



Óbudai Egyetem

**Bánki Donát Gépész és Biztonságtechnikai Mérnöki
Kar**

Anyagtudományi és Gyártástechnológiai Intézet

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

**MECHANIKAI PROBLÉMÁK
MEGOLDÁSA MATEMATIKAI
MÓDSZEREK MEGFELELTETÉSÉVEL
SZÁMÍTÓGÉPES KÖRNYEZETBEN**

Szerző(k):

Vadász Miklós Dániel

gépészmérnök BSc. szak, II. évf.

Konzulens(ek): Dr. Gonda Viktor

Egyetemi docens

Budapest, 2013.

Budapest, 2013.

Budapest, 2013.

Mechanikai problémák megoldása matematikai módszerek megfeleltetésével számítógépes környezetben

Vadász Miklós Dániel

Óbudai Egyetem

Bánki Donát Gépész és Biztonságtechnikai Mérnöki Kar, BSc./ II. évfolyam

Konzulens: Dr. Gonda Viktor, egyetemi docens

Egyes mechanikai problémák számítógépes megoldásához érdemes a megoldást menetét a manuális megoldás lefordítása helyett úgy megfogalmazni, hogy egy alkalmas matematikai módszert illesztünk a gépi számolás lehetőségéhez. A dolgozat elkészítése során fő feladat a kiválasztott mechanika feladatcsoport megoldása során használt matematikai – numerikus – módszerek számítógépes környezetben történő bizonyos megfeleltetése, valamint az egzakt megoldások mérnöki pontosságú közelítése. Fontosnak tartottam, hogy a felhasznált matematikai módszerek elméleteinek alapjai szintén a dolgozat tárgyalt témái között foglaljanak helyet. A módszerek a teljesség igénye nélkül kerültek közlésre, szigorúan szem előtt tartva az elméleteknek speciálisan az adott probléma során történő alkalmazását, alkalmazhatóságának feltételeit.

A kiválasztott mechanikai problémák a szilárdságtan és a lengéstan témaköreibe tartoznak: keresztmetszeti jellemzők meghatározása, feszültség- és alakváltozás számítása, az általános Hooke törvény, egyenértékűség, méretezés/ellenőrzés, kihajlás, harmonikus-, csillapított- és gerjesztett lengőmozgás. Matematikai szempontból a témaválasztás során rendre az integrál- és differenciál-számítás; lineáris algebra, azon belül is a sajátérték-számítás; illetve a numerikus-sorok területéről került kiválasztásra egy-egy módszer a mechanikai problémák megoldására. Minden egyes fejezet végén feladatmegoldás található, a tárgyalt elmélet alkalmazásának bemutatása végett. Esettanulmányok a gépi megoldások című fejezet keretén belül foglalnak helyet, itt kerülnek bemutatásra a Microsoft Excel környezetben megírt programok.

A táblázatkezelő rendkívül jó lehetőséget biztosított egy tetszőleges síkbeli keresztmetszet jellemzőinek meghatározásához, illetve grafikus ábrázolásához. Kiemelendő, a felmerülő síkbeli feladatok látványos reprezentálását is. Néhány feladat megoldásakor (pl. sajátérték-feladatok) az ismertetett megoldás során felhasznált elmélet került előtérbe a számítógépes környezettel szemben.

Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	5
Célkitűzések.....	6
A dolgozatban előkerülő problémák és azok megoldásait bemutató módszerek :	6
A dolgozat felépítése.....	7
Mechanikai feladatok és matematikai módszerek	8
Keresztmetszeti és térfogati jellemzők.....	8
Terület számítása egyszeres integrál alkalmazásával.....	8
Síkidomok statikai nyomatéka és tömegközéppontja.....	9
Megoldás kettős integrállal négyszögtartomány esetén.....	10
A kettős integrál transzformációja	11
Tehetlenségi nyomaték számítása.....	13
Főfeszültségek számítása	16
Sajátérték-feladatok	16
Térbeli feszültségállapot	19
Elmozdulás számítása.....	23
A rugalmas szál differenciálegyenlete	23
Virtuális tartó	24
A Taylor-sor mint speciális hatványsor	24
Gépi megoldások.....	31
Keresztmetszeti jellemzők meghatározása.....	31
Méretezés	33
Egyszabadságfokú lengőrendszer probléma	35
Összefoglaló.....	43
Felhasznált irodalom.....	44

Bevezetés

Egyes mechanikai problémák számítógépes megoldásához érdemes a megoldást menetét a manuális megoldás lefordítása helyett úgy megfogalmazni, hogy egy alkalmas matematikai módszert illesztünk a gépi számolás lehetőségéhez. A dolgozat elkészítése során fő feladat a kiválasztott mechanika feladatcsoport megoldása során használt matematikai – numerikus – módszerek számítógépes környezetben történő bizonyos megfeleltetése, valamint az egzakt megoldások mérnöki pontosságú közelítése. Fontosnak tartottam, hogy a felhasznált matematikai módszerek elméleteinek alapjai szintén a dolgozat tárgyalt témái között foglaljanak helyet. A módszerek a teljesség igénye nélkül kerültek közlésre, szigorúan szem előtt tartva az elméleteknek speciálisan az adott probléma során történő alkalmazását, alkalmazhatóságának feltételeit.

A kiválasztott mechanikai problémák a szilárdságtan és a lengéstan témaköreibe tartoznak: keresztmetszeti jellemzők meghatározása, feszültség- és alakváltozás számítása, az általános Hooke törvény, egyenértékűség, méretezés/ellenőrzés, kihajlás, harmonikus-, csillapított- és gerjesztett lengőmozgás. Matematikai szempontból a témaválasztás során rendre az integrál- és differenciál-számítás; lineáris algebra, azon belül is a sajátérték-számítás; illetve a numerikus-sorok területéről került kiválasztásra egy-egy módszer a mechanikai problémák megoldására. Minden egyes fejezet végén feladatmegoldás található, a tárgyalt elmélet alkalmazásának bemutatása végett. Esettanulmányok a gépi megoldások című fejezet keretén belül foglalnak helyet, itt kerülnek bemutatásra a Microsoft Excel környezetben megírt programok.

A táblázatkezelő rendkívül jó lehetőséget biztosított egy tetszőleges síkbeli keresztmetszet jellemzőinek meghatározásához, illetve grafikus ábrázolásához. Kiemelendő, a felmerülő síkbeli feladatok látványos reprezentálását is. Néhány feladat megoldásakor (pl. sajátérték-feladatok) az ismertett megoldás során felhasznált elmélet került előtérbe a számítógépes környezettel szemben.

Célkitűzések

1. Mechanikai problémák kiválasztása
2. Vonatkozó matematikai módszerek vizsgálata
3. Példa a matematikai módszer használatára a feladatmegoldáshoz
4. Példák gépi megoldásokra

A dolgozatban előkerülő problémák és azok megoldásait bemutató módszerek :

Mechanikai problémák	Matematikai problémák
Keresztmetszeti és térfogati jellemzők számítása	Integrál számítás
Főfeszültségek meghatározása	Sajátérték-feladat
Elmozdulás számítás	Numerikus-sor
Egyszabadságfokú lengőrendszer	Differenciál-egyenlet közelítő megoldása

Mechanikai probléma	Gépi megoldás
Keresztmetszeti jellemzők meghatározása	Keresztmetszeti jellemzők számítása közelítő eljárással
Méretezés	Méretezés adatbázis felhasználásával
Egyszabadságfokú lengőrendszer	Lengés időbeni lefolyásának meghatározása numerikus módszerrel

A dolgozat felépítése

Elméleti tárgyalás: A felvázolt mechanikai probléma elméleti hátterének általános, továbbá a megoldásához hozzárendelt matematikai módszer elméleti hátterének levezetése és gyakorlati alkalmazásának modelljét alkotó példa feladatok analitikus módon történő megoldása és ismertetése.

Gyakorlati megvalósítás: Az elméleti úton tárgyalt problémák átültetése számítógépes környezetbe, az egyes analitikus formulák numerikus módszerrel történő kiküszöbölésének ismertetése. A mechanikai probléma megoldásához írt programok működésének részletes leírása, esetleges funkcióbeli bővítés lehetőségének ismertetése, továbbá az elsajátított módszerek reprezentálása a programok felhasználásával gyakorlati példákon keresztül.

Mechanikai feladatok és matematikai módszerek

Keresztmetszeti és térfogati jellemzők

Gyakran előforduló feladat tetszőleges síkbeli alakzatok tömegközéppontjainak meghatározása. Az adott probléma megoldására jellegétől függően többféle megoldási módszert is alkalmazhatunk.

Terület számítása egyszeres integrál alkalmazásával

Legyen adott Descartes-féle derékszögű koordináta rendszer, melyen x jelölje a vízszintes, y pedig a függőleges tengelyt. Legyen adott $f(x)=x^2$ függvény az x,y -síkon, $x \in \mathbb{R}$ és határozzuk meg a függvény integrálját a $[0;5]$ intervallumban.

$$\int_0^5 x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^5 = \frac{125}{3}$$

Geometriailag vizsgálva a kapott érték a függvény görbéje és az x tengely által határolt síkrész területét adja. A Newton-Leibniz formula értelmében jelölje Φ az $[a,b]$ intervallum egy felosztását, Ekkor :

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}))$$

, ahol x_i a felosztás osztópontja, $i=1,2,\dots,n$. Alkalmazzuk F -re és az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumokra a Lagrange-féle középértéktételt, így a következő megállapításra jutunk

$\exists \xi_i(x_{i-1}, x_i)$, továbbá $F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, felhasználva, hogy $F(x_0) = F(a)$ és $F(x_n) = F(b)$ adódik

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Az egyenlet jobb oldalán álló tag értelmezése során észrevehetjük, hogy a kifejezés f -nek φ felosztáshoz tartozó egyik közelítő összege. Ha egy végtelenül finomodó

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f$$

felosztássorozaton futtatjuk végig φ -t, határátmenettel adódik.

Sokszor előforduló feladat síkidomok tömegközéppontjának meghatározása. Dolgozzunk jelen esetben is Descartes-féle derékszögű koordináta rendszerben.

Egy tetszőleges síkidom teljes mértékben megadható, jelen esetben legyen adott $y_1 = f_1(x)$ és $y_2 = f_2(x)$ függvény páros. Tudjuk, hogy $y_2(x) - y_1(x) \geq 0$, így $y_2(x) = y_1(x)$ egyenletet megoldva megkapjuk x_1 és x_2 értékeket, melyek rendre az integrálás alsó és felső határai.

$$\int_{x_1}^{x_2} (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

A keresett síkrész így meghatározandó területét, összefüggéssel számoljuk. Az integrálás tulajdonságait felhasználva $[F_2(x) - F_1(x)]_{x_1}^{x_2}$ kifejezéshez jutunk.

Síkidomok statikai nyomatéka és tömegközéppontja

Az előzőekben már láttuk miként határozhatjuk meg az xy síkon tetszőlegesen felvett síkidom területét. Következésképpen számítsuk ki $f(x_1)$ és $f(x_2)$ görbék által határolt tartomány nyomatékát az x majd y tengelyekre. Az integrálást a tartomány

$$\int_{T_x} f = \int_{x_1}^{x_2} y dx$$

egészére ki kell terjeszteni. Először számítsuk az x - tengelyre:

$$\int_{T_y} f = \int_{h_1}^{h_2} x dy$$

,hasonlóképpen az y -tengelyre

Észrevehető, hogy a mennyiségeket elosztva a tartomány területével megkapjuk a síkidom tömegközéppontjainak koordinátáit. Rendre:

$$x_s = \frac{\int_{T_x} y dx}{\int_{x_1}^{x_2} dx}, \quad y_s = \frac{\int_{T_y} x dy}{\int_{h_1}^{h_2} dy}, \quad \text{illetve}$$

Szabályos alakzatok, illetve könnyen meghatározható tartományok esetén számolhatunk

$$x_s = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i} \quad \text{és} \quad y_s = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} \quad \text{kifejezésekkel.}$$

Nézzünk egy példát az elhangzottakra. Legyen adva $T(x,y)$ tartomány. Határozzuk meg a tartomány által határolt síkidom súlypontját.

	I_1	I_2	I
x_s	5e	20e	$x_s = \frac{5e \cdot 400e + 20e \cdot 400e}{400e^2} = 12,5e$
y_s	20e	10e	$y_s = \frac{20e \cdot 400e + 10e \cdot 400e}{400e^2} = 15e$
T	$10e \cdot 40e = 400e^2$	$20e \cdot 20e = 400e^2$	$T = 400e^2 + 400e^2 = 800e^2$

Megoldás kettős integrállal négyszögtartomány esetén

Legyen $T \subset R^2$ korlátos, és összefüggő ponthalmaz T -t mérhetőnek nevezzük, ha T -t tartalmazó sokszögek területének alsó határa megegyezik a T által tartalmazott sokszögek területének felső határával. Ezt a közös határt T területének (mértékének) nevezzük, és $\mu(T)$ -vel jelöljük. Legyen az $f: T \rightarrow R$ kétféle változós függvény korlátos a T tartományon, s jelölje $m_i(M_i)$ f értékeinek alsó(felső) határát a $T_i \subset T$ halmazon. Az f függvényt ekkor T tartományon integrálhatónak nevezzük, ha $\sum_{i=1}^n m_i \mu(T_i)$ és $\sum_{i=1}^n M_i \mu(T_i)$ összegek határértéke bármely minden határon túl finomodó felosztás esetén létezik és egyenlő. Ezt a közös határértéket nevezzük f T -re vett kettős integráljának.

$$\iint_T f = \iint_T f(x,y) dx dy$$

Négyszögtartományról beszélünk, ha $T = \{(x,y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, ha f integrálható a T

-tartományon és létezik az $y = \int_a^b f(x,y) dx, y \in [c,d]$ függvény, így:

$$\iint_T f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

Négyszögtartomány esetén, tehát az integrálás sorrendje felcserélhető.

A kettős integrál transzformációja

A kettős integrál transzformációja az egyváltozós függvények integrálásakor megismert helyettesítéssel integrál módszerének általánosítása. A változók transzformációja sok esetben megkönnyíti az integrálást elvégzését, illetve megoldhatóvá válnak azon esetekben, ahol transzformáció nélkül nem lehetne megoldható a probléma.

Ha az $x: (u,v) \rightarrow x(u,v)$ és $y: (u,v) \rightarrow y(u,v)$, ahol $(u,v) \in T' \subset \mathbb{R}^2$ függvények az u,v sík T' tartományát kölcsönösen egyértelműen leképezik az x,y sík T tartományára, és folytonosan differenciálhatóak és f T -re vett integrálja létezik.

$$\iint_T f(x,y) dx dy = \iint_{T'} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv, \quad \text{ahol} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

transzformáció determinánsa, az úgynevezett Jacobi determináns. Polártranszformáció esetén a leképezés az origó kivételével kölcsönösen egyértelmű.

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \phi, \\ y &= r \cdot \sin \phi, \end{aligned}$$

helyettesítéseket alkalmazva a determináns:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r \cos^2 \phi + r \sin^2 \phi = r(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = r,$$

A kettős integrál lehetséges fizikai alkalmazásai közül említsük elsőként a síklemez tömegközéppontjának meghatározását. Ahogyan az egyszeres integrál témakörénél, most is helyezzünk el egy lemezt az x,y síkban. Jelölje T a lemez által lefedett tartományt. Ha a lemez sűrűségét a $\rho: (x,y) \rightarrow \rho(x,y), (x,y) \in T$ függvénnyel határozzuk meg, akkor tömegközéppontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\iint_T x \rho(x,y) dx dy}{\iint_T \rho(x,y) dx dy}, \quad \text{illetve} \quad y_s = \frac{\iint_T y \rho(x,y) dx dy}{\iint_T \rho(x,y) dx dy}, \quad \text{ahol a számláló rendre a síklemez } y \text{ és } x \text{ tengelyre vett statikai nyomatéka, a nevező pedig a lemez tömege.}$$

Ha a lemez homogén, azaz sűrűsége konstansnak tekinthető, ρ kiemelhető az integráljel elé, egyszerűsítést követően a nevező T területével $\mu(T)$ -vel egyezik meg.

Amennyiben y és x értékeket második hatványaira emeljük, előállítjuk rendre a lemez x és y tengelyekre vett másodrendű nyomatékát.

$$\Theta_x = \iint_T y^2 \rho(x, y) dx dy,$$

$$\Theta_y = \iint_T x^2 \rho(x, y) dx dy,$$

Hasonlóképpen a z tengelyre (origóra) vett másodrendű nyomaték :

$$\Theta_z = \iint_T (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy = \Theta_x + \Theta_y,$$

Nézzünk egy példát az elhangzottakra!

Határozzuk meg az $(x, y) \rightarrow \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ függvény integrálját az $x^2 + y^2 = 1$ egységsugarú körre.

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\},$$

$$\iint_T f(T) dA = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy \right) dx$$

így az integrálandó kifejezés: ,átérve polárkoordináta rendszerre a kifejezés kiszámításának nehézsége jelentősen lecsökken.

$$T' = \{(\varphi, r) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\},$$

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - r^2},$$

,így az integrálandó kifejezés :

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r \sqrt{1 - r^2} d\varphi \right) dr = \int_0^1 \left[\varphi \left(r \sqrt{1 - r^2} \right) \right]_0^{2\pi} dr = \int_0^1 2\pi \left(r \sqrt{1 - r^2} \right) dr = -\pi \int_0^1 \left((-2r) \sqrt{1 - r^2} \right) dr$$

$$= -\pi \left[\frac{(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

Nézzünk egy példát most súlypontszámításra is.

Határozzuk meg a $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $0 \leq x \leq R$, $0 \leq y \leq R$, $0 \leq z \leq R$ egyenlőtlenségekkel leírt, állandó sűrűségű nyolcadgömb súlypontjának koordinátáit. A test tömege :

$$M = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho = \frac{1}{6} \pi R^3 \varrho$$

Az M_{yz} statikai nyomaték kiszámításához használjuk fel rendre az alábbi helyettesítéseket,

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \vartheta,$$

gömbi koordináta transzformációt. Az integrálás tartományai így a következőképpen módosulnak:

$$0 \leq r \leq R, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \text{ továbbá a Jacobi-determináns abszolút értéke } r^2 \sin \vartheta.$$

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_V x \varrho dV = \varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^R (r \sin \vartheta \cos \varphi) (r^2 \sin \vartheta) dr \right] d\vartheta \right\} d\varphi = \\ &= \varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \sin^2 \vartheta \cos \varphi d\vartheta \right] d\varphi = \vartheta \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \frac{1 - 2\cos \varphi}{2} d\varphi \right] d\vartheta = \\ &= \varrho \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \left[\frac{1}{2} \vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \varrho \frac{R^4}{4} \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{R^4}{16} \pi \varrho. \end{aligned}$$

A test szimmetriáját figyelembe véve megállapíthatjuk $M_{xy} = M_{yz} = M_{xz} = \frac{R^4}{16} \pi \varrho$.

Következésképpen a test súlypontja : $x_s = y_s = z_s = \frac{3}{8} R$.

Tehetetlenségi nyomaték számítása

Legyen egy m tömegű test a derékszögű koordináta rendszerben úgy elhelyezve, hogy tömegközéppontja az origóba essen. Határozzuk meg ekkor a test tetszőleges, de tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkozó Θ tehetetlenségi nyomatékát.

Kiindulásképpen tekintsük a test térfogatának azon $V_1, V_2 \dots V_n$ felosztását amely bármely $V_i (i=1, 2, \dots, n)$ esetén a sűrűség közel állandónak tekinthető, és a térfogat minden pontja közelítőleg azonos távolságra van a szóban forgó tengelytől.

Hármas integrál alkalmazása esetén a tehetetlenségi nyomaték számítása analóg módon végezhető el a kétszeres integrál alkalmazásánál tárgyaltakkal. Tehát ha a szóban forgó tengely az x, y, z tengelyek a tehetetlenségi nyomaték rendre :

$$\Theta_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$\Theta_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$\Theta_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

Fontos megemlíteni, ha a tengely a főtengellyel rendre α, β, γ szöget zár be akkor a tehetetlenségi nyomaték erre a tengelyre: $\Theta = \Theta_x \cos^2 \alpha + \Theta_y \cos^2 \beta + \Theta_z \cos^2 \gamma$.

Analóg módon, amennyiben a test homogén tömeg eloszlású, a sűrűség kiemelhető az integrál jel elé, egyszerűsítést alkalmazhatunk.

Határozzuk meg az R sugarú, ρ sűrűségű gömb tehetetlenségi nyomatékát a z tengelyre.

$$\Theta_z = \rho \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$$

Mint az előbb levezettük

A feladatot gömbi koordináta-transzformáció alkalmazásával oldjuk meg.

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta,$$

a határok a következőképpen alakulnak : $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq r \leq R$,

(a Jacobi-determináns számítása korábban részletezésre került, ezért erre most nem térünk ki)

A Jacobi-determináns abszolút értéke $r^2 \sin \vartheta$, illetőleg a transzformációt követően

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta,$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_z &= \varrho \int_0^\pi \left\{ \int_0^R \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 \sin^2 \vartheta \, r^2 \sin \vartheta) d\varphi \right] dr \right\} d\vartheta = \varrho \int_0^\pi \left(\int_0^R r^4 \sin^3 \vartheta \, [\varphi]_0^{2\pi} dr \right) d\vartheta = \\
 &= 2\pi \varrho \int_0^\pi \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R \sin^3 \vartheta \, d\vartheta = \\
 &= \frac{2\pi \varrho R^5}{5} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \, d\vartheta = \frac{2\pi \varrho R^5}{5} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{2\pi \varrho R^5}{5} \left[-\cos \vartheta + \frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_0^\pi = \\
 &= \frac{2\pi \varrho R^5}{5} \left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{2\pi \varrho R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} .
 \end{aligned}$$

A gömb tömege ismert $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho$, ezért $\Theta_z = \frac{2}{5} m R^2$.

Ebből következően a gömb bármely tömegközépponton áthaladó tengelyére vett

tehetetlenségi nyomatéka: $\Theta = \frac{2}{5} m R^2 \cos^2 \alpha + \frac{2}{5} m R^2 \cos^2 \beta + \frac{2}{5} m R^2 \cos^2 \gamma = \frac{2}{5} m R^2$.

Főfeszültségek számítása

Sajátérték-feladatok

Az n -edrendű $A = [a_{ik}]$ mátrix az E_n vektortér egy lineáris transzformációját adja meg, amely a $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ tárgyvektorhoz a $y = Ax$ képvektort rendeli. A gyakorlatban fontosak azok a vektorok amelyekre fenn áll $Ax = \lambda x$, vagyis irányuk a transzformáció során nem változik meg. λ tetszőleges számot jelöl.

Ezeket a vektorokat a transzformáció, illetve A mátrix sajátvektorainak, a λ számokat az A mátrix sajátértékeinek nevezzük. Megjegyezendő ha egy x sajátvektor, akkor tetszőleges α -szorosa (α valós számot jelöl) is sajátvektor, amely ugyanazon λ sajátértékhez tartozik.

A sajátvektorok meghatározásához oldjuk meg a $(\lambda E - A)x = 0$ mátrixegyenletet. A kifejezés az alábbi homogén egyenletrendszerrel egyezik meg:

$$\begin{aligned} (\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n &= 0, \\ -a_{21}x_1 + (\lambda - a_{22})x_2 - \dots - a_{2n}x_n &= 0, \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots + (\lambda - a_{nn})x_n &= 0, \end{aligned}$$

Az egyenletrendszernek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha determinánsa zérus.

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = |\lambda E - A| = 0$$

ezt a determinánst A karakterisztikus determinánsának nevezzük, kifejtve egy n -ed fokú polinomot, az úgynevezett karakterisztikus polinomot kapjuk meg. A $|\lambda E - A| = 0$ egyenletet az A mátrix karakterisztikus egyenletének nevezzük, gyökei a sajátértékek. Bebizonyítható, hogy a komplex számok felett értelmezett vektortérben minden lineáris transzformációnak van sajátértéke. Valós számok felett értelmezett vektortérben ezen kijelentés nem általánosítható, mivel egyáltalán nem biztos, hogy van valós gyöke a karakterisztikus egyenletnek. Az azonban megfigyelhető, hogy a szimmetrikus és hermitikus mátrixok valamennyi sajátértéke valós. $|\lambda E - A|$ Determináns kifejtésével kapott karakterisztikus polinom közvetlenül is felírható:

$$|\lambda E - A| = \lambda^n + (-1)d_1\lambda^{n-1} + (-1)^2d_2\lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}d_{n-1}\lambda + (-1)^n|A|, \text{ ahol}$$

$d_m (m = 1, 2, \dots, n-1)$ az A determináns m -ed rendű átlós aldeterminánsainak az összegét jelöli.

m -ed rendű átlós aldeterminánsnak nevezzük az aldeterminánst, amelynek m számú sorát és oszlopát úgy választottuk ki, hogy a főátlójába kerülő elemek eredetileg a determinánsban is a főátló elemei voltak.

Minden egyes sajátértékhez rendelhető sajátvektor, amelyek koordinátáit megkapjuk, ha a kiszámított λ értéket a homogén lineáris egyenletrendszerbe visszahelyettesítve megoldjuk az egyenletet.

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixszal adott lineáris transzformáció sajátértékeit.

A karakterisztikus egyenlet a karakterisztikus determinánsból :

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 1 \\ -7 & \lambda-8 & 1 \\ 4 & 4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-8)(\lambda-3) - 8 - 28 - 4(\lambda-8) - 14(\lambda-3) - 4(\lambda-3)$$

$$\lambda^3 + 14\lambda^2 + 35\lambda - 22 = 0 ,$$

A karakterisztikus egyenletet felírhatjuk oly módon is, ha kiszámoljuk rendre $d_1, d_2, |A|$ determinánsok értékeit.

Hasonlítsuk össze az így kapott eredményt is.

$$d_1 = 3 + 8 + 3 = 14 ,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 10 + 5 + 20 = 35 ,$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 72 + 8 + 28 - (32 + 42 + 12) = 22 .$$

Ezen értékekkel a karakterisztikus egyenlet: $\lambda^3 + 14\lambda^2 + 35\lambda - 22 = 0$, vagyis ugyanazon eredményre jutottunk.

A harmadfokú egyenlet gyökeinek számításához jelen felhasználtuk a wolframalpha programot:

$$\lambda_1 = 1 ,$$

$$\lambda_2 = 2 ,$$

$$\lambda_3 = 11 ,$$

észrevehető, hogy $(\lambda - 1)$ gyöktényezővel leosztva (ekkor $\lambda_1 = 1$) az egyenlet másodfokú egyenletté redukálható, melyet megoldva megkapjuk a másik két hiányzó gyököt.

A következőkben nézzük meg miként alkalmazható az előbb említett algoritmus főfeszültségek meghatározására. Ehhez először azonban definiáljuk néhány fogalmat.

Vegyük jelen esetben az ábrán látható rudat, melyet P ponton át vágjuk el a tömegközépvonalával ϕ szöget bezáróan. A kísérleti eredményekből következően a vizsgált felület mentén is állandó irányú és egyenletes eloszlású a feszültségeloszlás. A belső erőrendszer eredője rúdtengely irányú kell, hogy legyen mivel másként nem teljesülnének az egyensúlyi egyenletek.

A felületen megoszló belső erőrendszer intenzitását feszültségnek nevezzük és ρ_n feszültségvektorral adjuk meg.

$$\rho_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_b}{\Delta A} = \frac{dF_b}{dA},$$

A feszültségvektort a test egy P pontjához és a dA felületelem n normál-irányához rendeljük hozzá.

A feszültségvektor felbontható az n, m, k jobbsodrású lokális koordináta-rendszerben

$\sigma_n n$ normálfeszültségre és a keresztmetszet síkjába eső $\tau_{nm} m$ csúsztatófeszültségre.

A csúsztatófeszültség első indexe a felület normálisát, második indexe csúsztatófeszültség irányát jelöli. Megjegyezendő, hogy tetszőlegesen sok lokális koordináta-rendszert jelölhetünk ki, ezen tény miatt a globális és lokális rendszerben számolt értékek eltérőek lehetnek.

Egytengelyűnek nevezzük a feszültség állapotot, ha az adott P ponton átmenő tetszőleges irányhoz tartozó feszültségvektorok mind egy tengellyel párhuzamosak. A gondolatmenetet kiterjesztve definiálhatunk többtengelyű feszültségállapotokat. Ezekre később még visszatérünk.

A feszültségállapotot ábrázolhatjuk a feszültségi Mohr-körrel, melyre P ponton átmenő valamennyi irányhoz rendelt feszültségvektorok koordinátái határoznak meg a $\sigma - \tau$ síkon.

Eszerint az ábrán elvágott rúdfelület: $A = \frac{A_0}{\cos \phi}$. A ρ_n feszültségvektor nagysága így az egyenletes eloszlás miatt:

$$|\rho_n| = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0} \cos \phi = \sigma \cos \phi,$$

n, m, k egységvektorokkal jelölt lokális koordináta-rendszerben

$$\sigma_n = |\rho_n| \cos \phi; \quad \tau_{nm} = |\rho_n| \sin \phi,$$

majd ezt visszahelyettesítve:

$$|\rho_n| = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0} \cos \phi = \sigma \cos \phi \quad \text{-be,}$$

$$\sigma_n = \sigma \cos^2 \phi, \quad \tau_{nm} = \sigma \sin \phi \cos \phi,$$

az első összefüggésből adódóan $\cos \phi = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma}}$, majd ezt visszahelyettesítve a τ_{nm} összefüggésbe:

$$\tau_{nm} = \sigma \sqrt{1 - \frac{\sigma_n}{\sigma}} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma}}$$

mindkét oldalt négyzetre emelve és rendezve az alábbi kifejezéshez jutunk:

$$\begin{aligned} \tau_{nm}^2 &= \sigma_n \sigma - \sigma_n^2 \\ \tau_{nm}^2 &= -\left(\sigma_n - \frac{1}{2}\sigma\right) + \frac{\sigma^2}{4} \\ \tau_{nm}^2 + \left(\sigma_n - \frac{1}{2}\sigma\right)^2 &= \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

a kifejezés nem más, mint egy kör egyenlete, melyet feszültségi Mohr-körnek nevezünk.

Térbeli feszültségállapot

Térbeli feszültségállapot esetén a vizsgált P ponton át három olyan metszősík fektethető, amelyeken a ρ_{ni} feszültségvektor a sík n_i normálisával párhuzamos, azaz a feszültségvektor az n_i vektortól csupán σ_i skaláris szorzóban tér el:

$$\rho_{ni} = F \cdot n_i = \sigma_i \cdot n_i$$

Azokat az n_i vektorokat melyekre teljesül az alábbi egyenlőség F feszültségtenzor sajátvektorainak, a hozzá tartozó σ_i skaláris szorzókat sajátértékeinek, magát a problémát sajátérték-feladatnak nevezzük. Megoldásakor a már korábban ismertetett módszerből indulhatunk ki.

A feszültséghez tartozó irányokat a feszültségi állapot főirányainak, a főirányokkal párhuzamos tengelyeket a P ponthoz tartozó feszültségi főtengeknek, a főirányokra

merőleges síkokat főfeszültségi síkoknak nevezzük. A feszültségi főirányok egymásra kölcsönösen merőlegesek.

A zérusra redukált egyenletből n_i -t kiemelve:

$$F \cdot n_i - \sigma \cdot n_i = (F - \sigma E) \cdot n_i = 0$$

A feladatnak akkor lehet triviálisától különböző megoldása, ha determinánsa zérus. Így a karakterisztikus determináns a következő :

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0$$

Kifejtését követően a karakterisztikus egyenlet: $\sigma_i^3 - F_I \sigma_i^2 + F_{II} \sigma_i - F_{III} = 0$, ahol F_I, F_{II}, F_{III} a feszültségtenzor skalár invariánsai. Megjegyezendő, hogy a feszültség állapot főfeszültségei függetlenek attól, hogy milyen koordináta-rendszerben lettek meghatározva. Mivel a főfeszültségek a harmadfokú karakterisztikus egyenlet gyökei, így az egyenletben szereplő együtthatók sem függenek az alapul vett koordináta-rendszertől, ezért nevezzük a F_I, F_{II}, F_{III} együtthatókat a feszültségi tenzor invariánsainak.

A következőkben nézzük meg milyen módszerek alkalmazhatóak a karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározására.

Cardano képlete harmadfokú egyenlet megoldására

A harmadfokú egyenlet felírható az alábbi alakban $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Az $x = y - \frac{a}{3}$ helyettesítéssel a fenti egyenlet az alábbi redukált egyenletre egyszerűsödik :

$y^3 + py + q = 0$, ahol $p = b - \frac{a^2}{3}$ illetve $q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c$. Továbbá kerüljenek bevezetésre még az alábbi paraméterek :

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2; \quad A = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{Q}} \quad B = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{Q}}$$

ezen paraméterek felhasználásával a redukált egyenlet megoldásai :

$$y_1 = A + B, \quad y_{2,3} = \frac{-A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3}$$

ezen megoldások ismeretében az eredeti egyenlet gyökei is számíthatóak az $x = y - \frac{a}{3}$ helyettesítés alapján.

Határozzuk meg a főfeszültségeket az alábbi tenzor esetén:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & -25 & 30 \\ -25 & 50 & 60 \\ 30 & 60 & -30 \end{bmatrix} MPa$$

$$\sigma_I = 20 + 50 - 30 = 40$$

$$\sigma_{II} = \begin{vmatrix} 20 & -25 \\ -25 & 50 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 50 & 60 \\ 60 & -30 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 20 & 30 \\ 30 & -30 \end{vmatrix} = 375 - 5100 - 1500 = -6225$$

$$\sigma_{III} = \begin{vmatrix} 20 & -25 & 30 \\ -25 & 50 & 60 \\ 30 & 60 & -30 \end{vmatrix} = -218250$$

A determináns kifejtésekor a *Sarrus-szabályt* alkalmaztuk.

Ezek alapján a karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 - 40\lambda^2 - 6225\lambda + 218250 = 0$$

A karakterisztikus egyenlet gyökeire az analitikus megoldás esetén az alábbi formulák használhatóak :

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_I}{3} + P \cos \theta$$

$$\lambda_2 = \frac{\sigma_I}{3} + P \cos \left[\theta - \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$\lambda_3 = \frac{\sigma_I}{3} + P \cos \left[\theta + \frac{2\pi}{3} \right]$$

ahol $P = \frac{2}{3} \sqrt{\sigma_I^2 - 3\sigma_{II}}$, illetve $\theta = \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{4}{27} \frac{2\sigma_I^3 - 9\sigma_I\sigma_{II} + 27\sigma_{III}}{P^3} \right]$.

A formulák biztosítják , hogy a $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ sorrend teljesüljön.

Ezen algoritmust alkalmazva elsőként számítsuk a P paramétert :

$$P = \frac{2}{3} \sqrt{40^2 - 3(-6225)} = \frac{2}{3} \sqrt{1600 + 18675000} = 94,9268$$

θ paraméter számítása :

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{4}{27} \frac{240^3 - 9 \cdot 40(-6225) + 27(-218250121)}{94,9268^3} \right] = 47,2630^\circ$$

Ezután a keresett gyökök meghatározása a formulák felhasználásával könnyedén megvalósítható :

$$\lambda_1 = \frac{40}{3} + P \cos[47,2630^\circ] = 83,2733$$

$$\lambda_2 = \frac{40}{3} + 94,9268 \cos[47,2630^\circ - 120^\circ] = 72,0192$$
$$\lambda_3 = \frac{40}{3} + 94,9268 \cos[47,2630^\circ + 120^\circ] = -69,3167$$

Elmozdulás számítása

A következőkben nézzük meg ,milyen módszereket alkalmazhatunk , nyomaték-,szögelfordulás és lehajlás függvények meghatározására.

A rugalmas szál differenciálegyenlete

Legyen adott egy eredetileg egyenes tengelyű rúd. Terhelés hatására a rúd „meggörbül”, melynek mértékét első közelítésben a terhelés szabja meg. Az eredetileg egyenes tömegközépponti hossz tengely hajlítást követően felvett alakját ,rugalmas vonalnak ,vagy rugalmas szálnak nevezzük.

Maga a rugalmas szál egyenlete a $y=f(z) \neq \text{Konstans}$ összefüggéssel írható le.

Az alakváltozás (-mely alatt tágabb értelemben a terhelés következtében bekövetkező elemi cellák elmozdulását értjük) három elsődleges attribútuma a y lehajlás (szokás süllyedés- , vagy függőleges elmozdulásként is nevezni), a ϕ szögelfordulás (elemi síkok egymáshoz viszonyított elfordulása, rúd keresztmetszet esetén $\phi(r)$ írhatjuk, ahol r jelölje a rúd tömegközéppontjától vett távolságot) és a ρ görbületi sugár.

Az alakváltozási jellemzők között az analitikus geometria szerint ismertetett összefüggés szerint a görbületi sugár :

$$g(z) = \frac{1}{\rho(z)} = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M(z)}{I_x E}$$

Továbbá $g = \frac{1}{\rho} = y'' = -\frac{M}{EI_x}$ kifejezést rendezve a rugalmas vonal $EI_x y'' = -M$ alakjához jutunk. EI_x szorzatot a rúd hajlítómerevségének nevezzük , értékét jelen feladat megoldások során konstansnak tekintjük.

A tartó bármely z koordinátájú pontjában elhelyezkedő dz hosszúságú rúddarab szögelfordulása meghatározható :

$$d\phi = -\frac{M(z)}{EI} dz$$

lehajlása :

$$dy = -\frac{M(z)}{EI} (l-z) dz$$

összefüggésekkel.

Tetszőleges z koordinátájú pontban a teljes szögelfordulás és lehajlás :

$$\phi = -\frac{1}{EI} \int_0^l M(z) dz = -\frac{A_M}{EI}, \quad y = -\frac{1}{EI} \int_0^l M(z) \cdot (l-z) dz = -\frac{S_M}{EI},$$

illetve , észrevehetjük, hogy az első megfelel a nyomatéki ábra $[a, b]$ intervallumra vett integráljával , míg a második tag a z tengelyre vett statikai nyomatékával.

Virtuális tartó

Azon esetben ,ha az $\frac{1}{EI}$ hányadossal módosított nyomatéki ábrát az eredeti tartó ,úgynevezett helyettesítő (vagy virtuális tartó) tartóra helyezzük, a számolt reakció értéke megegyezik az eredeti tartó szabad végének szögelfordulásával , befogási nyomatéka pedig a lehajlás értékét adja eredményül. Megjegyezendő ,hogy csak statikailag határozott tartónak lehet helyettesítő tartója ,mely ebből következően szintén statikailag határozott.

A téma további tárgyalása előtt térjünk ki a megoldáshoz alapul vett hatványsor ismertetésére.

A Taylor-sor mint speciális hatványsor

A gyakorlatban sokszor előforduló kérdés hogy a vizsgálandó függvényt helyettesíthetjük-e egy egyszerűbb függvénnyel ,illetőleg ,hogy a helyettesítő függvényt előállítja vagy kívánt pontossággal megközelíti-e a vizsgálandó függvényt.

Legyen f az x_0 pont valamely környezetében akárhányszor differenciálható. Ekkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n,$$

hatványsort az f függvény x_0 pont körüli Taylor-sorának nevezzük.

Amennyiben az $x_0=0$ helyen tekintjük az f függvény Taylor-sorát,akkor e sort f Maclaurin-sorának nevezzük.

A következő számításoknál láthatjuk,hogy műszaki probléma esetén elegendő a függvényt Taylor-sorának első ,esetleg első két tagjával közelíteni.

Megemlítésképpen a zérushoz közeli x értékekre használhatók például a következő közelítések :

$$e^x \approx 1 + x, \quad (1+x)^n \approx 1 + nx$$

$$\lg x = x, \quad (1+x)^3 = 1 + 3x$$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x, \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

Azon esetben mikor Taylor-sorba fejthető függvény értéket kell megadott pontossággal kiszámítani a maradéktag vizsgálatával dönthetjük el ,hogy az adott tartományban hányadfokú Taylor-polinommal érhető el a kívánt közelítés.

Vannak olyan függvények melyek primitív függvénye nem elemi függvény. Az ilyen függvények integrálására alkalmas közelítő módszerek egyike a hatványsorok tagonkénti integrálhatóságán alapszik.

Az elhangzottak példa segítségével kerülnek bemutatásra.

Legyen adott egyenes kéttámaszú tartó, melynek IE hajlítómerevsége legyen jelen esetünkben $8,4 \cdot 10^8 \text{ Nmm}^2$. Állapodjunk meg a rúd prizmatikus mivoltában, majd helyezzük el z,y derékszögű koordináta-rendszerben. (Amennyiben a feladatot térbeli tartóra szeretnénk kiterjeszteni ,tartsuk szem előtt ,hogy derékszögű koordináta-rendszerünk jobbsodrású legyen.)Melyben z jelölje a vízszintes irányt, y pedig a függőleges irányt.

Legyen adott az alábbi,teljes keresztmetszetében homogén rúd , melynek lehajlás függvényét írjuk fel Taylor- sorba fejtéssel!

Támadjon kettő koncentrált erő a tartó $z_{F1}=20 \text{ mm}$ illetőleg $z_{F2}=60 \text{ mm}$ helyeken.

Első lépésünk a reakcióerők meghatározása :

Ehhez határozzuk meg ,hogy $\sum M_{F_{yi}} = 0$,úgynevezett nyomatéki egyenlet mikor teljesül.

$$F_A = \frac{F_1 \cdot (100 - z_{F1}) + F_2 \cdot (100 - z_{F2})}{(100 - 0)} = \frac{20 \cdot 70 + 20 \cdot 40}{100} = 22 \text{ N} (\uparrow)$$

Második reakcióerő számításához alkalmazzuk a $\sum F_{y_i} = 0$, közismertebb nevén vetületi egyenletet.

$$\text{Eszerint } F_B = -F_A + F_1 + F_2, \quad F_B = -22 + 30 + 30 = 18 \text{ N}(\uparrow),$$

Így tehát az ébredő reakcióerők :

$$F_A = 22 \text{ N}(\uparrow), \text{ illetve } F_B = 18 \text{ N}(\uparrow),$$

Mint látható az ébredő nyomaték meghatározásához három szakaszra kell bontanunk a tartót. Minden egyes szakaszban más és más nyomaték ébred z függvényében.

Felírhatóvá válnak az egyes terhelt szakaszokra a nyomatéki függvények. Megjegyzésképpen a határok felírásakor azok dimenzióját mm -ként vesszük figyelembe.

$$\begin{aligned} M_I(z) &= -F_A z, \text{ ahol } 0 \leq z \leq 30, \\ M_{II}(z) &= -F_A z + F_1(z - 30), \text{ ahol } 30 \leq z \leq 60, \text{ illetve} \\ M_{III}(z) &= -F_A z + F_1(z - 30) + F_2(z - 60), \text{ ahol } 60 \leq z \leq 100. \end{aligned}$$

Következő lépésben határozzuk meg az egyes szakaszokon ébredő nyomaték területét, területének tömegközéppontját. Észrevehető, hogy jelen esetben a nyomatéki ábrát kettő háromszögre illetve egy trapéz területére bonthatjuk, ezzel egyszerűsítve számításainkat.

Vizsgáljuk első lépésben az első háromszöget u, v koordináta-rendszerbe véve, $[0 \leq x \leq 30]$ intervallumon. Ekkor csúcspontjainak koordinátái :

$$A = (0, 0), \quad B = (30, 0), \quad C = (30, -660),$$

Így :

$$S_{1_x} = \frac{0 + 30 + 30}{3} = 20,$$

továbbá:

$$S_{1_y} = \frac{0 + 0 - 660}{3} = -220,$$

,így első síkidom tömegközéppontja :

$$S_1 = (20, -220)$$

Területét egyszeres integrál alkalmazásával határozzuk meg.

Az ismertett formulák felhasználásával :

$$T_1 = \int_0^{30} 22 z dz = 22 \int_0^{30} z dz = 22 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{30} = 9900$$

A trapéz tömegközéppontjának ,illetve területének meghatározásához bontsuk kettő tartományra.

Első lépésben vigyük át a síkidomot u, v koordináta-rendszerbe. A rendszer jellemzői analóg módon megegyeznek az előbb tárgyalt rendszerrel.

T_{2_1}' jellemezze $0 \leq x \leq 30, 0 \leq y \leq -660$ tartományt. Míg T_{2_2}' legyen értelmezve $0 \leq x \leq 30$ intervallumon $y = -2x$ hozzárendeléssel meghatározva.

Ekkor a téglalap tartomány tömegközéppontja könnyedén meghatározható.

$$S_{2_1}' = (15, -330)$$

A T_{2_2}' tartomány tömegközéppontja a már korábban ismertett módszer alapján történik ismét. Vegyük alapul a $v = -2u$ hozzárendelést ,illetőleg $0 \leq u \leq 30$ intervallum által meghatározott tartományt.

Ekkor három csúcspontjának koordinátái:

$$A = (0,0), B = (30,0), C = (30,-60)$$

$$S_{2_{2x}}' = \frac{0+30+30}{3} = 20$$

$$S_{2_{2y}}' = \frac{0+30-60}{3} = -20$$

így :

$$S_{2_2}' = (20, -20)$$

A síkidom területéhez az alábbi integrál értékét kell meghatároznunk :

$$T = \int_0^{30} 2z dz = 2 \int_0^{30} z dz = 2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{30} = 900$$

Jelen esetekben az negatív előjel elhagyható ,mivel a nyomatékszámítás esetén a forgatás értelmének meghatározásakor dől el ,hogy a számított érték negatív, vagy ellentétes esetben pozitív értelmű lesz. Gyakorlati jelentősége nincs annak miszerint választjuk meg az értelmet, csupán arra kell ügyelnünk,hogy az alapul választott értelmezési rendszerben maradjunk számításaink végéig.

Így már számolható vált a trapéz tömegközéppont koordinátái,melyek a már korábban ismertetett

$$x_s = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i} \quad \text{és} \quad y_s = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} \quad \text{kifejezésekkel határozzuk meg .}$$

Vegyük figyelembe ,hogy a síkidom u,v koordináta-rendszerben való leképezésekor a határokat önkényesen $u_0=0$ kezdeti értéktől kezdve futtattuk. Ennek megfelelően figyelembe kell venni az eltolás mértékét mikor a síkidomot visszaillesztjük a globális z,y koordináta-rendszerbe.

Eszerint a síkidom tömegközéppontjának koordinátái:

$$S_{2_x} = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i} + e = \frac{20 \cdot 900 + 15 \cdot 19800}{20700} = 15,21 + e$$

ahol e jelölje az előbbieken említett eltolás mértékét. Ez esetben $e=30$,így $S_{2_x} = 15,21 + 30 = 45,21$.

Továbbá az y koordináta értéke :

$$S_{2_y} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{20 \cdot 900 + 330 \cdot 19800}{20700} = 316,5217$$

Végezetül a harmadik síkidom tömegközéppont illetve , területének meghatározása :

u,v koordináta-rendszerbe átemelve a síkidomot, csúcspontjainak koordinátái :

$$A=(0,0), \quad B=(40,0), \quad C=(0,-720)$$

A síkidom tömegközéppontja :

(Jelen esetben meghatározása a korábban tárgyaltakkal teljesen megegyezik,ezért a részszámolásokra itt nem térünk ki ,csak az eredményt közöljük.)

$$S_3 = \left(\frac{220}{3}, -240 \right),$$

A síkidom területe :

$$\int_0^{40} 18 z dz = 18 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{40} = 14400,$$

Továbbá ahhoz ,hogy a virtuális tartónkra (melyet értelmezzünk u', v' koordináta-rendszerben) a terheléseket ráhelyezzük módosítanunk ,kell a nyomatékra területét , még

pedig a már korábban említett $\frac{1}{EI}$ tényezővel.

Így a következő értékpárokhoz jutunk :

	$\frac{T_{M_i}}{EI}$	u'_x
F_1	$\frac{9900}{EI}$	20
F_2	$\frac{20700}{EI}$	45,21
F_3	$\frac{14400}{EI}$	$\frac{220}{3}$

Észrevehető ,illetve korábbi észrevételeinket figyelembe véve , megállapíthatjuk ,hogy az úgynevezett virtuális rendszer esetében , a terhelések hatására fellépő „nyíró -erő „ ábra közvetlenül a tetszőleges P pontján értelmezett $\phi(z)$ adja eredményül. Továbbá ismét integrálva (a virtuális rendszerben mintegy előállítva a „nyomaték” ábrát) eljuthatunk a keresett f lehajlás meghatározásához.

A feladatot paraméteresen oldjuk meg . Itt nem kerül külön kiemelésre,de nyilvánvaló,hogy a függvényeket a megfelelő intervallumon belül kerülnek értelmezésre..

$$\begin{aligned} M_I(u') &= -\alpha \cdot u' \\ M_{II}(u') &= -\alpha u' + F_1(u' - l_1) \\ M_{III}(u') &= -\alpha u' + F_1(u' - l_1) + F_2(u' - l_2) \end{aligned}$$

Jelen esetben írjuk fel a harmadik szakaszra vonatkozó lehajlásfüggvény Taylor-sorát. A függvény természetesen az értelmezési tartomány teljes egészében előállítja a függvény egészét . Ennek bizonyosságát a teljesség igénye nélkül belátjuk.

$$f(u_0) = f(u_0) + \frac{f'(u_0)}{1!}(u - u_0)^1 + \frac{f''(u_0)}{2!}(u - u_0)^2,$$

összefüggést szem előtt tartva :

$$T_P(u') = -\alpha u' + F_1(u_0 - l_1) + F_2(u_0 - l_2) + F_2(u - l_2) + \frac{(-\alpha + F_1 + F_2)}{1!}(u - u_0)^1,$$

ahol u_0 része az értelmezési tartománynak.

Állításunk helyességéről helyettesítés segítségével bármikor meggyőződhetünk. Általános esetek vizsgálatakor elsődleges dolgunk a kocvergencia tartományok meghatározása ,

Gépi megoldások

Azon felmerülő matematikai problémák során, melyek esetén a megoldás analitikus formában a probléma bonyolultságának köszönhetően végesen sok idő alatt is csak nehezen vagy egyáltalán nem megoldható különféle gépi módszereket alkalmazunk. Esetenként előfordul, hogy a probléma analitikusan is megoldható, azonban az elvégzett adatok reprezentálása hosszadalmas, a látványos eredmény végett számítógépes környezetet részesítjük előnyben.

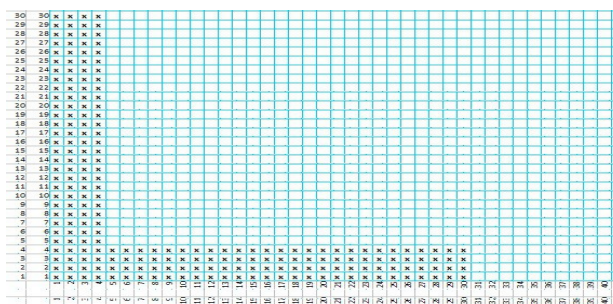
Keresztmetszeti jellemzők meghatározása

A keresztmetszeti és térfogati jellemzők című fejezet keretein belül már tárgyalásra került $T(x,y)$ tartományon belül értelmezett síkidom terület közelítésének elvi háttere. A következőkben bemutatásra kerül, az elvi háttérre építve miként járhatunk el gépi környezetben.

Első lépésként definiáljuk magát a $T(x,y)$ tartományt. Ezt követően a tartományra helyezzünk rá egy általunk választott léptékkel ellátott hálót. A háló felosztásának mértéke jelentősen befolyásolja közelítés jószágát. A közelítés finomságát növelendő szorzótényezők beállítása, melyeket a kitöltéskor eltérő karakter jelöljön, az egységnyi felület elem értékét vegyék $1, 0.75, 0.5, 0.25$ értékkel figyelembe. Az első lépés táblázatkezelő környezetében könnyen megvalósítható, vegyünk fel 60×60 -as cellatartományt, melyben minden egyes rácsközt feleltessünk meg 1 mm -nek. Így egy egységnyi dA felület elem nagysága 1 mm^2 . Nyilvánvaló, hogy más léptéket is használhatunk, konkrét esetünkben igyekeztünk a legegyszerűbb megvalósíthatóságot szem előtt tartani.

A létrehozott tartományba így felvehetővé válik tetszőleges síkgeometria alakzat.

Készítsük el egy L-szelvény ábráját. Szemléltetésképp tekintsük az alábbi ábrát.



A keresztmetszeti jellemzők rendre, a súlypont x és y koordinátái, $x-y$ tengelykeresztre vett ekvatoriális nyomaték, illetőleg a deviációs nyomaték meghatározása korábbi mechanikai tanulmányainkban megismertek alapján történik. A globális koordináta rendszerben számolt értékek a koordináta-rendszer origójára számíthatódnak, átszámítani a felület súlypontjába állított lokális rendszerbe a párhuzamos tengelyek tételének felhasználásával tudjuk megvalósítani. Példaként vegyünk egy 45×45 L-szelvényt, 5 -ös szár vastagsággal. A számított értékeket az alábbi táblázat tartalmazza.

A	425,0000	mm ²
x_s	13,0882	mm ⁴
y_s	13,0882	mm ⁴
I_x	80 702,9410	mm ⁴
I_y	80 702,9410	mm ⁴
C_{xy}	-47 647,0600	mm ⁴
I1	128 350,0000	mm ⁴
I2	33 055,8820	mm ⁴
α	45,0000	°

Méretezés

Méretezés feszültségcsúcsra

Feszültségcsúcsra történő méretezéskor mértékadó mennyiség az anyag R_{ef} folyáshatára. Amíg egy adott szerkezetben fellépő feszültségek sehol sem haladják meg a folyáshatár értékét, addig az anyag mindenhol lineárisan rugalmasnak tekinthető.

Eszerint az alábbi összefüggés írható fel

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{meg} ,$$

ahol $\sigma_{meg} = \frac{R_{ef}}{n}$, továbbá n jelölje a biztonsági tényezőt. Észrevehető, hogy a feszültségcsúcsra történő méretezéskor a szerkezet anyaga általában kihasználatlan, a feszültség megengedhető értéke csak egyes pontokban éri el az értékét, a többi szegmensben ezen érték alatt marad, emiatt törekedni kell az egyenszilárdságú alak létrehozására. A Térbeli feszültség állapot című fejezetben tárgyaltakra támaszkodva, illetve számításainkat a Navier-formula-val kiegészítve oldjuk meg a feladatot.

$$\sigma_M = \frac{M_z}{I_z} y$$

Gépi környezetben történő megoldáshoz első lépésben helyezzük el a síktartókat a $z-y$ síkon. A tartó kezdőpontját illesszük a koordináta-rendszer origójába, majd ennek megfelelően definiáljuk a tartó végpontjának koordinátáit. A feladat megoldása során síkbeli kéttámaszú tartó méretezési feladata került megoldásra. Ennek megfelelően definiálnunk kell a kétfő támasz helyzetét is.

Három különböző terhelés értékei vehetők fel, rendre koncentrált erő, egyenletesen megoszló erőrendszer illetve koncentrált nyomaték. Esetünkben tartó terhelési szakaszainak számát tekintve három részre bontható, ennek megfelelően tizenhat terhelés kombináció került beépítésre. Megjegyezendő, hogy a terhelések felvételekor azok koordinátáinak beállítása manuálisan végrehajtható. Értelemszerűen a megoszló terhelő rendszer esetén a terhelés adott intervallumon belül értelmezett. A feladatot kiegészítendő, a méretezés *Mohr*- illetve *HMH*-feszültség elmélet alapján is elvégzésre került. Továbbá a program részeként lehetőségünk nyílik egy tetszőleges keresztmetszetben történő nyomaték meghatározására is, mely funkció rendkívül jól alkalmazható megoszló erőrendszerek maximum értékének közelítéséhez. A tartó szelvényének adatait a második **Szelvényadatbázis** nevet viselő munkalapról hívhatjuk meg.

A program funkcióinak reprezentálása végett tekintsük az alábbi ábrákat.

KIINDULÓ ADATOK														
TARTÓ JELLEMZŐK		mm			fok			mm			N			
					IRÁNY (NEGATÍV)			KOORD.			VETÜLET			
					A1	B1	G1	A4	A5	A6	Z	Y	X	
	R1	0	0	0										
	R2	8000	0	0										
	T1	0	0	0										
	T2	8000	0	0										
KONCENTRÁLT ERŐ		IFI			IR.			x	y	z	Fz	Fy		
E 1	F1	0			FEL	90	0	0	0	0	30	0	0	
E 2	F2	0			FEL	90	0	0	0	0	0	0	0	
E 3	F3	0			FEL	90					0	0	0	
E 4	F4	0			FEL							0	0	
E 5	F5	0			FEL							0	0	
E 6	F6	0			FEL							0	0	
E 7	F7	0			FEL							0	0	
E 8	F8	0			FEL							0	0	
MEGOSZLÓ E.RSZ														
		INTENZITÁS (N/mm)	Z1 (mm)	Z2 (mm)	IR.	Fq (N)								
E 1	P1	1	4000	8000	LE	4000								
E 2	P2	0		0	FEL	0								
E 3	P3	0			FEL	0								
E 4	P4	0			FEL	0								

SZÁMÍTOTT ÉRTÉKEK									
REAKCIÓERŐK		(N)	IRÁNY	KOORD.					
TM1		1000	FEL	0					
TM2		3000	FEL	8000					
TERHELT SZAKASZ		HATÁR	TÍPUS		Ft (N)	Mh (Nmm)		ABS ÉRTÉK	
1		0	T		1000	-4000000		4000000	
		4000						0	
2		4000	TP		1000	0		0	
		8000							
3		6000	0						
		8000							
-		-	-		0	0			
		-							
					Mh MAX (Nmm)	4000000	SZAKASZ:	1	
TORZIÓS NYOMATÉK	X1	X2	T (Nmm)		MRED (Nmm)		d (mm)	S MEG (Mpa)	
1	0	4000	0		4000000		48.82744703	350	

A nyomaték felvett értékének közelítéséhez tekintsük az alábbi ábrát.

NYOMATEK TETESZÖLEGES KERESZTMETSZETBEN/ ALKALMAZÁS P(Mmax)KÖZELÍTŐ MEGHATÁROZÁSARA						
TERHELT SZAKASZ	HATÁR	TÍPUS	MH FELSŐ HATÁRON	KOORD	MH TETSZÖLEGES KOORD.	Értékel.
1	0	T	-4000000	20	-20000	
	4000					
2	4000	TP	0	5300	-4455000	
	8000					
3	6000	0	0	499.8888889	0	HATÁR ALATT
	8000					

Egyszabadságfokú lengőrendszer probléma

Valamely természettudományos ,műszaki ,közgazdasági folyamat leírására gyakorta alkalmazunk differenciálegyenleteket. Ezen matematikai modellek elemzésével ,a differenciálegyenletek elmélete foglalkozik , mely elemzés a feladatok,adott feltételek melletti megoldhatóságával foglalkozik. Mivel a megoldások konkrét előállítása zárt alakban csak ritkán lehetséges, numerikus módszerek segítségével közelítő alakban keressük azokat.

Tehát, numerikus megoldások során az értelmezési tartomány egyen pontjaiban az ismeretlen megoldás függvény értékét véges számú lépéssel közelítőleg határozzuk meg.

Egylépéses módszerek

Egylépéses módszerek alatt olyan eljárásokat értünk ,ahol valamennyi rögzített időpontbeli közelítést egy ,az azt megelőző időpontbeli közelítés felhasználásával határozzuk meg.

Tekintsük ez egylépéses módszerek közül az Euler-módszert ,melyet a későbbiekben lengéstani feladatok megoldására használunk fel.

Vegyük az alábbi differenciálegyenletet, $y(t_0)=y_0$ kezdeti feltétellel , t_0 -tól T -ig terjedő intervallumon.

$$\frac{dy(t)}{dt}=f(t,y(t)) \text{ ,majd integráljuk mindkét oldalt } t_0 \text{ -tól } T \text{ -ig.}$$

$$\int_{t_0}^T \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_{t_0}^T f(t,y(t)) dt$$

felhasználva a Newton-Leibniz formulát :

$$y(T) - y(t_0) = \int_{t_0}^T f(t,y(t)) dt$$

majd rendezés után:

$$y(T) = y_0 + \int_{t_0}^T f(t,y(t)) dt$$

Továbbá bontsuk fel a tartományon vett integrál értékét véges kicsiny Δt részekre, melyet $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenettel képezzünk.

Így az alábbi alakhoz jutunk :

$$y(T) = y_0 + \sum_{t=t_0}^T f(t, y(t)) \Delta t$$

Belátható, hogy az egy lépéses Euler-módszer ezen alakja nem más, mint a 0 kezdőpontú Taylor-sor. Azon esetekben ha az adott probléma nagyobb fokú pontosságot követel meg alkalmazhatjuk a javított Euler-módszert. Vagy a Taylor-polinommal analógiát mutató másodrendű Euler-módszert is, melynek általános alakja :

$$y(t, \Delta t) = y(t_0) + f(t, y(t)) \Delta t + \frac{df(t, y(t))}{dt} \cdot \frac{\Delta t^2}{2!},$$

Csupán említés szintjén kerül közlésre, hogy kivételesen nagy pontosságot igénylő esetekben (pl. hadtechnika, űrkutatás) az első illetve másodrendű módszerekkel nem lehet biztosítani reális idő alatt a pontosságot, ekkor a *Runge Kutta* típusú módszereket alkalmazzuk. Mivel jelen esetben, a gyakorlati példák szemléltetésekor látni fogjuk a kitűzött feladatok során az Euler-módszer kellően kielégíti az általunk megfogalmazott problémák megoldását, eltekintünk a másodrendűnél magasabb numerikus módszerek konstruálásának ismertetésétől.

Lengő rendszerek általános jellemzése

Lengő mozgásról azon esetben beszélünk, ha valamely mechanikai rendszer y elmozdulásának koordinátájának időbeli változását leíró $y = y(t)$ függvény korlátos, és a vizsgált pontban legalább kétszer differenciálható.

Fontos definiálnunk, hogy periodikus mozgáson értjük azon mozgást, mely esetén mozgását leíró függvényre fennáll az alábbi összefüggés: $y(t) = y(t+T)$, vagyis a test t és $t+T$ időpontokban rögzített kitérésének értéke megegyezik. A T jelenti a periódus vagy lengésidőt, reciproka pedig frekvencia értékét.

Számítások során nagy jelentőséggel bír a körfrekvencia értelmezése is.

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}$$

A lengőrendszerek csoportosítása történhet a rendszer szabadságfoka szerint, illetve a tömegre ható erők változásának jellege szerint.

A rendszer szabadságfokainak száma szerint megkülönböztetésre kerül :

1. *Egyszabadságfokú lengőrendszer* ,amennyiben a mozgás egyetlen függvénnyel leírható. Ide sorolható a fizikai vagy fonálinga, melyek időtől függő kitérése a kitérés szögével határozható meg.
2. *Többszabadságfokú lengőrendszer*,mely rendszernél a mozgást leíró szükséges egyenletek száma megegyezik a rendszerben szereplő tömegek számával.

A tömegre ható erők változásának jellege szerint :

1. *Lineáris lengőrendszer*, ha a rugóban ébredő erő egyenesen arányos kitéréseivel.
2. *Nemlineáris rendszer*, ha az erő és kitérés kapcsolatának függése nem az első hatványon szerepel.

Továbbiakban egyszabadságfokú lineáris lengőrendszerekkel foglalkozunk.

Harmonikus lengés

Adott m tömegű , kezdeti helyzetéből y értékkel kitérített rugó a tömeget $F=yc$,úgynevezett ellenerővel vissza akarja téríteni kiinduló értékére.

Newton második törvényének értelmében $\sum F=ma; -cy=m \ddot{y}$,

0-ra redukált alak: $m \ddot{y} + cy = 0$.Az egyenletet m értékkel osztva ,majd helyettesítést bevezetve a harmonikus lengőmozgás differenciálegyenletét kapjuk:

$$\ddot{y} + \alpha^2 y = 0$$

Az egyenletet a már korábban ismertetett Euler-módszer felhasználásával oldjuk meg.

Korábbi tanulmányaink során már megismertünk valamely y elmozdulás idő szerinti deriváltjainak fizikai értelmezését. Az adott elmozdulás idő szerinti differenciálisait képezve rendre megkapjuk a sebesség majd gyorsulás értékét. Analitikus

megfogalmazva $\frac{dy}{dt} = v(t), \frac{d^2y}{dt^2} = a(t)$. Másodrendű lévén ,a differenciálegyenlet megoldásához kettő kezdeti feltétel szükséges , melyek $t(0)=0, y(0)=0,01$ értéket vegyék fel . Az ismert összefüggéseket felhasználva az alábbi formulákhoz jutunk

$$y=vdt, v=adt, a=-\alpha^2 y$$

Az osztásköz feleljen meg a T lengésidő $\frac{1}{100}$ -ad részének , így $dt=\frac{T}{100}$.

A $2000 \frac{N}{m}$ rugómerevségű rugóhoz kapcsoljunk 25 kg tömeget. A sajtkörfrekvenciát számolhatjuk $\alpha = \sqrt{\frac{c}{m}}$ összefüggéssel, ahol c jelölje a rugómerevséget, m pedig a rugóra akasztott elem tömegét. A korábban definiált módon számolható a lengésidő illetve a frekvencia értéke. A kezdeti értékek felhasználásával az osztás kiinduló tartozó értékek:

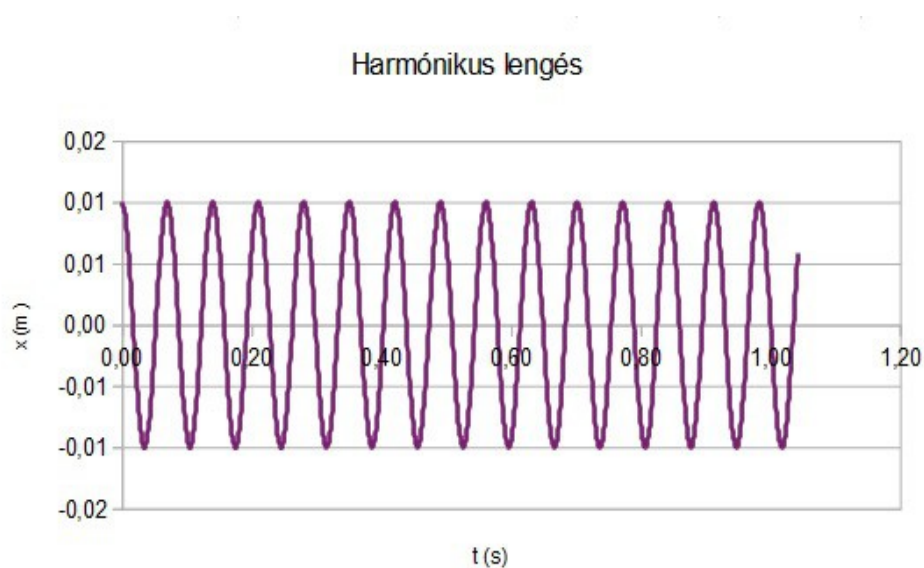
t (s)	y (m)	v (m/s)	a (m/s ²)
0	0,01	0	-0,8

A második osztópontoz $t_1 = t_0 + dt$, $y_1 = y_0 + v_1 dt$, $v_1 = v_0 + a_0 dt$, $a = -\alpha^2 y_1$ összefüggések felhasználásával kaphatjuk a meghatározni kívánt értékeket.

A képezési formulát az ötödik osztópontig folytatva :

t (s)	y (m)	v (m/s)	a (m/s ²)
0,0000	0,0100	0,0000	-0,8000
0,0070	0,0100	-0,0056	-0,7968
0,0140	0,0099	-0,0112	-0,7905
0,0211	0,0098	-0,0168	-0,7811
0,0281	0,0096	-0,0233	-0,7668
0,0351	0,0094	-0,0277	-0,7531

Az adatok megfelelő kiértékelhetősége végett határozzuk meg 1500 osztópontoz tartozó y értéket. A kiértékelést az alábbi ábra mutatja.



Következő lépésben vizsgáljuk a csillapított lengő mozgást.

Csillapított lengőmozgás

Csillapított lengőmozgás esetén a csillapító erő nagysága a tömeg sebességével arányos, ennek megfelelően sebességvektor irányú és azzal ellentéte értelmet mutat.

Tehát a csillapítóerő $F_r = -kv$ alakba írható, ahol k a csillapítási tényező, dimenziója Nsm^{-1} . Viszkózus csillapítás során a modell mozgásegyenlete $m\ddot{y} + k\dot{y} + cy = 0$ alakú. Észrevehető, hogy a mozgás egyenlet a harmonikus lengés mozgásegyenletéhez képest $k\dot{y}$ taggal tér el. Analitikus megoldás esetén $y = xe^{-D\tau}$ új változó bevezetésével kiküszöbölhető a csillapítási tag. Ekkor y deriváltját visszahelyettesítve a kiinduló egyenletbe $x'' + (1 - D^2)x = 0$ kapjuk. Észrevehető, hogy a második tag előjelét D értéke határozza meg. Ennek megfelelően, ha $D > 1$ csillapodó, $D < 1$ erősen csillapodó, $D = 1$ határesetről beszélünk.

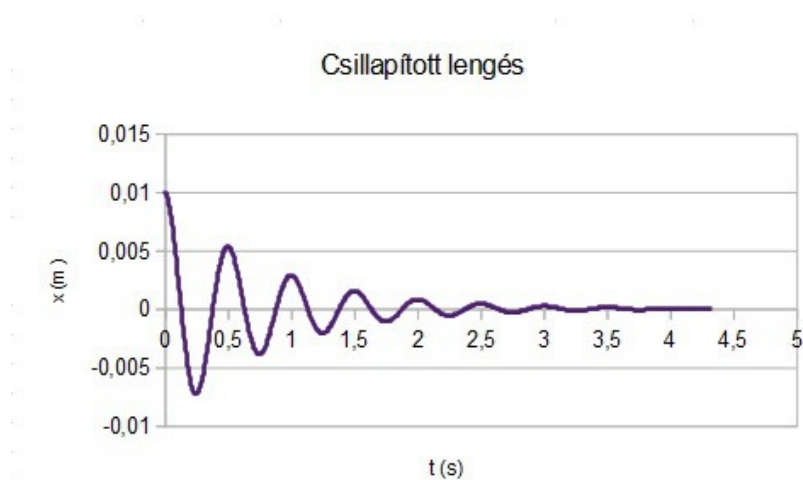
Numerikus megoldás során a már korábban ismertetett módhoz hasonlóan járunk el, osszuk el az egyenletet m tömeggel, majd alkalmazzuk a következő

jelöléseket: Legyen $\frac{D}{m} = \omega^2$; $\frac{k}{m} = 2\beta$, ahol $D = \frac{k}{2m\alpha}$. A kellő behelyettesítések után a kapott formula $\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega^2 y = 0$ alakot ölti. Kezdeti feltételként rögzítsük $t(0) = 0$, $y(0) = 0,01$ értékeket. Az m tömeg legyen 8 kg , a rugóállandó $2000 \frac{N}{m}$, a csillapítási tényező $20 \frac{kg}{s}$, továbbá az osztásköz legyen ismét a lengésidő $\frac{1}{100}$ -ad része.

Így az első öt osztóponthoz tartozó y értékeket tartalmazó táblázat:

t (s)	x (m)	v (m/s)	a (m/s ²)
0,0000	0,0100	0,0000	-1,5811
0,0039	0,0099	-0,0062	-1,5614
0,0079	0,0099	-0,0124	-1,5381
0,0119	0,0098	-0,0186	-1,5111
0,0158	0,0097	-0,0246	-1,4806

Értékeljük ki az adatokat ^{4,3} másodpercig diagramkészítő funkció segítségével.



Csillapított és gerjesztett rendszer lengése

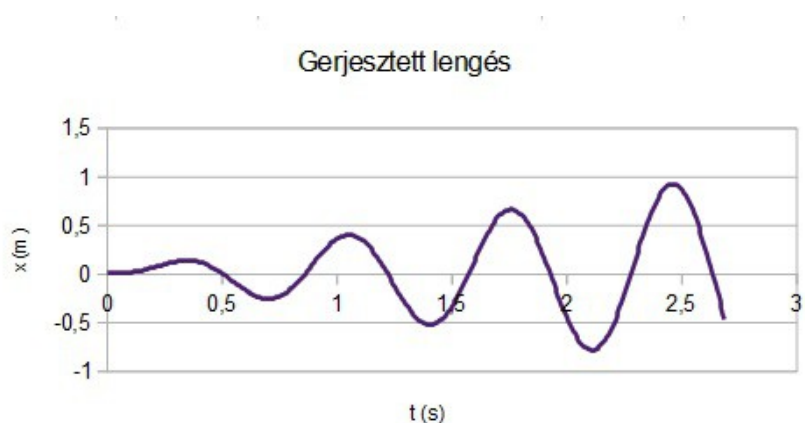
Első lépésben vizsgáljuk a gerjesztett rendszer lengését. A gerjesztett lengések egy külső hatás befolyására jönnek létre. Ezen hatás, más néven gerjesztés, akkor is felléphet, ha a rendszer a kezdeti pillanatokban nyugalomban van. A mozgásegyenlet ekkor $\ddot{y} + \alpha^2 y = f(t)$ alakban írható fel, ahol $f(t) = f_0 \sin \Omega(t)$ írható fel. Visszahelyettesítve a mozgásegyenletbe az általános alak $\ddot{y} + \alpha^2 y = f_0 \sin \Omega(t)$, a korábban már ismertettet helyettesítésekkel, illetve $f_0 = \frac{F_0}{m}$, ahol F_0 a kezdeti erőhatás értéke, a már ismertetet módon meghatározható a differenciálegyenlet közelítése.

Kezdeti feltételeket ezúttal válasszuk $t(0)=0$, $y(0)=0$ értékeknek. Az m tömeg legyen 25 kg , a rugómerevség $\frac{2000 \text{ N}}{\text{m}}$, továbbá F_0 értéke 20 N és $\Omega = 8,9 \text{ s}^{-1}$.

Az osztásköz T lengésidő $\frac{1}{100}$ -ad része.

t (s)	x (m)	v (m/s)	a (m/s ²)	f0
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0070	0,0000	0,0000	0,4165	1,2496
0,0140	0,0000	0,0029	0,8298	2,4943
0,0211	0,0001	0,0088	1,2365	3,7293
0,0281	0,0002	0,0174	1,6335	4,9497

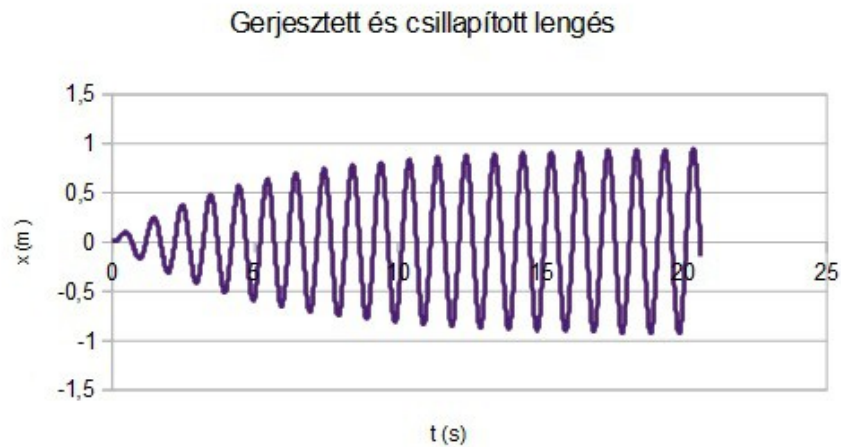
Az adatok kiértékelése:



Csillapított és gerjesztett lengés

Amennyiben a rendszerben a gerjesztésen kívül csillapítás is kifejti a hatását a mozgás egyenlet $m\ddot{y} + k\dot{y} + cy = f(t)$ alakú. A megoldás menete korábbi példák során bemutatásra került, ezen részben már nem térünk ki a levezetésre, csupán a megadott értékek kiértékelése kerül szemléltetésre. Fontos felhívni a figyelmet a rezonancia jelenségre, az eset akkor fordul elő, mikor a gerjesztés frekvenciája megegyezik a rendszer sajátfrekvenciájával. Az m tömegünk legyen 50 kg , rugómerevség $2000\frac{\text{N}}{\text{m}}$, csillapítási

tényező $20 \frac{kg}{s}$, ekkor a rendszer sajátfrekvenciája $6,3245 \frac{1}{s}$, így a gerjesztés frekvenciáját szintén válasszuk meg ezen értéknek. Az osztásköz T lengésidő $\frac{1}{100}$ -ad része, a kezdeti értékek $t(0)=0$, $y(0)=0$.



Összefoglaló

Mint láthattuk a gyakorlatban előforduló mechanikai problémák megoldásának vizsgálatakor, azon esetekben mikor a matematikai modell által megfogalmazott analitikus formula megoldása nehézségekbe ütközik, célravezető valamilyen gépi közelítést alkalmazni. A közelítő módszerek alkalmazásakor fontos mérlegelni, hogy maga a közelítés valóban a kellő pontossággal jár el, az algoritmus végrehajtása mennyi időbe telik, konkrétan a fizikai valóságnak milyen mértékben feleltethető meg. A feladatmegoldások alapjául szolgáló matematikai modellek rendkívüli mértékben kidolgozottak, az alkalmazások megírásakor mindvégig a felhasználóbarát felület, könnyen a könnyebb érthetőség végett a bonyolultsági fok redukálása, a probléma megoldás időszükségletének csökkentése, végül a látványos kiértékelhetőségre való törekvés volt szem előtt tartva.

Felhasznált irodalom

- [1] *Fekete Z.- Zalay M.: Többváltozós függvények analízise., Műszaki KK, Bp. 1958*
- [2] *Scharnitzky Viktor : Mátrix számítás., Műszaki KK, 2002*
- [3] *M. Csizmadia B.- Nándori E.: Szilárdságtan., NTK, Bp. 1997*
- [4] *M. Csizmadia B.- Nándori E.: Mozgástan., NTK, Bp. 1997*
- [5] *Kovács J.-Takács G.-Takács M.: Analízis., NTK, 1998*
- [6] *Scharnitzky Viktor: Vektorgeometria és lineáris algebra., Tankönyvkiadó, Bp. 1989*
- [7] *G.W Stewart : Matrix Algorithms Volume II : Eigensystems., 2001*
- [8] <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/EulersMethod.aspx>
- [9] *William H. Press Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, Second Edition*

Budapest, 2013.