülete és a $'$ a helykoordináta szerinti deriválást jelöli.

Az egyszerű Hooke-törvény alapján felírjuk az anyagegyenletet:

$$M_{hy}(x, t) = E(x)I_y\kappa(x, t), \quad (3)$$

ahol M_{hy} az y tengely irányú csavarás, I_y pedig az y tengelyre vonatkozó másodrendű nyomaték.

A rúd mozgásegyenletei:

$$-T'_z(x, t) + f_z(x, t) = \rho(x)A(x)\ddot{w}(x, t), \quad (4)$$

$$M'_{hy}(x, t) + T_z(x, t) = 0, \quad (5)$$

ahol $\dot{}$ az idő szerinti deriválást jelöli. Az Euler-Bernoulli rúdmodellben a szöggyorsulás hatását elhanyagoljuk, így $\ddot{\phi} \approx 0$.

Az (2)-(5) egyenletekből következően felírhatjuk a $w(x, t)$ elmozdulásmezőre vonatkozó alapegyenletét:

$$-\frac{\partial}{\partial x^2} \left[E(x)I_y(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + f_z = \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}. \quad (6)$$

A kezdeti feltételek a $t = 0$ időpillanatban meghatározzák a kezdeti elmozdulást és a kezdeti sebességet:

$$w(x, 0) = w_0 \quad \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0. \quad (7)$$

A peremfeltételek előírását adnak az $x = 0$ és/vagy $x = l$ peremen w első három helykoordináta szerinti deriváltjára:

$$w'(0, t) = -\phi(0, t), \quad (8)$$

$$w''(0, t) = -\frac{1}{AE} M_{hy}(0, t), \quad (9)$$

$$w'''(0, t) = \frac{1}{AE} T_z(0, t), \quad (10)$$

melyek a szögelfordulásra, a hajlítónyomatékokra és a nyíróerőre jelentenek előírásokat.

3.2. A virtuális munka elv az Euler-Bernoulli rúdmodellhez:

A rúdra egy vizsgált $t > 0$ időpillanatban ráhelyezünk egy virtuális $\delta w(x)$ és $\delta \phi(x)$ elmozdulás- és forgásmezőt, közben a rúd belső- és külső erőrendszere nem változik. Legyen $\delta w(x)$ és $\delta \phi(x)$ differenciálható és elégítse ki a homogén kinematikai peremfeltételeket. A (8) egyenlet alapján $\delta w' = -\delta \phi$.

A virtuális munka elv az Euler-Bernoulli rúdmodellhez:

- a belső ER virtuális munkája:

$$\delta W_b = - \int_0^l EI_y w'' \delta w'' dx = \int_{(V)} \sigma_x \delta \varepsilon_x dV. \quad (11)$$

- a külső ER virtuális munkája:

$$\delta W_k = \int_0^l f_z \delta w dx + \sum_{i=1}^n (F_i \delta w_i + M_i \delta \phi_i) \quad \delta \phi_i = -\delta w'_i. \quad (12)$$

- a kinetikai ER virtuális munkája:

$$\delta W_m = \int_0^l \rho A \ddot{w} \delta w dx. \quad (13)$$

Ebből az alapegyenlet gyenge, más néven variációs alakja:

$$\delta W = - \int_0^l EI_y w'' \delta w dx + \int_0^l f_z \delta w dx + \sum_{i=1}^n (F_i \delta w_i + M_i \delta \phi_i) - \int_0^l \rho A \ddot{w} \delta w dx. \quad (14)$$

Ha $w(x, t)$ és $\phi(x, t)$ a kezdeti-peremértékfeladat megoldása, akkor a rúd belső és külső erőrendszerének virtuális munkája bármely $\delta w(x)$ és $\delta \phi(x)$ virtuális mezőnkön megegyezik a kinetikai erőrendszer virtuális munkájával minden $t > 0$ időpillanatban

Ha a kinematikailag lehetséges $\delta w(x)$ és $\delta \phi(x)$ mezőkre nézve a $\delta W = 0$ egyenlőség bármely $\delta w(x)$ és $\delta \phi(x)$ virtuális mezőre fennáll, akkor $w(x, t)$ és $\phi(x, t)$ a kezdeti peremérték feladat egyetlen megoldása.

Időtől független esetben $\ddot{w} = -\ddot{\phi} = 0$. Ezért $\delta W_m = 0$, így a virtuális munka elv alakja $\delta W = \delta W_b + \delta W_k = 0$ lesz.

A virtuális munka elv alkalmazása az i -edik elemre:

- a belső ER virtuális munkája az i -edik elemre:

$$\delta W_{bi} = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} E^i I^i \frac{\partial^2 w^i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w^i)}{\partial x^2} dx = -E^i I^i \frac{h^i}{2} \int_{-1}^1 (w_i)'' (\delta w_i)'' d\xi. \quad (15)$$

Mátrixos alakban felírva a belső erőrendszer virtuális munkáját:

$$\delta W_{bi} = - \begin{bmatrix} \delta w_i & \delta w_{i+1} & \delta \phi_i & \delta \phi_{i+1} \end{bmatrix} \mathbf{K}^i \begin{bmatrix} w_i \\ w_{i+1} \\ \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{bmatrix} = -\delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}^i \mathbf{u}_i, \quad (16)$$

ahol $\mathbf{u}_i$ az elem csomóponti általánosított elmozdulás vektora, $\mathbf{K}^i$ pedig az i -edik elem merevségi mátrixa

- a külső ER virtuális munkája az i -edik elemre:

$$\delta W_{ki} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_z \delta w dx = F_i \delta w_i + F_{i+1} \delta w_{i+1} + M_i \delta \phi_i + M_{i+1} \delta \phi_{i+1} = \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{F}^i. \quad (17)$$

ahol $\mathbf{F}^i$ az elem csomóponti terhelésvektora

- a kinetikai ER virtuális munkája az i -edik elemre:

$$\delta W_{mi} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho^i A^i \ddot{w}^i dx = \rho^i A^i \frac{h_i}{2} \int_{-1}^1 \ddot{w}^i \delta w^i d\xi = \delta \mathbf{u}^i{}^T \mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{u}}^i, \quad (18)$$

ahol $\mathbf{M}^i$ az elem tömegmátrixa, $\ddot{\mathbf{u}}^i$ pedig az elem csomóponti általánosított gyorsulás vektora. Virtuális munka elv az i -edik rúdelemre:

$$\delta W^i = \delta W_b^i + \delta W_k^i - \delta W_m^i = -\delta \mathbf{u}^i{}^T \{ \mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{u}}^i + \mathbf{K}^i \mathbf{u}^i - \mathbf{F}^i \} = 0. \quad (19)$$

A virtuális munka elv mátrixos alakja a teljes rúdra:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \delta W^i = -\delta \mathbf{u}^i{}^T \{ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F} \} = 0, \quad (20)$$

ahol $\mathbf{K}$ a teljes rúd globális merevségi mátrixa, $\mathbf{M}$ a teljes rúd globális tömeg mátrixa, $\mathbf{F}$ pedig a teljes rúd globális terhelési vektora.

Időtől független esetben a kinetikai erőrendszer munkája $\delta W_m = 0$, így a végeelem-modell alapegyenlete a következőképpen alakul:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F} = 0. \quad (21)$$

A végeelemes megoldás menete:

- a kinematikai peremfeltételek figyelembe vétele $\mathbf{u}$ és $\delta \mathbf{u}$ megfelelő elemeire, $\delta \mathbf{u}$ -tetszőleges
- $\delta \mathbf{u}$ tetszőlegessége alapján a következő közönséges differenciál egyenletrendszer adódik:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (22)$$

melynek megoldása időbeli integrálással és az algebrai egyenletrendszer megoldásával lehetséges.

- megoldás $\mathbf{u}(t)$ csomóponti értékekre.

3.3. Rúdmodellek az Abaqus programban

Az Abaqus-ban a rúdelemek jelölése B betűvel (beam) kezdődik. A második karakter jelöli a dimenziót: 2 két dimenziós-, 3 háromdimenziós elemek esetén. A harmadik karakter az interpolációt, az elmozdulásmező közelítését jellemzi: 1 a lineáris, 2 a másodfokú, 3 pedig a harmadfokú közelítést jelöli. A lineáris, négyzetes és köbös beam elemek két és három dimenzióban egyaránt elérhetőek.

Háromdimenziós beam elemek esetén minden csomópont hat szabadságfokkal rendelkezik: három translációs és három rotációs szabadságfokkal. A nyitott keresztmetszetű beam elemek esetén az Abaqus Standard-ban rendelkezésre áll egy további, hetedik szabadságfok, amely a keresztmetszeti vetemedést jellemzi.

A lineáris beam elemek (B21 és B31) és a négyzetes (B22 és B32) elemek a nyírási deformációt és a véges tengelyirányú feszültségeket veszik figyelembe, ezért alkalmasak karcsú és vaskos rúdszerkezetek modellezésére egyaránt.

A harmadfokú beam elemek (B23 és B33) nem veszik figyelembe a nyíró rugalmasságot, és feltételezik hogy az axiális feszültségek kicsinyek, ezért ez az elemtípus karcsú, vékony falú gerendák modellezésére alkalmas. Habár nagy elmozdulások és elfordulások esetén előfordulhat számottevő axiális feszültség is. Az Abaqus a lineáris és kvadratikusan beam elem több változatát biztosítja amik alkalmasak vékony falú és nyitott keresztmetszetű (B31OS-B32OS) rúdszerkezetek modellezésére. Ezek az elemek modellezik az elhajlás és csavarás hatását nyitott keresztmetszetű rudaknál, mint például az I és U profilú szerkezetek.

Használhatunk továbbá hibrid Beam elemeket is, amelyeket nagyon karcsú „rudak” esetén alkalmaznak, mint például tengeri olajfúró létesítmények rugalmas hevederjei. Három dimenziós nyírt-deformált beam elemek esetén a megjelenő feszültségkomponensek a rúd irányú- (σ_{11}) és a nyírási feszültség (σ_{12}). A karcsú (harmadfokú) beam elemek esetén csak az axiális értékek veendők figyelembe[5].

3.4. Hermite-féle interpolációs polinomok

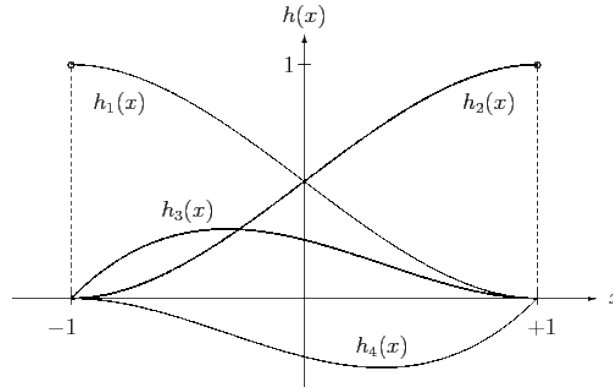
A végeelem módszer alkalmazásával a csomópontokban kapunk elmozdulási értékeket, ezek az elemek hosszán nem ismertek. Az elmozdulásmező közelítése az úgynevezett mesterelem segítségével történik. Az elmozdulásmező harmadfokú közelítéséhez a Hermite-féle interpolációs polinomokat használjuk. Harmadfokú interpoláció szükséges ahhoz, hogy legalább lineáris nyíróerőt kapjunk, továbbá az elmozdulásmező folytonos approximációja érhető el.

$$H_1(x) = \frac{1}{4} (2 - 3x + x^3) \quad (23)$$

$$H_2(x) = \frac{1}{4} (2 + 3x - x^3) \quad (24)$$

$$H_3(x) = \frac{1}{4} (1 - x + x^2 + x^3) \quad (25)$$

$$H_4(\xi) = \frac{1}{4} (-1 - x + x^2 + x^3) \quad (26)$$



6. ábra. A Hermite-féle interpolációs polinomok[15]

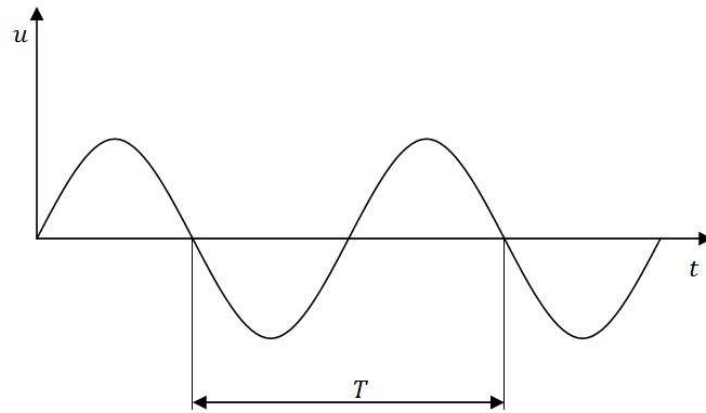
4. A dinamikai végeselemes analízis alapjai

4.1. Rezgésstan alapjai

Periodikus rezgés:

Először egyszerűsége miatt vizsgáljuk meg az egy tömeg – egy rugó rendszert abban az esetben, ha minden csillapítást elhanyagolunk és nincs külső erő, amely hatna a rendszerre. Ekkor a rendszer szabad rezgést végez.

Felírható $u(t + T) = u(t)$, ahol T a mozgáshoz tartozó rezgésidő. Egy ilyen rezgés kitérés-idő ábráját mutatja a 7. ábra.



7. ábra. Periodikus rezgés

A rezgés frekvenciája megkapható a periódusidő reciprokaként, ami megadja hogy hány rezgés megy végbe időegység alatt: $f = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{s} \right]$.

A körfrekvencia amit $\alpha = \frac{2\pi}{T} = f2\pi \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$ -ként kapunk meg megmutatja a hullámfázis periódusidő alatti változását.

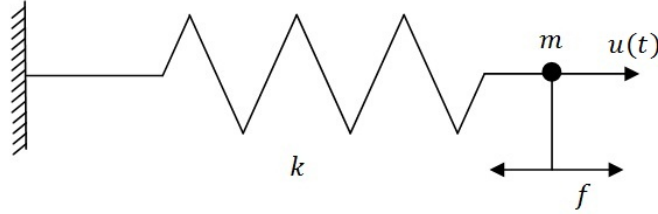
Mozgásegyenlet csillapítatlan esetben:

Helyezzünk a rugó végére egy m tömeget és egy erőgerjesztést. Ezt a 8. ábra szemlélteti. A csillapítást elhanyagoljuk, így a tömege a rugó megnyúlásából származó erők, valamint a gerjesztőerő hat, így a

mozgásegyenlet a következő alakban írható fel:

$$m\ddot{u} + ku = f. \quad (27)$$

ahol k a rugómerevség.



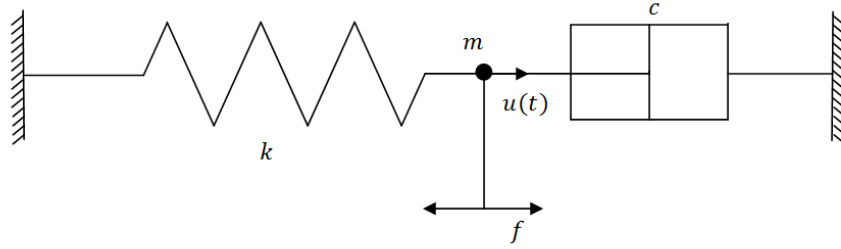
8. ábra. Gerjesztett rezgés

Mozgásegyenlet csillapított esetben:

Az előbbi modellt most egészítsük ki viszkózus csillapítással, melyet az jellemez, hogy a csillapító erő arányos a tömeg sebességével. Ezt a csillapítást viszkózusnak nevezik, mivel a folyadék csillapítását modellezi [10]. A csillapított rezgést egy egyszerű elrendezésen vizsgáljuk, amit a 9. ábra tartalmaz. A csillapítatlan eset mozgásegyenlete a viszkózus csillapításból származó erővel egészül ki. Összegezve a ható erőket az alábbi közös differenciálegyenlet kapható:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f, \quad (28)$$

ahol c a csillapítási tényező, k a rugómerevség.



9. ábra. Gerjesztett-csillapított rezgés

Harmonikus rezgések esetén a következő írható fel az elmozdulásokra:

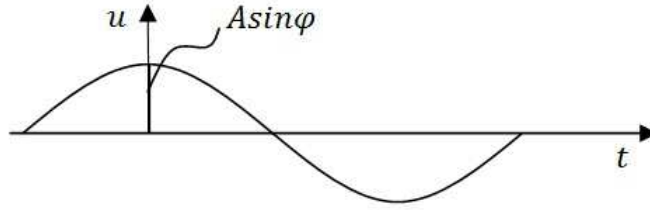
$$u = A \sin(\alpha t + \varphi). \quad (29)$$

Ebből az első idő szerinti deriváltja, a sebesség

$$\dot{u} = -\alpha A \cos(\alpha t + \varphi), \quad (30)$$

és a második idő szerinti deriváltja, a gyorsulás

$$\ddot{u} = -\alpha^2 A \sin(\alpha t + \varphi). \quad (31)$$



10. ábra. Harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő ábrája

Harmonikus rezgőmozgás esetén a kitérés az időben szinuszos jellegű lesz, ahogy ezt a 10. ábra is mutatja.

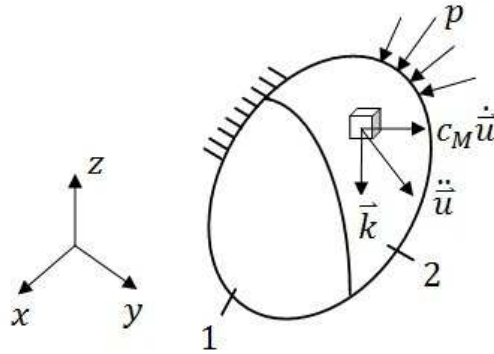
A kitérés-idő függvény komplex felírásban:

$$z = A \cos(\alpha t + \varphi) + iA \sin(\alpha t + \varphi) = Ae^{i(\alpha t + \varphi)}. \quad (32)$$

4.2. Virtuális munka elv

Két szilárd test vagy kontinuum esetén az ismeretlenek a következők:

$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t)$ elmozdulásmező, $\mathbf{A}^e(\mathbf{x}, t)$ alakváltozás mező $\mathbf{T}^e(\mathbf{x}, t)$ feszültségi tenzor. $e = 1, 2$ ahol $\mathbf{x}(x, y, z)$ a helyvektort jelöli, t pedig az időt. A c_M a tömegelemre vonatkozó, a csillapításhoz szükséges arányossági tényező. Jelöljük a térfogaton megoszló terhelésből származó erőket $\rho \mathbf{k}$ -al, a dV térfogatelemhez tartozó impulzus jellegű erőt pedig $-\rho \ddot{\mathbf{u}}$ -tal. A virtuális munka elv szemléltetéséhez a 11. ábrát használjuk.



11. ábra. A virtuális munka elv szemléltetéséhez használt modell

A d'Alambert elv kimondja, hogy ha a tehetetlenségi erőket és a külső kölcsönhatásokból származó erőket összegezzük, akkor a test egyensúlyban van [4] [3].

Egyensúlyi egyenlet vagy mozgásegyenlet

$$\mathbf{T}^e \cdot \nabla + \rho \cdot (\mathbf{k} - c_M \dot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{u}})^e = \mathbf{0}, \quad (33)$$

ahol $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$ Nabla differenciál operátor, $\mathbf{k}$ pedig a térfogati erőrendszer sűrűség vektora.

ehhez tartozik még az anyag, illetve a kinematikai egyenlet.

A vizsgált peremfelületeket tekintve felírható, hogy $A^e = A_u^e \cup A_p^e$ és $A_u^e \cap A_p^e = 0$, ahol A^e a teljes peremfelület, A_u^e a peremfelület elmozdulási része, A_p^e pedig a peremfelület terhelési része.

A peremfeltételek a következőképpen alakulnak:

- Kinematikai peremfeltételek (elmozdulási, vagy Dirichlet-típusú):

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(t) \quad \mathbf{x} \in A_u^e, \quad (34)$$

ahol $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ az előírt elmozdulásmező,

- Dinamikai peremfeltétel (feszültségi, vagy Neumann-típusú):

$$\mathbf{T}^e \cdot \mathbf{u}^e = \mathbf{p}^e(t) \quad \mathbf{x} \in A_p^e, \quad (35)$$

ahol $\mathbf{p}^e(t)$ az előírt terhelés (feszültségi vektor) az A_p^e -n

A kezdeti feltételek előírást adnak a $t = 0$ időpontban az elmozdulásra és idő szerinti első deriváltjára:

$$\mathbf{u}^e(t = 0) = \mathbf{u}_0^e \quad \dot{\mathbf{u}}^e(t = 0) = \dot{\mathbf{u}}_0^e \quad \mathbf{x} \in V^e. \quad (36)$$

A Bubnov-Galjorkin-féle variációs elvet alkalmazva megkaphatjuk, hogy ha $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ akkor tetszőleges t_1, t_2 intervallumon fennáll a **Hamilton-elv**, amely kimondja, hogy az egyensúlyban lévő mechanikai rendszer tetszőleges időintervallumon vett integráljának variációja eltűnik.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E - \Pi - C) dt = 0, \quad (37)$$

ahol E a test kinetikus energiája, Π_p a teljes potenciális energia, C pedig a belső csillapítás munkája.

4.3. Végeselem módszer alkalmazása

Tekintsük a

$$\int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} dV + \delta U - \delta W_k + \delta C = 0 \quad (38)$$

egyenletet és bontsuk elemekre.

Az elmozdulásokat a következőképpen írjuk fel:

$$\mathbf{u}^e \Rightarrow \mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{q}^e(t).$$

Amiből a sebesség

$$\dot{\mathbf{u}}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^e(t),$$

és a gyorsulás

$$\ddot{\mathbf{u}}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^e(t).$$

Az előzőleg bevezetett jelölések alapján írjuk fel az alakváltozási vektort

$$\mathbf{A}^e \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^e = \partial \cdot \mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}^e \cdot \mathbf{q}^e(t),$$

felírható továbbá:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{B}^e \cdot \dot{\mathbf{q}}^e(t)$$

A feszültségi vektor rugalmas anyag és belső csillapítás feltételezésével:

$$\mathbf{T}^e \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}^e \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + c_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_0^e)$$

ahol $\mathbf{D}^e$ az anyagállandók mátrixa, $\mathbf{D}^e \cdot c_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ a belső csillapítás miatt jelenik meg, $\mathbf{D}^e \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0^e$ pedig a kezdeti alakváltozás (pl.hő) miatt.

Az elmozdulásmező variációja:

$$\delta \mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{q}^e(t) \quad (39)$$

Egy e elemre jellemző mátrixok:

- M^e - tömegmátrix

$$\int_{V^e} \delta \mathbf{u}^{eT} \cdot \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}}^e dV = \delta \mathbf{q}^{eT} \cdot \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \cdot \rho \cdot \mathbf{N}^e dV \cdot \ddot{\mathbf{q}}^e = \delta \mathbf{q}^{eT} \cdot \mathbf{M}^e \cdot \ddot{\mathbf{q}}^e \quad (40)$$

- K^e -merevségi mátrix, $\mathbf{f}_0^e$ - terhelési vektor

$$\begin{aligned} \delta U^e &= \int_{V^e} \delta \mathbf{A}^e \cdot \mathbf{T}^e dV = \\ &= \delta \mathbf{q}^{eT} \cdot \left[\int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \cdot \mathbf{D}^e \cdot \mathbf{B}^e dV \cdot \mathbf{q}^e + c_k \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \cdot \mathbf{D}^e \cdot \mathbf{B}^e dV \dot{\mathbf{q}}^e - \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \cdot \mathbf{D}^e \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0^e dV \right] \end{aligned} \quad (41)$$

$$\delta U^e = \delta \mathbf{q}^{eT} \cdot (\mathbf{K}^e \cdot \mathbf{q}^e + c_k \mathbf{K}^e \cdot \dot{\mathbf{q}}^e - \mathbf{f}_0^e) \quad (42)$$

- $\mathbf{f}_\rho^e, \mathbf{f}_p^e$ - terhelési vektor

$$\delta W_k^e = \int_{V^e} \delta \mathbf{u}^e \cdot \rho \cdot \mathbf{k} dV + \int_{A_p^e} \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{p} dA = \delta \mathbf{q}^{eT} \cdot \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \cdot \rho \cdot \mathbf{k} dV + \delta \mathbf{q}^{eT} \cdot \int_{A_p^e} \mathbf{N}^{eT} \cdot \mathbf{p} dA = \delta \mathbf{q}^{eT} (\mathbf{f}_\rho^e + \mathbf{f}_p^e) \quad (43)$$

- a csillapításból

$$\delta C^e = \int_{V^e} \delta \mathbf{u}^e \cdot \rho \cdot c_M \cdot \dot{\mathbf{u}}^e dV = \delta \mathbf{q}^{eT} \cdot c_M \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \cdot \rho \cdot \mathbf{N}^e dV \cdot \dot{\mathbf{q}}^e = \delta \mathbf{q}^{eT} \cdot c_M \cdot \mathbf{M}^e \cdot \dot{\mathbf{q}}^e \quad (44)$$

Visszahelyettesítve a kapott mátrixokat

$$\sum_{e=1}^{N_{cs}} \delta \mathbf{q}^{eT} \cdot [\mathbf{M}^e \cdot \ddot{\mathbf{q}}^e + (c_K \mathbf{K}^e + c_M \mathbf{M}^e) \cdot \dot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{q}^e - (\mathbf{f}_\rho^e + \mathbf{f}_p^e + \mathbf{f}_0^e)] = 0 \quad (45)$$

4.4. Illesztés

Legyen a csomóponti elmozdulások vektora $\mathbf{q}$.

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{N_{cs}}^T] \quad (46)$$

A szerkezet tömegmátrixa $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, N_{cs} \quad (47)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \sum_{e \in i, j} \mathbf{M}_{ij}^e \quad \mathbf{M}_{ij}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}_i^{eT} \cdot \rho \cdot \mathbf{N}_j^e dV \quad (48)$$

A szerkezet merevségi mátrixa $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{ij}^e, \quad i, j = 1, \dots, N_{cs} \quad \mathbf{K}_{ij}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}_i^{eT} \cdot \mathbf{D}_i^e \cdot \mathbf{B}_j^e dV \quad (49)$$

Csillapítási mátrix $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{ij}^e, \quad i, j = 1, \dots, N_{cs} \quad \mathbf{C}_{ij}^e = c_K \mathbf{K}_{ij}^e + c_M \mathbf{M}_{ij}^e \quad (50)$$

Terhelési vektor $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_\rho + \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_0 \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_i \quad \mathbf{f}_i = \sum_{e \in i} \mathbf{f}_i^e \quad (51)$$

A kinematikai peremfeltételt kielégítve jutunk az egész szerkezetre érvényes mozgásegyenlethez

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (52)$$

Ahol $\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$ és $\ddot{\mathbf{q}} = \frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2}$.

A vizsgált mátrixos differenciálegyenletet időlépésként, azaz időben diszkrét pontokon vizsgáljuk. Időlépésen belüli vizsgálat esetén Differencia- vagy Newark-módszer alkalmazható [4],[3].

4.5. Sajátértékfeladat

A sajátértékfeladat alapfeladata a következő formában írható fel:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0; \quad \mathbf{q} = \varphi \sin \alpha t \quad (53)$$

Behelyettesítve és átrendezve a (53) egyenletbe:

$$\mathbf{K}\varphi = \alpha^2 \mathbf{M}\varphi = \lambda \mathbf{M}\varphi \quad (54)$$

Ahol $\lambda = \alpha^2$ sajátérték. Ebből a szabadságfokok számától függő darabszámú λ_i sajátérték és hozzá tartozó φ_i sajátvektor határozható meg [3], [4]. (λ_i, φ_i) $i = 1, 2, \dots, n$

5. Dinamikai vizsgálat

A kerékpárok használatuk során gyakran dinamikus hatásoknak vannak kitéve. Ezek a dinamikus hatások sok forrásból származhatnak. Talán legáltalánosabban az út egyenetlenségeiből származó terhelések azok, amelyek leggyakrabban fellépnek gyors, ütésszerű terhelések formájában, de említhetnénk itt a tekeréskor fellépő periodikusan változó erőket is.

Mi két esetet megkülönböztetve kívánjuk vizsgálni a dinamikai hatásokat. Első esetben a kerékpár merőlegesen hajt fel egy padkára, második esetben pedig a merőlegessel szöget bezárva, ferdén ütközik neki a padkának. Ezen fiktív ütközések során fellépő erők meghatározásához egyszerű számításokat végzünk a 5.3 és 5.4 részben, feltételezve, hogy ismert a kerékpár ütközés előtti és ütközés utáni sebessége.

5.1. A geometria felépítése

A geometriákat a 3.1 részben leírt Euler-Bernoulli rúdmodellekből építjük fel. Hajlított rúdmodell használatára esetén a rúd terhelése hajlítás és nyírás, az egyes rudak középvonala a terhelés után nem marad egyenes, hanem deformálódik. A rúdban nem csak axiális, tengelyirányú erők ébrednek, ezért szükség van a csövek találkozási pontjánál valamilyen feltétel előírására. Ezeken a pontokon hegesztést írunk elő, amely az adott pontok egymáshoz képesti elmozdulását, illetve elfordulását nem engedélyezi.

Az összehasonlíthatóság érdekében a két különböző szerkezetet azonos keresztmetszetű csövekből készítettük el. A vázak felépítésénél többféle rúdkeresztmetszetet különböztettünk meg. A fejcső, a nyeregcső és a középcsapágy ház egyaránt 30 mm külső átmérőjű és 2 mm falvastagságú zárt hengeres csövekből áll. A felső- és alsócső valamint az első villa két szára szintén azonos keresztmetszetekből épül fel, ezen csövek külső és belső fala koncentrikus ellipszis, amely kis- és nagytengelye valamint a külső és belső méretek aránya: $a_1 = 25\text{mm}$, $b_1 = 15\text{mm}$, $k_1 = 0,86$, ahol a keresztmetszet belső falát meghatározó ellipszistengelyei: $a = a_1 k_1$ és $b = b_1 k_1$. Ettől különböző méretű, de hasonlóan elliptikus csövekből épülnek fel a lánc- és támvillák itt az előzőleg említett méretek: $a_2 = 12\text{mm}$, $b_2 = 8\text{mm}$, $k_2 = 0,8$. Az első villa is elliptikus csövekből épül fel, ennek meghatározó méretei: $a_3 = 15\text{mm}$, $b_3 = 10\text{mm}$, $k_3 = 0,84$. A keresztmetszetek elhelyezése a későbbiekben látható 17. ábrán. A kormány és kormányfej profilja hengeres, 12,8 mm külső átmérőjűek és 2 mm falvastagságúak. A villa két szára is hegesztett kapcsolódást feltételezve kapcsolódik a vázhoz.

5.2. A statikus terhelés

Először a statikus terheléseket írjuk elő a vázon, mely során csak a váz saját súlyát egy erőter jellegű terhelésként, illetve a kerékpáros súlyát a váz több pontján ható koncentrált erőként vesszük figyelembe. A kerékpáros súlyából adódó terhelést kissé asszimmetrikusan osztjuk el a kormány két végpontján, a nyereg csatlakozási pontján illetve a középcsapágy két végpontján, mivel a pedálozásból adódó erők itt adódnak át a vázra.

A kerékpáros súlyát 60 kg-nak vesszük, így a koncentrált erőkből összesen 600 N-t terhelünk a vázra. A koncentrált erőket úgy osztjuk el, hogy 300 N erő hasson a nyereg helyén, 50 – 50 N a kormány két végén, és 150 N, illetve 50 N a középcsapágy két végén. A modellt hajlított-nyírt igénybevételű rudakból építjük fel.

5.3. Egyenes ütközés terhelései

A vázszerkezet vizsgálata során a hétköznapiakban is előforduló dinamikai hatásnak, hatásoknak vetjük alá a kerékpárt. Elsőként azt vizsgáljuk, hogy egy kerékpár felhajt egy, a sebességére merőleges 10 cm magas padkára. Feltételezzük, hogy a kerékpár súlypontjának sebessége $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, amely ütközés után $19 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ra változik. Feltételezzük még továbbá, hogy az ütközés időtartama 0,04 s. A vizsgálat során eltekintünk a kerékpár gumiabroncsának és kerekének a rugalmasságától.

A kerékpár kezdeti sebességét jelöljük

$$\mathbf{v}_1 = 20 \mathbf{e}_x \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5,5 \mathbf{e}_x \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (55)$$

az ütközés utáni sebességét pedig

$$\mathbf{v}_2 = 19 \mathbf{e}_x \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5,27 \mathbf{e}_x \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (56)$$

Ebből a sebességváltozás:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = -0,27 \mathbf{e}_x \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (57)$$

Tekintve, hogy az ütközés időtartama $t = 0,04 \text{ s}$, számolható a szerkezetre ható gyorsulás (lassulás):

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{t} = \frac{-0,27 \mathbf{e}_x \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,04 \text{ s}} = -6,94 \mathbf{e}_x \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (58)$$

A kerékpáros tömege állandó $m_k = 60 \text{ kg}$ -nak vehető, míg a vázszerkezet tömege a felhasznált anyag sűrűségétől függően változik. Így három esetet különböztethetünk meg mindkét geometria esetében Ezt a2. -3. táblázatokban foglaljuk össze.

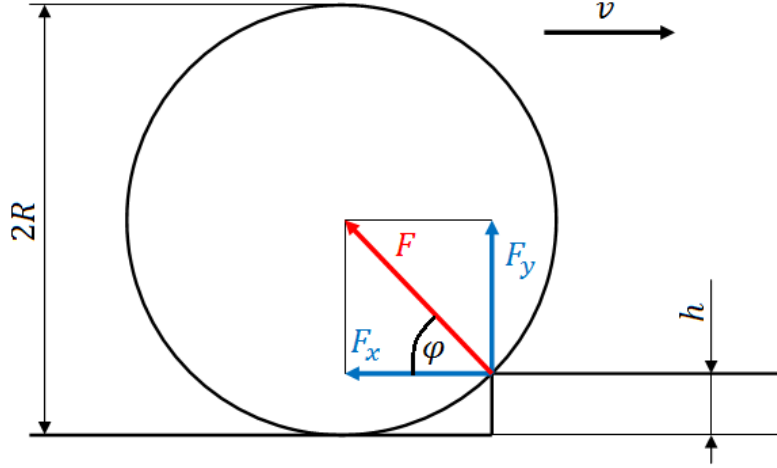
2. táblázat. Az országúti kerékpár és a kerékpáros össztömege

	A váz tömege [kg]	A váz és a kerékpáros össztömege [kg]
AISI 4130	5,933	$m_1 = 65,933 \text{ kg}$
AA 7005-T6	2,067	$m_2 = 62,069 \text{ kg}$
ASTM AZ91C-T6	1,337	$m_3 = 61,337 \text{ kg}$

3. táblázat. A hegyi kerékpár és a kerékpáros össztömege

	A váz tömege [kg]	A váz és a kerékpáros össztömege [kg]
AISI 4130	6,523	$m_4 = 66,523 \text{ kg}$
AA 7005-T6	2,274	$m_5 = 62,274 \text{ kg}$
ASTM AZ91C-T6	1,470	$m_6 = 61,470 \text{ kg}$

A továbbiakban az $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ indexek az 2. -3. táblázatban jelölt esetekhez kapcsolódnak, ahol a számok az egyes geometria és anyagpárosításokat jelölik.



12. ábra. Az egyenes ütközésnél fellépő erők szemléltetése

Az egyenes ütközés esetén fellépő erők jellegét feltüntettük a 12. ábrán. Kiszámítását itt nem részletezzük, kifejtve megtalálható a [16]-ban.

Az ütközésnél fellépő erőknek ebben az esetben, mivel a padka merőleges a kerékpár sebességére, két koordinátája lesz. Egy e_x irányú és egy e_y irányú. Az eddigiek alapján ismert az e_x irányú komponens, az ütközés geometriájából pedig kiszámítható az e_y irányú komponens.

A kerékpárok kerékméretét általában inch-ben adják meg. Ez jellemzően 26 inch szokott lenni, amely átszámolva SI egységekbe 660,4 mm. Ehhez hozzáadódik a kerékpár gumiabroncsának a mérete, így számoljunk $2R \approx 700$ mm -el, míg a padka mérete $h = 100$ mm. Annak ellenére, hogy időnként az országúti és hegyi kerékpárok kerékméretei eltérhetnek, ennél a feladatnál egységes kerékméreteket feltételezünk annak érdekében, hogy a váz viselkedése kerüljön előtérbe.

Mivel a ható erők hatásvonala átmegy a kerék középpontján (tengelyén), így ráterhelhetjük az adódó erőket szimmetrikusan a vizsgált vázszerkezetre az első villa két tengelypontjában. Ezek az erők összegezve:

$$\mathbf{F}_1 = (-457,87 \mathbf{e}_x + 467,31 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad (59)$$

$$\mathbf{F}_2 = (-431,03 \mathbf{e}_x + 439,92 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad (60)$$

$$\mathbf{F}_3 = (-425,95 \mathbf{e}_x + 434,74 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad (61)$$

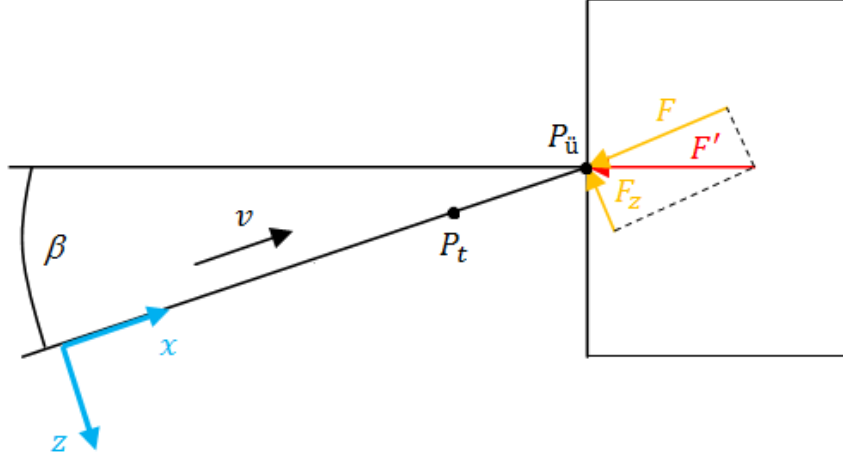
$$\mathbf{F}_4 = (-461,96 \mathbf{e}_x + 471,49 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad (62)$$

$$\mathbf{F}_5 = (-432,46 \mathbf{e}_x + 441,38 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad (63)$$

$$\mathbf{F}_6 = (-426,87 \mathbf{e}_x + 435,67 \mathbf{e}_y) \text{ N}. \quad (64)$$

5.4. Ferde ütközés terhelései

A kerékpár az előzőekhez hasonlóan egy 10 cm magas padkára hajt fel, ezúttal arra nem merőlegesen, hanem azzal 80° -ot bezárva. Ez azt jelenti, hogy a merőlegeshez képest $\beta = 10^\circ$ -kal tér el az előző



13. ábra. A ferde ütközés szemléltetése

vizsgált ütközéstől. A sebességváltozást az egyenes ütközéssel azonosnak feltételezzük, amiből következően az e_x és e_y irányú erőkomponensek azonosak lesznek, csak kiegészülnek az e_z irányú komponenssel. Az ütközéskor ébredő erőnek három irányú komponense lesz, mivel az ütközés során a padkára merőleges erő jön létre. Az erő hatásvonala nem halad át az elsőkerék tengelyén, így a kerék ütközési pontjában ébredő erőket a tengelyre (majd a villák végére) kell redukálni, és a redukált vektorkettőst terheljük a szerkezetre.

Az erő harmadik komponense a mozgás síkjára merőleges lesz, mint ahogy a 13. ábrán feltüntetett F_z erő mutatja. Ez meghatározható a β szög ismeretében.

A 13. ábrán jelölje P_t a kerék tengelypontját, P_u pedig az ütközés pontját. Ebben az esetben ébredő z irányú erőkomponenseknek magyarázat nélkül csak az értékeit közöljük:

Az ébredő erők az országúti kerékpár három esetére:

$$\mathbf{F}'_1 = (-457,87 \mathbf{e}_x + 467,31 \mathbf{e}_y - 80,73 \mathbf{e}_z) \text{ N}; \quad (65)$$

$$\mathbf{F}'_2 = (-431,03 \mathbf{e}_x + 439,92 \mathbf{e}_y - 76,00 \mathbf{e}_z) \text{ N}; \quad (66)$$

$$\mathbf{F}'_3 = (-425,95 \mathbf{e}_x + 434,74 \mathbf{e}_y - 75,11 \mathbf{e}_z) \text{ N}. \quad (67)$$

Az ébredő erők a hegyi kerékpár három esetére:

$$\mathbf{F}'_4 = (-461,96 \mathbf{e}_x + 471,49 \mathbf{e}_y - 81,46 \mathbf{e}_z) \text{ N}; \quad (68)$$

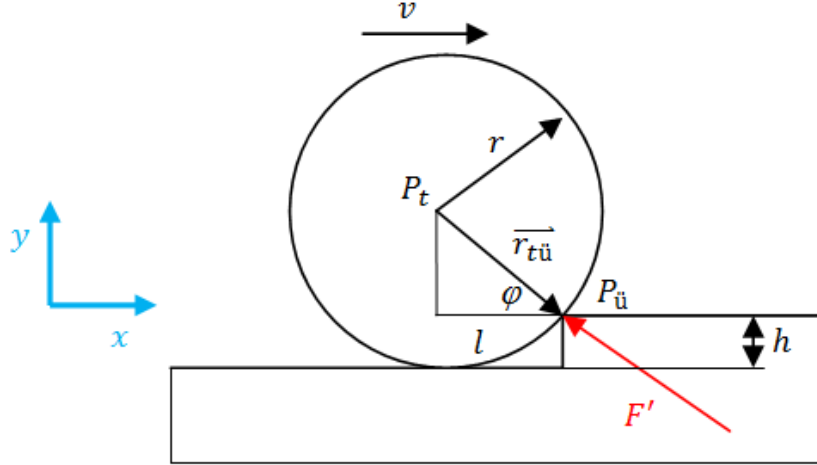
$$\mathbf{F}'_5 = (-432,46 \mathbf{e}_x + 441,38 \mathbf{e}_y - 76,25 \mathbf{e}_z) \text{ N}; \quad (69)$$

$$\mathbf{F}'_6 = (-426,87 \mathbf{e}_x + 435,67 \mathbf{e}_y - 75,27 \mathbf{e}_z) \text{ N}. \quad (70)$$

Az erőket először az első kerék tengelyének középső pontjára redukáljuk. Ehhez szükségesek a P_t tengelypont koordinátái illetve a P_u ütközési pont koordinátái, ahol az erők ébrednek. A 14. ábrán látható a kerékpár síkjában az ütközés geometriája. A P_t pont koordinátái a végeselemes modellből egyszerűen lekérhetők, így: $P_t(2075,5;0;0)$.

A padka magasságát és a kerék sugarát ismerve számolható a P_u pont koordinátái.

$$\tan \varphi = \frac{r-h}{l}, \text{ így } l = \frac{r-h}{\tan \varphi} = \frac{350 \text{ mm} - 100 \text{ mm}}{\tan 45,5847} = 244,95 \text{ mm}. \quad (71)$$



14. ábra. A ferde ütközés a kerékpár síkjában

$$P_{\ddot{u}}(P_{tx} + l; 0 - r + h; 0), \text{ azaz } P_{\ddot{u}}(2320, 45; -250; 0). \quad (72)$$

Az erők redukálása az ismert statikai formula segítségével:

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{r}_{t\ddot{u}} \times \mathbf{F}_{\ddot{u}}, \quad (73)$$

ahol $\mathbf{M}_t$ a tengelypontba redukált nyomaték, $\mathbf{r}_{t\ddot{u}}$ - a tengelypont és az ütközési pont helyvektorainak különbsége, $\mathbf{F}_{\ddot{u}}$ pedig az ütközéskor fellépő erő.

$$\mathbf{r}_{t\ddot{u}} = (244, 95 \mathbf{e}_x - 250 \mathbf{e}_y) \text{ mm}. \quad (74)$$

A modellt a P_t pontban az egyes esetekben egy $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$ vektorkettőssel terhelhetjük, ezzel szimulálva az ütközéskor fellépő terheléseket.

A fellépő $\mathbf{F}$ erőket egyenlően elosztjuk a két villaszár között, az $\mathbf{M}$ hatását pedig egy erőpár segítségével érvényesítjük. A két villaszár végpontjára azonos nagyságú, de ellentétes irányú erőket terhelünk, így hozva létre a kívánt nyomatéki hatást. Jelöljük a két villaszár közötti távolságot, a kerék tengelyének hosszát $a = 100 \text{ mm}$. A 15. ábrán feltüntetjük az erőpárok irányát a kerékpár stilizált első villájának a két végén. Ezek alapján egy nyomatékkomponenst helyettesítő erőpárok abszolútértékei számolhatók:

Az erőpárok kiszámítási módját ebben a dolgozatban nem ismertetjük, azok megtalálhatóak a [16]-ban.

Az erőpárok vektoros felírása:

$$F_{M_{1poz}} = (201, 8 \mathbf{e}_x - 197, 7 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad F_{M_{1neg}} = (-201, 8 \mathbf{e}_x + 197, 7 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad (75)$$

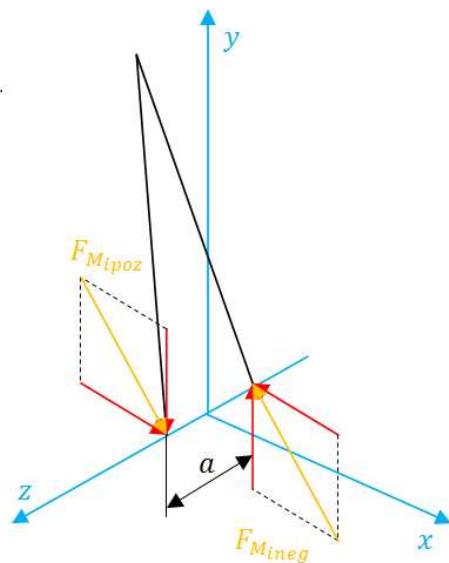
$$F_{M_{2poz}} = (190, 0 \mathbf{e}_x - 186, 2 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad F_{M_{2neg}} = (-190, 0 \mathbf{e}_x + 186, 2 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad (76)$$

$$F_{M_{3poz}} = (187, 8 \mathbf{e}_x - 184, 0 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad F_{M_{3neg}} = (-187, 8 \mathbf{e}_x + 184, 0 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad (77)$$

$$F_{M_{4poz}} = (203, 7 \mathbf{e}_x - 199, 5 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad F_{M_{4neg}} = (-203, 7 \mathbf{e}_x + 199, 5 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad (78)$$

$$F_{M_{5poz}} = (190, 6 \mathbf{e}_x - 186, 8 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad F_{M_{5neg}} = (-190, 6 \mathbf{e}_x + 186, 8 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad (79)$$

$$F_{M_{6poz}} = (188, 2 \mathbf{e}_x - 184, 4 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad F_{M_{6neg}} = (-188, 2 \mathbf{e}_x + 184, 4 \mathbf{e}_y) \text{ N}; \quad (80)$$



15. ábra. Pozitív e_x és e_y irányú csavarónyomatékok esetén a helyettesítő erőpárok iránya

Ezeket az erőpárokat megfelelően a villára terhelve megkapjuk a nyomatékok hatását, a számolt ütközési erőkkel együtt pedig az összes ferde ütközés modellezéséhez szükséges terhelést. Az erők indexelésében a „poz” és „neg” azt jelöli, hogy az adott erő a pozitív, vagy a negatív z irányban elhelyezkedő villaszárra terhelendő-e.

5.5. A rúdelemek, a háló felépítése

A kerékpárok végeselemes modellének felépítése során Euler-Bernoulli rúdmodellt fogunk alkalmazni, melynek alapfeltételezéseit és tulajdonságait a 3.1. tartalmazza. Ahhoz, hogy a végeelem módszer alkalmazható legyen az egyes szerkezeteken, egy úgynevezett hálót kell elhelyezni a geometrián. Ez a háló a szerkezetek részeit, a rudakat rúdelemekre osztja. A rúdelemek kezdő- és végpontjai a csomópontok, a végeelem módszer segítségével ezekben a csomópontokban kapunk információkat a vizsgálati paramétereikről, így például az elmozdulásokról vagy a feszültségekről.

A csomópontok között a rúdelemek hosszán csak a csomópontokban számolt mennyiségek közelítő értékei érhetők el, így azokon a helyeken ahol a vizsgált paraméterek drasztikus változása várható érdemes sűrűbb hálót alkalmazni. Ezúttal az elemeken való közelítéshez másodfokú polinomokat alkalmazunk. A sűrűbb háló a több csomópontnak köszönhetően több pontos adattal szolgál, ám a végeselemes szoftver hosszabb futtatási idejét is eredményezi.

Esetünkben a szerkezetet felépítő egyes rudakat egységesen 10 mm -enként osztottuk rúdelemekre. Ez a háló elég sűrű ahhoz, hogy a kívánt pontokban megfelelően pontos eredményt kapjunk.

5.6. A vázszerkezetek végeselemes vizsgálata

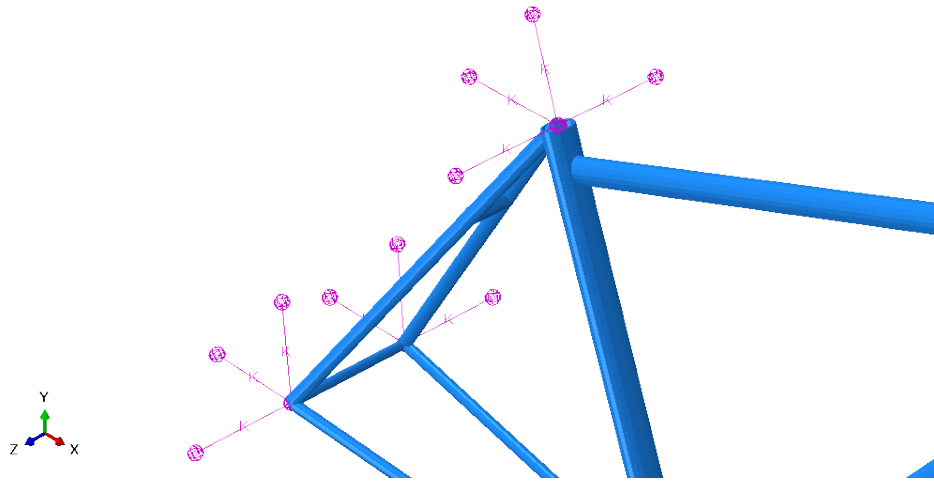
A különböző kialakítású és különböző anyagokból készült kerékpárvázakat az előzőekben ismertetett fiktív, ütközésszerű dinamikai hatásoknak vetjük alá. Mivel a kiszámított erőket a villa két végpontjára terheljük rá, így szimulálva az ütközést ezeken a pontokon peremfeltétel nem alkalmazható. Így más pontokban kell alkalmazni peremfeltételeket, hogy a modell számítható legyen.

Első közelítésként változatlanul a hátsó tengelyen, valamint a nyereg pontjában írtunk elő elmozdulási peremfeltételt mindhárom irányban, azaz elmozdulásra megfogtuk a pontokat. Ebben az esetben viszont nem érvényesül a nyereg pontjában ható 300 N nagyságú terhelés, ami a kerékpáros súlyából származik. A végeselemes számítások során kiderült, hogy ebben az esetben a váz túl mereven viselkedik, és a láncvillák

szinte terheetlenek maradnak, hiszen mindkét végük meg van fogva, így a modell változtatására volt szükség.

Egy kerékpár váz dinamikus igénybevétele esetén általában a váz egyetlen pontja sincsen nyugalomban, hiszen egy mozgó szerkezetről beszélünk. Ennek megfelelően a vázon nem tudunk olyan peremfeltételt, megfogást alkalmazni, hogy az a valóságot megközelítő eredményt hozzon. Ezért a hátsó tengely két pontját illetve a nyeregpontot is rugalmasan ágyazzuk. Ez azt jelenti, hogy a vázon nem alkalmazunk peremfeltételt, hanem a szerkezet megfelelő pontjai egy k merevségű rugón keresztül kapcsolódnak az elmozdulásra megfogott pontokhoz. Ilyen módon, hogy a kerékpár rugalmasan ágyazva van, a váz minden pontja elmozdulhat. A hátsó tengely pontjait z és x irányban $k_1 = 500 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ rugóállandójú rugóval ágyazzuk. A hátsó tengelynél pedig x irányban $k_2 = 1500 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$, a nyereg pontjában x , y és z irányban $k_3 = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ merevségű rugókat alkalmazunk a felfüggesztéshez. A felfüggesztés jellegét a 16. ábra mutatja meg, ezen azonosíthatók az előzőleg leírt rugómerevségek.

Az ennél merevebb rugók megfogáshoz hasonló merev viselkedést eredményeztek, amit el kívántunk kerülni.

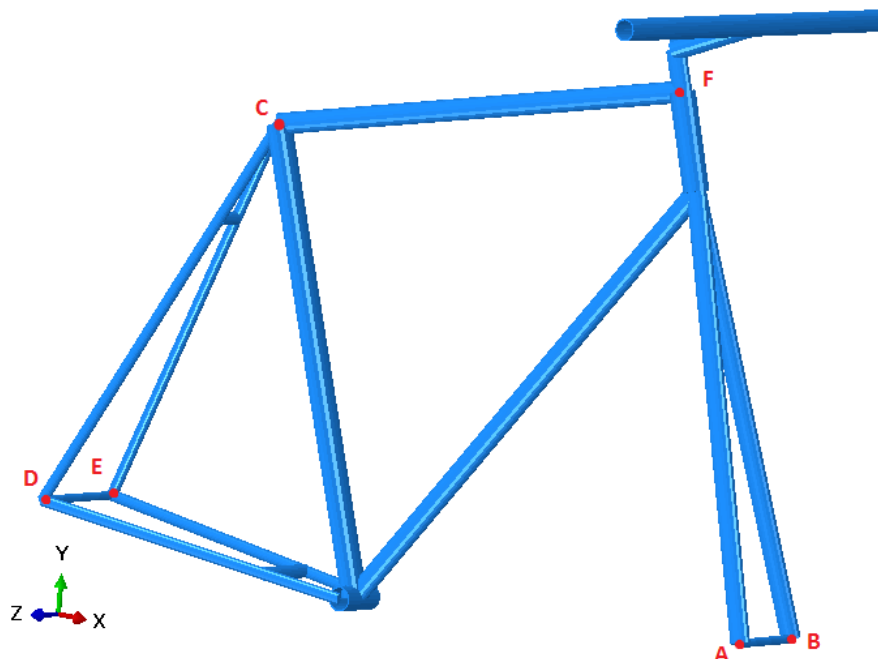


16. ábra. A rugalmas ágyazás

A dinamikus erők (ütközésből származó erők) minden esetben 0,042 s -ig hatnak 0,002 s le- és felterhelési szakasszal. A dinamikai tényezők meghatározásához minden esetben szükséges elkészíteni egy statikai modellt, amelyen azonos terhelések lépnek fel időtől függetlenül. Adott pontok dinamikus és statikus elmozdulásainak hányadosaként számíthatjuk a dinamikai tényezőt.

A dinamikai modelleknél a váz viselkedését az ütközés kezdetétől számított 0,6 s -ig vizsgáljuk. Ezt a 0,6 s -os intervallumot 200 részre osztjuk fel, így a pontok elmozdulásáról 0,003 s -onként van információnk. Ez elég sűrű ahhoz, hogy egy adott pont elmozdulását és annak csillapodását lássuk az idő függvényében, illetve a maximális értékeket kellő pontossággal meghatározzuk. Az ütközés után az egyes pontok elmozdulásai csillapodva beállnak arra az értékre, amely a súlyerőkből származó statikus terhelés esetén valósulna meg.

Hogy a geometriák viselkedését jellemezni tudjuk, kiválasztunk vizsgálni kívánt pontokat, ahol meghatározzuk és táblázatokba szedjük az elmozdulások értékeit. Ezek a két geometrián egymásnak megfelelő pontok lesznek. Ezeket a következő, 17. ábrán mutatjuk be az országúti kerékpár geometriáján.



17. ábra. A végelelemes modellezés során vizsgált pontok

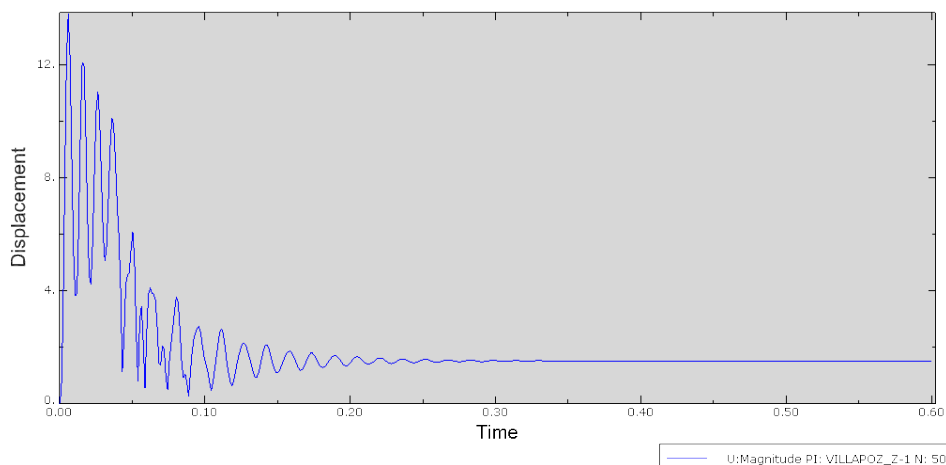
5.7. Egyenes ütközés

Vizsgáljuk, hogy az előzőekben felvázoltak szerint az országúti kerékpárváz merőlegesen egy padkának ütközik. Az ütközés során fellépő erők a (59)-(64) egyenletekben láthatók, ezeket terheljük a szerkezetre dinamikusan változó erőkként. A többi terhelés, mint a gravitáció és a kerékpáros súlyából adódó erők továbbra is hatnak időtől függetlenül.

A dinamikai tényező meghatározásához szükséges statikus modellen az ütközésből származó erő is időtől függetlenül lép fel, kizárva ezzel az erő dinamikus hatását. Azonos nagyságú erőhatások mellett vetjük össze a dinamikai és a statikai modell elmozdulásait. Egyenes ütközés esetén is lesz a rendszerben, így az elmozdulásokban is némi asszimetria, mivel a kerékpáros súlyát továbbra is asszimetrikusan terheljük a vázra. Abszolútértékben a legnagyobb elmozdulásokat a kerékpár első villájának a végpontjában tapasztaljuk. Ennél a modellen még nincs akkora jelentősége az oldal irányú felfüggesztésnek, hiszen a dinamikus hatás és a súlyerők is az xy síkban hatnak, de az összehasonlíthatóság és az előzőleg említett kis mértékű asszimetria miatt azonos rugalmas ágyazást alkalmazunk mind a két vizsgált ütközésnél.

A kerékpárvázak egyenes ütközése

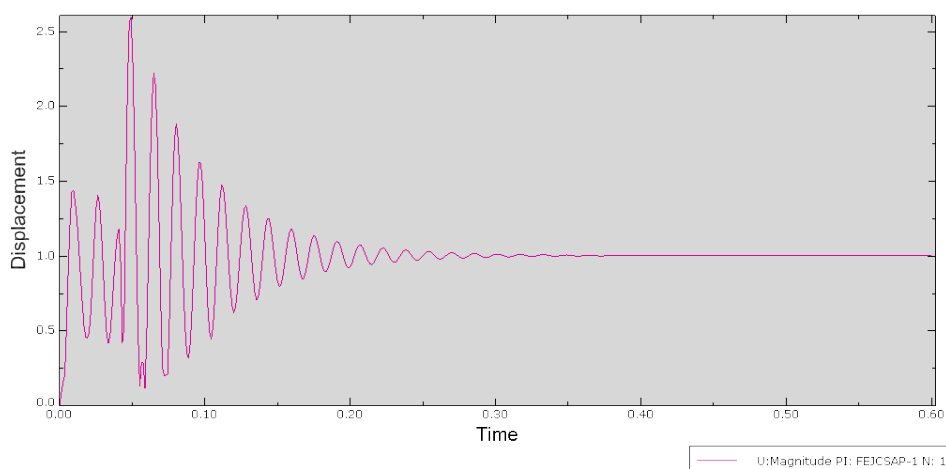
Az országúti- és hegyikerékpár vázgeometriáját egyenes ütközésnél mindhárom anyagra megvizsgáljuk. Várhatóan statikus terhelés esetén a vizsgált pontok elmozdulása kisebb lesz mint dinamikus esetben, hiszen ekkor a hirtelen fellépő erők dinamikus hatása is érvényesül. A terhelés helyéhez közel eső pontokban a legnagyobb elmozdulás közvetlenül az erő fellépése után tapasztalható. Egyenes ütközésnél az elmozdulások z irányú komponense két nagyságrenddel kisebb, mint az x és az y irányú. Ebben az esetben a z irányú elmozdulás a teljes elmozdulás 1-2%-át teszi ki, ez tulajdonképpen elhanyagolható. Ez a kis mértékű kitérés z irányban az időtől független koncentrált erők asszimetriájának köszönhető. A villának a végpontja és az ágyazás körüli pontok általában 0,01 s környékén érik el a maximumukat. Az ezektől távol eső pontok általában csak az ütésszerű erőhatás megszűnése után, 0,04 s – 0,06 s intervallumban érik el az elmozdulási maximumukat. Példaként bemutatjuk a jobb oldali (pozitív z irányban elhelyezkedő) villaszár terhelt végpontjának az elmozdulását az idő függvényében.



18. ábra. A hegyikerékpár villa végpontjának elmozdulásai ASTM AZ91C-T6 anyagra

A 18. ábrán is látszik az elmozdulás csillapított hatása, illetve hogy az elmozdulás maximuma közvetlenül az ütésszerű terhelés után jelenik meg. Jól megfigyelhető továbbá a 0,04s-ig tartó ütközésből származó erő mivel a leterhelés után az elmozdulási értékek ugrásszerűen lecsökkennek. A 0,35s után eső vizsgált időintervallumban a dinamikus terhelés hatása már jórészt lecsengett, és a vizsgált pont kitérése beállt az azonos statikus terhelések esetén tapasztalható értékre. Ezt a későbbiekben a 5.9 alfejezet alatt megvizsgáljuk.

Ezzel szemben az ütközés helyétől távolabb, a fejcső és felsőcső találkozási pontjában (5. táblázatban az országúti kialakítás F-vel jelölt pontja) az elmozdulás maximuma már 0,05s -körül jelentkezik, mint ahogy a 19. ábra mutatja.



19. ábra. A fejcső felső pontjának az elmozdulása AA 7005-T6 anyagra

A következő 4.-6. táblázatokban összefoglaljuk különböző anyagokra a geometriák elmozdulás értékeit az általunk érdekesnek ítélt csomópontokban. A különböző anyagokból összeállított modelleket vizsgálva - mint várható volt - az acélnál jelentkeznek a legkisebb elmozdulások, az ágyazott pontok kivételével. Esetenként az ágyazott pontok elmozdulásai nem illeszkednek ebbe a sorba, ez betudható annak, hogy a kisebb tömegű vázakon az ütközéskor fellépő erő valamelyest kisebb, és ezeken az ágyazási pontokon keresztül adódnak át az erők azokra a rugókra, majd pontokra, amelyeken a peremfeltételeket előírtuk, így a rugókra ható nagyobb erő nagyobb összenyomódást okoz a rugókban.

Összehasonlítva a két különböző geometriájú váz azonos anyagokból felépített modellének elmozdulásait, jól kitűnik, hogy nagyságrendi különbség nem tapasztalható. A néhány mm körüli különbség a maximális eltérésnél a geometriai kialakítás eltérőségéből származik.

4. táblázat. Az elmozdulások a kerékpárok egyenes ütközése és AISI 4130 anyag esetén[mm]

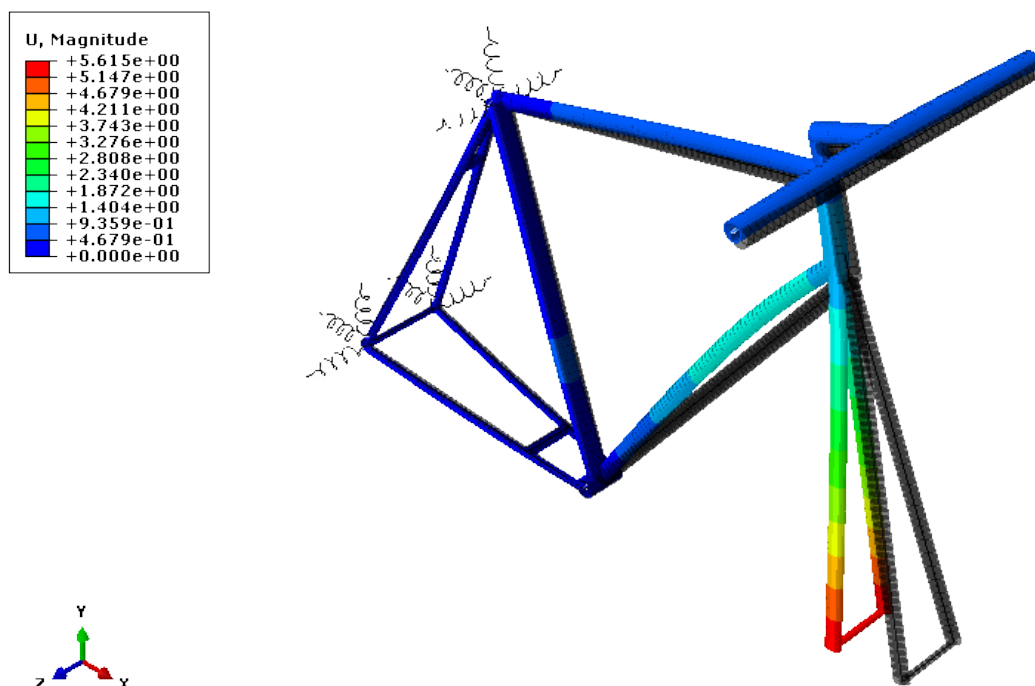
Orsz.ú.	Egyenes ütközés	Statikus terhelés	Dinamikai tényező
A.pont	2,955	1,595	1,852
B.pont	2,946	1,585	1,858
C.pont	1,073	0,557	1,926
D.pont	0,635	0,329	1,930
E.pont	0,649	0,341	1,903
F.pont	2,497	1,376	1,814
Hegyi	Egyenes ütközés	Statikus terhelés	Dinamikai tényező
A.pont	4,709	2,734	1,722
B.pont	4,708	2,728	1,725
C.pont	1,821	1,062	1,714
D.pont	0,712	0,363	1,961
E.pont	0,653	0,337	1,937
F.pont	3,112	1,737	1,791

Az egyes vázak azonos kialakításuk de különböző anyaguk, markánsan eltérő anyagtulajdonságaik miatt nagyobb eltéréseket mutatnak. Az eltérések oka, magyarázata az, hogy a vizsgált alumínium ötvözet rugalmassági modulusa kicsit több mint harmada, a magnézium ötvözet rugalmassági modulusa kevesebb mint negyede az acélénak, ezáltal érthető módon az acél jelentősen kisebb elmozdulásokat produkál a másik két vizsgált anyaghoz képest.

5. táblázat. Az elmozdulások a kerékpárok egyenes ütközése és AA 7005-T6 anyag esetén[mm]

Orsz.ú.	Egyenes ütközés	Statikus terhelés	Dinamikai tényező
A.pont	5,615	3,106	1,809
B.pont	5,615	3,102	1,811
C.pont	1,068	0,562	1,900
D.pont	0,544	0,291	1,869
E.pont	0,544	0,287	1,895
F.pont	2,562	1,463	1,751
Hegyi	Egyenes ütközés	Statikus terhelés	Dinamikai tényező
A.pont	11,906	6,837	1,741
B.pont	11,900	6,813	1,746
C.pont	1,289	0,685	1,882
D.pont	0,555	0,287	1,933
E.pont	0,516	0,273	1,890
F.pont	3,227	1,750	1,844

Néhány esetben tapasztalhatók 1,9 körüli dinamikai tényezők. A tényezők ilyen magas értéke betudható a váz rugalmas ágyazásának, ami némileg torzítja az alakváltozásból adódó elmozdulási értékeket. Dinamikus hatás fellépése esetén nagyobb erők hatnak a váz megfogási pontjaira (esetünkben a rugók vázhoz való csatlakozási pontjaira). Nagyobb erők esetén a rugók nagyobb megnyúlást produkálnak, ezért a váz is jobban el tud mozdulni a megfogási pontokban, ehhez hozzáadódik továbbá a váz alakváltozása, ami dinamikus esetben szintén nagyobb. Ezen két tényező együttes hatásaként alakulhatnak ki a nagy, nem várt dinamikai tényezők.



20. ábra. Az egyenes ütközés során történő elmozdulások jellege és értékei a kritikus időpillanatban

6. táblázat. Az elmozdulások a kerékpárok egyenes ütközése és ASTM AZ91C-T6 anyag esetén[mm]

Orsz.ú.	Egyenes ütközés	Statikus terhelés	Dinamikai tényező
A.pont	8,470	5,134	1,649
B.pont	8,458	5,124	1,650
C.pont	1,105	0,579	1,908
D.pont	0,405	0,219	1,849
E.pont	0,394	0,208	1,894
F.pont	3,026	1,720	1,759
Hegyi	Egyenes ütközés	Statikus terhelés	Dinamikai tényező
A.pont	13,780	7,907	1,743
B.pont	13,780	7,871	1,751
C.pont	1,883	1,002	1,879
D.pont	0,518	0,268	1,932
E.pont	0,498	0,253	1,968
F.pont	4,754	2,616	1,817

Az egyenes ütközés jellegét mutatjuk be a 20. ábrán a maximális elmozdulásokat húszszorosára nagyítva az alumíniumötvözet vázszerkezet esetén. A váz maximális elmozdulása leolvasható a 5. táblázat megfelelő adataiból is (országúti váz A. és B. pontja)

5.8. Ferde ütközés

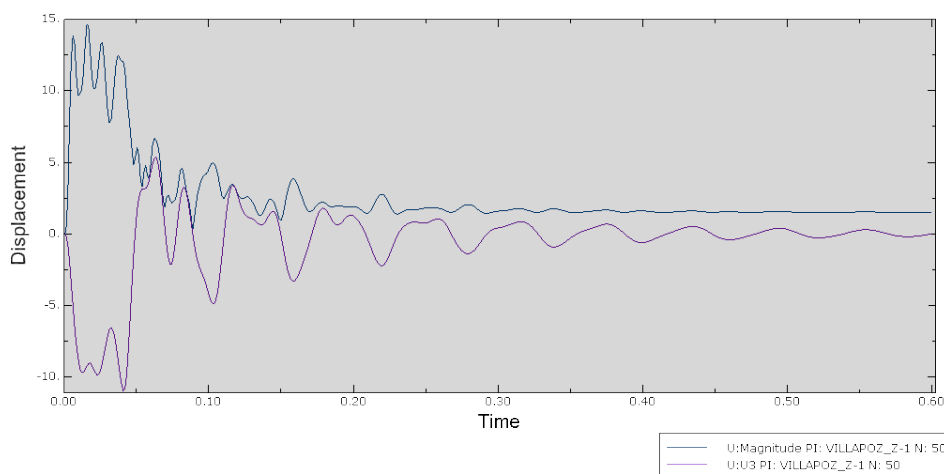
Ferde ütközés esetén az ütközést két dinamikus fellépő hatással szimuláljuk. Egyik az ütközéskor fellépő erők, míg a másik az ütközéskor fellépő nyomatéki hatások első kerék tengelyére redukált terhelése. Ezt egy azonos nagyságú, de ellentétes irányú erőpárral érvényesítjük a kerékpár villájának a két végén. Az egyenes ütközéssel azonos rugalmasan ágyazott felfüggesztést alkalmazunk most is. Az elmozdulásokat a váz több pontján vizsgáljuk és hasonlítjuk össze. Egy esethez kapcsolódóan összesen két modellt fogunk vizsgálni. Az egyik a dinamikai modell, az ütközéskor fellépő ütésszerű erőhatásokkal, a másik a dinamikai tényező meghatározásához szükséges statikai modell.

A dinamikai modellnél 5%-os csillapítást alkalmaztuk. Ennek eredménye, hogy a terhelés után a szerkezet egy-egy pontja nem leng azonos amplitúdóval, hanem az idővel csillapodnak a lengések.

A ferde ütközésnél ható erőket rendre a (65)-(67) egyenletek, a nyomatékokat pedig a (75)-(78) egyenletek tartalmazzák.

A kerékpárvázak ferde ütközése

A kerékpárvázak ferde ütközésénél is az előzőekben ismertetett peremfeltételeket, rugalmas ágyazásokat és terheléseket használjuk. Ebben az esetben a vázak első része kitér az eredeti xy síkból az oldal irányú erőknek és a nyomatéki hatásoknak köszönhetően. Ferde ütközésnél a kritikus elmozdulásértékek időintervallumban a meghatározó komponens az elmozdulás z irányú komponense lesz. Ezt szemléltetjük a 21. ábrán, ahol együtt mutatjuk az elmozdulás z irányú komponensét és az elmozdulás abszolútértékét.



21. ábra. Országúti váz jobb villaszárának kitérése ASTM AZ91C-T6 anyag esetén

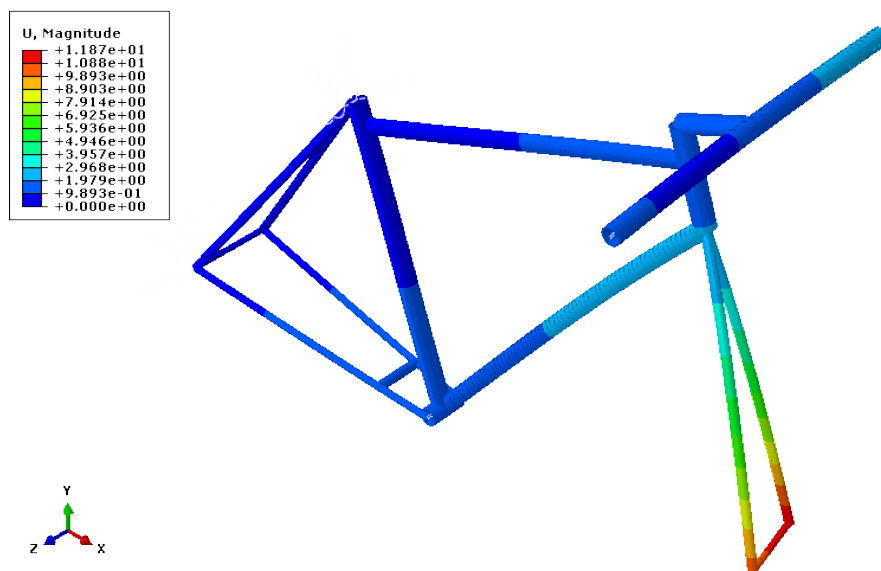
Jól látható a 21. ábrán, hogy a z irányú elmozdulás a vizsgált időintervallum végére elkezd beállni közel 0 értékre, ami annak köszönhető, hogy az ütközést követően a vázat már nem éri a szerkezetre merőlegesen erő, ám az elmozdulás abszolútértéke a statikus terhelésnek megfelelően áll be. A ferde ütközés során a váznak nagyobb terhelést kell viselnie, így a kritikusnak tekinthető elmozdulás (a villa végpontjainak elmozdulása) a megfelelő egyenes ütközéseknél nagyobb. Országúti- és hegyikerékpár váz ferde ütközése esetén létrejövő elmozdulásokat mutatja be a 7.-9. táblázat összehasonlító jelleggel.

7. táblázat. Az elmozdulások a kerékpárok ferde ütközése és AISI 4130 anyag esetén[mm]

Orsz.ú.	Ferde ütközés	Statikus terhelés	Dinamikai tényező
A.pont	5,937	4,326	1,372
B.pont	5,919	4,146	1,428
C.pont	1,080	0,362	2,983
D.pont	0,590	0,305	1,934
E.pont	0,847	0,466	1,817
F.pont	4,249	2,372	1,791

Hegyi	Ferde ütközés	Statikus terhelés	Dinamikai tényező
A.pont	7,390	4,857	1,522
B.pont	7,104	4,497	1,580
C.pont	1,827	0,363	5,033
D.pont	0,734	0,387	1,897
E.pont	0,918	0,489	1,877
F.pont	4,311	2,489	1,732

Az országúti kerékpár geometriáján bemutatjuk az alakváltozás jellegét a maximális elmozdulás tekintetében kritikus időpillanatban. A legnagyobb alakváltozást - az eddigiek alapján is láthatóan - a villa illetve az alsócső szenved az egymással való kapcsolódási pontjuk környékén, így az ébredő feszültség is valószínűsíthetően ezen a részen lesz a legnagyobb. Az esetenként ébredő legnagyobb feszültségekről később, a 5.11. alfejezetben szólnunk. Az elmozdulásokat a jobb szemléltethetőség érdekében tízszeresére nagyítottuk. A 22. ábra ferde ütközés esetén mutatja meg az elmozdulások jellegét, de ezúttal a statikus modelt mutatjuk meg. A maximális elmozdulás összevethető a 9. táblázat megfelelő pontjaival. A hegyikerékpár geometriájának ferde ütközése esetén az alakváltozások megegyező jellegűek az azonos hatásnak kitett országúti geometriával.



22. ábra. Az országúti váz elmozdulásai

Az asszimmetrikus elmozdulást, és a kerékpár csavarodását ferde ütközésnél jól mutatják a 22. ábrán a villa végének, illetve a kormány két végének az elmozdulásai.

Az elmozdulás értékeket sem a 22. ábrán, sem a 23. ábrán nem simítjuk el, hanem elemenkénti értékekkel mutatjuk meg őket, az elmozdulást szemléltető színek ezért sávosak. Jellegüket tekintve mind a két kerékpárváltozat azonosan alakváltozik.

8. táblázat. Az elmozdulások a kerékpárok ferde ütközése és AA 7006-T6 anyag esetén[mm]

Orsz.ú.	Ferde ütközés	Statikus terhelés	Dinamikai tényező
A.pont	10.457	6.556	1,595
B.pont	9.957	6.076	1,638
C.pont	1.066	0.365	2,920
D.pont	0,567	0.349	1,625
E.pont	0.613	0.353	1,737
F.pont	4.818	2,640	1,825
Hegyi	Ferde ütközés	Statikus terhelés	Dinamikai tényező
A.pont	13,358	9,810	1,362
B.pont	12,614	8,843	1,426
C.pont	1,353	0,351	3,854
D.pont	0,768	0,423	1,815
E.pont	0,962	0,504	1,908
F.pont	3,744	2,026	1,848

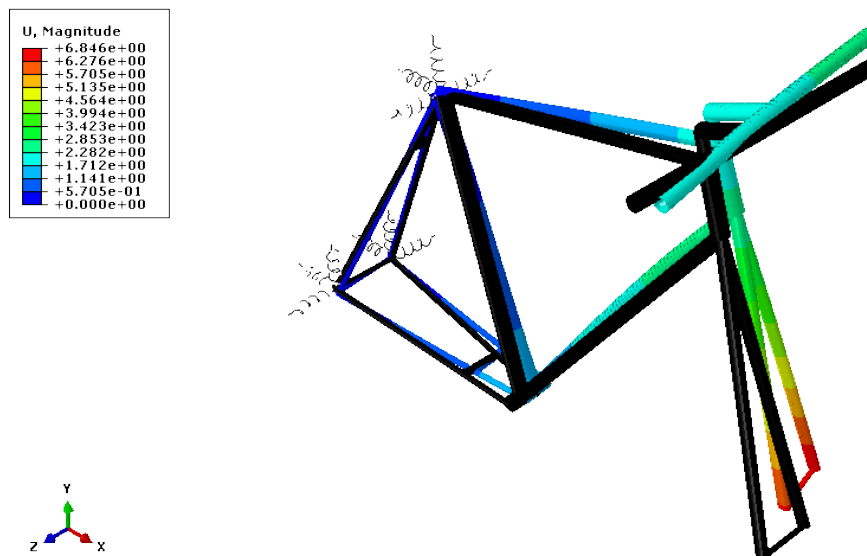
Mint ahogy a 7. -9. táblázatokból kiderül, az azonos anyagokból készült, de különböző geometriájú kerékpárvázak megközelítőleg azonos elmozdulásokat produkálnak az egyes pontokban.

9. táblázat. Az elmozdulások a kerékpárok ferde ütközése és ASTM AZ91C-T6 anyag esetén[mm]

Orsz.ú.	Ferde ütközés	Statikus terhelés	Dinamikai tényező
A.pont	13,054	9,248	1,411
B.pont	12,651	8,435	1,500
C.pont	1,106	0,363	3,04
D.pont	0,630	0,344	1,831
E.pont	0,578	0,310	1,865
F.pont	5,750	3,079	1,867
Hegyi	Ferde ütközés	Statikus terhelés	Dinamikai tényező
A.pont	15,483	11,871	1,304
B.pont	13,982	10,437	1,339
C.pont	1,914	0,362	5,287
D.pont	0,793	0,419	1,893
E.pont	0,857	0,446	1,921
F.pont	4,912	2,513	1,955

5.9. Statikus alapterhelés

Ellenőrzésképpen elkészítjük a vázak statikai modellét oly módon, hogy a már előzőekben ismertetett rugós ágyazás mellett a vázra csak a gravitációs erő, illetve a kerékpáros koncentrált erőkből álló súlya hat. Ennél a modellenél a megfelelő pontokban kapott elmozdulásoknak meg kell egyezniük azokkal az elmozdulásértékekkel, amelyekre a dinamikai modelleknél idő elteltével beállnak a vázszerkezet adott pontjai. Ennek a vizsgált esetnek csak ellenőrző feladata van, a rugós ágyazás miatt nem tudunk következtetni a kerékpár alakváltozásaira, hiszen az elmozdulások jelentős része nem a kerékpár alakváltozásából, hanem a rugók megnyúlásából származik.



23. ábra. Az országúti kerékpár elmozdulásai a kritikus időpillanatban ferde ütközésnél

10. táblázat. Statikus terhelés elmozdulásai az országúti kerékpárvázon[mm]

	AISI 4130	AA 7005-T6	ASTM AZ91C-T6
A.pont	1,238	1,080	1,090
B.pont	1,249	1,099	1,116
C.pont	0,535	0,469	0,466
D.pont	0,281	0,251	0,250
E.pont	0,284	0,254	0,248
F.pont	1,120	1,005	1,044

Itt az elmozdulásokat befolyásolja mind a váz terhelés hatására történő deformációja, mind a rugók megnyúlása. A terhelés az egyes vázakon különböző, mivel a különböző sűrűségű azonos geometriájú vázakra más-más súlyerő hat a gravitációs gyorsulásnak köszönhetően. Ezért van, hogy a 10. -11. táblázatban a kisebb rugalmassági modulusú és sűrűségű anyagok elmozdulásai esetenként kisebbek.

11. táblázat. Statikus terhelés elmozdulásai a hegyi kerékpárvázon [mm]

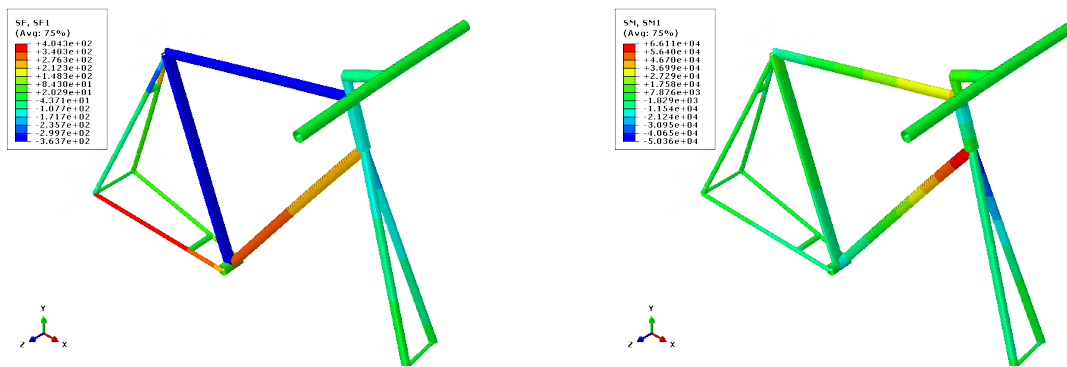
	AISI 4130	AA 7005-T6	ASTM AZ91C-T6
A.pont	1,178	1,088	1,120
B.pont	1,139	1,038	1,059
C.pont	0,450	0,403	0,399
D.pont	0,191	0,189	0,194
E.pont	0,183	0,179	0,185
F.pont	1,063	1,006	1,066

A 18. -21. ábrákkal összevetve ezeket az értékeket látszik, hogy a megfelelő pontok statikus elmozdulásaihoz tartanak a dinamikus modell kitérései. Az előbb említett ábrák csak néhány pont elmozdulásait szemléltetik, de kirajzolható lenne egy elmozdulás-idő függvény a szerkezet bármely pontjára, amely ugyanúgy a megfelelő statikus kitéréshez tartana.

5.10. A rúderők és nyomatékok

A szerkezetben terhelés hatására belső erők és nyomatékok ébrednek. Ezen erők és nyomatékok nagyságából, illetve a megfelelő keresztmetszetek vizsgálatából megállapíthatók az ébredő feszültségek. Az általunk alkalmazott ellipszis keresztmetszetű rudakat az Abaqus végelemes program úgynevezett általános keresztmetszetként kezeli, azaz nem az alakját hanem a hajlítási és nyírási tulajdonságait, valamint a keresztmetszet területét kell megadni. Ez annyiban okoz problémát, hogy ezekre a keresztmetszetekre a végelemes program feszültségeket nem, csak rúderőket és nyomatékokat jelenít meg. A többi, hengeres és egyéb keresztmetszetű rudakban a program képes feszültségeket megjeleníteni, de az általunk veszélyesnek ítélt helyeken ilyen módon a feszültségeket nem tudjuk megállapítani.

Lehet azonban következtetni a kritikus pontokra a program által kirajzolt rúderőkből és nyomatékokból.



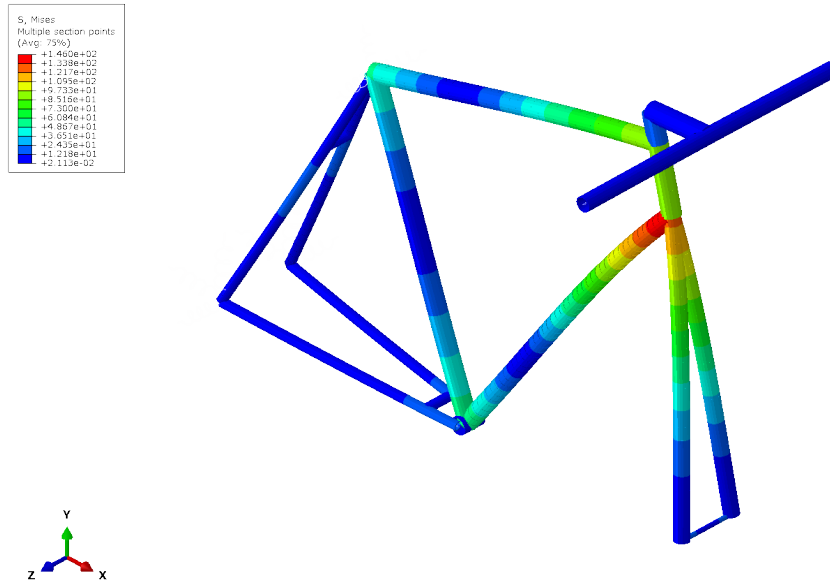
24. ábra. Az országúti váz ferde ütközésénél a kritikus pillanatban ébredő erők és nyomatékok

A 24. ábrán megmutatjuk az országúti kerékpár terhelésének kritikus pillanatában ébredő rúderők és nyomatékok meghatározó komponenseit. A bal oldali ábrán az erők láthatók értékeik N-ban kifejezve, a jobb oldali ábrán pedig a nyomatéki hatás Nmm-ben. Jól látható hogy a maximálisan ébredő húzó erő 404 N. A nyomatéki ábra abból a szempontból érdekesebb hogy a maximális nyomatékok a várt kritikus helyen ébrednek, azaz a villa és az alsócső csatlakozásánál. Ennek maximális értéke 66,11 Nm.

5.11. A feszültségek

A kerékpárok méretezésénél is egyik legfontosabb szempont az adott igénybevétel hatására ébredő legnagyobb feszültség. Ez az érték összevetve a legnagyobb még megengedhető feszültséggel megmutatja számunkra, hogy egy szerkezet kibírja-e az adott terhelést. Mivel a feszültségek vizsgálata nehezen megkerülhető, de az Abaqus program általános keresztmetszetekre ezt nem, vagy csak komplikáltan teszi lehetővé, így hozzávetőleges, szemléltető jellegű eredményeket és ábrákat mutatunk be némileg más modell esetén. Itt az összes rúd hengeres csőkeresztmetszetű, arra alkalmas hogy az ébredő feszültségek nagyságrendjét és a kritikus feszültségek helyét megmutassa. A feszültségek vizsgálata során HMM-Miseses szerinti redukált feszültségeket használunk. Az adatokat a [16] alapján közöljük.

A mi ütközéses vizsgálatainknál a legnagyobb feszültség kivétel nélkül ugyan abban a pontban ébred, így a kerékpárok veszélyes részei is a kialakítások azonos helyei lesznek.



25. ábra. Acél országúti vázban egyenes ütközés esetén ébredő feszültségek

A maximálisan ébredő feszültségek a két különböző vázszerkezet esetén kis mértékben eltérnek, a feszültségeloszlás jellege a vázon azonos. A kritikus feszültség is az alsócső fejcsővel találkozó végén ébred a szerkezetben. A 25.ábra hengeres keresztmetszetek esetén jól szemlélteti az ébredő feszültségeket, és veszélyes helyeket.

Összevetve a ferde és az egyenes ütközésnél fellépő igénybevételeket az egymásnak megfelelő kialakításoknál (azonos anyag és geometria) megfigyelhető, hogy a kritikus feszültségek tulajdonképpen azonosak. A vázakat azonos ütközés esetén nem veszi jobban igénybe a padkával való ferde találkozás mint az egyenes. A [16]-ban kapott eredményeket a 12. táblázatban foglaljuk össze.

12. táblázat. A maximális feszültségek alakulása

Kialakítás	Anyag	Egyenes ütközés MPa	Ferde ütközés MPa
Országútkerékpár	AISI 4130	146,0	146,7
	AA 7005-T6	134,9	135,5
	ASTM AZ91C-T6	134,7	135,2
Hegykerekékpár	AISI 4130	123,1	123,5
	AA 7005-T6	116,0	117,0
	ASTM AZ91C-T6	114,9	115,9

A 12 táblázatot összevetve a 1. táblázattal kitűnik, hogy a kritikus feszültségi értékek csak a magnézium ötvözetből készült váznál közelíthetik meg vészesen a folyáshatár értékét.

A másik két anyagból készült vázak megfelelnek a biztonsági előírásainknak, így a vázak az ütközés során nem szenvednek károsodást.

6. Összefoglalás

Az ipari gyakorlatban természetesen a különböző anyagból készített vázakat más-más geometriával és más-más átmérőjű illetve falvastagságú csövekből gyártják. A különböző anyagtulajdonságoknak köszönhetően változatos tulajdonságú vázak alakíthatók ki. Ezen vizsgálat során azonos geometriai modelleket vetettünk össze, így az egyes anyagok tulajdonságainak széles skálán való változása mellett érthető módon az elmozdulások is széles skálán változnak. Az általunk használt modell leginkább acélvázként állja meg

a helyét, míg például magnézium anyag nagyobb alakváltozásai miatt geometriai változtatást igényelne (nagyobb csőátmérők és falvastagság), hogy olyan értékeket kapjunk az elmozdulásokra, amelyek egy általunk mindennapokban használt kerékpárváztól elvárhatók, illetve a feszültségekre, hogy jó biztonsággal megfeleljenek az anyagjellemzőknek.

Tekintve továbbá, hogy lineáris modellt alkalmaztunk az elmozdulásokra, kis alakváltozásokat feltételezve nem tudjuk figyelembe venni az esetlegesen fellépő maradó alakváltozásokat vagy töréseket, amely adott esetben (főleg az alumínium és magnézium vázaknál) előfordulhatnak.

Mindezeknek a figyelembevétele mellett azonban megvizsgáltunk és összehasonlítottunk két eltérő felhasználásra szánt kerékpárvázat több szempont és igénybevétel alapján. A vizsgálat során megállapítottuk, hogy a geometriai kialakítás változatossága kevésbé befolyásolja a kerékpár viselkedését, mint a szerkezeti anyagok tulajdonságai. A feszültségeket és alakváltozásokat vizsgálva megállapítottuk a vázak veszélyes helyeit, és a maximálisan ébredő feszültségek értékét. Ezek alapján arra jutottunk, hogy a magnéziumötvözetből készült kerékpárváz nem felel meg a kívánt biztonsággal a feszültségi előírásainknak.

Ez a dolgozat jó kiindulást adhat egy kerékpárváz részének vagy egészének részletesebb végeselemes analíziséhez, amely során a feszültség szempontjából kritikus pontok mélyrehatóbb vizsgálata valósítható meg.

Hivatkozások

- [1] K.J.Bathe *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, **1996**.
- [2] David Gordon Wilson, Jim Papadopoulos, *Bicycling Science*, 3rd edition, MIT Press, **1999**.
- [3] Páczelt István, Szabó Tamás, Baksa Attila- *A végeelem-módszer alapjai* **2007**
- [4] Baksa Attila, Nándori Frigyes- *Végelem módszer Előadás vázlat* **2005**
- [5] ABAQUS 6.7 User Documentation
- [6] <http://www.ibike.org/library/history-timeline.htm> (2012-05-07)
- [7] http://redenacionaldecombustao.org/escoladecombustao/arquivos/EDC2007/combustao/Joseph_Shepherd_12-DDT_Structural_Response.pdf (2012-07-10)
- [8] <http://www.kirkleebicycles.com/road> (2012-04-29)
- [9] *Rugalmasságtan* c. egyetemi tantárgy előadás vázlat (előadó: Prof. Bertóti Edgár, 2011/2012 őszi félév)
- [10] <http://hu.wikipedia.org/wiki/Rezg%C3%A9s> (2012-11-12)
- [11] http://hu.metapedia.org/wiki/Dinamikus_t%C3%A9nyez%C5%91 (2012-07-10)
- [12] http://www2.galcit.caltech.edu/EDL/publications/reprints/galcit_fm2006-005.pdf (2012-07-10)
- [13] <http://www.bigmountainriding.com/category/bikes/> (2012-04-29)
- [14] <http://www.eFunda.com>
- [15] <https://people.fh-landshut.de/maurer/numeth/node133.html>
- [16] Csorba Iván *Kerékpár vázszerkezetének végeelemes analízise Szakdolgozat 41 oldal* (2012 Miskolc)