Pár kereskedés

Országos Tudományos Diákköri Konferencia

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés 4

2. Pairs trading, avagy a zaj mint statisztikus arbitrázs 5

3. Matematikai modell 9

4. Módszertan 18

4.1. Párok meghatározása 18

4.2. Kerekedé 19

4.3. Gyakorlati megvalósítás 20

5. Robosztusság vizsgálat 23

6. Empirikus vizsgálat 24

6.1. Adatok 24

6.2. Teljes és többlethozamok 24

6.3. Kockázat 28

6.4. Short-long értékfolyamat 30

6.5. Korreláció és stabilitás 31

6.6. Torzítottság és korlátozó feltételek 33

7. Konklúzió 35

8. Irodalomjegyzék 36

Táblázat- és ábrajegyzék

1. ábra: Függetlenül generált 1000 elemű minta periodogramja 12

2. ábra: Zajos szinusz hullám 12

3. ábra: Zajos folyamathoz tartozó periodogram 13

4. ábra: Minta 15

5. ábra: A mintához tartozó becsült sűrűségfüggvény 15

6. ábra: 1994-2013 keleti régió (szaggatott), nyugati régió (folytonos) és az MSCI Europe hozamai (hullámzó) 26

7. ábra: 250 napos mozgóátlagolással adód hozamgörbék ferdesége 29

8. Ábra Keleti és nyugati régió napi hozamainak hisztogramjai és a VaR szintek 29

9. Ábra Short-long hozamok (zöld: long, kék: short, keleti, nyugati régió) 30

10. Ábra Keleti és nyugati régión végzett bootstrapping eredményei 33

1. táblázat: Időlimitek 22

2. táblázat: Részvények 24

3. táblázat: Éves hozamok 26

4. táblázat: Portfólió statisztikai jellemzői 27

5. táblázat: Sharp-mutatók 28

6. táblázat: A pairs trading stratégia VaR értékei 29

7. táblázat: Korrelációs mátrix hozamokra 31

8. táblázat: Korrelációs mátrix értékfolyamatokra 32

9. táblázat: R^2 statisztikák hozamokra 32

10. táblázat: R^2 statisztikák értékfolyamatokra 32

11. táblázat: A keleti és nyugati régió kapcsolata az FFM modell faktoraival 32

12. táblázat: A keleti és nyugati régió kapcsolata az FFM modell faktoraival 32

1. Bevezetés

A 2008-ban kezdődött gazdasági válságot követően a lakossági és intézményi befektetők körében is megfigyelhető az óvatosság, a kockázatvállalási hajlandóság csökkenése. A befektetések lefelé mutató kockázatának alapos vizsgálata, illetve a portfolió elemeinek együttmozgása, vagy függetlensége a korábbiakhoz képest is kiemelt figyelmet kap.

A legtöbb eszközosztály jelentős együttmozgása azonban megnehezíti a befektetők kockázatsemlegesítési szándékát. Olyan termék bevonása egy portfolióba, amely negatív vagy zéró korrelációval rendelkezik a főbb eszközosztályokkal szemben (részvény, kötvény, ingatlan) nagy eredménynek számít. Ebben a környezetben különös figyelmet kapnak a piac semleges befektetési módszerek, melyek többsége opcióval, kötvénnyel vagy más részvénnyel fedezett pozíciót tartalmaz.

A fentiek közül a legegyszerűbb módszer két részvény egymással szembeni, azonos időben történő, vételi és eladási kereskedése. Amennyiben a felvett részvények kitettsége a piaci faktorokkal szemben hasonló, úgy a pozíció együttes, szisztematikus kitettsége a long és short oldalból következően zéró. A pairs trading befektetési stratégiával alkotott portfolió hozama jelentős, a főbb eszközosztályokkal való együttmozgása alacsony.

Dolgozatom célja, hogy a korábbi szakirodalom felhasználásával egy piac semleges befektetési modellt hozzak létre, melynek hatékonyságát az európai piacokon teszteljem. Ennek érdekében a pairs trading stratégiával összeállított portfolió hozamait, szórását, korrelációját a piachoz, így az MSCI Europe indexhez viszonyítva vizsgálom, bizonyítva a stratégia piacsemlegességét.

2. Pairs trading, avagy a zaj mint statisztikus arbitrázs

A pairs trading egy piac semleges, az árfolyamok konvergenciáját alapul vevő statisztikai arbitrázs stratégia. Az 1970-es években megjelenő Black-Scholes-Merton modell tökéletes piacával szemben Gerry Bamberger és Nunzio Tartaglia a Morgen Stanley kvantitatív elemzői által kifejlesztett befektetési stratégia, amely az árfolyamok konvergenciáján, a historikus trendhez való tartásán alapuló piaci félreárazások korrekcióira épít.

A módszer lényegét tekintve egy relatív árazási mechanizmus, amely az egy ár törvényén nyugszik. Ingersoll (1987) definíciója szerint, ha különböző befektetések ugyanazt a cash flow-t generálják, akkor ugyanolyan áron kell, hogy forogjanak a piacokon. Ezt a megfigyelést továbbépítve Chen és Knez (1995) azt állították, hogy két hasonló, de nem feltétlenül megegyező kifizetéseket biztosító értékpapírnak is hasonló áron kell eladásra kerülnie.

A gondolatmenetet továbbépítve Elliott (2005) az addigi megközelítéssel szemben a részvény árfolyamatának viselkedését nem egy másik részvény árfolyamának, hanem annak, belső értékfolyamatának tükrében vizsgálta. A zajok lecsengésének modellezéshez a sztochasztikus differenciálegyenletek elméletéből ismert Ornstein—Uhlenbeck-folyamatok elméletét alkalmazta.

Az 1980-as években a pairs trading az egyik legsikeresebb befektetési stratégia volt, Gatev (2006) állítása szerint 1987-ben a Morgan Stanley a stratégia segítségével még 50 millió USD profitra tett szert.

A stratégia jövedelmezőségének egyik legátfogóbb vizsgálata Gatev, Goetzmann és Rouwenhornst nevéhez fűződik, akik 2006-ban megjelent cikkükben 1963. júliusától 2002. decemberéig meglévő napi adatokon hajtottak végre backtestet. Az általuk vizsgált időszak húsz legjobb párját tartalmazó portfólió mintegy 1,44 százalékos bruttó átlagos havi hozamot generált (t=11,56), továbbá kutatásuk feltárta az 1980-as évek előtti és utáni hozamokban mutatkozó jelentős különbségeket is. Amíg a 80-as évek előtti adatokon a költségekkel és kockázattal korrigált havi 67 bázispontos nettó átlagos hozam adódott, addig 1988-tól 2002-ig terjedő időszakban ez 42 bázispontra csökkent.

Szerintük az eltérés okai nem kizárólag a stratégia széles körben való alkalmazásban, hanem a részvénypiaci hozamok növekedésében keresendők. Megmutatták, hogy a pairs trading

alacsony részvénypiaci hozamok mellett jobban teljesít, mint magas hozamok mellett, így a 80-as évek végén a részvénypiaci hozamok növekedése is jelentősen csökkentette a stratégiával elérhető hozamot. Gatev et al. (2006) cikkből az is kiderül, hogy a portfólió érzékeny a hozamgörbe párhuzamos elmozdulásaira, továbbá emelkedő hozamgörbe esetén magasabb profitokat eredményez. Ez jelenség a válságokban való kedvezőbb teljesítményre utal és összefüggésben van a részvényárak magasabb szórásával, amit közgazdaságtanban volatilitásnak nevezünk.

A portfólió összetételének vizsgálata során megmutatkozott, hogy nagyobb elemszámú portfólió jobban diverzifikált, azaz kisebb a szórása. Amíg a legjobb öt pár esetén a vizsgált 474 hónapból 124 hónap volt veszteséges, addig a legjobb húsz pár esetén csupán 71.

A backtest során a stratégia által generált hozam az S&P500 hozamának duplájának adódott fele akkora szórás mellett. Fontos megjegyezni azt a tényt is, hogy lényegében egy teljesen piacsemleges befektetési stratégiáról beszélünk, hiszen a portfólió alig érzékeny a szisztematikus kockázati faktorokra.

A Gatev et al. (2003) követően 2005-re a pairs trading stratégia szempontjából a tajvani tőzsdeindex napi adatainak elemzését is elvégezték. Andrade (2005) cikkben 647 különböző tajvani cég 1994. jan. 04. - 2002. aug. 29. közti idősorait vizsgálták. A backtest során alkalmazott portfólió a legjobb húsz párt egyenletes súlyokkal tartalmazta. A 2360 kereskedési napon végzett kutatás során kapott eredmények nagymértékben hasonlítottak a Gatev et al. (2006) cikk eredményeire. A TSEC árfolyamainak elemzése során felépített portfólió átlagos éves hozama illetve hozamszórása 10,18% és 9,15% volt, amíg a Gatev et al. cikkben 11,28% átlagos éves hozam adódott 16,88% szórás mellett. A tajvani portfólió legjobb húsz párjából átlagosan 19,69 páron volt nyitott pozíció, amíg a Gatev (2006) cikk elemzése szerint az általuk használt húsz legjobb párt tartalmazó portfóliónak átlagosan 19,30 párjával sikerült pozícióba kerülniük. Mindkét elemzés által alkalmazott kvantitatív módszer a normalizált napi hozamokat vette alapul:

$$\hat{P}_t^A := \prod_\tau^t (1 + r_\tau^A) \qquad (1)$$

A vizsgált időszakokat féléves (125 napos) periódusokra osztották. Minden féléves kereskedési időszakot egy 250 napos megfigyelési időszak előzött meg, így a portfóliót az újabb adatoknak megfelelően félévente átalakították.

A párok meghatározásához az indexben szereplő összes cég $\hat{P}_t^A$ értékének kiszámítása után, kiszámították azok különbségeinek szórását (ez 500 részvény esetén 124750, 647 részvény esetén 208981 idősor szórásának kiszámítását jelenti), majd a differenciák szórásai alapján sorba rendezték a párokat, és a húsz legkisebb szórású párt tekintették a további vizsgálatokhoz.

Két részvény távolságának meghatározásár

$$Cloeseness^{AB} := \sum_{t=1}^{250}\left(\hat{P}_t^A - \hat{P}_t^B\right)^2 \tag{2}$$

mérőszámot vezették be.

Egy úgynevezett trigger érték

$$Trigger^{AB} = \pm\sigma\left(\hat{P}_t^A - \hat{P}_t^B\right) \tag{3}$$

segítségével határozták meg a pozíció nyitásának időpontjait.

Az (A, B) részvényt tartalmazó páron elért hozamot az alábbi módon határozták meg.

$$I_t^{AB} = \begin{cases} 0 & zártapozíció \\ 1 & shortA, longB \\ -1 & longA, shortB \end{cases} \tag{4}$$

$$r_t^{AB} = I_t^{AB}(r_t^B - r_t^A) \tag{5}$$

A portfólió felépítése során minden párt ugyanolyan súllyal tekintettek, így a portfólió hozama:

$$r_t^{port} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} r_t^{AB,i} \tag{6}$$

A stratégia továbbépítése Vidyamurthy nevéhez fűződik, aki 2004-ben megjelent könyvében egy újabb fontos már meglévő fogalom bevezetésének segítségével határozta meg portfólióját. A hosszú távú egyensúlyi állapottól történő rövid távú eltérésekre, mint stacionárius zajra tekintett, így ez a fajta megközelítés vezetett el a kointegrációhoz, részvénypárok kointegráltságának vizsgálatához. Ezen megközelítés alapján született meg Caldeira (2013) cikk, amelyben a BM&FBOVESPA 2005. jan. - 2012. okt. adatait vizsgálták. A kutatás folyamán alkalmazott VAR(p) modell segítségével meghatározott portfólió az adott piaci portfólióhoz képest 16,38% többlet hozamot eredményezett.

Kutatásunkban Vidyamurthy (2004) eredményeiből kiindulva Silverman (1982) cikkben leírt KDE segítségével Caldeira (2013) cikkben megtalálható modell európai piacokon történő vizsgálatát végeztük el.

3. Matematikai Modell

Ahhoz, hogy egy adott stratégiával sikeresen kereskedhessünk, szükségessé válik a gyenge stacionaritás kérdésének eldöntése. Abban az esetben, ha a portfolió értékfolyamatunk függvénye gyengén stacionárius, akkor annak múltbeli viselkedésének elemzése releváns információkat szolgáltat a jövőbeli várakozásokkal kapcsolatban, azonban ha nem, akkor a múltbeli adatok vizsgálata félrevezető lehet. Ennek a problémának a megoldásához az alábbi fogalmak vezetnek el minket.

Egy X_t folyamatot gyengén stacionáriusnak nevezünk, ha $\mathbf{E}|X_0| < \infty$ estén

$$\mathbf{E}X_t = \mathbf{E}X_0 \tag{7}$$

$$Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t+k}, X_{s+k}) = \gamma(t-s) \tag{8}$$

$\forall t, s, k \in \mathbb{N}$ is teljesül.

Tusnády (1986) könyvében bevezetett **S** operátort visszaléptetésnek nevezzük, ha az X_t folyamathoz az $Y_t = X_{t-1}$ folyamatot rendeli.

Az X_t folyamatot ARMA(p,q)-nak, összetett autoregresszív mozgóátlag folyamatnak nevezzük, ha az **S** visszaléptetés operátornak vannak olyan

$$A(\mathbf{S})X_t = X_t - a_1 X_{t-1} - \cdots - a_p X_{t-p} \tag{9}$$

$$B(\mathbf{S})X_t = b_0 + b_1\mathbf{S} + \ldots + b_q\mathbf{S}^q \tag{10}$$

polinomjai, hogy $n_0 \neq 0$, és

$$A(\mathbf{S})X_t = B(\mathbf{S})\varepsilon_t \tag{11}$$

ahol ε_t fehérzaj folyamat.

A definícióban mindig a lehető legalacsonyabb fokszámú A(**S**), B(**S**) polinomokat tekintjük, ez azt is jelenti, hogy A(**S**), B(**S**) polinomoknak nincs közös gyöke.

- Ha az A(**S**) polinom gyökei az egységkörön kívül helyezkednek el, ekkor van olyan X_t stacionárius ARMA(p, q) folyamat, amelyre

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} b_j \, \varepsilon_{t-j} \qquad (12)$$

teljesül, és ennek van MA(∞) előállítása.

- Ha a B(**S**) polinom gyökei az egységkörön kívül helyezkednek el, akkor X_t-nek van AR(∞) előállítása, azaz a folyamat invertálható.

Egy X_t ARMA folyamat generátorfüggvénye Ψ(**S**) = A(**S**)/B(**S**) alakú. Ez meglehetősen általános, mivel a polinomok sűrű alterét alkotják a kompakt tartójú folytonos függvényeknek így tetszőleges folyamatot közelíthetünk ARMA folyamatokkal. Mindezek mellett Wold (Cochrane (2005)) bebizonyította, hogy tetszőleges folyamatnak létezik MA(∞) reprezentációja.

A fentiek alapján látjuk, hogy a vizsgált folyamathoz ARMA folyamatot illesztve, majd annak AR polinomjához tartozó gyökeinek vizsgálatával a gyenge stacionaritás kérdése megválaszolható.

A pairs trading egy relatív árazási eleven alapuló befektetési stratégia. Ennek gyakorlati megvalósításához, szükségessé válik a részvénypárok együttmozgásnak, kointegráltságának vizsgálata.

Legyen d ∈ N, és X_t egy determinisztikus komponens nélküli sztochasztikus folyamat, amelyet d-szer differenciálva létezik stacionárius, invertálható ARMA reprezentációja. Ekkor X_t egy d-ed rendbeli integrált folyamat, és $X_t \sim$ I (d) jelöljük.

Az $X_t, Y_t \sim$ I (d) idősorok kointegráltak, ha létezik β, hogy $X_t + \beta Y_t \sim$ I (d − k), ahol

$0 \leq k \leq d$.

A fenti definíciónak fontos speciális esete a k = d, ilyenkor tökéletes kointegráltságról beszélünk.

A fogalmak szemléltetéséhez tekintsük a táncoló pár allegóriáját. Az X_t és Y_t idősorokra, mint táncoló párra tekintünk, és ahogy a pár pályája nem, vagy csak rendkívül nehezen előre jelezhető, úgy az X_t és Y_t részvényárfolyamok függvényei sem jósolhatók, azonban ahogyan a táncoló férfi és nő közti távolság jövőbeli alakulását becsülhetjük, ugyan ezen meggondolás alapján az egyes idősorok kointegráltságának ellenőrzése után lehetőségünk nyílik az X_t és Y_t

idősorok távolságának elemzésére. Mindez lehetővé teszi az egyes párokon fellépő félreárazások észlelését.

A gyenge stacionaritás további vizsgálatához érdemes az idősor periodogramját kiszámítani. Mindezek mellett a fenti hasonlat folytatásaként mindenképp érdemes ellenőrizni, hogy a pár nem valamifajta körtáncot végez, és így egyetlen periódus alapos megfigyelését követően pontosan előre tudjuk jelezni a férfi és nő, azaz az egyes részvények árfolyamát. Ezen vizsgálatok elvégzéshez határozzuk meg az idősor periodogramját.

Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ adott idősor és jelölje

$$A(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k \cos(\lambda k) \qquad B(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k \sin(\lambda k) \qquad (13)$$

ahol

$$I_n(\lambda) = A^2(\lambda) + B^2(\lambda) - \pi \leq \lambda \leq \pi \qquad (14)$$

függvényt periodogramnak nevezzük.

$$\left| \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k \cos(\lambda k) + \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k \sin(\lambda k) \right| = \frac{2}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{e}^{i\lambda k} \right|^2 \qquad (15)$$

vagyis a periodogram nem más, mint a Fourier-transzformált abszolút érték négyzetének a 2/n-szerese.

Legyen X_t egy Gauss fehérzaj folyamat, ekkor

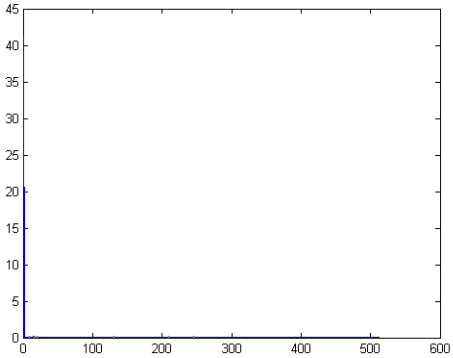
- $\mathbf{E} I_n(\lambda_j) = 2\sigma_\varepsilon^2$ (16)

- $\mathbf{D^2} I_n(\lambda_j) \begin{cases} 4\sigma_\varepsilon^4 & ha \quad 0 < j < n/2 \\ 8\sigma_\varepsilon^4 & ha \quad j = 0 \text{ vagy } j = n/2 \end{cases}$ (17)

- $I_n(\lambda_j) \sim \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \chi_2^2 if \ 0 < j < n/2 \\ 2\sigma_\varepsilon^2 \chi_1^2 if j = 0 \ or n/2 \end{cases}$ (18)

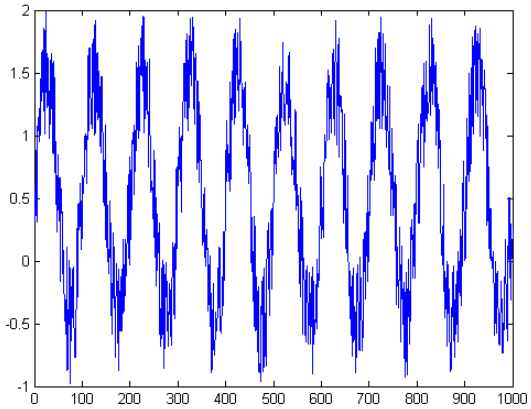
Legyen az $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ minta egy X standard normális háttéreloszlású valószínűségi változó független realizációja. A mintára úgy is tekinthetünk, mint egy Gauss fehér zaj folyamat adott időpontjaihoz tartozó realizációjára, így nem számíthatunk arra, hogy a múlt egyes mintázatai a jövőben valami fajta periódus szerint ismétlődni fognak. Ezt támassza alá a mintából számolható periodogram is, amiről leolvasható, hogy a 0 értékhez tartozik az

egyetlen nem 0 amplitúdó, így a periódushossz $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty$. Ez lényegében azt jelenti, hogy egyetlen periódusunk van, azaz nincs ismétlődés a folyamat aperiodikus.



1. ábra: Függetlenül generált 1000 elemű minta periodogramja

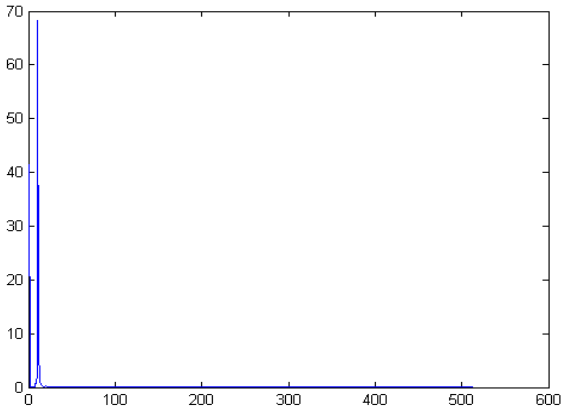
Az előző idősorhoz a $\sin(\frac{2\pi(t-1)}{100})$, $t \in \{0,1,\dots,1000\}$ idősort pontonként hozzáadva egy új, 100 hosszú periódusokkal rendelkező idősort kapunk.



.

2. ábra: Zajos szinusz hullám

Az új folyamathoz tartozó periodogramról leolvasható, hogy a 10 értékhez tartozó amplitúdó kiugró, így 1000/10=100 hosszú periódusaink vannak, ami konzisztens a 2 ábrával.



3. ábra: Zajos folyamathoz tartozó periodogram

Mindezek után, ha egy folyamatról sikerült eldöntenünk, hogy az gyengén stacionárius, akkor a historikus adatok elemzésével előrejelzéseket készíthetünk.

Nemparaméteres statisztikai eszközök segítségével megbecsülhetjük az idősor egyes pontjaiban vett valószínűségi változók sűrűségfüggvényeit, majd a gyenge stacionaritást felhasználva jövőre vonatkozó várakozásokat fogalmazhatunk meg.

A következő fogalmak révén tudjuk mindezt megtenni.

Egy X ismeretlen háttéreloszlású valószínűségi változó empirikus karakterisztikus függvénye:

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{itx_j} \qquad (19)$$

ahol $x_1, x_2, \dots, x_n$ a statisztikai minta.

Kézenfekvőnek tűnik X háttéreloszlását $\hat{\varphi}(t)$ empirikus karakterisztikus függvény inverz Fourier-transzformáltjával becsülni, azonban nagy t esetén az inverziós formula a $\hat{\varphi}(t)$ instabilitása miatt divergál. A $\hat{\varphi}(t)$ stabilitásának a megőrzéséhez a függvényt pontonként megszorozzuk egy $\Psi_h(t) = \Psi(\mathrm{ht})$, $\Psi(0) = 1$; $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\Psi(\mathrm{n}) = 0$; $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\Psi(n) = 0$ csillapító függvénnyel, így a $\hat{\varphi}(t)\Psi_h(t)$ csillapított függvény inverz Fourier-transzformáltjával már becsülhetjük X sűrűségfüggvényét.

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}\Psi_h(t)e^{-itx}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{-it(x_j-x)}\,\Psi(ht)dt =$$

$$\frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ith\frac{(x_j-x)}{h}}\Psi(ht)\,d(ht) = \frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}_{[\Psi]}^{-1}\left(\frac{x-x_j}{h}\right)$$

Egy K szimmetrikus függvényt magfüggvénynek nevezünk,

$$K_h(x) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x}{h}\right) \tag{20}$$

valamint ∃ olyan Ψ függvény, hogy a fentiekben levezetett $\mathbf{F}_{[\Psi]}^{-1}(x) = K(x)$ teljesül.

Egy ismeretlen X háttéreloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének az $x_1, x_2, \dots, x_n$ független realizáció segítségével történő közelítése:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(x - x_i) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K(\frac{x - x_i}{h})) \tag{21}$$

ahol h skála paraméter, K magfüggvény.

A h skálaparaméter megválasztása során célunk a várható négyzetes eltérés minimalizálás:

$$h \coloneqq \arg\min_{h \in \mathbb{R}} \mathbf{E} \int \left(\hat{f}_h(x) - f(x)\right)^2 dx \tag{22}$$

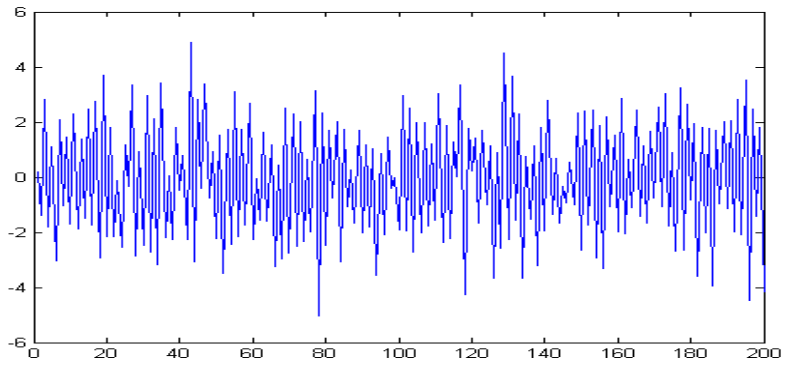
Standard normális magfüggvény használata esetén Silverman (1982) az optimális skálaparaméter:

$$h = \left(\frac{4\hat{\sigma}^5}{3n}\right)^{\frac{1}{5}} \tag{23}$$

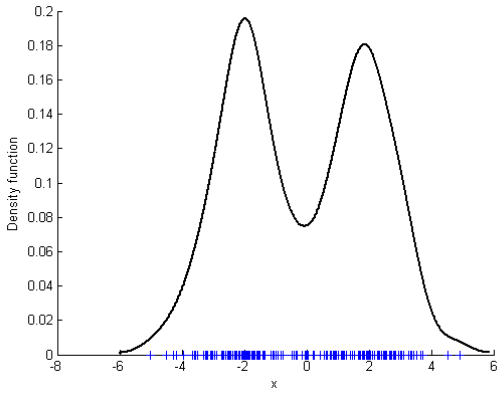
ahol $\hat{\sigma}$ az empirikus szórás.

A fenti eljárással egy ismeretlen, gyengén stacionárius X_t folyamat adott időpontjaihoz tartozó valószínűségi változóinak sűrűségfüggvényeit becsülhetjük.

Adott egy 200 elemű minta, amelynek 100 eleme egy normális eloszlású, 2 várható értékű, 1 szórásnégyzetű valószínűségi változó 100 független realizációja. A maradék 100 elem szintén egy normális eloszlású, de -2 várható értékű, 1 szórásnégyzetű valószínűségi változó 100 független realizációja. (csak a 200 elemű minta adott, amiről már eldöntöttük, hogy gyengén stacionárius.)



4. ábra: Minta



5. ábra: A mintához tartozó becsült sűrűségfüggvény

A fenti eljárást Matlab R2009a programnyelven implementálva a Minta adatsorra futtatva a 2. ábra adódik.

A becsült sűrűségfüggvény alakja sugallja, hogy két normális eloszlású valószínűségi változó keverék eloszlásából származik a 200 elemű minta, így a priori feltevések nélkül sejthetjük meg a megfelelő háttéreloszlást.

Elliott (2005) cikke után nem megkerülhető a sztochasztikus differenciál egyenletek elmélete. Az átlaghoz tartás modellezésére az alábbi úgynevezett Ornstein—Uhlenbeck-folyamatot alkalmazzuk. A folyamatot a következő lineáris sztochasztikus differenciálegyenlet definiálja:

$$dR(t) = \big(\alpha - \beta R(t)\big)dt + \sigma dW(t) \qquad (24)$$

ahol α, β, $\sigma > 0$.

Az egyenletből jól látható, hogy van egy $(\alpha - \beta R(t))dt$ determinisztikus drift a várható értékhez (α/β-hoz), illetve egy $\sigma dW(t)$ diffúziós tényező, amit egy Brown mozgás hajt meg.

Az egyenlet rendkívül speciális így létezik erős értelemben vett megoldása:

$$R(t) \sim \mathcal{N}\left(e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right), \int_0^t \sigma e^{-2(t-s)\beta}\, ds\right) \qquad (25)$$

A megoldás alakjából látható, hogy a folyamat *t.* időpontbeli értéke egy normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek várható értéke a kezdeti felütésnek $R(0)$–nak illetve a folyamat várható értékének $\frac{\alpha}{\beta}$-nak lineáris kombinációjaként áll elő. Fontos megjegyezni, hogy a megfelelő (*t.* időpontbeli) lineáris kombináció előállításakor $R(0)$ együtthatója $e^{-\beta t}$, ami *t*-ben exponenciálisan lecseng. Ez azt jelenti, hogy a kezdeti $R(0)$ felütés hatása időben exponenciálisan gyorsan csökken, azaz a folyamat exponenciálisan gyorsan elfelejti a múltját.

Mindezek mellett R(t)-nek létezik határeloszlása:

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{R(t)} \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}, \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{2\beta}}\right) \qquad \textbf{(26)}$$

ami leírja $\boldsymbol{R(t)}$ hosszútávú viselkedését.

Az empirikus vizsgálatok során realizálódó hozamok elemzéséhez a CAPM modell, MSCI Europe és az USA risk free rate segítségével meghatározható piaci portfólió teljesítményét vesszük alapul.

Célunk olyan aktív portfólió menedzselési befektetési stratégia alkalmazása, amely Sharp-mutatója nagyobb a kockázat piaci áránál, így az alábbi egyenlőtlenség teljesül.

$$\frac{\mathbf{E}\boldsymbol{r_p} - \boldsymbol{r_f}}{\boldsymbol{\sigma(r_p)}} > \frac{\mathbf{E}\boldsymbol{r_M} - \boldsymbol{r_f}}{\boldsymbol{\sigma(r_M)}} \qquad (27)$$

A stratégiával realizálható hozamok stabilitásának vizsgálatához szükségessé válik a $\boldsymbol{\beta}$, kockázati paraméter bevezetése.

Egy *i* kockázatos befektetés $\boldsymbol{\beta_i}$ kockázati paramétere nem más, mint az *i* értékpapír, illetve a CAPM modell segítségével meghatározott *M* piaci portfólió karakterisztikus egyenesének meredeksége.

Ha feltesszük, hogy a különböző kockázatos értékpapírok normális eloszlást követnek, akkor a regressziós görbe egybeesik a regressziós egyenessel, így az alábbi összefüggések adódnak.

$$\boldsymbol{r_i} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta_i r_M} = \mathbf{E}(\boldsymbol{r_i}|\boldsymbol{r_M}) \qquad (28)$$

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{r_i}|\boldsymbol{r_M}) = \boldsymbol{\alpha} + \frac{<\boldsymbol{r_i},\boldsymbol{r_M}>}{\|\boldsymbol{r_M}\|}\frac{\boldsymbol{r_M}}{\|\boldsymbol{r_M}\|} = \boldsymbol{\alpha} + \frac{<\boldsymbol{r_i},\boldsymbol{r_M}>}{\|\boldsymbol{r_M}\|\,\|\boldsymbol{r_i}\|}\frac{\|\boldsymbol{r_i}\|}{\|\boldsymbol{r_{M\|}}\|}\boldsymbol{r_M} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{\beta_i} = \frac{<\boldsymbol{r_i},\boldsymbol{r_M}>}{\|\boldsymbol{r_M}\|\,\|\boldsymbol{r_i}\|}\frac{\|\boldsymbol{r_i}\|}{\|\boldsymbol{r_{M\|}}\|} = \boldsymbol{k_{i,m}}\frac{\boldsymbol{\sigma(r_i)}}{\boldsymbol{\sigma(r_M)}} \tag{30}$$

Mindezekből látható, hogy a $\boldsymbol{\beta_i}$ paraméter az *i* kockázatos befektetés piaci portfólió ingadozására való érzékenységét jellemzi.

Alexander és Dimitriu (2002) cikkéből kiderül, hogy az általunk alkalmazott pairs trading befektetési stratégia piac semleges; $\boldsymbol{\beta_{P.T.}} = \mathbf{0}$, így a piaci hozamot meghaladó eredményt többlethozamnak tekinthetjük.

4. Módszertan

Célunk a pairs trading, vagyis a kointegráló párokkal való kereskedés elméletének egy lehetséges gyakorlati megvalósítása. Ezt a stratégiát két fő rész alkotja. Egyrészt olyan részvény, kötvény, vagy más, kereskedhető termékből álló párokat keresünk, melyek együttmozgása szoros, stabil és az részvények eltávolodása várhatóan csak időleges, másrészt meghatározzuk azokat a kereskedési pontokat és a stratégia egyéb paramétereit, melyek használata mellett a módszer profitábilisan működtethető.

4.1. Párok meghatározása

Az eljárás első felében, a párok alkotásakor, gyakorlatilag hedget keresünk hirtelen elmozdulást mutató instrumentumokhoz. Vizsgálatunk az európai tőzsdéken kereskedett, a későbbiekben bemutatott, 434 darab részvényre terjed ki, amit két részre bontottunk, keleti és nyugati régióra, így$\binom{103}{2}$és $\binom{330}{2}$lehetséges párt jelent. Ezek a párok közül szeretnénk kiválasztani *n* darabot úgy, hogy logaritmikus skálán tekintett páronkénti részvényárfolyamok tökéletesen kointegráljanak.

Azaz páronként ∃ β_i, hogy

$$\ln S_t^{i,1} = \mu_i + \beta_i \ln S_t^{i,2} + \varepsilon_t^i \tag{31}$$

$$\ln S_t^{i,1} \sim I(d) \quad és \quad \ln S_t^{i,2} \sim I(d) \tag{32}$$

ahol d=1, ε_t^i fehérzaj folyamat ∀ i ∈ [0, n].

A vizsgálatot minden lehetséges párra elvégezzük, kiszámítjuk a megfelelő lineáris regressziókat, az u_t^idifferencia folyamatokat,

$$u_t^i = \ln S_t^{i,1} - \mu_i - \beta_i \ln S_t^{i,2} \tag{33}$$

majd az ADF teszt próbastatisztikájával, illetve a periodogram vizsgálatával a legutolsó 250 nap adatit tekintve jellemezzük u_t^i folyamatok stacionaritását. A legerősebb próbastatisztikákhoz tartozó *n* részvénypárt tekintjük a következő 125 napos kereskedési periódusban.

Fontos megjegyezni, hogy a legjobban kointegráló párok közül csak azokat tekintjük, ahol $\beta_i \simeq 1$ teljesül, ellenkező esetben nem lenne lehetőségünk zéró nettó befektetéssel felvenni a megfelelő pozíciót.

4.2. Kereskedés

Az előző lépésben meghatározott kointegráló párok segítségével piacsemlegesen szeretnénk kereskedni.

A stratégia továbbépítésének következő lépéseként kiszámítjuk a $Z^{(i)}$ értékeket, Gauss magfüggvény segítségével becsüljük $Z^{(i)}$, i $\in \{1, 2, \ldots, n\}$ sűrűségfüggvényeket, valamint megvizsgáljuk a periodogramokat.

$$Z_t^{(i)} = \frac{S_t^{i,1} - \beta_i S_t^{i,2} - \mathbf{E}(S_t^{i,1} - \beta_i S_t^{i,2})}{\sigma(S_t^{i,1} - \beta_i S_t^{i,2})} \tag{34}$$

A $Z_t^{(i)}$ értékek segítségével határozzuk meg a pozíció nyitásának, illetve zárásának helyeit;

- Ha az i. pár esetén a t. időpillanatban $Z_t^i > 2$, akkor Caldeira (2013) cikk eredményeit alapul véve pozíciót nyitunk, az $S_t^{i,1}$ részvényen short, $S_t^{i,2}$ részvényen long pozíciót veszünk fel.

  Ha az i. pár esetén a t. időpillanatban $Z_t^i < -2$, akkor pozíciót nyitunk, az $S_t^{i,1}$ részvényen long, és $S_t^{i,2}$ részvényen short pozíciót veszünk fel.
- Ha az i. pár esetén a t. időpillanatban $0{,}5 > Z_t^i > -0{,}5$ akkor a pozíciót zárjuk.
- Mindezek mellett stop-loss feltételeket is be kell építenünk, mivel egy túlzottan nagy Z_t^i értéket már nem tudhatunk be a véletlennek, így előfordulhat, hogy az i. pár részvény árfolyamai az új, nagyobb adathalmazon már nem tökéletesen kointegráltak.
- Továbbá előfordulhat az is, hogy az átlaghoz tartás lassul (a modellező Ornstein—Uhlenbeck-folyamat β_t paramétere jelentősen csökken), így egy pozícióban nagyon hosszú ideig ragadhatunk, ami diszkontálás miatt nem kívánatos.

A fenti kilépési stratégiák mellett sem garantálható, hogy minden pozíciót pozitív egyenleggel zárjunk, mivel előfordulhat, hogy a volatilitás hirtelen megnövekedése jelentős Z_t^i érték csökkenéséhez vezet, így a pozíciót az átlaghoz való visszatérés előtt zárjuk.

A portfólió felépítéséhez Caladeira (2013) cikk módszertanát követjük, így több nyitott pozíció esetén az egyes részvénypárokat azonos súllyal vesszük figyelembe.
A portfólió megváltoztatásakor egy előre meghatározott *m* összérték elérésére törekszünk. Abban az esetben, ha egy újabb páron pozíciót nyitunk, akkor a már meglévő pozíciókból

lezárunk annyit, hogy minden páron ugyanakkora összeggel kerülhessünk pozícióba, továbbá ha pozíciót zárunk, akkor a többi páron a lezárt pozíció súlyával valamint, a nyitott pozíciók számával arányosan a többi nyitott pozíció súlyát megnöveljük.
Az így menedzselt portfólió hozamát hasonlítjuk össze a megfelelő piaci portfólió teljesítményével.

4.3. Gyakorlati megvalósítás

A pairs trading stratégia gyakorlati megvalósítása során fellépő paraméterek

- ADF teszt szignifikancia szintje
- short-long kitettség mértéke
- stop loss szint
- időlimit

optimális megválasztásához az alábbi kérdések megválaszolása nyújt segítséget.

- Melyik az a szignifikancia szint, ami mellett még kointegrálónak tekinthetjük a két idősort, ugyanakkor jelentős kitérésekre, zajokra is számíthatunk?

  Ez döntő fontosságú mivel, abban az esetben, ha 99,9% szignifikancia szintet alkalmazunk, akkor a párok nagyon erősen kointegrálnak, így az átlagtól való jelentős eltávolodás valószínűsége kicsi, azaz nem fogunk pozícióba kerülni.

  Ellenkező esetben, ha túl alacsony 90% szignifikancia szintet választunk, akkor előfordulhat, hogy a két idősor nem kointegrál, így egy az átlagnak vélt értéktől történő jelentős eltávolodás után nem remélhetjük a visszatérést; veszteségesen zárjuk a pozíciót.

  Ezen szempontok alapján az empirikus vizsgálatok során a húsz legjobban kointegráló pár közül csak azokat tekintettük, amelyek stacionaritás vizsgálatához lefuttatott próbastatisztikát 95% biztonság mellett el tudtunk fogadni.
- Felmerül a kérdés, milyen módon értelmezzük egy zéró nettó befektetés által generált értékfolyamat hozamát? Hagyományos értelemben véve egy zéró nettó befektetés hozama nem értelmezhető, ugyanis abban az esetben, ha a 0. időpillanatban történik a befektetés, akkor az 1. időpillanatban nem azonosan nulla érték mellett a hozam számítása nullával való osztás miatt értelmetlenné válik.

  A pairs trading stratégia is zéró nettó befektetéseken alapul, így elméletben tetszőleges értékű short, illetve long kitettséget vállalhatunk. A számítások folyamán egy új pozíció nyitásakor, Andrade (2005) cikke alapján úgy változtatjuk meg a

portfóliónkat, hogy összesen 50 egységnyi short, valamint 50 egységnyi long kitettségünk legyen, tehát a létrehozott pozíciók együttesen dollár semlegesek.

A portfólió hozamfolyamatának meghatározása ezen 100 egységnyi kitettség figyelembevételével történik, így az újonnan kapott eredmények a már meglévőkkel összehasonlítható.

Mindezek mellett a portfóliónk értékfolyamata negatív értékeket is felvesz, így az annak fedezeteként szolgáló minimális összeget tekintjük a befektetés kezdő tőkéjének, ezáltal a hagyományos értelemben vett diszkrét, továbbá folytonos hozamok értelmezhetőek.

- A stop loss szint megahatározása során felmerül a zaj illetve a jel megkülönböztetésének problémája. El kell tudnunk dönteni, hogy mekkora az a legnagyobb kilengés, amit még nagy valószínűséggel a folyamatot hajtó véletlen zaj okoz, ugyanakkor melyik az a legkisebb átlagtól való kitérés, ami az idősor egy külső exogén hatásra adott válasza eredményez?

  A gyakorlati alkalmazás során túl magas stop loss szint választása esetén, az egyes pozíciókon jelentős veszteségeket érhetünk el, így akár a portfólió értékfolyamatunk negatív is lehet, ami az ilyenkor fellépő margin call miatt kényelmetlenségeket okozhat.

  Túl alacsony stop loss szint mellett az árfolyamok nem távolodnak el kellőképpen az átlagtól, így nagyon gyakran kerülünk rövid ideig pozícióba, aminek eredménye a $\boldsymbol{Z_t}$ értékek a részvények volatilitásából fakadó torzítottsága miatt nehezen előre jelezhető.

  Statisztikai vizsgálatokkal Gatev et al. (2003) megmutatták, hogy 4,75 szintet meghaladó $\boldsymbol{Z_t}$ értékek esetén az árfolyamok divergenciájának valószínűsége jelentős.

  A fentiek alapján a $|\boldsymbol{Z_t}| > 4$ stop loss szintet alkalmaztuk.

- Időlimit, azaz várhatóan mennyi idő alatt záródik le 90% valószínűséggel egy pozíció? Ha meg tudnánk határozni ezt az értéket, akkor ennek segítségével le tudnánk zárni (akár veszteséggel is) azokat a pozíciókat, amelyek értékfolyamata az átlagnak tekintett értékhez lassan tér vissza, így az ezen párokon lévő kitettséget más, az átlaghoz rövidebb idő alatt visszatérő párokon vállalhatnánk, ezzel javítva a portfóliónk hatékonyságát.

  Az időlimitek meghatározásához a teljes idősoron, illetve az utolsó 10 éven végeztünk el backtestet. A vizsgálat során kiszámítottuk a pozíciók átlagos hosszát, szórását,

valamint a megfelelő Ornstein—Uhlenbeck-folyamatok paramétereit. Ezt követően Monte Carlo szimulációkat végeztünk.

A megfelelő Ornstein—Uhlenbeck-folyamatok segítségével becslést adtunk a pozíció várható hosszára, szórására. A Monte Carlo módszer gyakorlati alkalmazásához miden vizsgált időszakhoz kiszámítottuk a modellező O.U. folyamat paramétereit, majd a megfelelő paraméterek mellett 10000 futtatást végeztünk, és az így kapott eredményeket átlagoltuk.

A szimulációkból kiderült, hogy a σ, λ paraméterek időben stabilak, így az átlaghoz való tartás sebessége stacionáriusnak tekinthető.

A fenti eredmények figyelembevételével a tesztelések során az alábbi időlimiteket alkalmaztuk.

1. Táblázat: Időlimitek

Időszak	Nyugati régió	Keleti régió
1993-2013	70 nap	85 nap

5. Robosztusság vizsgálat

A befektetési stratégia valós adatokon történő tesztelése során, a párok kiválasztásához alkalmazott statisztikai módszereknek az adatok változására (új adatpontok hozzá vételére) való érzékenysége mutatkozott meg. Az algoritmust akár egymást követő napokon indítva más-más párokat, más-más portfólió értékfolyamatokat eredményez. Mindez azt mutatja, hogy a lehetséges párok közül a legjobb párok sorrendje időben nem stabil.

Ezen észrevétel alapján a stratégiánk robosztusságának növeléséhez egyfajta időbeli kiegyensúlyozást is beépítettünk. Az eddigi egyetlen portfólió helyett 25 pairs trading portfóliót generáltunk. A portfóliók számát a kereskedési stratégiánk 125 napos kereskedési ciklusai magyarázzák.

A különböző időpontokban összeállított portfóliók súlyát egyenletesen választottuk meg, mivel nem tudjuk előre megmondani, hogy melyek lesznek azok a kointegráló részvénypárok, amelyek jövőbeni viselkedése jelentősen megváltozik.

Az időbeni kiegyensúlyozáson túl Gatev et. al. (2006) elvégezték a párok számának, pozíció optimális nyitásának-zárásának elemzését, így mindezeket figyelembe véve valamint kiegészítve az időbeli átlagolással teszteltük a stratégiánkat.

6. Empirikus vizsgálat

6.1. Adatok

A kutatáshoz a Thomson Reuters adatbázisából különböző indexek mintegy 554 részvényének osztalékkal korrigált napi záró adatait töltöttük le.

2. Táblázat: Részvények

Országok	Részvényekszáma	Országok	Részvényekszáma
EgyesültKirályság	100	Baltiországok	9
Ausztria	20	Ciprus	5
Belgium	20	Csehország	50
Dánia	20	Lengyelország	20
Finnország	25	Magyarország	13
Franciaország	40	Málta	20
Görögország	20	Szlovákia	5
Hollandia	25	Szlovénia	7
Írország	20		
Németország	30		
Olaszország	40		
Spanyolország	35		
Svédország	30		

Az elemzés során 1993.08.30-tól 2013.08.30.-ig terjedő időszak adatait használtuk fel.

6.2. Teljes és többlethozamok

A fent leírt stratégiát Matlab R2009a programnyelven implementálva, a nyugat-európaiindexek részvényeinek idősorain 100 napos mozgóátlagolás, $|Z_t| \leq 4$ stop loss szint, 70 napos időlimit, 95%-osszignifikancia szint, 100 egységnyi teljes kitettség mellett teszteltük.

A közép-kelet-európai régió vizsgálatához 100 napos mozgóátlagolást, $|Z_t| \leq 4$ stop loss szintet, 85 napos időlimitet, 95% szignifikancia szintet, 100 egységnyi teljes kitettség alkalmaztunk.

Felmerül a kérdés, milyen módon értelmezzük egy zéró nettó befektetés által generált értékfolyamat hozamát? Hagyományos értelemben véve egy zéró nettó befektetés hozama nem értelmezhető, ugyanis abban az esetben, ha a nulla időpillanatban történik a befektetés, akkor az 1. időpillanatban nem azonosan nulla érték mellett a hozam számítása nullával való osztás miatt értelmetlenné válik.

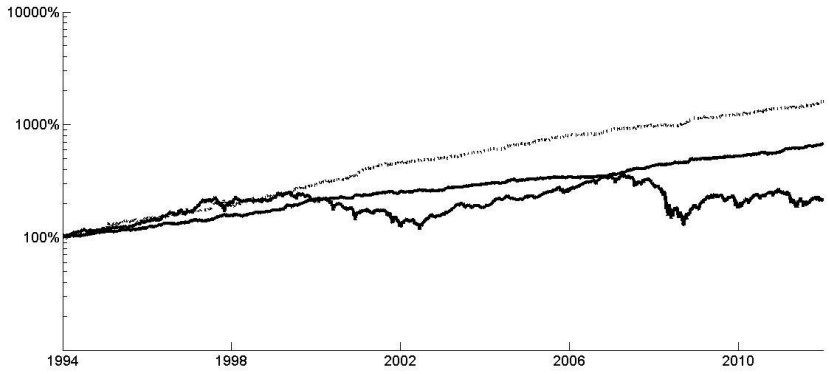
A pairs trading stratégia is zéró nettó befektetésen alapul, így elméletben tetszőleges méretű short, illetve long kitettséget vállalhatunk. A számítások folyamán egy új pozíció nyitásakor, Andrade (2005) cikke alapján úgy változtatjuk meg a portfóliónkat, hogy összesen 50 egységnyi short, valamint 50 egységnyi long kitettségünk legyen, tehát a létrehozott pozíciók együttesen dollár semlegesek.

A portfólió hozamfolyamatának meghatározása ezen 100 egységnyi kitettség figyelembevételével történik, így az újonnan kapott eredmények a már meglévőkkel összehasonlítható. A hozamokat a féléves kereskedési ciklusok végén lekönyveljük és a következő kereskedési periódusban újra 100 egységnyi befektetést eszközölünk. Amennyiben van legalább egy nyitott pár, úgy a tőke teljes összege befektetésre kerül. Meglehetősen ritka az az eset mikor nincs egy nyitott pár se és a rendelkezésre álló tőke nincs felhasználva hozamtermelésre. Ha ilyen periódus következik be, úgy a portfolió aktuális hozama erre a periódusra nulla.

Mindezek mellett a portfóliónk értékfolyamata negatív értékeket is felvesz, így az annak fedezeteként szolgáló minimális összeget tekintjük a befektetés kezdő tőkéjének, ezáltal a hagyományos értelemben vett diszkrét, továbbá folytonos hozamok értelmezhetőek.

A futtatások során az alábbi eredmények kaptuk.

A 6. ábra eredményei a később részletezett kereskedési költségek levonását követő hozamokat mutatják. A hozamgörbén jól látható, hogy a stratégia egyenletes hozamot eredményezett mind a keleti, mind a nyugati régióban az egész húsz éves időtávon.



6. ábra: 1994-2013 keleti régió (szaggatott), nyugati régió (folytonos) és az MSCI Europe hozamai (hullámzó)

Ezek a hozamok éves bontásokban átlagosan 15,25% a keleti régióban és 10,42% a nyugati régióban. A hozamgörbe szórása jelentősen alacsonyabb a részvénypiaci hozamok szórásánál 5,71% keleten és 4,63% nyugaton.

3. Táblázat: Éves hozamok

Év	Keleti régió	Nyugati régió
1995	13%	9%
1996	25%	8%
1997	12%	11%
1998	13%	13%
1999	21%	12%
2000	24%	20%
2001	24%	7%
2002	21%	9%
2003	7%	4%
2004	15%	12%
2005	13%	9%
2006	18%	5%
2007	10%	4%
2008	7%	18%
2009	17%	14%
2010	8%	5%
2011	12%	9%
2012	14%	16%
Átlag:	15,25%	10,42%
Szórás:	5,71%	4,63%

A korábbi irodalomnak megfelelően a stratégia hozamának a költségektől megtisztított nettó hozamot értjük. Mivel a későbbiekben bemutatottak szerint a stratégia a piaci hozamoktól

független hozamgörbével rendelkezik, ezért a stratégia által elért profitot többlethozamnak tekintjük.

A 3. táblázatban számszerűsítettük az éves nettó hozamokat. A keleti régió éves hozamai enyhe csökkenést mutatnak. Ha két részre osztjuk a vizsgált periódust, akkor az első 10 évben átlagosan 17,7%-os hozamot, míg a második periódusban 12,7%-os hozamot kapunk. Ugyanez a bontás a nyugati régióban 10,33%-ról 10,22%-ra való csökkenést jelent, mely nem szignifikáns. A nyugati régió stabilitása jól megfigyelhető a teljes hozamgörbén, illetve a hozamgörbe különálló elemzésében is.

4. Táblázat: Portfolió statisztikai jellemzői

	Keleti régió	Nyugati régió
Skewness of dailyreturns	0.28	0.29
Kurtosis of dailyreturns	7.95	9.32
Lowestdailyreturn	-3.73%	-2.38%
Largestdailyreturn	3.77%	3.35%
Maximum drawdown	-12.67%	-4.69%

A napi hozamok elemzésekor elmondhatjuk, hogy az átlagos napi hozamok 0.0006157 és 0.0004182 voltak a keleti és a nyugati régióban. A hozamok a normál eloszláshoz képest jobbra tolódnak, enyhén pozitív (0,28, 0,29) ferdeséggel rendelkeznek. Ez a tulajdonság mindenképp előnyös a stratégia szempontjából, mert a váratlan, az átlagtól jelentősen eltérő hozamok e szerint jellemzően pozitív hozamok. A napi hozamok eloszlása a normális eloszláshoz képest jelentősen csúcsosabb, a hozamok az átlagos napi hozam közelében helyezkednek el. A hozamfüggvény leptokurtikus, 7,95-ös és 9,35-ös csúcsossággal. A stratégia szempontjából ez is egy lényeges ismérv, mivel megmutatja, hogy a hozamok stabilak, az átlagos hozam körül helyezkednek el, alacsony a váratlan, nagykilengésű hozamok valószínűsége, mely növeli a szórást, a startégia kockázatát és csökkenti a Sharpe-rátákat. A Nyugat-Európai régióban futtatott stratégia nagyobb csúcsosságával párhuzamosan kisebb a napi negatív hozam (-2,38%) és vizsgált periódusban tapasztalt maximális visszahúzódás is (-4,69%). Ezek az értékek a keleti régióban rendre -3,73% és -12,67%-os eredményt mutatnak. A nyugati régió nagyobb stabilitását támasztja alá a 3,35%-os legnagyobb napi hozam, szemben a keleti 3,77%-os értékével. A fenti értékek mindegyike rámutat a keleti és nyugati régió közt tapasztalt különbségre, miszerint a keleti régióban magasabb hozamot tudtunk elérni, de ehhez magasabb kockázat is párosult, míg a nyugati portfolió stabilitásáért alacsonyabb hozammal kellett fizetni. Ez a különbség a potenciálisan

alkalmazható tőkeáttétel miatt a stratégia gyakorlati alkalmazásakor kiemelt szerepet fog kapni, mert mint ahogy látjuk a keleti régiónak jelentősen magasabb VaR értékei adódnak, ami alacsonyabb tőkeáttételt tesz lehetővé.

6.3. Kockázat

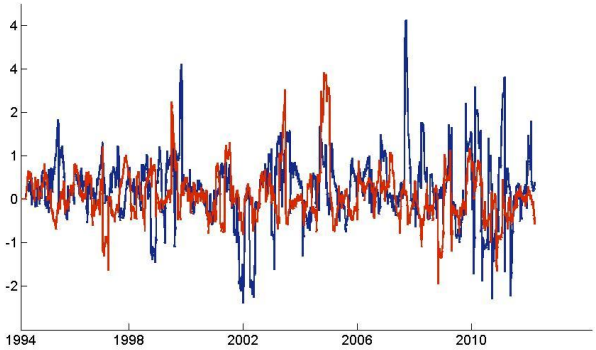
Egy stratégia, vagy egy portfolió kockázatosságának mérésére több lehetőségünk is van. A legáltalánosabb módszer a hozamgörbe szórásának, és az ehhez kapcsolódó Sharpe-ráták elemzése. Ezen felül lehetőségünk van a VaR érték kiszámítására, a legnagyobb visszahúzós (maximum drawdown) kiszámítására is, melyek az alkalmazható tőkeáttételre adhatnak választ. Részletesen ki kell térnünk a stratégia mögött álló kockázati fajtákra, illetve az eredményt torzító tényezőkre is, úgymint az indexekből rossz teljesítményük, vagy csődjük miatt kieső részvények torzító hatására (survivorshipbias), mely tulajdonság az eredményeinek torzíthatja.

A portfólió hozamának további elemzéséhez kiszámítottuk a megfelelő időszakok portfólió értékfolyamatiból adódó Sharp-mutatókat. A Sharpe-ráta választ ad számunka, hogy egységnyi szórásra mekkora hozam jut. Ennek megfelelően a magasabb eredmény kedvezőbb számunkra. A pairs trading portfolió Sharp-rátái kiemelkedőek, 7-13-szor magasabba az MSCI Europe Sharp-rátáinál.

5. Táblázat: Sharpe-mutatók

	1995-2012
Nyugatirrégió Sharpe-mutató	2,25
Keletirégió Sharpe-mutató	2,67
MSCI Europe Shapre-mutató	0,24

Mindezek mellett Gatevetal. (2006) cikkben megmutatták, hogy a Sharp-mutatókból levont következtetések félrevezetőek lehetnek, ha a számítások alapjául szolgáló hozamfolyamatok ferdesége jelentős. A torzítás irányára is választ adtak, így tudjuk, hogy amennyiben a háttéreloszlás ferdesége negatív, akkor az a Sharp-rátát jelentősen növelheti, ellenkező esetben pedig csökkentheti.



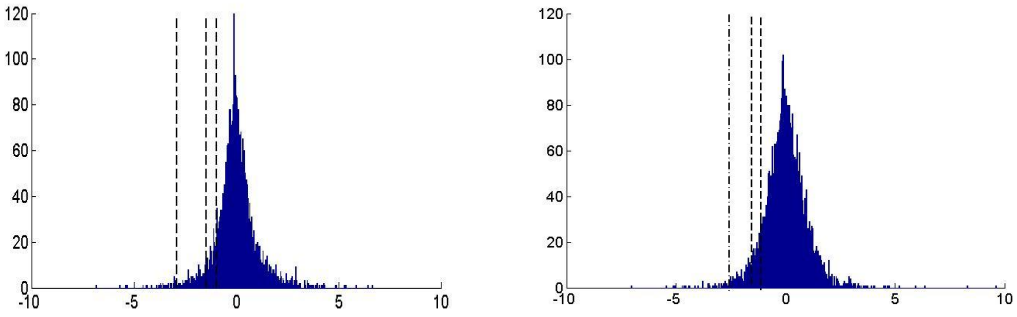
7. ábra: 250 napos mozgóátlagolással adód hozamgörbék ferdesége

A hozamok ferdeségének stacionáritását adf statisztika segítségével vizsgálva-46.94, -48.91 értékek adódnak. Ez alapján a hozamok ferdeségét leíró nulla várhatóértékű 0.76, 0.57 szórású sztochasztikusfolyamatot stacionáriusnak tekinthetjük, így a Sharp-mutatók ebből fakadó torzulása a stacionaritás és nulla várhatóság miatt eltűnik.

A másik fő kockázatértékelési mód a Value at Risk(VaR), melynek eredményeit a következő táblázatban foglaltuk össze. A Var számítás fontossága leginkább a tőkeáttétel kiválasztásakor mutatkozik meg. A legnagyobb visszahúzódás a 20 éves időtáv alatt 12,67% és 4,69% volt.

6. Táblázat: A pairs trading stratégia VaR értékei

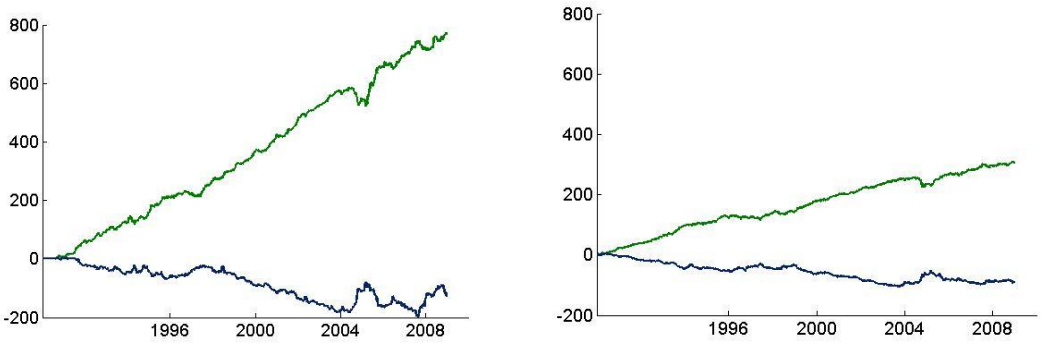
	Keleti régió			Nyugati régió		
VaR	1 nap	5 nap	20 nap	1 nap	5 nap	20 nap
1%	-2,93	-3,11	-3,6	-2,58	-1,81	-2,27
5%	-1,5	-1,39	-1,93	-1,5	-0,86	-1,38
10%	-1,02	-0,88	-0,96	-1,11	-0,6	-0,75



8. Ábra Keleti és nyugati régió napi hozamainak hisztogramjai és a VaR szintek

6.4. Short-long értékfolyamat

A stratégia alkalmazása során, a long és short pozíciók eredményéből keletkező hozam adja a teljes hozamgörbét. Az eddigi elemzések során és a továbbiakban is a teljes hozamgörbe vizsgálatával foglalkoztunk. Érdemes azonban megvizsgálni a profit keletkezésének helyét, és a két oldal hozzájárulását a hozamhoz, stabilitáshoz, vagy a kockázat csökkentésében betöltött szerepüket. Ahogy azt Gatev et al. is leírja, a vizsgálat során három fő következtetést tudunk levonni. Elsőként, hogy a hozam egyenlően, vagy asszimetrikusan keletkezik-e a long és short oldalon. Ez választ adhat a stratégia által kimerített átlaghoz való visszahúzódás kérdésére. Ha ugyanis a stratégia csupán az átlaghoz való visszahúzódás által van vezérelve, úgy a profit egyenletesen képződik a két oldalon. Esetünk a hozam a long lábon keletkezik, mely értelmében nem szimmetrikusan termelünk profitot, így nem állítható a stratégia átlaghoz való visszahúzódásra alpulna. Másodszor, amennyiben a profit elsődlegesen a short oldalon keletkezik, úgy érdemes további vizsgálatokat folytatni, hogy a stratégia nem csupán a shortolási technika elérhetőségének korlátozottságából ered-e. Harmadszor pedig a hozamok vizsgálatával további következtetéseket tudunk elvonni a stratégia kockázati kitettségét illetőne, mint például a csődkockázat megléte.



9. Ábra Short-long hozamok (zöld: long, kék: short, keleti, nyugati régió)

A portfólió értékfolyama short illetve long pozíciók folyamainak összegéből adódik, így abban az esetben ha a stratégiával elérhető hozam kizárólagosan a short, vagy long pozíción realizálódik, érdemes lehet hitel felvétele mellett csupán egyirányú pozíciót nyitni. Ez a logika igaz lehet, ha a hozam maximalizálása a célunk, azonban csupán a long lában és a teljes hozamgörbével összevetve jól látjuk, hogy a teljes hozamgörbe szórása jelentősen alacsony. A short láb által ugyan veszteség termelődik, de ez képezi a stratégia hedge részét. Az empirikus vizsgálatok során megmutatkozott, hogy a hozam döntő része a long pozíciókon

realizálódik, azonban a long értékfolyamat jelentősebb visszaesésekor a short értékfolyamon megjelenő hozamok csökkentik, kiegyensúlyozzák a portfólió értékfolyamát. Mindkét láb tartása alacsonyabb szórást, kedvezőbb Var értéket és magasabb Sharp-rátát eredményez.

Gatev et al. (2006) kategorizálását követve, a csődkockázat (bankruptcy risk) okozhatja a long pozíciók többlethozamát a short pozíciókhoz képest. Mikor egy párba belépünk, azonos összegű long és short pozíciót veszünk fel. A long pozíció ebben az esetben azt jelenti, hogy a részvény a társához képest alul van árazva, ami abból is következhet, hogy a piac magasabb kockázatot párosít hozzá mint a társához. Erre lehet magyarázat a pairs strading stratégia érzékenysége a csődkockázati prémiumra (default premium). A hozam a nem realizálódó, magasabb kockázatból ered, vagyis annak, a piac által nem várt eseménynek a következménye, hogy a longra felvett részvény nem ment csődbe, hanem visszakorrigálja korábbi értékcsökkenését. Mivel az általunk használt adatok a 2013 augusztusában tőzsdén lévő részvényekből állnak, ezért azon részvények, melyek a listában szerepelnek, mind túlélték az elmúlt 20 évet. A piac által esetlegesen várt csőd, ezekben az esetekben biztosan nem valósult meg. Ebből következően a survivorship bias az eredményeinket felfelé torzíthatja.

6.5. Korreláció és stabilitás

Az eddigi empirikus vizsgálatainkból kiderül, hogy a pairs trading befektetési stratégiával a piaci portfólió hozamánál magasabb hozamot érhetünk el, alacsonyabb hozamszórás mellett.
Mindezek után vizsgáljuk meg a befektetési stratégiánk β-ját, azaz a piaci portfólió mozgására való érzékenységét.
Ennek a vizsgálatnak az elvégzéséhez először számítsuk ki a megfelelő korrelációs mátrixot.

7. Táblázat: Korrelációs mátrix hozamokra

	Nyugati régió P.T.	Keleti régió P.T	MSCI Europe
Nyugati régió P.T.	1	-0,01	-0,02
Keleti régió P.T.	-0,01	1	-0,00
MSCI Europe	-0,02	-0,00	1

A táblázatból leolvasható, hogy a korrelációk rendkívül alacsonyak, azaz lineáris összefüggőségről nem beszélhetünk.

8. Táblázat: Korrelációs mátrix értékfolyamatokra

	Ny. Eu. P.T.	K. K. Eu. P.T.	MSCI Eu.
Ny. Eu. P. T.	1	0,98	0,43
K. K. Eu. P. T.	0,98	1	0,43
MSCI	0,43	0,43	1

A megfelelő regressziós vizsgálatok SPSS20 programmal elvégezve a következő eredményeket kaptuk.

9. Táblázat: R^2 statisztikák hozamokra

	MSCI Eu. Re/ t-stat
Ny. Eu. P.T. Re.	0,00 / 1,58
K. Eu. P.T. Re.	0,01 / -0,44

10. R^2 statisztikák értékfolyamatra

	MSCI Eu/ t-stat.
Ny. Eu. P.T..	0,33 / 46,65
K. Eu. P.T.	0,34 / 47,91

A 8. táblázatból kiolvasható, hogy rendkívül csekély magyarázó erővel tudjuk a portfóliók hozamfolyamatait előre jelezni a MSCI Eu. index hozamainak segítségével. Mindezek mellett a 7. táblázat korrelációs adati is alátámasszák Alexander és Dimitriu (2002) eredményét, miszerint a pairs trading egy piac semleges befektetési stratégia.

A megfelelő idősorokon elvégzett empirikus vizsgálatokkal ezt az eredményt a közép-kelet-európai, illetve nyugat-európai régióra is igazoltuk.

11. Táblázat: A keleti és nyugati régió kapcsolata az FFM modell faktoraira

	Kelet	t-stat	Nyugat	t-stat
Market	0,00003985	0,602	0,00009091	2,216
SMB	0,0000713	0,523	0	1,488
HML	0	-1,974	0,00000745	0,92
R^2	0,001		0,002	

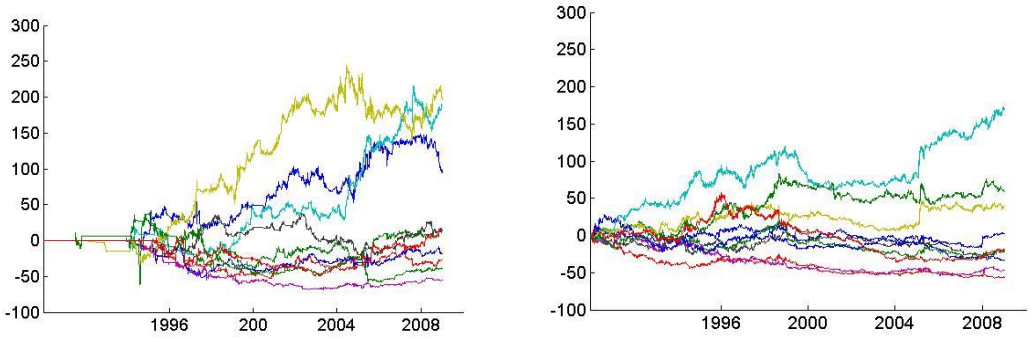
12. Táblázat: A keleti és nyugati régió kapcsolata az MSCI indexszel

	Kelet	t-stat	Nyugat	t-stat
MSCI	-0,35	-2,484	-0,001	-0,147
R^2	0,001		0	

Minden kereskedési stratégia eredményességét a hozama adja, az, hogy az a hozam mennyire köszönhető a véletlennek, vagy a stratégia valós teljesítményének. A bootstapmethod során a

kereskedési stratégiához hasonló módon, a valós stratégia által felvett pozíciók időpontjában long és short pozíciókat vettünk fel, véletlen által meghatározott részvényekkel. Az így felvett párok Z-értéke jelentősen eltért a stratégia által használt 2-es Z-értéktől, így jellemzően nem kellően szélsőséges pozícióban szálltunk be a párokba, vagy akár fordított irányba tettük meg a kereskedést.

Keleti régió **Nyugati régió**



10. Ábra Keleti és nyugati régión végzett bootstrapping eredményei

A véletlen általi párválasztást régiónként tízszer lefuttatva vizsgáltuk meg az eredményeket. Hasonlóan Gatev et al. (2006) és Caldeira, Moura (2013) által kapott eredményekhez, a véletlen által meghatározott párválasztás esetünkben se értünk el szignifikáns hozamot. A vizsgálatok eredményeként kapott hozamgörbék átlagos hozama keleten 2,01%, nyugaton 0,40%, a hozamgörbék átlagos szórása pedig 20,92% és 15,53%, amik a stratégia során definiált paraméterek használatával kapott eredményektől jelentősen elmaradnak, egyértelműen a dolgozatban bemutatott stratégia eredményességét mutatja a véletlen által vezérelt beszállásokkal szemben.

6.6 Torzítottság és korlátozó feltételek

Megjegyezzük, hogy a fenti eredmények a vételi és eladási ár közti különbség (bid-ask spread) korrigálásának hiánya,valamint a vizsgálatba bevont adatok csődkockázata miatt felfelé torzítottak. A bid-ask spreadet a kereskedési költségekbe foglaltuk. Mivel azonban az adatbázis a főbb európai indexek mai összetételét tartalmazza, emiatt nem tudjuk figyelembe venni az esetleges korábbi csődökből eredő negatív eredményeket.

A modellezés során ugyancsak nem vettük figyelembe az esetleges short recall-okat, melyek jellemzően akkor fordulnak elő, mikor a legtöbben kívánják a társaság papírjait shortolni és abból nem áll elegendő mennyiség rendelkezésre. Ez a pozíciók kényszerű zárását eredményezi, sok esetben a legnagyobb Z-értékkor, így a fenti eredmények során nem kimutatott veszteséget eredményezhetnek. A short recallok előfordulása ritka, nagyobb méretben való kereskedés esetén pedig tovább

csökkenthető ez a kockázat, egészet a tőzsdén kívüli (OTC) ügyletekig, ahol a megállapodás ezt kizárhatja.

A Kelet-Európára jellemző alacsonyabb likviditás nagyobb slipage-t okozhat, így a modellezett belépési pontokhoz képest későbbi belépést eredményez. Az alacsonyabb likviditás szélesebb bid – ask spreadet is jelent, így magasabb kereskedési költséggel kell számolnunk, továbbá a részvények kölcsönözhetősége se egyértelmű bizonyos kelet-európai tőzsdéken. A shortolás költsége a jellemzően magasabb kamatkörnyezet miatt, illetve a magasabb kamatfelár miatt is többletköltséget okoz. Ezt jól tükrözi egy USA részvény kölcsönzése, mely után 2013 októberében 2,5% kamatot fizet a befektető, vagy egy magyar részvény kölcsönzése, mely után 7%-ot.

A kereskedési költségek eltérő voltát sem építettük bele a modellbe. Minden pozíció nyitásakor egységesen 0,2%-os költséget vontunk le, mely megegyezik Broussard, Vaihekoski (2012) 0,2%-os, de alacsonyabb Alexander, Dimitriu (2002), Dunisetal. (2010), Caldeira, Moura (2013) 0,5%-osvagy Gatev et al. (2006) 162 bp-os költségénél. Mindenesetben a kereskedési költségek szignifikánsak. A kereskedési költségek különösen magasak egyes alacsony likviditású részvények esetében, a Kelet-Európában megfigyelhető magasabb költséget az ott tapasztalható magasabb hozamellensúlyozza.

7 Konklúzió

A szakirodalomban már korábban feldolgozott amerikai, tajvani és brazíliai indexek utána a dolgozatomban a nyugat-európai valamint a közép-kelet-európai részvényindexek vizsgálatát végeztük el.

Az 1993-tól 2013-ig terjedő időszakban a pairs trading befektetési stratégiával 5,71% és 4,63% szórás mellett 15.25% és 10.42% átlagos éves hozamot értünk el.

Mindezek mellett ellenőriztük a stratégia piacsemlegességét, ehhez az MSCI Europe, index hozamainak illetve a portfólió értékfolyamatok hozamainak regressziós vizsgálatából adódó R^2 statisztikákat, valamint a megfelelő korrelációkat vizsgáltuk. Ugyancsak megvizsgáltuk a hozamgörbe regresszióját a FFM modell faktoraival szemben, ahol igen alacsony összefüggést találtunk.

A kapott eredményeket a már meglévő eredményekkel összevetve, a nyugat-európai valamint közép-kelet-európai térségekben a piacsemlegességet megtartva a tajvani, brazíliai és amerikai eredményekkel konzisztens értékeket kaptunk.

8 Irodalomjegyzék

Alexander, C., Dimitriu, A. (2002): The Cointegration Alpha: Enhanced Index Tracking and Long-Short Equity Market Neutral Strategies. *ISMA Discussion Papers in Finance* 08. ISMA Finance.

Andrade, S. C.,Pietro, V., Seasholes, M. S. (2005): Understanding the Profitability of Pairs trading. *Economics Bulletin preprint.*

Caldeira, J. F., Moura, G. V. (2013): Selection of a Portfolio of Pairs Based on Cointegration: A Statistical Arbitrage Strategy. *Federal University of Rio do Sul, Federal University of Santa Catarina*, Brazil.

Chen, Z., Knez, P. J., (1995): Measurement of Market Integration and Arbitrage. *Review of Financial Studies*, vol. 8, no. 2.

Elliott, R. J., Van Der Hoek, J., Malcolm, W. P. (2005): Pairs trading. *Quantitative Finance*, vol. 5, no. 3, pp. 271-276.

Fama, E., (1970): Efficient Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, vol. 25, no. 2, pp. 383-417.

Gatev, E., Goetzmann, W. N., Rouwenhornst, K. G. (2006): *Pairs trading: Performance of a Relative-Value Arbitrage Rule.* Working paper, Yale University.

Ingersoll, J. E. (1987): Theory of Financial Decision Making. *Rowman and Littlefield studies in financial economics,* United States of America.

Silverman, B. W. (1982): Kernel Density Estimation Using the Fast Fourier Transform. *Journal of the Royal Statistical Society,* Series C (Applied Statistics), vol. 31, no. 1, pp. 93-99.

TUSNÁDY, G., ZIERMANN, M., (1986) *Idősorok analízise.* Műszaki könyvkiadó, Budapest

VIDYAMURTHY, G. (2004). Pairs trading: quantitative methods and analysis. *John Wiley & Sons, Inc.*, Hoboken, New Jerse.