



Húzott, rugalmas filmek ráncosodása: egy elméleti előrejelzés kísérleti igazolása

BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

2013. TDK konferencia

Szerző: Fehér Eszter

Konzulens: Dr. Sipos András Árpád

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Elméleti háttér	6
2.1. Alakváltozás	6
2.2. Feszültség	7
2.3. Energia	8
3. Lemezelméletek	10
3.1. Kármán-féle, nagy lehajlású, vékony lemezek elmélete	10
3.1.1. Alapfeltevések	10
3.1.2. Feszültség és alakváltozás	10
3.1.3. Energia	11
3.2. Nagy síkbeli nyúlások	11
4. Numerikus eljárás	13
4.1. Végeselem módszer	13
4.2. Peremfeltételek	13
4.3. Végeselemek	14
4.4. Egyenletrendszer	18
4.5. Az egyenletrendszer megoldása	19
5. Numerikus vizsgálatok	21
5.1. Bifurkáció	21
5.2. Hálósűrűség	22
6. Kísérletek	25
7. Eredmények	29
8. Összefoglalás, további lehetőségek	37

Hivatkozások	40
A. Függelék	41
A.1. Tárcsa elmélet	41
A.1.1. Alapfeltevések	41
A.1.2. Feszültség és alakváltozás	41
A.1.3. Energia	42
A.2. Kirchhoff elmélet	42
A.2.1. Alapfeltevések	42
A.2.2. Feszültség és alakváltozás	42
A.2.3. Energia	43
B. Függelék	44
B.1. Az ϵ , mint bifurkációs paraméter	44
B.2. Az β , mint bifurkációs paraméter	46

1. Bevezetés

Vékony filmek mechanikai viselkedésével számtalan, a közelmúltban megjelent publikáció foglalkozik (például [1, 2]). Dolgozatomban a két végén befogott, vékony, rugalmas filmek húzás hatására kialakuló ráncosodását vizsgáltam kísérleti és numerikus úton. A jelenség modellezésére eddig a Kármán Tódortól származó, nagy lehajlású, vékony lemezek elméletét [6, 5] használták. Az elmélet a nagy alakváltozás feltételezése miatt (geometriai értelemben) nemlineáris, azonban alkalmazhatóságának korlátot szab, hogy csak kis nyúlásokat enged meg.

A Kármán-féle elmélet szerint az elegendően vékony film kismértékű húzásánál kialakuló ráncos mintázat - függetlenül a további nyújtás mértéktől - mindig stabil. Egy friss publikáció [3] ezzel szemben egy, a film vastagságától és oldalarányaitól függő kritikus nyúlás felett a ráncok eltűnését és a síkbeli (triviális) megoldás újbóli stabilitását jósolja, a Kármán-féle elmélet nagy nyúlásokra kiterjesztett változata alapján. Dolgozatom témája ezen előrejelzés kísérleti igazolása, továbbá a kísérletek során meghatározott kritikus nyúlások összevetése a klasszikus, Kármán és a nagy nyúlásokra kiterjesztett elméleteket egyaránt tartalmazó, új, nemlineáris végeselemes algoritmus eredményeivel.

A kísérletek során egy vékony, rugalmas, két végén befogott szalagra adott megnyúlást kényszerítettem. A [3] alapján a várt viselkedés:

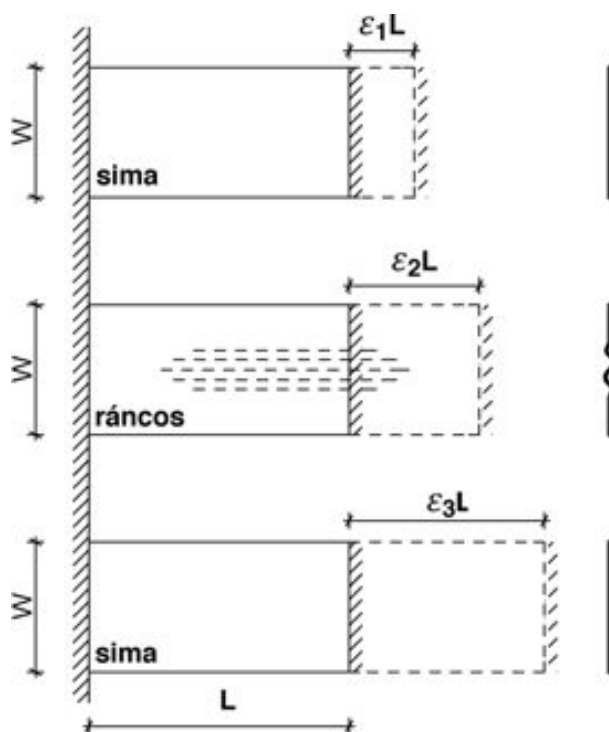
1. Kezdetben alakváltozásmentes felületen bizonyos mértékű megnyúlásnál ráncok jelennek meg, amelyek a nyúlás növelésével mélyülnek, majd csökkenek, míg újra kisimul a felület. (1. ábra) Ezzel szemben a Kármán-féle elmélet szerint a ráncok a megnyúlás növelésével továbbra is megmaradnak.

2. Adott vastagságú anyag esetén a ráncosodás csak bizonyos oldalarányú filmek esetén jelentkezik (2. ábra). A Kármán-féle elmélet szerint az intervallumon kívül eső oldalarányok esetén is ráncosodik a felület.

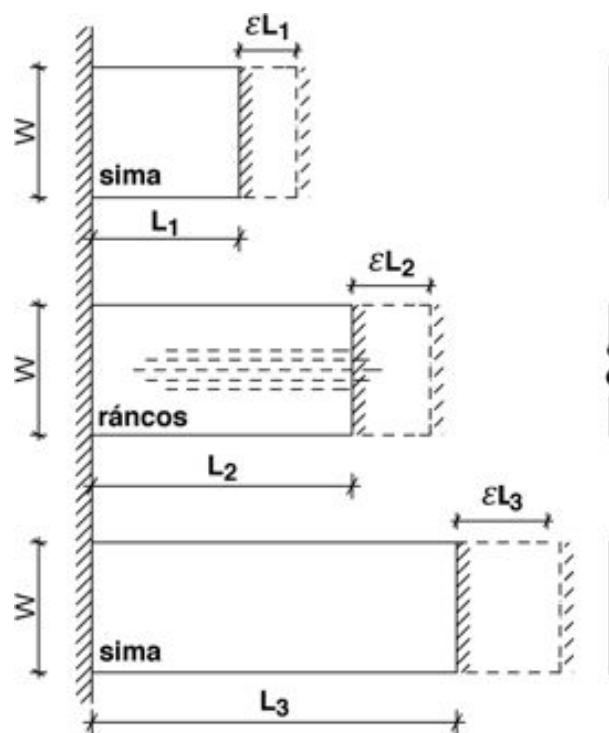
Az elméletek és a kísérletek összehasonlításához a [5, 3] publikációk alapján Matlab környezetben nemlineáris végeselem programot készítettem, amely az alkalmazott szalag anyagi

és geometriai jellemzői segítségével meghatározza az egyes elméletek által számított, a ráncosodás kezdetéhez ill. végéhez tartozó megnyúlást.

Dolgozatomban összefoglalom a kapcsolódó lemezelméleteket, részletesebben kitérve a Kármán-féle elméletre és a nagy nyúlásokra kiterjesztett változatára. Ezután bemutatom a numerikus algoritmust és a felhasznált módszereket, majd a kísérletek ismeretete után összevetem a mért és a számított eredményeket. Végül kitérek a további feladatokra és a problémához kapcsolódó érdekes kérdésekre, lehetőségekre.



1. ábra. A [3] publikáció előrejelzése: a megnyúlás és a ráncosodás kapcsolata



2. ábra. A [3] publikáció előrejelzése: az oldalarányok és a ráncosodás kapcsolata

2. Elméleti háttér

Az elméleti háttér leírása során az Einstein-féle szummázási konvenciót használom, ahol a latin indexek 1-től 3-ig összegeznek.

2.1. Alakváltozás

Vizsgáljuk két pontot összekötő szakasz deformációját az $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ merőleges bázisvektorok által meghatározott vektortérben elhelyezkedő $\Omega^* = \{\mathbf{X} := X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}\}$ tartományban. Legyen a pontok helyzete t_0 pillanatban $\mathbf{X}$ és $\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}$, a t időpontban pedig $\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ és $\mathbf{X} + \delta\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}, t)$. Ekkor a két pontot összekötő szakasz Taylor sorbafejtéssel:

$$\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \delta\mathbf{X} + \nabla\mathbf{u}\delta\mathbf{X} + R, \quad (1)$$

ahol R a sorbafejtés $\delta\mathbf{X}^2$ nagyságrendű hibája. Jelölje $L = |\delta\mathbf{X}|$ és $l = |\delta\mathbf{x}|$ a szakasz kezdeti ill. megváltozott hosszát. Ekkor:

$$l^2 - L^2 = \delta\mathbf{X}^T \mathbf{E} \delta\mathbf{X}, \quad (2)$$

ahol $\mathbf{E}$ a Green-féle alakváltozási tenzor:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u}^T \nabla\mathbf{u}). \quad (3)$$

Tekintsünk az $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ vektortérben elhelyezkedő L és W oldalhosszúságú $\Omega = \{\mathbf{X} := X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} : X \in (0, L), Y \in (0, W)\}$, téglalap alakú tartományt. Jelölje az (X, Y, Z) referencia koordináta-rendszerben a tartomány pontjaihoz rendelhető deformációt vékony filmek esetén ez az

$$\mathbf{u} = (u(X, Y), v(X, Y), w(X, Y)) \quad (4)$$

vektor, azaz a film h vastagságának megváltozásával nem foglalkozunk. A lemezt az Ω tartományban elhelyezkedő középfelületével jellemezzük, a kiinduló állapotban a középfelület sík, a h vastagság állandó és a deformáció folyamán nem változik. Mivel a vastagság kicsi, ezért csak a középfelület alakváltozásait vizsgáljuk. Ekkor az alakváltozási tenzor az általános, 3

dimenzióban értelmezett képlete (3) egy 2x2-es mátrixra egyszerűsíthető:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2u_x + w_x^2 + u_x^2 + v_x^2 & u_y + v_x + u_y u_x + v_x v_y + w_x w_y \\ u_y + v_x + u_y u_x + v_x v_y + w_x w_y & 2v_y + v_y^2 + u_y^2 + w_y^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Kis nyúlásos elméletekben az alakváltozási tenzorban csak a lineáris tagokat tartjuk meg:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2u_x & u_y + v_x \\ 2v_y + v_x & 2u_y \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.2. Feszültség

Egy anyag V térfogatára alkalmazzuk Newton II. törvényét:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \frac{\partial u_i}{\partial t} \rho d\mathbf{x} = \iiint_{V(t)} g_i \rho d\mathbf{x} + \iint_{\partial V(t)} \sigma_{ij} n_j da \quad (7)$$

Az egyenlet azt fejezi ki, hogy a $V(t)$ térfogatú anyagrész gyorsulása megegyezik az anyagrészre ható testerők és az anyagrész határán ható felületi erők összegével. Átalakításokkal és kihasználva, hogy $V(t)$ tetszőleges, a Cauchy-féle nyomaték egyenletet [5] kapjuk:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (8)$$

ahol

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (9)$$

$\mathbf{u}$ az alakváltozási mező és a $\boldsymbol{\sigma}$ feszültség tenzor. Ez az egyenletrendszer minden folytonos közegre érvényes. A $\mathbf{u}$ és a $\boldsymbol{\sigma}$ közötti kapcsolatot leíró anyagtörvény függvényében beszélhetünk szilárd testről, folyadékról vagy egyéb kontinuumról. Megmutatható ([5]), hogy homogén, izotróp, lineárisan rugalmas anyagokra, kis nyúlásokat feltételezve (a (6) egyenletben adott nyúlási tenzor esetén), a Hooke törvény általánosítása a következő összefüggést adja:

$$\sigma_{ij} = \lambda(e_{kk})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (10)$$

ahol λ és μ az ún. Lamé konstansok (anyagi paraméterek), δ_{ij} pedig az ún. Kronecker delta és a szummázási konvenció nyomán $e_{kk} = e_{11} + e_{22}$. A Lamé konstansok kifejezhetőek a ν Poisson tényező és az E Young modulus segítségével.

2.3. Energia

A feladatban nyugalomban lévő, rugalmas anyagú, deformálható testeket vizsgálunk, ezért az energiamegmaradás elve alapján:

$$\frac{d}{dt}P_{int}(t) = \frac{d}{dt}P_{ext}(t), \quad (11)$$

ahol P_{int} a belső energia, P_{ext} pedig a külső hatások munkája. Kvázistatikus mechanikai feladatoknál (7) alapján az egyensúlyt kifejező egyenletből az energiamegmaradás elve a következő alakban írható fel:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \iiint_V W d\mathbf{x} \right\} = \iiint_V \rho g_i \frac{\partial u_i}{\partial t} d\mathbf{x} + \iint_{\partial V} \frac{\partial u_i}{\partial t} \sigma_{ij} n_{ij} d\mathbf{a}, \quad (12)$$

ahol a bal oldalon a mozgási energia és a rugalmas energia, a jobb oldalon pedig a testerők és a felületi (külső) erők által végzett munka időbeli megváltozása (teljesítmény) áll. W az ún. rugalmas energiasűrűség, ρ a testsűrűség, g a nehézségi gyorsulás, σ a felületi feszültség, n a felületi normális. A rugalmas energiasűrűség felírható a szerkezetben létrejött nyúlások és a feszültségek segítségével, úgy, hogy

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (13)$$

legyen. A (10) egyenlet felhasználásával, (13)-ból integrálással kapjuk:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} \lambda (e_{kk})^2 + \mu (e_{ij} e_{ij}) \quad (14)$$

A végeelem módszer alkalmazásához szükséges teljes potenciális energia ¹:

$$I = \iiint_V W d\mathbf{x} - \iiint_V \rho g_i \mathbf{u} d\mathbf{x} - \iint_{\partial V} \mathbf{u} \sigma_{ij} n_{ij} d\mathbf{a} \quad (16)$$

¹A háromdimenziós mechanikai feladatok általános mechanikai funkcionálját először Hu és Washizu fogalmazta meg. Az általuk felírt funkcionálból származtatható a teljes potenciális energia funkcionálja. A kompatibilitási és peremfeltételi egyenleteket kielégítő folytonos mezők halmazán a

$$I = \int_V W dV - \int_{A_S} \mathbf{u}^T \mathbf{p}_S dS - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{p}_V dV \quad (15)$$

teljes potenciális energiának minimuma van. A funkcionálban a W a rugalmas energiasűrűséget, $\mathbf{u}$ az elmozdulásmezőt, $\mathbf{p}_S$ és $\mathbf{p}_V$ a felületi és térfogati erőket jelöli.

A feladatban nem foglalkozunk testerőkkel, a test szélén kinematikai terheket működtetünk; továbbá kvázistatikusan modellezzük a problémát, ezért megmutatható, hogy az

$$I = \iiint_V W d\mathbf{x} \quad (17)$$

funkcionált minimalizáló $\mathbf{u}$ elégíti ki a (8) egyenletet. Az eddigiek alapján levezethető (részletebben: A függelék) a szerkezet teljes potenciális energiája:

$$I = \int_A \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (\nu \text{Tr}(\mathbf{E})^2 + (1-\nu) \text{Tr}(\mathbf{E}^2)) dA. \quad (18)$$

3. Lemezelméletek

Az $X = 0$ él mentén a lemez befogott, az $X = L$ él mentén a filmre εL nagyságú nyúlást kényszerítünk (1.ábra), pontjainak deformációját a (4) vektor írja le. Ezt figyelembe véve (3) alapján az alakváltozási tenzor a (5) alakban írható fel.

Az tárcsa és a hajlított lemez egyenletei az A függelékben találhatóak meg.

3.1. Kármán-féle, nagy lehajlású, vékony lemezek elmélete

3.1.1. Alapfeltevések

Az anyagtörvény lineáris, függőleges alakváltozások nagyok lehetnek, a nyúlások kicsik. Ekkor a nagy alakváltozások miatt még kis nyúlások feltételezése mellett is érdemben befolyásolja a függőleges alakváltozás a membrán erőjátékhoz köthető nyúlást. Az elmélet a hajlítással kapcsolatban a kis nyúlásos, lineáris lemezelméleten alapul, azaz a középsíkra merőleges egyenesek a deformáció után is merőlegesek lesznek a deformált középsíkra. Az alakváltozási tenzor megválasztásánál figyelembe kell venni, hogy a terhelés hatására létrejövő függőleges elmozdulás (w) egy nagyságrenddel nagyobb, mint a síkbeli nyúlások (u, v). Az elmélet alapötlete [6], hogy a tárcsahatásból (A.1) és a hajlításból (A.2) származó alakváltozási tenzorokat összegezzük. Megmutatható [6], hogy feltevéseink nyomán a membrán erőjátékhoz és a hajlításhoz rendelt rugalmas energiákat is összegezhethetjük. Az elmélet a nyírási alakváltozásokat a lemez kis vastagsága miatt elhanyagolja.

3.1.2. Feszültség és alakváltozás

Feltevéseink nyomán a Cauchy egyenlethől (8) következő összefüggések érvényben maradnak mind a síkbeli feszültségállapotnál, mind pedig a hajlításnál.

A hajlításból és a húzásból keletkező feszültségeket külön kell kezelni. A tárcsaelmélet alapján levezetett feszültség-alakváltozás képlet (60) kifejezi, hogy a keresztmetszetek a deformáció után is síkok maradnak, a Kirchhoff elméletben levezetett képletek (66) pedig biztosítják, hogy

a középsíkra merőleges egyenesek a deformáció után is merőlegesek legyenek a deformált középsíkra. A hajlítás hatására létrejövő normál irányú alakváltozások kicsik a terhelés hatására létrejövő síkbeli nyúlásokhoz képest. A fentiek alapján az alakváltozási tenzor:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_b, \quad (19)$$

ahol A.1 alapján:

$$\mathbf{E}_b = Z \begin{bmatrix} -w_{xx} & -w_{xy} \\ -w_{xy} & -w_{yy} \end{bmatrix} \quad (20)$$

(5)-ből elhanyagolva az u, v -ben nemlineáris tagokat (a w -re vonatkozó feltevésünk miatt w^2 körülbelül azonos nagyságrendű u -val vagy v -vel, ezért nem elhanyagolható!), A.2 alapján:

$$\mathbf{E}_m^k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2u_x + w_x^2 & u_y + v_x + w_x w_y \\ v_x + u_y + w_x w_y & 2v_y + w_y^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

ahol az $\mathbf{E}_m^k$ jelölés arra utal, hogy ez a membrán erőjátékhoz tartozó tenzor a Kármán-féle elméletben.

3.1.3. Energia

A rugalmas energia felírásánál a húzásból és a hajlításból származó energiát kell összegezni.

$$I = \int_V W_m d\mathbf{x} + \int_V W_b d\mathbf{x} \quad (22)$$

Átalakításokkal (18):

$$I = \int_A \left[\frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (\nu Tr(\mathbf{E}_m)^2 + (1-\nu) Tr(\mathbf{E}_m^2)) \right] + \left[\frac{h^3 E}{24(1-\nu^2)} (\nu Tr(\mathbf{E}_b)^2 + (1-\nu) Tr(\mathbf{E}_b^2)) \right] dA \quad (23)$$

Vezessük be a $\kappa = 1/h^2$ jelölést. A szerkezet rugalmas energiája átskálázás után (23) alapján:

$$I = \int_A [12\kappa (\nu Tr(\mathbf{E}_m)^2 + (1-\nu) Tr(\mathbf{E}_m^2))] + [(\nu Tr(\mathbf{E}_b)^2 + (1-\nu) Tr(\mathbf{E}_b^2))] dA \quad (24)$$

3.2. Nagy síkbeli nyúlások

A Kármán-féle elmélet [3] publikáció nagy nyúlásokra kiterjesztett változatában szemben a Kármán-féle elmélettel, már nem hanyagolható el a membrán erőjáték. Azaz az elmélet nem

tesz feltevéseket u, v és w viszonyára, így az $\mathbf{E}_m$ alakváltozási tenzorból nem hanyagolja el az u_x, u_y, v_x, v_y -ban nemlineáris tagokat. A membrán erőjátékhoz tartozó alakváltozási tenzor:

$$\mathbf{E}_m^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2u_x + w_x^2 + u_x^2 + v_x^2 & u_y + v_x + w_x w_y + u_x u_y + v_x v_y \\ u_y + v_x + w_x w_y + u_x u_y + v_x v_y & 2v_y + w_y^2 + v_y^2 + u_y^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

ahol az $\mathbf{E}_m^n$ jelölés arra utal, hogy ez a nagy nyúlásos elméletben a membrán erőjátékhoz tartozó alakváltozási tenzor. Feltételezzük, hogy a hajlítás továbbra is leírható a linearizált elmélettel, így (20) érvényben marad. Más megközelítésben feltételezzük, hogy a lemezben egy függőleges metszeten a lemez széle által meghatározott görbe meredeksége kicsi, azaz a görbület közelíthető a görbe második deriváltjával. A teljes potenciális energiát továbbra is a (24) kifejezés segítségével számoljuk. Ámbár formálisan a potenciális energia levezetése során a kis nyúlásos tenzort használtuk fel (5), a [3] publikáció szerint ezzel nem követünk el hibát, mert a (24)-ben szereplő funkcionál minimuma megegyezik a véges nyúlásokkal levezethető energia minimumával.

4. Numerikus eljárás

Végeselemes modellt készítettem Matlab környezetben a Kármán-féle és a nagy nyúlásos elmélet alapján. A fentiek szerint a két elmélet csak az alakváltozási tenzor alakjában különbözik, ami az alkalmazott módszer során két eltérő egyenletrendszerre vezet.

4.1. Végeselemmódszer

A végelelemmódszer adott (véges) Ω tartomány fölött értelmezett differenciálegyenletek (közeliítő) megoldására szóló numerikus eljárás. A módszer a megoldást variációs megközelítésben, egy funkcionált stacionáriussá tevő függvény alakjában szolgáltatja. Ahol a megoldásfüggvény kielégíti az egyensúlyi egyenletet, ott a funkcionálnak szélsőértéke van. Mechanikai feladatok esetén vagy ismert a funkcionál, amiből az egyensúlyi egyenlet származik, vagy az egyensúlyi egyenlethez tudunk származtatni egy ún. gyenge alakot. Mivel ismert a funkcionál (24), ezért a megoldás során a Ritz-módszert érdemes alkalmazni.

A végtelen dimenziós X függvénytér helyett a funkcionál minimumát X egy véges (N) dimenziós V_N alterében keressük. A V_N alteret N darab, lineárisan független függvény segítségével definiáljuk: $V_N : \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$. Ekkor a keresett (diszkrét) megoldásfüggvény $y_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$ ahol $a_i \in \mathbb{R}$. Így a diszkrét feladat célja az $I(y)$ funkcionál minimalizálása, azaz a minimumhoz tartozó skalár a_i tényezők kiszámítása. Az I_y funkcionál minimumát az a_i tényezők szerinti deriválásból kapott egyenletrendszerből határozzuk meg.

4.2. Peremfeltételek

A feladatban a kezdetben alakváltozásmentes filmre adott nyúlást kényszerítünk. A homogén peremfeltételek biztosítására érdemes a következő változcserét alkalmazni:

$$\mathbf{u}'(X, Y) \equiv \mathbf{u}(X, Y) - \varepsilon X \mathbf{i} \quad (26)$$

A továbbiakban a leképezésre utaló $()'$ jelet elhagyjuk! A leképezés csak az $\mathbf{E}$ alakváltozási tenzor $\mathbf{E}_m$ tagját befolyásolja. A Kármán-féle lemezelmélet esetén az alakváltozási tenzor

származtatása ((1)-(3) egyenletek) nyomán:

$$\mathbf{E}_m^k = \begin{bmatrix} 0.5\varepsilon^2 + \varepsilon + (\varepsilon + 1)u_x + 0.5w_x^2 & 0.5((\varepsilon + 1)u_y + v_x + w_x w_y) \\ 0.5((\varepsilon + 1)u_y + v_x + w_x w_y) & v_y + 0.5w_y^2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

A nagy nyúlásos lemezelmélet esetén (25) alapján:

$$\mathbf{E}_m^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (u_x + \varepsilon + 1)^2 + v_x^2 + w_x^2 - 1 & (u_x + \varepsilon + 1)u_y + v_x(v_y + 1) + w_x w_y \\ (u_x + \varepsilon + 1)u_y + v_x(v_y + 1) + w_x w_y & v_y^2 + (v_y + 1)^2 + w_y^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

A változócsere után a peremfeltételek:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, Y) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(L, Y) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Azaz a két befogott él helyzetét írjuk elő az átskálázás figyelembevételével. A végeselemmódszer egyik előnye, hogy a másik két, szabad él mentén előálló ún. természetes peremfeltételekkel nem kell foglalkozni ebben az esetben.

4.3. Végeselemek

A (24) rugalmas energia nem kvadratikus (és nem is konvex), vagy más szavakkal az energia első variációjával nyert (gyenge) egyensúlyi egyenlet egy nemlineáris differenciálegyenlet. Az energia függvényében a síkbeli elmozdulások első, a síkra merőleges elmozdulás második deriváltja szerepel. Bizonyított ([7, 8]), hogy ha az energia funkcionál egy ismeretlen függvény k -adik deriváltjait tartalmazza, akkor a végeselemes megoldásban $C^{(k-1)}$ folytonos végeselemek szükségesek. Mivel (24) funkcionál u és v első, illetve w második deriváltjait tartalmazza, a függvény approximálására egy csomópontonként 6 szabadságfokú részben C^0 , részben C^1 folytonos téglalap elemet alkalmazunk. Az i . végeselem sarokpontjainak elmozdulását a következő vektorban foglaljuk össze:

$$\mathbf{v}^i = [u_1, v_1, w_1, w_{1,x}, w_{1,y}, w_{1,xy}, u_2, v_2, w_2, \dots, w_{2,xy}, u_3, \dots, w_{3,xy}, u_4, \dots, w_{4,xy}]^T. \quad (30)$$

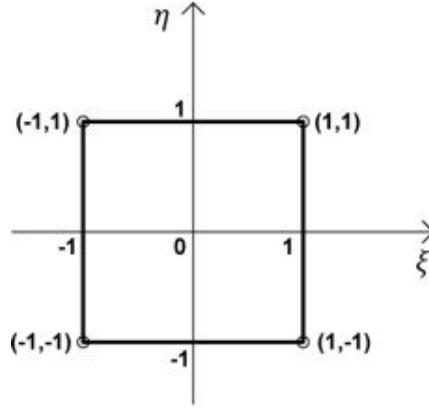
Az elmozdulásfüggvények az i . végeselem felett:

$$u^i = \mathbf{N}_1^i \mathbf{v}^i = (\mathbf{v}^i)^T (\mathbf{N}_1^i)^T \quad (31)$$

$$v^i = \mathbf{N}_2^i \mathbf{v}^i = (\mathbf{v}^i)^T (\mathbf{N}_2^i)^T \quad (32)$$

$$w^i = \mathbf{N}_3^i \mathbf{v}^i = (\mathbf{v}^i)^T (\mathbf{N}_3^i)^T \quad (33)$$

Ahol $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$ a bázisfüggvényeket tartalmazó vektorok. A bázisfüggvényeket az ξ, η lokális



3. ábra. Az alkalmazott elem a ξ, η parametrikus koordináta-rendszerben

koordináta-rendszerben írjuk fel és az $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$ vektorokban foglaljuk össze:

$$\mathbf{N}_1 = [\varphi_1, 0, 0, 0, 0, 0, \varphi_2, 0, 0, 0, 0, 0, \varphi_3, 0, 0, 0, 0, 0, \varphi_4, 0, 0, 0, 0, 0], \quad (34)$$

$$\mathbf{N}_2 = [0, \varphi_1, 0, 0, 0, 0, 0, \varphi_2, 0, 0, 0, 0, 0, \varphi_3, 0, 0, 0, 0, 0, \varphi_4, 0, 0, 0, 0] \quad (35)$$

ahol az i . elem j . sarokpontjához tartozó C^0 folytonos bázisfüggvény:

$$\varphi_j = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_j)(1 + \eta\eta_j). \quad (36)$$

Az i . elem j . sarokpontjához tartozó kétváltozós, C^1 folytonos bázisfüggvényeket egyváltozós C^1 folytonos Hermite-polinomok szorzataként állítjuk elő:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_3 = [& 0, 0, \vartheta_1(\xi)\vartheta_3(\eta), \vartheta_2(\xi)\vartheta_3(\eta), \vartheta_1(\xi)\vartheta_4(\eta), \vartheta_2(\xi)\vartheta_4(\eta), \\ & 0, 0, \vartheta_3(\xi)\vartheta_3(\eta), \vartheta_4(\xi)\vartheta_3(\eta), \vartheta_3(\xi)\vartheta_4(\eta), \vartheta_4(\xi)\vartheta_4(\eta), \\ & 0, 0, \vartheta_3(\xi)\vartheta_1(\eta), \vartheta_4(\xi)\vartheta_1(\eta), \vartheta_3(\xi)\vartheta_2(\eta), \vartheta_4(\xi)\vartheta_2(\eta), \\ & 0, 0, \vartheta_1(\xi)\vartheta_1(\eta), \vartheta_2(\xi)\vartheta_1(\eta), \vartheta_1(\xi)\vartheta_2(\eta), \vartheta_2(\xi)\vartheta_2(\eta)] \end{aligned} \quad (37)$$

ahol az i ., l_a, l_b oldalhosszúságú elemre:

$$\begin{aligned}\vartheta_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3, \\ \vartheta_2(\xi) &= \frac{l_a}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3), \\ \vartheta_3(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3, \\ \vartheta_4(\xi) &= \frac{l_a}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3).\end{aligned}\tag{38}$$

és

$$\begin{aligned}\vartheta_1(\eta) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3, \\ \vartheta_2(\eta) &= \frac{l_b}{8}(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3), \\ \vartheta_3(\eta) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3, \\ \vartheta_4(\eta) &= \frac{l_b}{8}(-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3).\end{aligned}\tag{39}$$

Az alkalmazott ξ, η parametrikus koordináta-rendszer a globális koordináta-rendszer egy lineáris leképezése. A két rendszer közötti kapcsolatot lineáris függvények segítségével írjuk le, jelölje: $n_i(\xi, \eta)$ ($i = 1, 2, \dots, k$), ahol k az elem kitüntetett pontjainak a száma, jelen esetben $n = 4$. Ezen függvények olyan polinomok, amelyek az indexüknek megfelelő csomópontban 1, a többi csomópontban 0 értéket vesznek fel. A leképezéshez kapcsolható Jacobi mátrix:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}_{[xy]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial n_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial n_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{[xy]} \tag{40}$$

A Jacobi-mátrix inverze az inverz leképezéshez tartozó (globális $\rightarrow$ lokális) mátrix:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}, \tag{41}$$

ami a lineáris leképezés és a koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamos oldalú, téglalap elemek miatt most a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{l_a} & 0 \\ 0 & \frac{2}{l_b} \end{bmatrix} \quad (42)$$

A paraméteres koordinátarendszerben megadott bázisfüggvények globális változók szerinti deriváltjainak számítása a láncszabály alkalmazásával, a Jacobi-mátrix segítségével történik, úgy hogy az i . bázisfüggvény esetén:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

A globális koordináták szerinti integrálásra Jacobi-mátrix determinánsa segítségével térhetünk át:

$$dA = dxdy = |\mathbf{J}|d\xi d\eta \quad (44)$$

A továbbiakban alkalmazott egyszerűsített jelölés során a paraméteres és a globális koordináta-rendszer közötti kapcsolatot nem részletezem, a bázisfüggvények deriváltjait és az integráltakat a globális koordinátarendszerben írom fel.

4.4. Egyenletrendszer

A keresett elmozdulásfüggvény deriváltjait a bázisfüggvények deriváltjaival számoljuk:

$$\begin{aligned}
 u_x^i &= \mathbf{N}_{1,x}^i \mathbf{v}^i = A, \\
 u_y^i &= \mathbf{N}_{1,y}^i \mathbf{v}^i = B, \\
 v_x^i &= \mathbf{N}_{2,x}^i \mathbf{v}^i = C, \\
 v_y^i &= \mathbf{N}_{2,y}^i \mathbf{v}^i = D, \\
 w_x^i &= \mathbf{N}_{3,x}^i \mathbf{v}^i = E, \\
 w_y^i &= \mathbf{N}_{3,y}^i \mathbf{v}^i = F, \\
 w_{xx}^i &= \mathbf{N}_{3,xx}^i \mathbf{v}^i = G, \\
 w_{yy}^i &= \mathbf{N}_{3,yy}^i \mathbf{v}^i = H, \\
 w_{xy}^i &= \mathbf{N}_{3,xy}^i \mathbf{v}^i = I.
 \end{aligned} \tag{45}$$

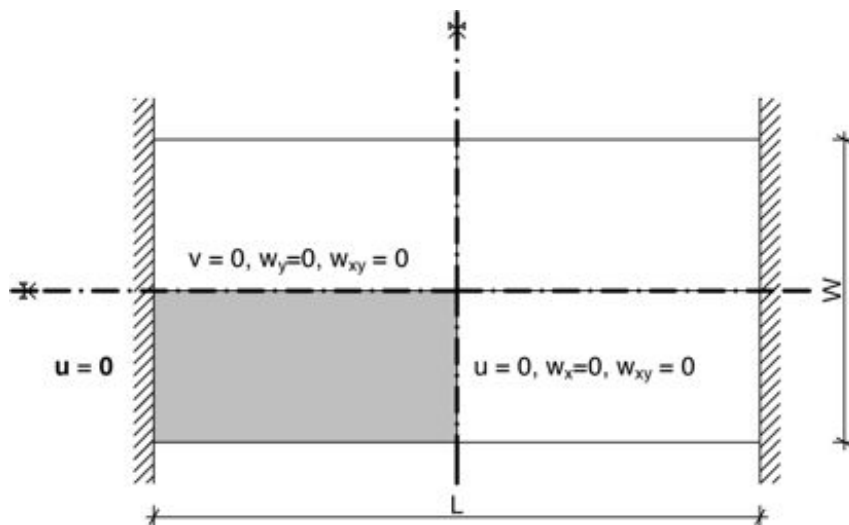
Az Ritz-módszer alapján a diszkretizált $I(\mathbf{u})$ potenciál (24) minimumhelyét az elmozduláskomponensek szerinti deriválásból kapott egyenletrendszer segítségével határozzuk meg:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \frac{\partial I(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{v}} = \sum_{i=1}^M \int_F \left\{ \frac{\partial I(\mathbf{u})}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial I(\mathbf{u})}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{v}} + \dots + \frac{\partial I(\mathbf{u})}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{v}} \right\} dA, \tag{46}$$

ahol M a végelemek száma, F pedig a végelem feletti integrálásra vonatkozik. Az integrálást elvégezhetjük numerikusan a Gauss-Legendre formulák segítségével [4]. Az $I(\mathbf{u})$ potenciál minimumának szükséges feltétele, hogy

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0. \tag{47}$$

A (46) egy elemenként 24 darab 24 ismeretlenes egyenletrendszert eredményez. A kompiláció során az $M = nm$ elemből álló, $(n+1)(m+1)$ csomópontú rendszerre $d = 6(n+1)(m+1)$ db, d ismeretlenes globális egyenletrendszert állítunk elő, ahol n és m az elemek száma x és y irányokban. Az előzőek alapján minden elemhez meghatározható a csomópontjaihoz tartozó egyenletrendszer. A szomszédos elemek közös csomópontjaira vonatkozó egyenleteket kell összegezni a kompiláció során.



4. ábra. Peremfeltételek a felület negyedére, szimmetrikus megoldások esetén.

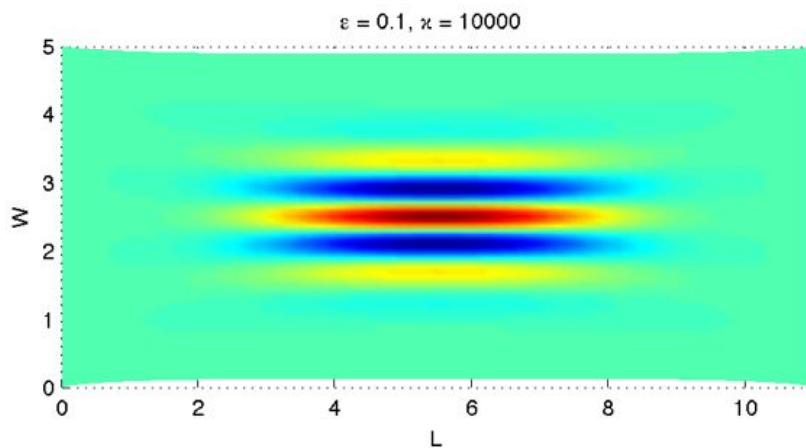
A számítási idő csökkenthető, ha nem a teljes tartományon írjuk fel és oldjuk meg az egyenletrendszert, hanem csak egy részén. Kihasználható a rendszer $X = L/2$ egyenesre vett tükrözési szimmetriája, továbbá előírható a megoldás $Y = W/2$ egyenesre vett szimmetriája vagy antimetriája. Így elég csak a felület negyedét vizsgálni, majd a kapott megoldást a megfelelő egyenesekre tükrözni (4. ábra). Így a peremfeltételek az alábbiak szerint alakulnak: $\mathbf{u}(0, Y) = \mathbf{0}$ továbbra is, $X = L/2$ él mentén $u = 0, w_x = 0, w_{xy} = 0$, $Y = W/2$ él mentén $v = 0, w_y = 0, w_{xy} = 0$ szimmetria esetén és $v = 0, w = 0, w_x = 0$ antimetria esetén.

4.5. Az egyenletrendszer megoldása

A problémához kapcsolódó funkcionál (24) nem kvadratikus, így a kapott egyenletrendszer egy nemlineáris algebrai egyenletrendszer. A nemlineáris esetben nem feltétlenül teljesül a megoldások unicitása (azaz a potenciális energiát megadó funkcionálnak több minimuma is lehet). Ezért vagy útkövetéssel (egy ismert, triviális megoldásból indulva oldjuk meg az egyenletrendszert egy, vagy több, ún. bifurkációs paraméter változtatásával), vagy valamely nemlineáris egyenletmegoldó módszert választunk [10].

Célunk hogy megmutassuk, hogy megfelelően nagy nyúlásoknál ill. oldalárányoknál a

megoldás stabil, így elég a triviális megoldás vizsgálata. Az általam választott módszer a Newton-Raphson módszer. A módszer a megoldásfüggvényt egy kezdeti értékből kiindulva iterációval határozza meg. Ha a gyökökhöz elég közelről indítjuk az iterációt, akkor nagyon gyorsan konvergál. Esetünkben a funkcionálnak több minimuma is lehet, ezért olyan esetekben is van konvergencia, amikor a gyököktől távolról indítjuk az iterációt. A ráncok alakjának pontos meghatározásához azonban útkövető eljárásra van szükség.



5. ábra. A Newton-Raphson módszerrel talált szimmetrikus, ráncos megoldás.

5. Numerikus vizsgálatok

5.1. Bifurkáció

Jelölje az oldalarányt:

$$\beta = \frac{L}{2W}. \quad (48)$$

A (24)-ből levezethető egy általánosabb

$$I(\kappa, \varepsilon, \beta) \quad (49)$$

alakú funkcionál, amihez tartozik egy $F(\mathbf{u}, \kappa, \varepsilon, \beta) = 0$ nemlineáris egyenletrendszer (ami adott oldalraány esetén az (47)-ra vezet). Ha egy egyenlet paraméterei valamelyikének kis megváltoztatása esetén a megoldások jellege megváltozik, akkor ott bifurkációs pontja van az egyenletnek. A vizsgálatok célja ezen bifurkációs pontok meghatározása olyan paraméterekkel, melyek később a kísérleti eredményekkel összehasonlíthatóak. A vizsgálat során egy ún. bifurkációs paramétert tüntetünk ki, amit változtatunk, a többi paramétert fixen hagyjuk. A probléma triviális megoldása a ráncosodásmentes alak. A bifurkáció szükséges feltétele, hogy az F leképezés Jacobi-mátrixa szinguláris legyen (azaz legyen 0 sajátértéke)², továbbá a ráncosodásmentes triviális megoldás akkor stabil, ha a Jacobi-mátrix pozitív definit [10]. Így a Jacobi-mátrix nullához legközelebb elhelyezkedő sajátértékét elég vizsgálni a bifurkációs pontok meghatározásához. A leképezés Jacobi-mátrixa azonos a végelelemes szakirodalom merevségi mátrixával, a Ritz módszer esetén pedig azonos a vizsgált funkcionál második variációjával.

Ha a megoldani kívánt, nemlineáris parciális differenciálegyenletekhez létezik olyan funkcionál, amelynek az egyenletrendszer az Euler-Lagrange egyenlete, akkor a merevségi mátrix szükségszerűen szimmetrikus, hiszen egy tetszőleges $f(x, y)$ függvényre teljesül, hogy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}. \quad (50)$$

²Ebben a speciális esetben a [3] alapján a bifurkációnak szükséges és elégséges feltétele az, hogy a Jacobi-mátrix előjelet vált.

A feladat Jacobi-mátrixát az $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ vektor $\mathbf{u}$ elemei szerinti deriváltja szolgáltatja. Mivel mind $\mathbf{f}$, mind $\mathbf{u}$ elemeinek száma megegyezik a feladat szabadságfokával (d), a $\mathbf{k}$ merevségi mátrix egy $d \times d$ nagyságú, kvadratikusan, a fentiek alapján szimmetrikus mátrix lesz:

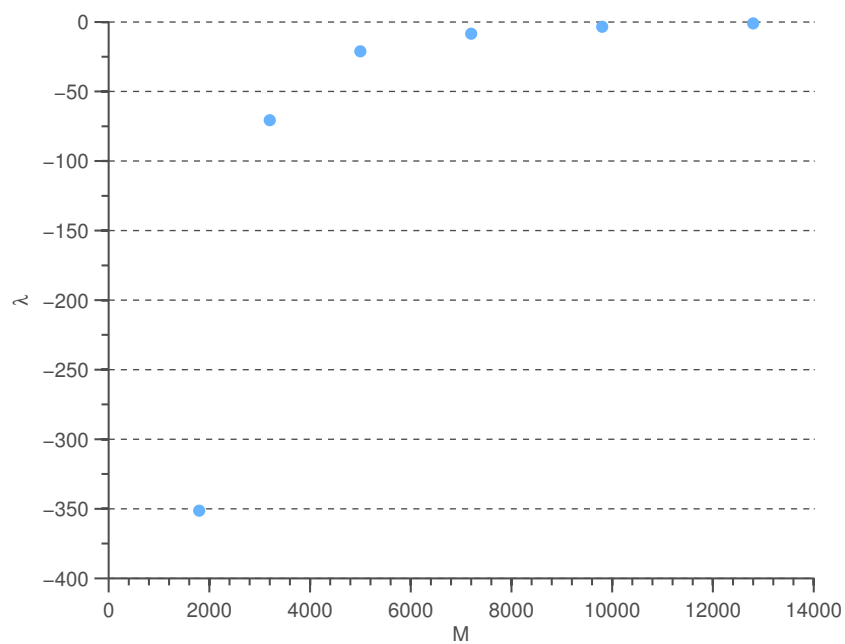
$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_d} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_d}{\partial u_1} & \frac{\partial f_d}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_d}{\partial u_d} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Feladatunkban - a korábbi jelölést használva - a merevségi mátrix a következő kifejezéssel számítható:

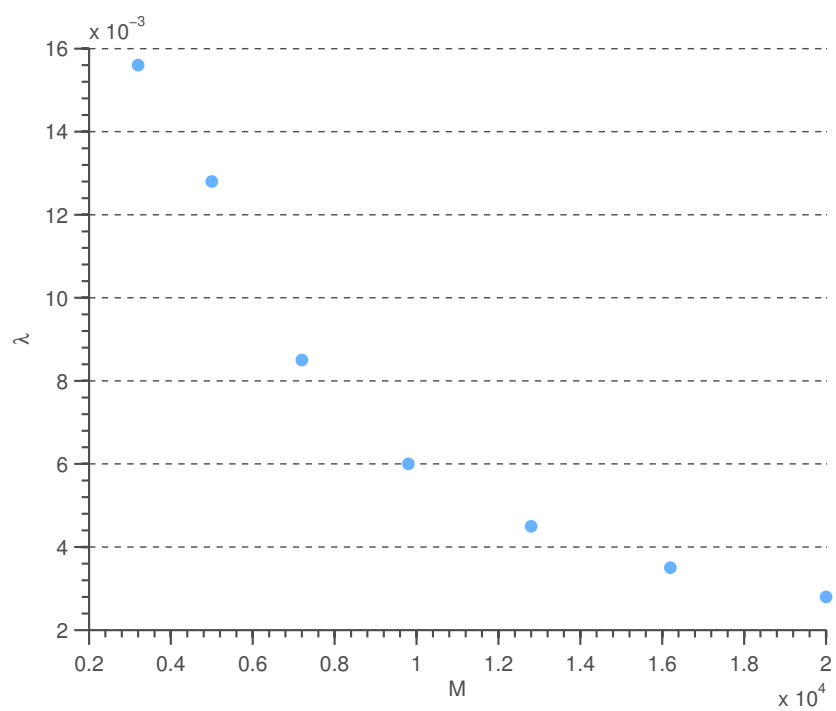
$$\mathbf{k}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{v}} = \sum_{i=1}^M \int_F \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{v}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{v}} \right\} dA. \quad (52)$$

5.2. Hálósűrűség

A végelelemes programoknál fontos kérdés a háló sűrűségének megválasztása. Az elemszám növelésével nő a pontosság, de ezzel együtt a futási idő is. Adott κ, ϵ, β esetén az n, m paraméterek növelésével vizsgáltam a sajátértékek konvergenciáját. A κ, ϵ, β paramétereket úgy választottam meg, hogy egyértelműen a bifurkációs pontok előtt, után vagy közé eső esetet vizsgáljak. A bifurkációs pontok helyét a [3] cikk alapján becsültem meg. Az ott közölt bifurkációkat azért nem tudtam közvetlenül felhasználni, mert a kísérletekhez használt anyag mérete és anyagjellemzői eltértek a cikkben közölt értékektől. A cikkben előállított diagramokat ugyanazokkal a paraméterekkel a saját programommal is előállítottam és egyezést tapasztaltam. A vizsgálatok szerint a bifurkációs pontok helye egy adott felosztás felett független a felosztás mértékétől. A továbbiakban a sajátértékek számítását 70×170 -es ($M = 11900$) felosztással végeztem.



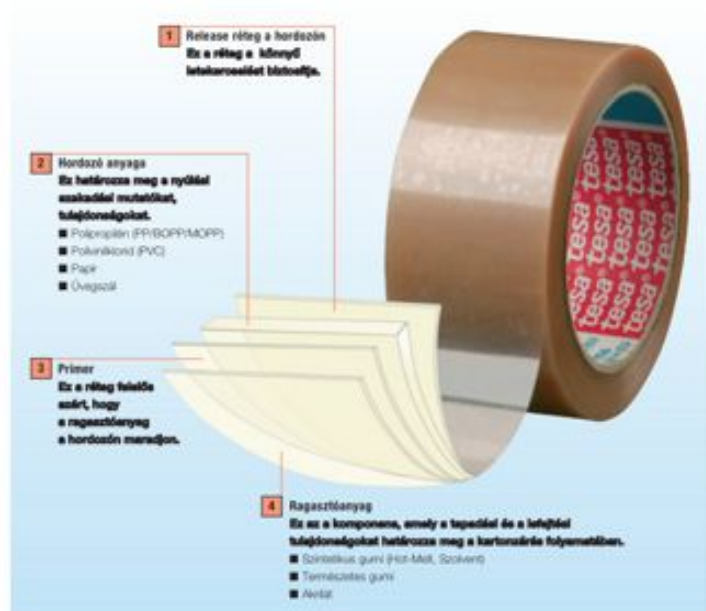
6. ábra. Legkisebb sajátérték különböző hálósűrűség esetén a nagy nyúlásos elmélettel, két bifurkációs pont között ($L = 20, W = 10, \nu = 0.45, \kappa = 10000, \varepsilon = 0.1$)



7. ábra. Legkisebb sajátérték különböző hálósűrűség esetén a nagy nyúlásos elmélettel, az első bifurkációs pont előtt ($L = 20, W = 10, \nu = 0.45, \kappa = 10000, \varepsilon = 0.01$)

6. Kísérletek

Az elmélet levezetésekor az anyagmodell lineárisan rugalmas, a levezetés szerint a Young-modulus és a Poisson tényező a megnyúlásoktól függetlenül állandó. A gyakorlatban nem létezik tökéletesen lineárisan rugalmas anyag, a hasonló problémákra szilikon gumit szokás használni, ami a szükséges vastagságban nagyon drága (vastag filmeknél nem jelentkezik a ráncosodás). Anyagi okok miatt a kísérleteket polipropilén ragasztószalagok segítségével végeztem. A polipropilén viszkoplasztikus anyag, részben rugalmasan viselkedik, de nagy a maradó alakváltozása [9]. Viselkedése többek között függ a megnyúlástól, a feszültségtől és a hőmérséklettől is.



8. ábra. A ragasztószalag felépítése (forrás: www.tesa.hu)

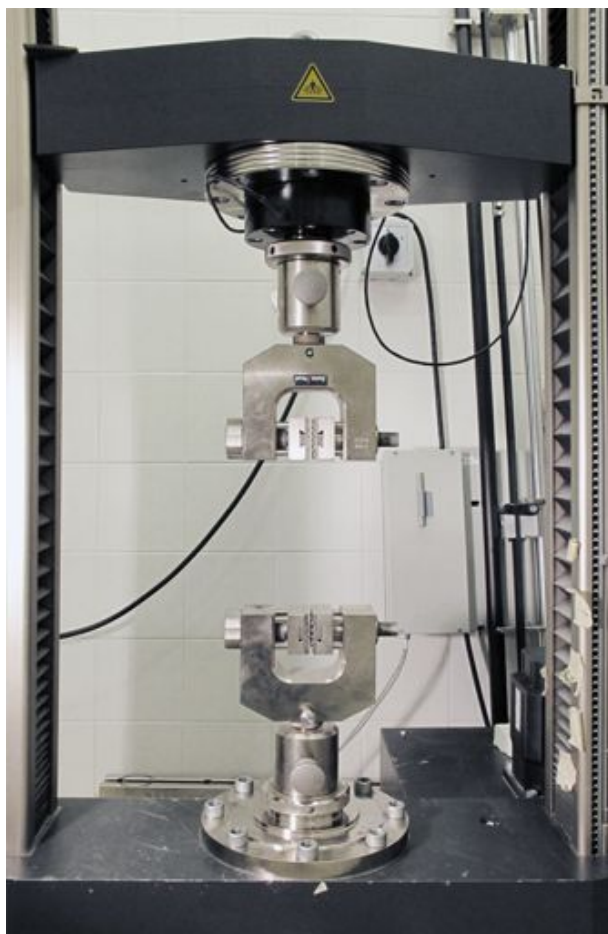
A ragasztószalag több komponensből áll össze, a polipropilén rész vastagsága: $28\mu\text{m}$, a ragasztóréteg vastagsága $18\mu\text{m}$. Az egyes rétegek együttdolgozása miatt az anyag paramétereit nem teljesen egyeznek meg a tiszta polipropilén paramétereivel. A Poisson-tényezőt a

fényképek alapján a

$$\Delta d = -d \left(1 - \left(1 + \frac{\Delta L}{L} \right)^{-\nu} \right) \quad (53)$$

összefüggés alapján számoltam, ahol d a kezdeti szélesség, L a kezdeti hosszúság, ν a Poisson-tényező. A szakadónyúlás a gyártó adatai szerint 140%, ami rövidebb szalagok esetén egyezett a mérési eredményekkel.

A kísérleteket a Szilárdságtan Tanszék laborában lévő ZWICK Z150 szakítógéppel vé-

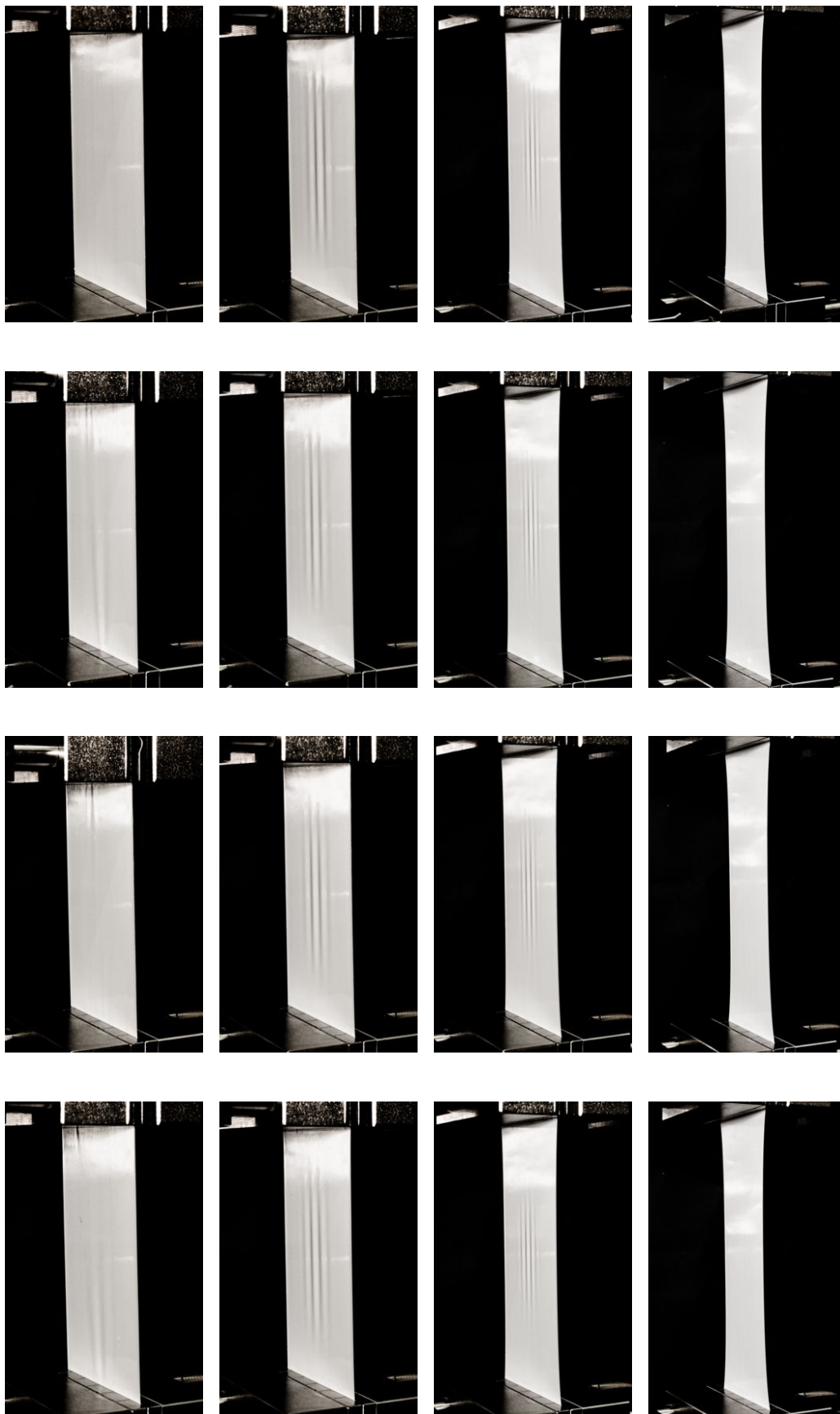


9. ábra. A szakítógép

geztem (9. ábra). A szalagot két hullámos profilú, fém befogópofa közé fogtam be. A két végén befogott szalagokat elmozdulásvezérelt módon terheltem. A kezdeti befogás pontatlanságának hatásához több kísérletet végeztem egymás után ugyanazokkal a jellemzőkkel: kis kezdeti

pontatlanságok nem befolyásolták a mérés alakulását (10. ábra).

A kísérletek során a ϵ, β, κ paraméterek valamelyikét változtattam, a többi fixen hagytam. A β paraméter változtatásánál nehézséget jelentett, hogy nagyon hosszú szalagoknál egyre pontatlanabbá vált a kezdeti befogás (azaz már a kezdeti alak ráncos volt) és egyre jobban lecsökkent a szakadónyúlás. A κ paraméter változtatásának hatását csak korlátozottan tudtam vizsgálni. Rendelkezésemre állt még egy másik polipropilén szalag. A közöttük lévő vastagságkülönbség azonban nem volt számottevő. A B. függelékben megtalálhatóak mindkét szalagról készített fényképek.



(a) $\varepsilon = 0.00$

(b) $\varepsilon = 0.05$

28

(c) $\varepsilon = 0.25$

(d) $\varepsilon = 0.50$

10. ábra. Többszöri vizsgálat ugyanazon paraméterekkel ($\beta = 0.8$)

7. Eredmények

A mérések és számítások összehasonlítása során az ε paramétert változtattam és kerestem a bifurkációs pontokat. Az egyenletek levezetése során csak a rugalmas energiával számoltunk, a mérések alapján viszont az anyagnak nagyok a képlékeny alakváltozásai. A feltételezéseink szerint a képlékeny alakváltozások során disszipált energia nem játszik döntő szerepet a ráncosodás kialakulásában és jellegében. Ezt alátámasztja az irodalom is [9].

Az (47) egyenlet megoldása elegendően kis megnyúlások esetén a ráncosodásmentes alak. Ez a stabil egyensúlyi helyzet a megnyúlás növelésével egy adott megnyúlásnál instabillá válik és a ráncosodott alak lesz az új stabil megoldás. A megnyúlás további növelésével egy bizonyos megnyúlásnál újból a ráncosodásmentes alak válik stabillá. A feladat triviális megoldását ($w = 0$) jól közelíti az $\mathbf{u} = 0$, így innen indulva gyorsan konvergál a Newton-Raphson iteráció.

A kísérletet 5×10 cm-es szalagon végeztem. A szalag számított Poisson tényezője: $\nu = 0.45$. A befogás után folyamatosan növeltem a megnyúlást és kerestem a bifurkációs pontokat. A ráncosodás kezdete $\varepsilon = 0$ és $\varepsilon = 0.05$ között volt, az eltűnése pedig $\varepsilon = 0.7$ és $\varepsilon = 0.8$ között. A függelékben megtalálható a bifurkációs pontok közötti többi vizsgált állapothoz tartozó fénykép (B.2). A Poisson tényező bizonytalansága miatt az algoritmussal több számítást végeztem mind a Kármán-féle, mind pedig a nagy nyúlásos elmélettel $\nu = 28 \mu m$, $\nu_1 = 0.4$, $\nu_2 = 0.45$, így egy-egy intervallumot kaptam a bifurkációs pontok pontos helye helyett. (13. ábra) Látható, hogy a Kármán-féle elmélet által kapott eredmény szerint (12. ábra) a triviális megoldás az első bifurkáció után többé nem válik újra stabillá ami ellentétben áll a mérési eredményekkel.

A ráncosodás kezdetéhez tartozó tartomány mindkét elmélet esetén egyezik a mérési eredménnyel, a kis megnyúlások miatt: a mérés alapján a ráncok $\varepsilon = 0.05$ előtt jelennek meg, a számítások szerint $\varepsilon = 0.02$ és $\varepsilon = 0.04$ között. A ráncosodás eltűnéséhez tartozó bifurkációs pont esetén a nagy nyúlásos elmélet és a mérések közötti eltérést a nagy képlékeny alakváltozások okozzák. A képlékenyedés hatását és a rugalmas megnyúlás valódi értékét a maradó alakváltozás és a szakítógép által mért $\sigma - \varepsilon$ diagram alapján vizsgáltam. 5×10 cm-es szalagra különböző megnyúlásokat kényszerítettem, majd visszaengedés után mértem a maradó alakváltozást. A ráncok $\varepsilon = 0.77$ értéknél tűntek el. Az $\sigma - \varepsilon$ diagram alapján kiszámítható a feszültség és az aktuális Young-modulus. Az alábbiakban egy ilyen mérést mutatok be, a tapasztalat azt mutatja, hogy a kísérletet többször elvégezve megközelítőleg ugyanazt a $\sigma - \varepsilon$ diagramot kapom.

A legjellemzőbb adatsort a 15. ábra mutatja. A táblázat jelölései: L_1 : mért megnyújtott hossz, L_2 : maradó hossz, σ : feszültség. A rugalmas megnyúlást rugalmas-képlékeny anyagmodell használatával határoztam meg. Feltételeztem, hogy a teljes megnyúlás a rugalmas és a képlékeny nyúlások összegeként vehető figyelembe. Több mérés alapján a kezdeti rugalmassági moduluszt közelítésként átlagos értéken $E_a = 500 \text{ N/mm}^2$ -nek vettem. Feltettem, hogy a kezdeti rugalmassági modulus nem változik, így adott pontban a szakítógép méréseiből visszszámolt feszültségből közvetlenül tudtam számítani a rugalmas alakváltozást:

$$\epsilon_{rug} = \frac{\sigma}{E_a}, \quad (54)$$

ahol $E_a = 500 \text{ N/mm}^2$ a mérések alapján a Young-modulus átlagos értéke. A táblázat szerint a ráncosodás végéhez tartozó $\epsilon = 0.77$ esetén $\epsilon_{rug} = 0.21$, ami összhangban áll a számítás eredményeivel: a nagy nyúlásos elmélet szerint $\epsilon = 0.16$ és $\epsilon = 0.21$ között tűnnek el a ráncok. A műanyagok plasztikus viselkedése ennél bonyolultabb, de a maradó alakváltozások alapján ez az egyszerű anyagmodell jelen helyzetben meglepően pontosnak bizonyult.

A nagy nyúlásos elmélet szerint a $\beta, \epsilon, |w_{max}|$ függvények egy háromdimenziós felület határoznak meg adott κ esetén. Ezen felületek metszeteit határozza meg egy-egy mérés (16. ábra). A 10., 11. ábrán lévő mérések egy-egy keresztmetszetet határoznak meg. A hosszmetstet felvételéhez különböző oldalarányú szalagokra $\epsilon = 0.4$ megnyúlást kényszerítettem. Az ϵ -t érdemes úgy megválasztani, hogy a $\beta - \epsilon$ síkban fekvő tartomány szélébe metsszünk bele, így a bifurkációs pontok közötti távolság csökkenthető. A képlékeny alakváltozások azonban úgy megnyújtják a tartományt, hogy a szakítógép és a kísérlet jellegéből adódó méretkorlátok miatt a második bifurkációs pontot nem sikerült megtalálni. A tendencia azonban látható (17. ábra): a ráncosodás mértéke β növelésével növekszik, majd egy maximum elérése után folyamatosan csökken. A függelékben megtalálható az összes vizsgált állapot fényképe (B.2).



(a) $\varepsilon = 0.00$



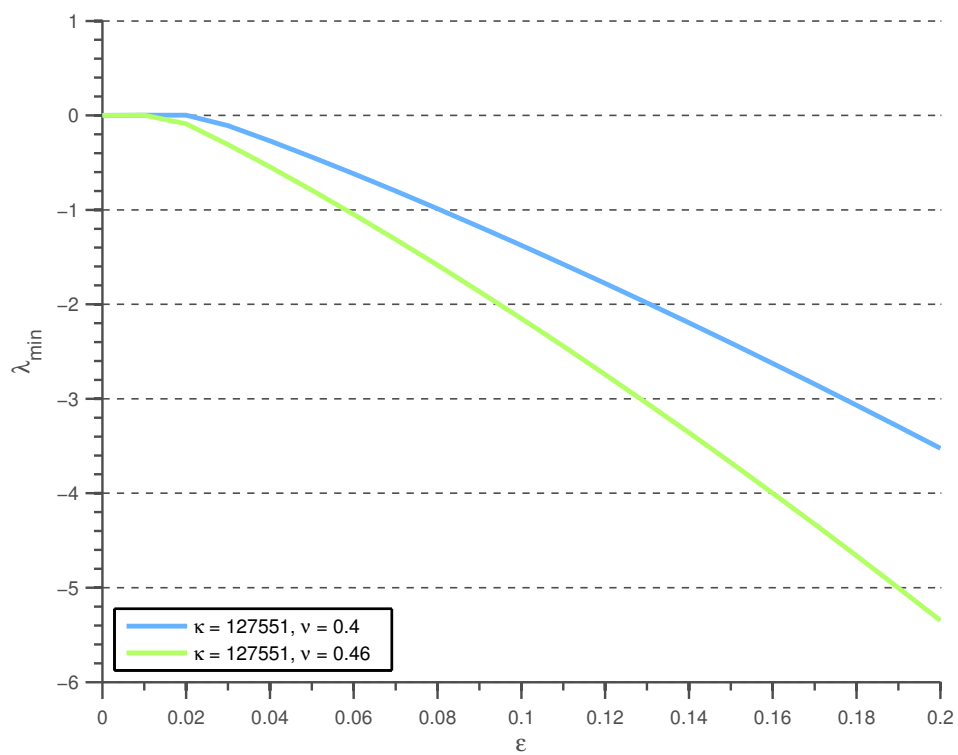
(b) $\varepsilon = 0.05$



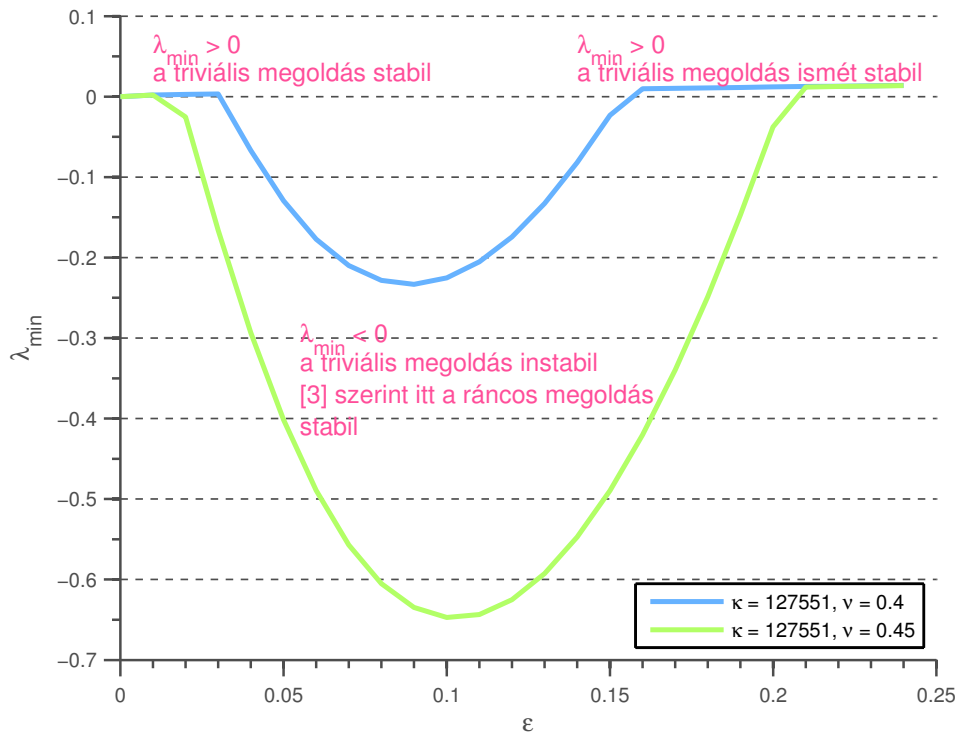
(c) $\varepsilon = 0.70$



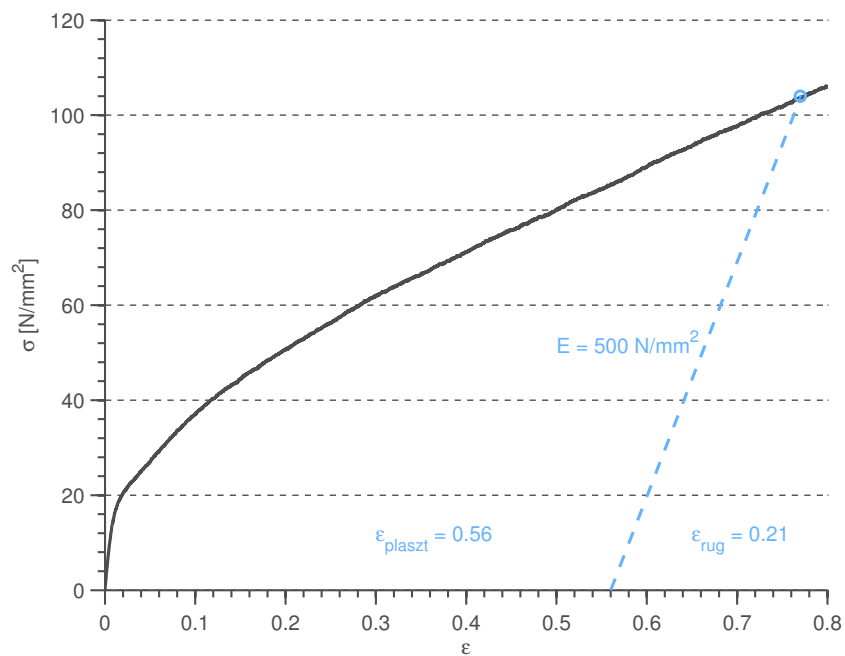
(d) $\varepsilon = 0.80$



12. ábra. A Jacobi-mátrix legkisebb sajátértéke a Kármán-féle elmélet szerint



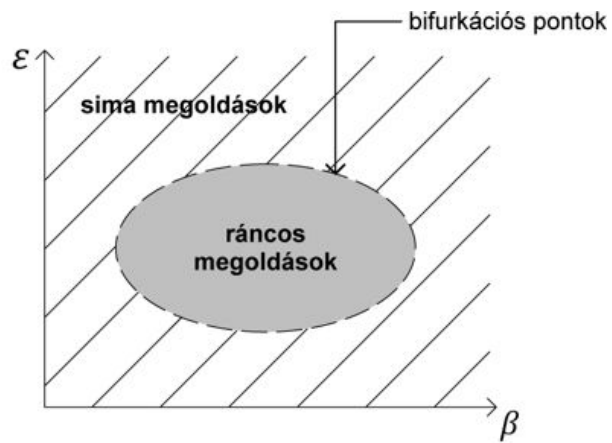
13. ábra. A Jacobi-mátrix legkisebb sajátértéke a nagy nyúlásos elmélet szerint



14. ábra. A $\sigma - \varepsilon$ diagram és a rugalmas alakváltozás a mérési eredmények alapján

ε	$L_1[mm]$	$L_2[mm]$	$\sigma[N/mm^2]$	$E_a[N/mm^2]$	ε_{rug}
0.1	110	102.0	37.09		0.07
0.2	120	104.6	50.56		0.10
0.3	130	110.0	61.91		0.12
0.4	140	115.2	71.29		0.14
0.5	150	123.2	79.88	500	0.16
0.6	160	132.6	89.13		0.18
0.7	170	143.8	97.64		0.20
0.77	177	151.0	103.55		0.21
0.8	180	150.4	105.56		0.21

15. ábra



16. ábra. A $\beta - \varepsilon - |w_{max}|$ felület $\varepsilon - \beta$ síkra vetített pontjai



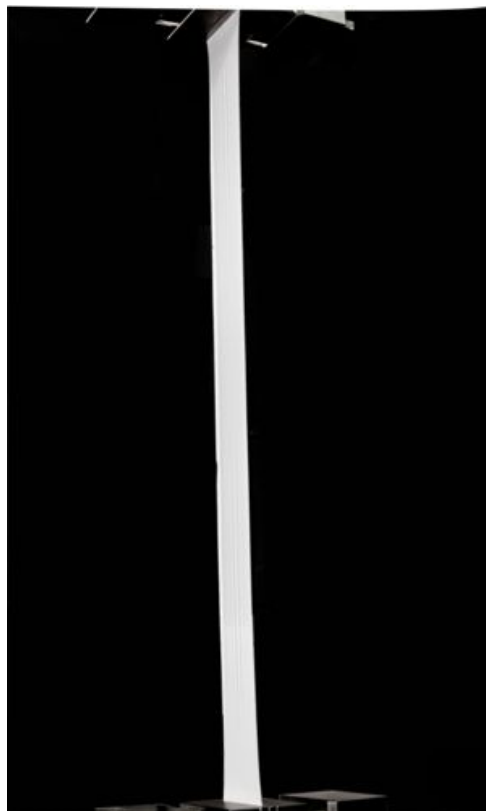
(a) $\beta = 0.75$



(b) $\beta = 0.80$



(c) $\beta = 1.50$

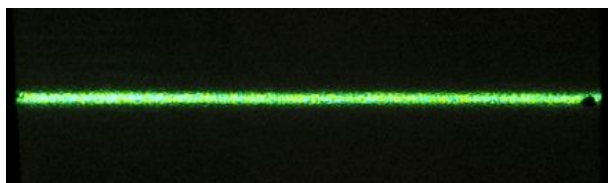


(d) $\beta = 4.00$

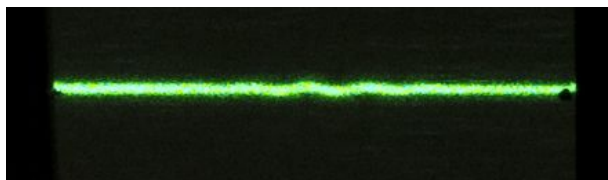
8. Összefoglalás, további lehetőségek

A mérések célja elsősorban a [3] publikációban közölt eredmények alapján a Kármán-féle és a nagy nyúlásos elméletek előrejelzéseinek kvalitatív kísérleti vizsgálata volt. A választott polipropilén szalag ehhez megfelelőnek bizonyult - a kísérleti eredmények nagyon jó egyezést mutatnak az elméleti előrejezéssel -, pontosabb számításokhoz viszont nem elegendő. A mérések tanulságai alapján a nagy nyúlásos elmélet kvantatív validálásához hosszútávon egy kevésbé képlekenyedő anyagra van szükség. A maradó alakváltozás modellezésén túl érdekes gyakorlati kérdés az elmélet kiterjesztése hiperelasztikus anyagokra.

Tervezem továbbá az útkövető eljárás implementálását, amihez a meglévő kód egy az egyben felhasználható. Az útkövető eljárás megírása után a ráncok alakjával kapcsolatos méréseket össze lehet vetni a numerikus eredményekkel. Ehhez szükség van a ráncosodás amplitúdójának kísérleti meghatározására, a ráncok alakjának dokumentálására. Az eddigiekben készültek olyan fényképek is, amelyeken egy kezdetben vízszintes referenciavonal alakja ad információt a felületről (18. ábra), ami alapja lehet egy optikai alakmeghatározásnak. Az alakmeghatározás segítségével az elmélet nem csak a bifurkációk tekintetében, hanem a kialakult mintázat vizsgálatával kvalitatív módon is összehasonlítható a kísérleti eredményekkel.



(a)



(b)

18. ábra. A kezdeti (a) és a ráncosodott alak (b) lézervonallal megvilágítva

A [3] cikk szerint a kialakuló ráncos mintázat nem csak szimmetrikus vagy antimetrikus lehet, hanem ezek kombinálásával előállítható aszimmetrikus mintázatok is stabilak és energiájuk megegyezik a szimmetrikus és egyben az antimetrikus megoldások energiájával. 10. ábra mutatja, hogy a mérések során adott paraméterek esetén mindig ugyanazt a ráncosodott alakot vette fel a szalag a kezdeti esetleg kissé ráncos befogástól függetlenül. Ez a jelenség további vizsgálatokat igényel.

Megfigyeléseim szerint a ráncok száma a ráncosodás megjelenésénél eldől, a továbbiakban már csak az amplitúdó változik. Nagyobb számosságú statisztikai mérésekkel lehetne vizsgálni a ráncok száma és az egyéb paraméterek összefüggését.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom konzulensemnek Dr. Sipos András Árpádnak (Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék), aki mind az elméleti mind pedig a programozási kérdésekben folyamatos segítséget nyújtott.

Köszönöm szépen Juhász Károlynak és Sebestyén Ottónak (Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék), hogy lehetővé tették a szakítógép használatát és segítettek a mérések végrehajtásában.

Továbbá köszönöm Dr. Halász Mariannának (Polimertechnika Tanszék), hogy szakított rám időt és válaszolt a polimerek mechanikai tulajdonságaival kapcsolatos kérdéseimre.

A kísérleti vizsgálatokhoz használt ZWICK Z150 törőgépet a TÁMOP 4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0002 pályázat biztosította.

Hivatkozások

- [1] Cerda, E., Mahadevan, L.: *Geometry and physics of wrinkling*, Phys. Rev. Lett. 90, 1-4, 2003.
- [2] Nayyar, V., Ravi-Chandar, K., Huang, R.: *Stretch-induced stress patterns and wrinkles in hyperelastic thin sheets*, In. J. Solids Struct. 48, 3471-3483, 2011.
- [3] Healey, T.J., Li, Q., Cheng, R.-B.: *Wrinkling Behavior of Highly Stretched Rectangular Elastic Films via Parametric Global Bifurcation*, Nonlinear Science 23, 777-805, 2013.
- [4] Bojtár, I., Gáspár, Zs.: *Végeselemmódszer építőmérnököknek*, TERC, Budapest, 2003.
- [5] Howell, P., Kozyreff, G., Ockendon, J.: *Applied Solid Mechanics*, University Press, Cambridge, 2009.
- [6] Von Kármán, T.: *Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften*. vol. IV, 1910.
- [7] Reddy, J.N.: *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, 2004.
- [8] Braess, D.: *Finite Elements: Theory, Fast Solvers and Applications in Solid Mechanics*, Third Edition, Cambridge University Press, 2007.
- [9] Sun, C.T., Chen, J.L.: *A Simple Flow Rule for Characterizing Nonlinear Behavior of Fiber Composites*, Journal of Composite Materials 23, 1009-1020, 1989.
- [10] Allgower, E.L., Georg, K.: *Numerical Continuation Methods*, An Introduction, Springer-Verlag, 1990.

A. Függelék

A.1. Tárcsa elmélet

A.1.1. Alapfeltevések

Az $X = 0$ él mentén a perem befogott, az $X = L$ él mentén a lemezre εL nagyságú nyúlást kényszerítünk. Az anyagtörvény lineáris, a nyúlások kicsik. A feszültség és a megnyúlás a vastagság mentén nem változik, azaz $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függetlenek z -től.

A.1.2. Feszültség és alakváltozás

A húzófeszültségek hatására létrejövő alakváltozás:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ -\gamma z \end{pmatrix} \quad (55)$$

Kis megnyúlásokat feltételezve az (5) alakváltozás tenzor nem lineáris tagjait elhanyagoljuk:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (56)$$

azaz

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & b+c & 0 \\ b+c & d & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \quad (57)$$

A lemez felső és alsó síkján a húzófeszültség 0, azaz $\tau_{zz} = 0$. Így (10) alapján:

$$0 = \lambda(a + d - \gamma) - 2\mu\gamma, \quad (58)$$

amiből a λ és a ν közötti kapcsolatot [5] felhasználva:

$$\gamma = \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) (a + d) = \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \right) (a + d) \quad (59)$$

Ezután a többi feszültségkomponens (10) segítségével kifejezhető:

$$\tau_{xx} = \frac{E(a + \nu c)}{1 - \nu^2}, \tau_{xy} = \frac{Eb}{1 + \nu}, \tau_{yy} = \frac{E(\nu a + c)}{1 - \nu^2} \quad (60)$$

Kis elmozdulásokat feltételezve a tényleges alakváltozási tenzor:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2u_x & u_x + u_y \\ u_x + u_y & 2v_y \end{bmatrix} \quad (61)$$

A.1.3. Energia

Az energia felírásánál a síkra merőleges belső feszültségek munkáját elhanyagoljuk. A szerkezet teljes potenciális energiája:

$$I = \int_V W d\mathbf{x} = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \tau_{ij} e_{ij} dz dA, \quad (62)$$

(60) behelyettesítésével:

$$I = \int_A \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (\nu \text{Tr}(\mathbf{E})^2 + (1-\nu) \text{Tr}(\mathbf{E}^2)) dA. \quad (63)$$

A.2. Kirchoff elmélet

A.2.1. Alapfeltevések

Tekintsünk egy önsúlyával terhelt lemezt. A Kirchoff-Love hipotézis alapján az alábbi feltételezések vannak érvényben:

1. A lemez úgy deformálódik, hogy a középsíkra merőleges egyenes a deformáció után, a deformált középsíkra is merőleges lesz és egyenes marad, azaz nincsenek nyírási deformációk.
2. A lemez vastagsága nem változik a deformáció során.
3. A nyúlások és a középsík elfordulása elegendően kicsiny.

A.2.2. Feszültség és alakváltozás

A hajlítás hatására húzófeszültségek jönnek létre, amelyek a vastagság mentén változnak (azaz τ_{ij} , így e_{ij} is függ z -től). Felhasználva, hogy a síkbeli feszültségek hatására $\tau_{zz} = 0$, továbbá a

középsík elfordulása ≈ 0 , a húzófeszültségek hatására létrejövő alakváltozás:

$$u = \begin{pmatrix} -(ax + by)z \\ -(bx + cy)z \\ \frac{ax^2}{2} + bxy + \frac{cy^2}{2} + \frac{v(a+c)z^2}{2(1-v)} \end{pmatrix} \quad (64)$$

Kis elmozdulásokat feltételezve az alakváltozás komponensek:

$$e_{xx} = -az, e_{xy} = -bz, e_{yy} = -cz \quad (65)$$

A feszültségkomponensek (10) alapján:

$$\tau_{xx} = -\frac{E(a+vc)z}{1-v^2}, \tau_{xy} = -\frac{Ebz}{1+v}, \tau_{yy} = -\frac{E(va+c)z}{1-v^2} \quad (66)$$

Kis nyúlásokat feltételezve a tényleges alakváltozási tenzor:

$$\mathbf{E}_b = Z \begin{bmatrix} -w_{xx} & -w_{xy} \\ -w_{xy} & -w_{yy} \end{bmatrix} \quad (67)$$

A.2.3. Energia

A teljes potenciális energia:

$$I = \int_V W dV - \int_A \rho g w dA, \quad (68)$$

ahol

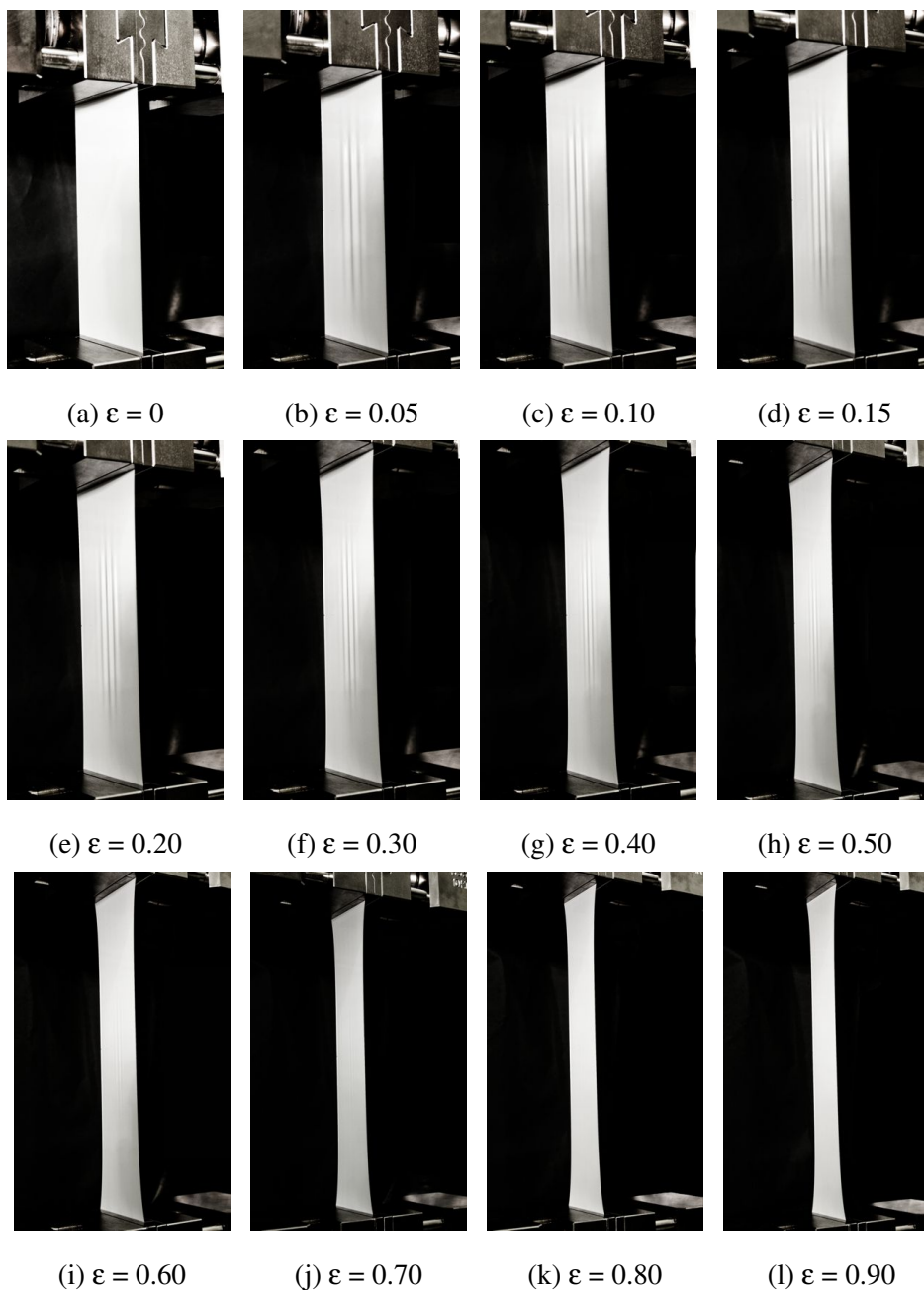
$$\int_V W dV = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \tau_{ij} e_{ij} dz dA \quad (69)$$

Így a potenciális energia:

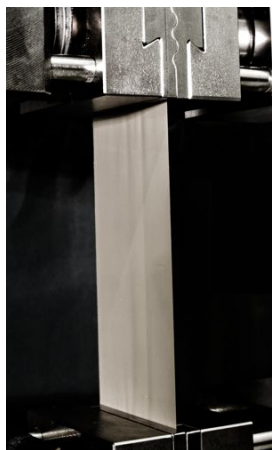
$$I = \int_A \frac{h^3 E}{24(1-v^2)} (v Tr(\mathbf{E}_b)^2 + (1-v) Tr(\mathbf{E}_b^2)) - \rho g w dA \quad (70)$$

B. Függelék

B.1. Az ε , mint bifurkációs paraméter



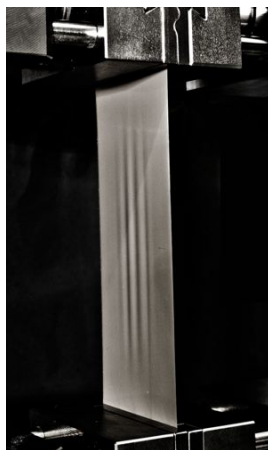
19. ábra. $\beta = 1$, $\kappa = 127551$



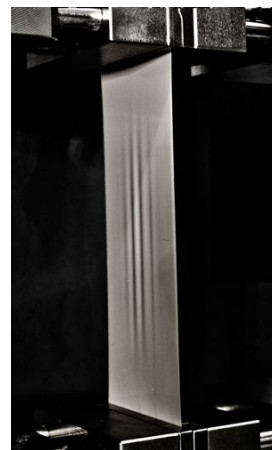
(a) $\varepsilon = 0$



(b) $\varepsilon = 0.05$



(c) $\varepsilon = 0.10$



(d) $\varepsilon = 0.15$



(e) $\varepsilon = 0.20$



(f) $\varepsilon = 0.30$



(g) $\varepsilon = 0.40$



(h) $\varepsilon = 0.50$



(i) $\varepsilon = 0.60$



(j) $\varepsilon = 0.70$



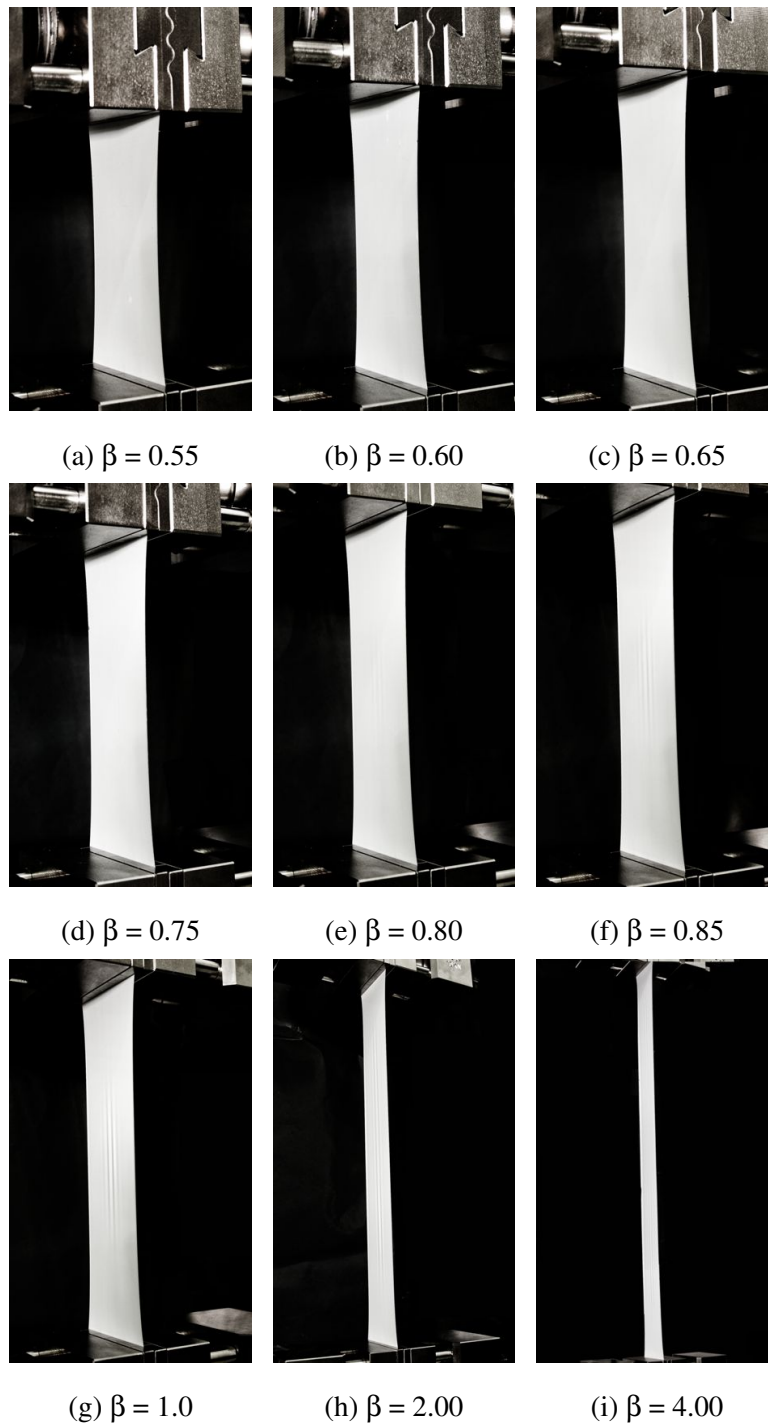
(k) $\varepsilon = 0.80$



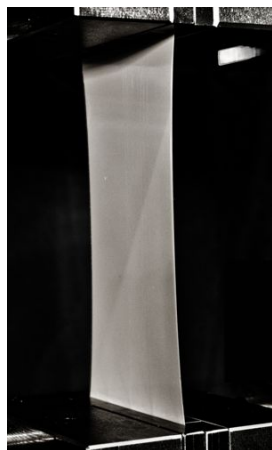
(l) $\varepsilon = 0.90$

20. ábra. $\beta = 1$, $\kappa = 160000$

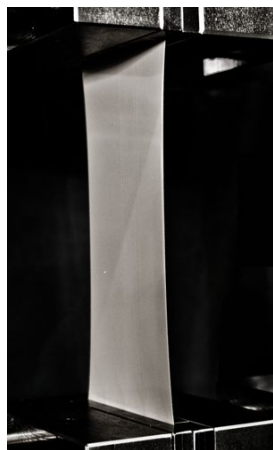
B.2. Az β , mint bifurkációs paraméter



21. ábra. $\varepsilon = 0.4$, $\kappa = 127551$



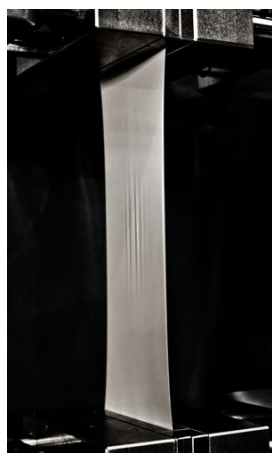
(a) $\beta = 0.55$



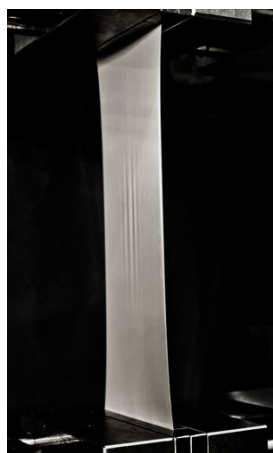
(b) $\beta = 0.60$



(c) $\beta = 0.65$



(d) $\beta = 0.75$



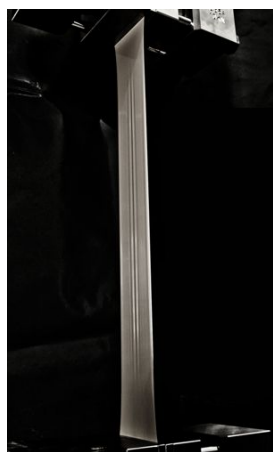
(e) $\beta = 0.80$



(f) $\beta = 0.85$



(g) $\beta = 1.50$



(h) $\beta = 2.00$



(i) $\beta = 4.00$

22. ábra. $\varepsilon = 0.4$, $\kappa = 160000$