



Elfutó elektronok kölcsönhatása az extraordinárius elektron hullámmal

OTDK dolgozat

Budai Ádám

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Témavezetők: Dr. Pokol Gergő (BME, Nukleáris Technikai Intézet)
Kómár Anna (California Institute of Technology)

BME
2014

Tokamakokban tapasztaltak nagy energiával rendelkező ún. elfutó elektronokat, amelyek komoly károkat tudnak okozni: tönkreteszik a diagnosztikákat, kilukasztják a falat. Az elfutó elektronok kölcsönhatásba léphetnek egy rezonáns plazmahullámmal. A vizsgált nagyfrekvenciás elektronhullámok közül az extraordinárius elektron hullám (EXEL) a leginstabilabb, ezért ezt a hullámot vizsgáltam. Az elfutó elektronok és az EXEL hullám kölcsönhatása során az elektronok eredetileg nyalábszerű eloszlásfüggvénye izotropizálódik. Ez lecsökkentheti az elfutó elektronok energiáját.

Az EXEL hullámnak az eloszlásfüggvényre gyakorolt hatását csak numerikus módszerek igénybevételével lehet meghatározni, mert az eloszlásfüggvény időbeli fejlődésére nincs zárt analitikus formula. Munkám során rendelkezésemre állt egy kvázi-lineáris kölcsönhatást számoló rutin, melyet Dr. Pokol Gergő és Kómár Anna írtak. A program lassú futása miatt még csak előzetes eredmények álltak rendelkezésemre, melyek a fenti kölcsönhatás bekövetkezését igazolták, azonban csak a hatás első periódusát mutatták, így részletes analízisre nem voltak alkalmasak. A rutin gyorsításának érdekében felderítettem a program legidőigényesebb részeit, és ezeket módosítva a program a többszörösére gyorsult, lehetővé téve a kölcsönhatás további periódusainak szimulációját, és így annak megállapítását, hogy a kapott eredmények hogyan függenek a program numerikus és fizikai paramétereitől. Fontos kérdés volt a program numerikus stabilitásának ellenőrzése a numerikus paraméterek változtatásával. Az eljárás alatt egy tipikus paraméterszettet választottam referenciának és mindig csak egy paramétert változtatva vizsgáltam az eltérést az eredményben. A tapasztaltak alapján új optimális paraméterszettet állítottam be, és ezzel végeztem a további vizsgálatokat, mint az eredményeknek a plazmaparaméterektől való függését. A mágneses tér, a termikus elektronsűrűség, az elektromos tér és a plazmahőmérséklet változtatásával az elmélet alapján várt eredményeket kaptam, a közelítések határain belül.

A munkám második felében az eljárásunk azon hiányosságának kiküszöbölése volt a célom, hogy az általunk használt kezdeti eloszlásfüggvény csak nagyon nagy, állandó elektromos tér fennállása esetén érvényes. Ennek érdekében a CODE nevű kinetikus egyenlet megoldó rutinba integráltam az EXEL hullámmal történő kvázi-lineáris diffúziós kölcsönhatást. Ezzel lehetővé vált fizikailag valóságosabb eloszlásfüggvények előállítása.

Tartalomjegyzék

1	Elméleti bevezető	4
1.1	Elfutó elektronok	4
1.2	Plazmahullámok	9
1.3	A kvázilineáris kölcsönhatás	13
1.4	A kvázilineáris kölcsönhatást számoló rutin	16
1.4.1	A program vázlatos működése	16
1.4.2	A meghívott függvények	16
1.4.3	A program változókészlete	17
1.4.4	A program kimenete	20
2	A kvázilineáris kölcsönhatást számoló rutin gyorsítása és tesztelése	21
2.1	A program felgyorsítása	21
2.2	A program numerikus stabilitásának tesztelése	22
2.3	A fizikai paraméterektől való függés	27
2.4	Alkalmazás az ITER paramétereire	33
3	Egyesítés a CODE-dal	34
3.1	Az összekapcsolás elméleti háttere	34
3.1.1	A CODE működésének alapelve	34
3.1.2	Az összekapcsolás lehetőségei	36
3.2	Gyakorlati megvalósítás	36
3.3	Eredmények	38
	Összefoglalás	39
4	I. Függelék	41
5	II. Függelék	42
5.1	Az elfutó elektron szuszeptibilitás kiszámítása	42
5.2	Romberg-módszer	45
5.3	Diffúziós operátor a Legendre-polinomok bázisán	45
	Ábrák jegyzéke	48

Táblázatok jegyzéke	49
Irodalomjegyzék	51

1. fejezet

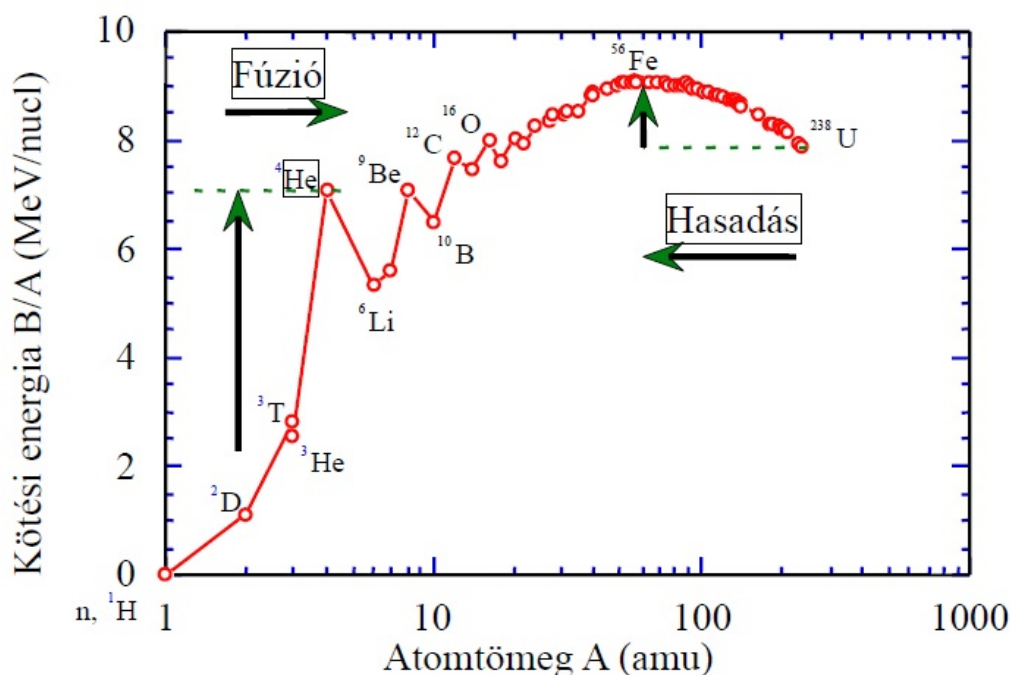
Elméleti bevezető

1.1. Elfutó elektronok

A huszadik század hajnalán létrejött az atommagok kötési energiájában rejlő óriási energia kiaknázására való törekvés. A hagyományos energiatermelő módszerek az égés során felszabaduló kémiai kötésienergiát hasznosítják, amely nagyságrendekkel ($\approx 10^6$ -szor) kisebb az atommagok esetében tapasztalható értékeknél. A (1.1.1) ábrán látható az egyes típusú atommagok kötési energiája a tömegszám függvényében. Látható, hogy a legmélyebb (legstabilabb) állapotban a vas található. Az ettől eltérő tömegszámú atomok kétféleképpen kerülhetnek közelebb a legstabilabb állapothoz. A nagyobbak bomlással vagy fisszióval, utóbbin alapulnak a maghasadásos atomreaktorok, a kisebbek pedig egyesüléssel (fúzióval). Utóbbi elven működő energiatermelő fúziós reaktort földi körülmények között máig nem sikerült konstruálni. A folyamat során a következő magreakció mesterséges körülmények közötti előidézése a cél:



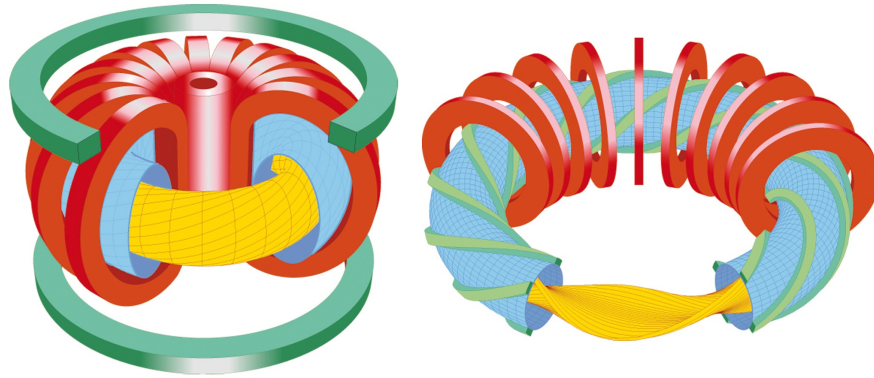
A reakció megköveteli, hogy a részecskék kellően nagy energiával ütközzenek (nagy hőmérséklet). Ez csak az alkalmazott gáz plazma állapotában lehetséges, ami azt jelenti, hogy a hidrogén gáz nagy része ionizált, de a magas hőmérséklet (≈ 100 millió K) miatt nem létezik olyan földi anyag amiben tárolható lenne.



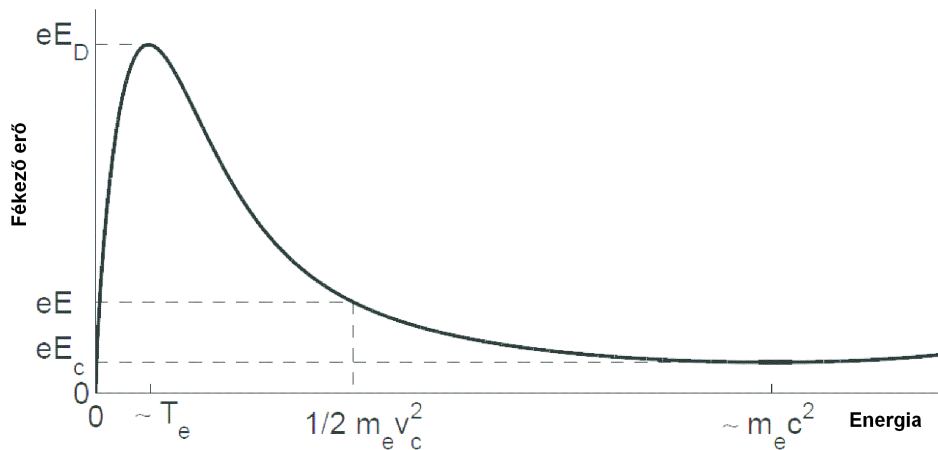
1.1.1. ábra. Az egyes elemek kötési energiái az atomtömeg függvényében. Látható, hogy egy elemi folyamat során sokkal több energia keletkezik a fúciónál, mint a fissionál.

A probléma megoldására az elmúlt évtizedek tapasztalatai alapján a legnagyobb eséllyel az ún. mágneses összetartáson alapuló fúziós berendezések pályázhatnak. Ezeknek a két fő típusa a sztellarátor valamint a tokamak. Mint ahogy a (1.1.2) ábrákon is látható, ezekben tórusz alakú kamrában próbálják összetartani mágneses tér segítségével a plazmát alkotó ionokat, elektronokat. A dolgozatban vizsgált jelenség tokamakokban fordul elő, ezért a későbbiekben csak velük foglalkozunk. Jelenleg a franciaországi Cadarache-ban épül a világ legnagyobb tokamakja, az ITER [1]. A tervek szerint a berendezés képes lesz erőmű releváns tartományokban üzemelni hosszabb ideig 5–10 percen keresztül.

Az összetartás gyakorlati megvalósítása során számos nehézség adódik, mint például a plazma fűtésének kérdése, diszrupciók (a plazma összeomlása, melynek során gyors energia veszteség lép fel) stb. Az utóbbi kísérő jelensége lehet egy nagy energiájú elektron nyaláb, az ún. elfutó elektronok megjelenése, amely a dolgozat tárgyát képezi. Jelentőségüket az adja, hogy egy ITER méretű berendezésben a megnövekedett számuk miatt nagy károkat tudnak okozni [1]. Az elfutó elektronok keletkezésének kulcsa abban a jelenségben rejlik, hogy a plazmában mozgó elektronra ható fékezési erő a (1.1.3) ábrán látható módon függ az elektron energiájától [2].



1.1.2. ábra. Az ábra baloldalán egy tokamak, míg a jobb oldalán egy sztellarátor illusztrációja látható. A toroidális tértekercek által létrehozott mágneses tér megcsavarását a tokamakok esetében a plazmaáram, míg a sztellarátor esetén a poloidális tértekercek valósítják meg. A megcsavarás célja a mágneses tér okozta driftek során kiszökő anyagmennyiség megakadályozása.



1.1.3. ábra. Az ábrán látható, hogy az elektronra ható fékező erő nem monoton növekvő függvénye az elektron energiájának.

Ha a plazma átlép egy stabilitási határt (például sűrűség, plazmaáram), akkor a létrejövő instabilitás miatt a plazma elmozdulhat és a plazma–fal kölcsönhatás miatt a plazmát határoló objektumokat nagy részecske- és hőfluxus éri. A porlasztás során leváló szennyezők bejuthatnak a plazmába és a szennyező–hidrogén ütközésekben a plazma energiája a fékezési sugárzás miatt lecsökken. A hőmérséklet-csökkenés miatt megnő az ellenállás, így a plazmaáram csökkenni kezd és a Lenz-törvény miatt az eredeti áramot fenntartani igyekvő elektromos tér jön létre.

Ha az elektromos tér nagyobb a kritikus (E_c) elektromos térnél, akkor van olyan sebességtartomány, hogy az oda tartozó elektronokra ható eredő erő tartós gyorsítást eredményez. Az elektronok a létrejövő gyorsulás miatt relativisztikus energiára tehetnek szert, ezek az elfutó elektronok. Kialakulásukkal kapcsolatban beszélhetünk elsődleges- és másodlagos (lavina)–keletkezésről. Az elsődleges keletkezésbe két jelentős mechanizmus sorolható, melyek közül az egyik a Dreicer–keletkezés, amely azt jelenti, hogy a kritikus sebességnél nagyobb sebességű elektronok el tudnak futni [3]. Ezek az elektronok pótlódnak a sebességtérben a Maxwell–eloszlást létrehozó ütközések során bekövetkező diffúzió által, biztosítva a folyamatos keletkezést a tér fennállásáig. A másik mechanizmus az ún. forrófarok-keletkezés. A diszrupció során a kialakult Maxwell–eloszlásban a nagy energiájú rész részecskéinek nagyon alacsony az ütközési frekvenciája, így ezek az elektronok a lehűlés során nem tudják követni a Maxwell–szerű eloszlásfüggvény változását. Az elektromos tér megnövekedése után ezek azonnal elfutnak. Lényegében az előbbi egy kvázi-stacionárius folyamat, míg az utóbbi tranziens. Az elsődleges (primary) keletkezés során létrejött elfutóelektron–magot tovább duzzaszthatja a másodlagos keletkezés, mivel egy elfutó elektron és egy termikus elektron ütközése, feltéve, hogy elegendő energiával rendelkeznek, eredményezhet két elfutó elektront [4].

A kvantitatív leírás alapját az ún. Boltzmann–egyenlet jelenti, amely leírja a plazmát alkotó egyes részecsketípusok eloszlás függvényének időbeli evolúcióját, adott külső feltételek mellett. Ha a részecskékre egymás hatásán kívül csak az elektromágneses tér fejthet ki erőt, akkor a (1.1.2) egyenletet kapjuk. Általánosságban a formula bal oldalának a harmadik tagja az $\frac{\vec{F}}{m}$ tagot tartalmazná az elektromágneses Lorentz–erő helyett. A jobb oldalon az ütközési operátor és egy forrás található.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{q}{m} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_{\vec{v}} f = C(f) + \mathbf{S} \quad (1.1.2)$$

Ez egy parciális differenciál–egyenlet, amelyhez természetesen tartoznak peremfeltételek is a vizsgált problémának megfelelően. Az általános megoldás nehéz, továbbá az ütközési operátorra egzakt formulát nem lehet adni, ezért közelítésekre, feltevésekre van szükség. Az általunk vizsgált probléma jellegéből adódóan ezek a következők:

- a plazmát térben végtelennek és homogénnek tekintjük
- ultrarelativisztikus határesetben számolunk, azaz $\vec{p} = \frac{\gamma \vec{v}}{c} \approx 1$
- $p_{\parallel} \gg p_{\perp}$, azaz az eloszlásfüggvény erősen anizotróp (elektromos tér miatt)
- az elektromos tér nagy, azaz $E/E_c \gg 1$ és időben állandó
- $e\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \ll e\vec{E}$
- lineáris ütközési operátort választunk és figyelembe vesszük, hogy relativisztikus esetről van szó [5]

A párhuzamos irány a mágneses térre (ami az elektromos térrel is párhuzamos) vonatkozik. A fentiek alapján a következő formulához jutunk [5]:

$$\tau \frac{\partial f}{\partial t} + (E_n - 1) \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} = \frac{1 + Z}{2} \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} p_{\perp} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \quad (1.1.3)$$

ahol $E_n = eE_{\parallel}\tau/m_{e0}c$ a normált elektromos tér, τ az ütközési idő a relativisztikus elektronokra, c a fénysebesség, e, m_{e0} az elektron töltése és tömege, Z pedig az ionok töltésszáma. Az egyenlet megoldása során még figyelembe vesszük a Rosenbluth–Putvinski formulát, amely az elfutó elektronok számát egyszerűen egy exponenciális függvénnyel közelíti. Ennek jelentősége az eloszlás függvény normálási feltétele során jelenik meg. Mindezek figyelembe vételével adódik a következő analitikus formula az elfutó elektronokra [5]:

$$f(p_{\parallel}, p_{\perp}, t) = \frac{n_{r0}\alpha}{2\pi c_Z p_{\parallel}} \exp\left(\frac{(E - 1)t/\tau_c - p_{\parallel}}{c_Z} - \frac{\alpha p_{\perp}^2}{2p_{\parallel}}\right), \quad (1.1.4)$$

ahol

$p_{\parallel}$: A mágneses térrel párhuzamos impulzus,

$p_{\perp}$: A mágneses térre merőleges impulzus,

E : Az elektromos térerősség az E_c kritikus térre normálva,

C_Z és τ_c állandók ([5]),

n_{r0} : Az elfutóelektron–mag sűrűség, ami az elsődleges keletkezés során jött létre.

α : Az alábbi módon számolható: $(E - 1)/(1 + Z)$.

A (3.1) fejezetben a Boltzmann–egyenlet (1.1.2) megoldása nem így lesz közelítve. A homogenitás és mágneses Lorentz–erőnek az elektromos Lorentz–erőhöz képesti elhanyagolhatósága miatt redukálódik az egyenlet bal oldala. A jobb oldalon az ütközési operátornak a Fokker–Planck ütközési operátort választjuk. Ekkor a Fokker–Planck egyenlethez (3.1.1) jutunk. Ennek megoldása numerikusan lehetséges. Az elfutó elektronok szempontjából a forrás tartalmazza a másodlagos keletkezést, míg az elsődleges keletkezést az ütközési operátor foglalja magába.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + eE\vec{e} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = C(f) + S \quad (1.1.5)$$

ahol $\vec{e}$ az elektromos tér iránya.

A plazma kinetikai leírása szempontjából tehát a (1.1.4) és a (3.1.1) egyenletek jelentik majd a kiindulópontot.

1.2. Plazmahullámok

Mivel mágneses összetartást akarunk megvalósítani, valamint a plazma fűtése a plazma-árammal történik ezért nagyon fontos a plazma és az elektromágneses tér kölcsönhatásának tisztázása. A leíráshoz alapvetően a plazmahullámokra van szükség, melyeknek nagyon széles irodalma van [6]. A hullámot jellemző fizikai mennyiség lehet az elektromos, mágneses tér-erősség vagy sűrűség, nyomás stb. Az EXEL (extraordinárius elektron) hullám egy plazmában terjedő elektromágneses hullám.

A kvantitatív tárgyaláshoz induljunk ki a Maxwell-egyenletekből, ahonnan következik a hullámegyenlet. Ennek Fourier-térben (térben és időben egyaránt) felírt alakja:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \epsilon \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.2.1)$$

ahol: $\mathbf{k}$ jelöli a hullámszám vektort, ω a hullám frekvenciája, ϵ a dielektromos tenzor, c a vákuumbeli fénysebesség és $\mathbf{E}$ az elektromos térerősség vektor (a hullám amplitúdója).

A (1.2.1) egyenletből az $\mathbf{E}$ vektort kiemelve:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} - n^2 \cos^2 \theta & \epsilon_{12} & n^2 \cos \theta \sin \theta \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} - n^2 & 0 \\ n^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & \epsilon_{33} - n^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (1.2.2)$$

ahol:

ϵ_{ij} a dielektromos tenzor elemei, $n = kc/\omega$, a θ pedig a hullám terjedési iránya és a mágneses tér által bezárt szöget jelenti, az elektromos tér z irányú komponense a mágneses tér irányával párhuzamos.

Az elektromágneses hullám amplitúdóját jelentő térerősség vektor, akkor lehet nullától különböző, ha a mátrix determinánsa nulla. A dielektromos tenzor elemeit a következő közelítés mellett számoljuk:

$$\omega_{ci} \ll \omega_{ce} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ll \omega \quad (1.2.3)$$

Azaz az elektronok ciklotronfrekvenciája jóval nagyobb, mint az ionok ciklotronfrekvenciája (ezért nevezzük elektron hullámnak), de az is látható, hogy ez egy nagy frekvenciás hullám. Mindezek mellett még alkalmazható az un. hideg plazma közelítés is, mert a plazma diszrupció utáni állapotban van. A dielektromos tenzor elemei [7, 6]:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \quad (1.2.4)$$

$$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} \approx \frac{-i\omega_{pe}^2\omega_{ce}}{\omega(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} \quad (1.2.5)$$

$$\epsilon_{33} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (1.2.6)$$

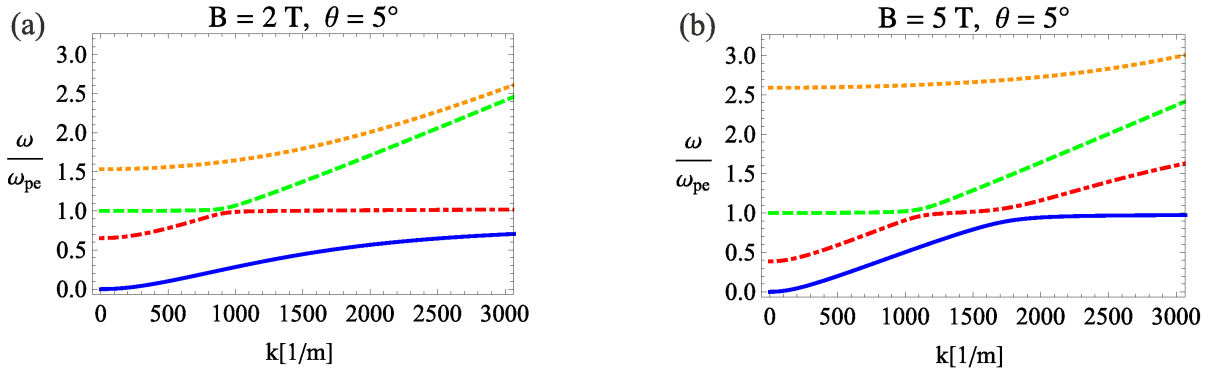
ahol:

ω_{ce} az elektron ciklotronfrekvenciája, míg az ω_{pe} az elektron plazmafrekvenciája.

Behelyettesítve a (1.2.4, 1.2.5 és 1.2.6) egyenletekből a dielektromos tenzor elemeit kapjuk a diszperziós relációt :

$$\begin{aligned} & \omega^8 - \omega^6 (2k^2 c^2 + \omega_{ce}^2 + 3\omega_{pe}^2) + \\ & \omega^4 [k^4 c^4 + 2k^2 c^2 (\omega_{ce}^2 + 2\omega_{pe}^2) + \omega_{pe}^2 (\omega_{ce}^2 + 3\omega_{pe}^2)] - \\ & \omega^2 [k^4 c^4 (\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2) + k^2 c^2 \omega_{pe}^2 (3/2\omega_{ce}^2 + 2\omega_{pe}^2 + 1/2\omega_{ce}^2 \cos 2\theta) + \omega_{pe}^6] + \\ & 1/2k^4 c^4 \omega_{ce}^2 \omega_{pe}^2 (1 + \cos 2\theta) = 0. \quad (1.2.7) \end{aligned}$$

Mint látható ez egy negyedfokú egyenlet az ω négyzetére, aminek 4 megoldása van: egy fűtülő-elektron hullám, az általunk vizsgált EXEL hullám (extraordinárius elektron hullám) és még két optikai hullám amellyel nem foglalkozunk (ezek nem destabilizálhatóak az elfutó elektronok által) [7].



1.2.1. ábra. A képen eltérő mágneses terek mellett láthatók az egyes hullámok. A kék a fűtülő elektron hullám, míg a piros az EXEL hullám.[7]

Kimutatható, hogy ezek közül a leginstabilabb hullám az EXEL (nagyságrendekkel kevesebb elfutó elektron szükséges a destabilizációjához, mint a fűtülő-elektron hullámnál), ezért érdemes vele foglalkozni [7].

A későbbiekben szükség lesz az elfutó elektronok szuszceptibilitására (χ), amely a dielektromos tenzorral a következő kapcsolatban áll:

$$\epsilon = \mathbf{1} + \chi. \quad (1.2.8)$$

Tekintsük a plazmát egy dielektrikumnak, amelyben polarizációs áramok keletkeznek a külső elektromos perturbáló tér hatására. Ekkor az adott részecske típus szuszceptibilitásával a

következő összefüggés írható fel:

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \chi \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.2.9)$$

Fourier-transzformálva térben és időben:

$$\tilde{j}_p = -i\omega \tilde{\chi} \cdot \tilde{E} \quad (1.2.10)$$

Továbbá a $\vec{j}_p$ polarizációs áram kifejezhető az elektromos perturbációhoz köthető elsőrendű eloszlás függvény (f_1) segítségével:

$$\vec{j}_p = q \int d^3p \vec{v} f_1(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (1.2.11)$$

ahol a q a részecske töltése, p az impulzus, valamint v a részecske sebessége. Az elsőrendű és a nulladrendű eloszlás függvény között kapcsolatot lehet keresni a Vlasov-egyenlet (Fokker-Planck-egyenlet + Maxwell-egyenletek) segítségével. Az ezt következő hosszás számolás túlmutat a dolgozat keretein, ezért tekintsük csak a végeredményt. (A részletek a [6] könyvben megtalálhatóak.)

$$\chi^r = \frac{\omega_{pr}^2}{\omega \omega_{ce}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} 2\pi p_{\perp} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{\Omega_e \mathbf{S}_n}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_e}, \quad (1.2.12)$$

ahol

$$\mathbf{S}_n = \begin{bmatrix} \frac{n^2 J_n^2}{z^2} p_{\perp} U & in \frac{J_n J_n'}{z} p_{\perp} U & \frac{n J_n^2}{z} p_{\perp} W \\ -in \frac{J_n J_n'}{z} p_{\perp} U & (J_n')^2 p_{\perp} U & -i J_n J_n' p_{\perp} W \\ \frac{n J_n^2}{z} p_{\parallel} U & i J_n J_n' p_{\parallel} U & J_n^2 p_{\parallel} W \end{bmatrix}, \quad (1.2.13)$$

$$U = \frac{\partial f_r}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\omega} \left(v_{\perp} \frac{\partial f_r}{\partial p_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial f_r}{\partial p_{\perp}} \right), \quad (1.2.14)$$

$$W = \left(1 - \frac{n\Omega_e}{\omega} \right) \frac{\partial f_r}{\partial p_{\parallel}} + \frac{n\Omega_e p_{\parallel}}{\omega p_{\perp}} \frac{\partial f_r}{\partial p_{\perp}}, \quad (1.2.15)$$

ahol:

n a rezonancia foka, f_r az elfutó elektronok eloszlásfüggvénye az elfutó elektron-mag sűrűségére normálva, $\Omega_e = \omega_{ce}/\gamma$ és $z = k_{\perp} v_{\perp}/\Omega$.

A fenti formulák (1.2.12) tetszőleges eloszlásfüggvényre igazak. Az integrál minden esetben elvégezhető a $p_{\parallel}$ szerint. A számítás részletei a függelékben (5.1) megtalálhatók.

A szuszceptibilitások segítségével megperturbáljuk a diszperziós relációra felírt (1.2.7) formulát azáltal, hogy az eredeti szuszceptibilitáshoz hozzáadjuk a jóval kisebb elfutóelektron szuszceptibilitásokat. A nagyságrendi eltérés miatt az új ω megoldás eltérése az előzőhöz képest kicsi, így lineáris perturbációval közelítőleg meghatározható. A kapott $\delta\omega$ egy komplex szám, melynek *imaginárius* része a lineáris növekedési ráta (γ_i).

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_i}{\omega^6 (\omega^2 - \omega_{ce}^2)} = & \operatorname{Im} \left\{ -\chi_{11} \left(\epsilon_{22} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} \right) \left(\epsilon_{33} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} \right) - 2\chi_{12}\epsilon_{12} \left(\epsilon_{33} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} \right) - \right. \\ & \chi_{22} \left[\left(\epsilon_{11} - \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2} \right) \left(\epsilon_{33} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} \right) - \frac{k_{\parallel}^2 k_{\perp}^2 c^4}{\omega^4} \right] - \\ & \left. \chi_{33} \left[\epsilon_{11}^2 - \epsilon_{11} \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2} \right) + \frac{k^2 k_{\parallel}^2 c^4}{\omega^4} + \epsilon_{12}^2 \right] \right\} / P(\omega, k, \theta), \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

ahol

$$\begin{aligned} P(\omega, k, \theta) = & 8\omega^7 - 6\omega^5 (2k^2 c^2 + \omega_{ce}^2 + 3\omega_{pe}^2) + 4\omega^3 [k^4 c^4 + 2k^2 c^2 (\omega_{ce}^2 + 2\omega_{pe}^2) + \omega_{pe}^2 (\omega_{ce}^2 + 3\omega_{pe}^2)] - \\ & 2\omega [k^4 c^4 (\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2) + k^2 c^2 \omega_{pe}^2 (3/2\omega_{ce}^2 + 2\omega_{pe}^2 + 1/2\omega_{ce}^2 \cos 2\theta) + \omega_{pe}^6]. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Ekkor a síkhullám egyenletbe ezt beírva:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = E_0 \cdot \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega \cdot t - \delta\omega \cdot t)] \quad (1.2.18)$$

Látható, hogy az amplitúdó csillapodását vagy növekedését eredményezi a $\delta\omega$ imaginárius része előjeltől függően. A hullám energiája (W_k) az amplitúdó ($E_0 \cdot \exp(t \cdot \operatorname{Im}\delta\omega)$) négyzetével arányos, ezért a hullámenergia időbeli fejlődését a következő differenciálegyenlet írja le:

$$\frac{dW_k}{dt} = 2 \cdot \gamma_i \cdot W_k \quad (1.2.19)$$

A későbbiekben szó lesz ennek az egyenletnek a numerikus megoldásáról, ezért szükség van kezdeti feltételre is, ami a plazmaháttér (ebből emelkedik ki a hullám) termikus fluktuációinak energiája:

$$W_{k0} = k_B \cdot T \quad (1.2.20)$$

A teljes növekedési ráta kiszámításához még szükséges a konvekciós- (γ_v) és az ütközéses csillapítás (γ_d) figyelembe vétele is. A konvekciós csillapítás azt jellemzi, hogy a hullám térbeli szétterjedése miatt is csökken a hullám energiasűrűsége, míg az ütközéses csillapítás a háttér ionok és a hullám ütközése során bekövetkező energia veszteséget veszi figyelembe. Mindkét esetben az (1.2.18) egyenletnél közölt gondolatmenet analógiájához illő effektív értéket ad meg a γ_d és a γ_v . Így az effektív növekedési ráta: $\gamma = \gamma_i - \gamma_d - \gamma_v$. A növekedési ráta jellemzi a hullám energiájának változását. Ha az értéke pozitív, akkor a hullám energiája nő és ekkor azt mondjuk, hogy az elfutó elektronok destabilizálják a hullámot. Ellenkező esetben a hullám elhal [8, 7].

1.3. A kvázilineáris kölcsönhatás

A perturbációs analízis során kiderült, hogy az (1.2) fejezetben említett hullámok közül a leginstabilabb hullám az EXEL hullám, mert ennek a legnagyobb a növekedési rátája [7]. A legfontosabb kérdés, hogy ez a hullám keletkezése után milyen módon hat az elfutó elektronok eloszlásfüggvényére. A hullám és a részecskék között lezajló folyamat az ún. hullám-részecske kölcsönhatás, ami egy rezonáns kölcsönhatás. A részecskének és a hullámnak fázisban kell lennie, ahhoz, hogy energiacsere történhessen. Ezt matematikailag az (1.3.4) egyenletben levő Dirac-delta függvény jelzi. A hullám hatását egy részecskeeloszlásra vizsgáljuk, ezért rezonáns hullámok egy tartománya keletkezik, amik az elfutó elektroneloszlás egy impulzustartományával hatnak kölcsön. A kvantitatív leírás során a folyamatot ún. kvázilineáris diffúzióként kezeljük, mivel teljesül az alábbi három feltétel [9, 10]:

- a hullámok inkoherensek és széles spektrumúak (ne fogódhassanak be a részecskék a hullámba)
- a hullámok amplitúdója elegendően kicsi (a nulladrendű eloszlásfüggvényre elhanyagolható legyen a hatás a lineáris válaszmélet keretein belül)
- a növekedési illetve a csillapítási ráták lényegesen kisebbek a hullám frekvenciájánál.

Kvázilineáris diffúzió esetén az eloszlásfüggvény változását a következő formula adja meg [6]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\pi e^2}{m_{e0}^2 c^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 k \hat{\Pi} p_{\perp} \delta(\omega_k - n\Omega - k_{\parallel} p_{\parallel} c / \gamma) \frac{|\psi_{n,k}|^2}{\omega^2} p_{\perp} \hat{\Pi} f \quad (1.3.1)$$

ahol

$$\hat{\Pi} = \frac{\omega - k_{\parallel} p_{\parallel} c / \gamma}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} c}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \quad (1.3.2)$$

és az $|\psi_{n,k}|$ a hullám polarizációjától és az elektromos térerősségtől függő mennyiség. Ha figyelembe vesszük, hogy az eloszlásfüggvény erős anizotrópiát mutat, valamint az ultrarelativisztikus közelítést, akkor a diffúziós egyenlet egyszerűsödik [9, 10]:

$$\frac{\partial f(p_{\parallel}, p_{\perp}, t)}{\partial t} = \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \left(p_{\perp} D(p_{\parallel}, t) \frac{\partial f(p_{\parallel}, p_{\perp}, t)}{\partial p_{\perp}} \right) \quad (1.3.3)$$

ahol D jelöli az ún. diffúziós operátort:

$$D(p_{\parallel}, t) = \frac{\pi e^2 \omega_{ce}^2}{2 \varepsilon_0 m_{e0}^2 c^2 p_{\parallel}^2} \int d^3 k \frac{W_k(t)}{\omega^2} P(\omega_0, k, \theta, p_{\parallel}) \delta(\omega + \omega_{ce}/p_{\parallel} - k_{\parallel} c) \quad (1.3.4)$$

Bevezethetünk egy dimenziótlant idő változót az alábbi módon:

$$\tau(p_{\parallel}, t) = \int_0^t dt' D(p_{\parallel}, t') \quad (1.3.5)$$

Így a diffúziós egyenlet az alábbi egyszerű formulára redukálódik:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} p_{\perp} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}}, \quad (1.3.6)$$

amely nagyon hasonlít az analitikus eloszlásfüggvény meghatározása során felírt Boltzmann–egyenlet megfelelően közelítő alakjának jobb oldalával, ami a szórásból adódik [5]:

$$\tau_c \frac{\partial f}{\partial t} + (E - 1) \cdot \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} = \frac{1 + Z}{2} \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} p_{\perp} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \quad (1.3.7)$$

A megoldása (1.3.6) differenciál egyenletnek az alábbi alakban kereshető:

$$f(p_{\perp}, \tau) = \frac{C_1}{2\alpha\tau + C_2} \exp\left(-\frac{\alpha p_{\perp}^2}{2(2\alpha\tau + C_2)}\right) \quad (1.3.8)$$

A (1.3.6) egyenlet azért tudja megadni az időfejlődését a diffúzióknak, mert az időskálák szétcsatolódnak, hiszen a diffúziós folyamat nagyságrendekkel gyorsabb, mint a szóródásból adódó változási sebesség. Emiatt az eredetileg megadott (1.1.4) analitikus formula kezdőfeltételnek tekinthető a diffúziós folyamat időskáláján nézve (kevesebb, mint 100-ad része az EXEL hullám destabilizációjához szükséges elfutó elektronok keletkezéséhez szükséges időnek). Ekkor a C_2 helyére $p_{\parallel}$ kerül, míg a C_1 helyére a (1.1.4) megfelelő együtthatója, az időfüggő exponenciálissal együtt. Végül kapjuk, hogy:

$$f(p_{\parallel}, p_{\perp}) = \frac{n_{r0}\alpha}{2\pi C_Z \phi(p_{\parallel}, t)} \exp\left(\frac{(E - 1)t/\tau_c - p_{\parallel}}{C_Z} - \frac{\alpha p_{\perp}^2}{2\phi(p_{\parallel}, t)}\right), \quad (1.3.9)$$

ahol $\phi = 2\alpha\tau + p_{\parallel}$.

A numerikus számításokhoz (1.4 rész) szükséges a (1.3.4) diffúziós operátor kiszámítása, illetve kezelhetőbb alakra hozása. Az azimutális szimmetriát kihasználva gömbi-koordinátarendszerben:

$$D(p_{\parallel}, t) = \frac{\pi^2 e^2 \omega_{ce}^2}{\epsilon_0 m_{e0}^2 c^2} \int d\theta \left(\frac{W_k(t)}{p_{\parallel}^2 \omega_0^2(k, \theta)} P(\omega_0, k, \theta, p_{\parallel}) \frac{k^2 \sin\theta}{\left| \frac{d\omega_0}{dk} - c \cos\theta \right|} \right)_{k=k_{res}}, \quad (1.3.10)$$

ahol k_{res} megoldása a rezonancia feltételnek ($\omega_0(k, \theta) + \omega_{ce}/p_{\parallel} - kc \cos\theta = 0$) adott k esetén. A numerikus számításokhoz szükséges még az eloszlásfüggvényt levágni egy bizonyos $p_{\parallel}$ felett, mivel az elektromos tér a valóságban csak véges ideig áll fenn és az ún. közeli ütközések miatt is van energiaveszteség, tehát az elfutó elektronok energiája véges kell legyen. Ennek értékét a szimuláció során $p_{max} = 30$ -nak választottuk, ami körülbelül 15 MeV-nek felel meg [11, 12]. A

levágást egy Fermi-függvény segítségével valósítottuk meg:

$$f(p_{\parallel}, p_{\perp}) = \frac{n_{r0}\alpha}{2\pi C_Z \phi(p_{\parallel}, t)} \exp\left(\frac{(E-1)t/\tau_c - p_{\parallel}}{C_Z} - \frac{\alpha p_{\perp}^2}{2\phi(p_{\parallel}, t)}\right) \left(\exp\left(\frac{p_{\parallel} - p_{max}}{\sigma_p}\right) + 1\right)^{-1}, \quad (1.3.11)$$

ahol σ_p a levágás szélessége, esetünkben 1 volt az értéke.

1.4. A kvázilineáris kölcsönhatást számoló rutin

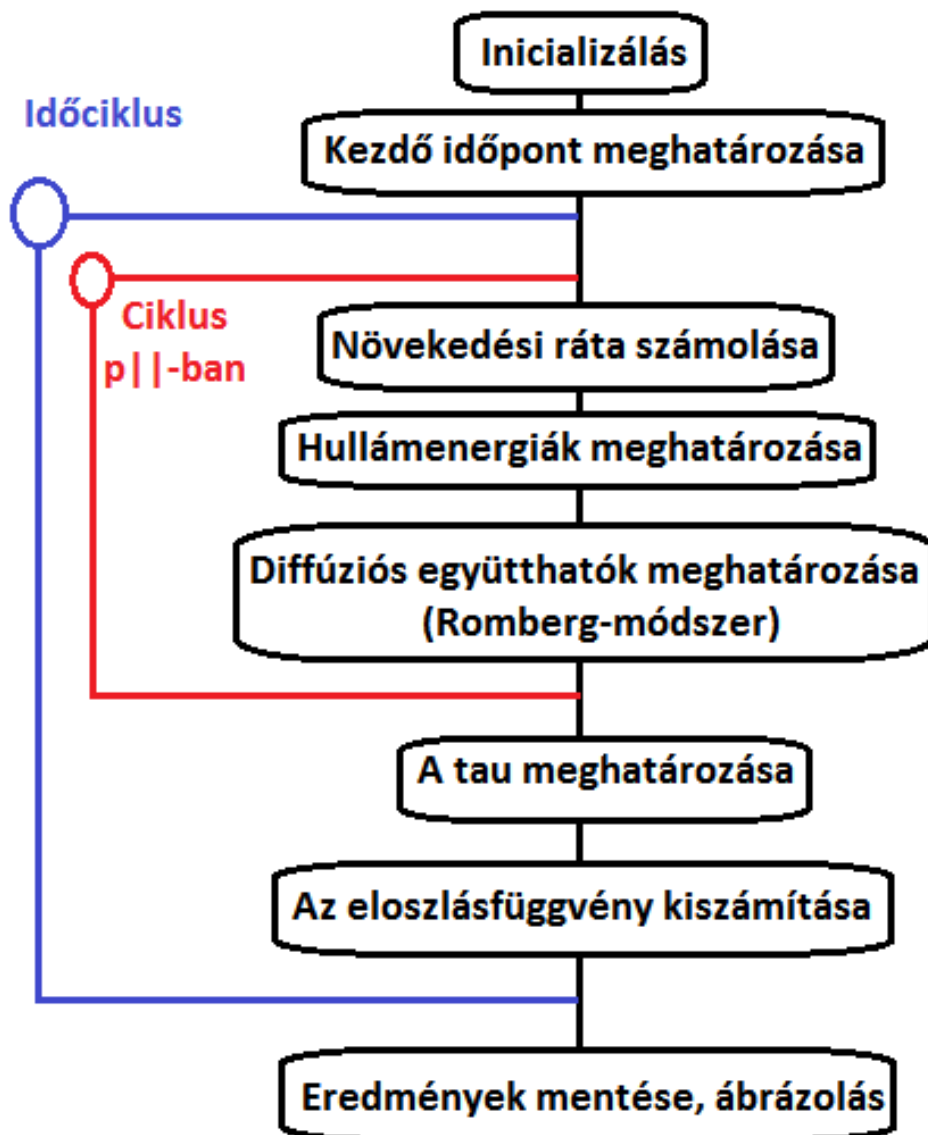
A kölcsönhatás miben létének megértéséhez és vizsgálatához láthatóvá kell tenni az eloszlás függvényben, valamint a releváns mennyiségekben (növekedési ráta, hullámenergia stb.) végbemenő változások időbeli fejlődését. Mivel az időbeli evolúcióra nem áll rendelkezésre olyan egzakt formula, ami biztosítaná, hogy bármely időpontban pusztá behelyettesítéssel megkapjuk a vágyott értékeket, a megoldáshoz numerikus eszközök szükségesek. A kutatásba való bekapcsolódásomkor már rendelkezésemre állt egy, a fenti kölcsönhatást modellező MATLAB program első, kevéssé tesztelt verziója amit Kómár Anna és Dr. Pokol Gergő készítettek [7, 4]. A jelen alfejezet célja bemutatni a rutin működését.

1.4.1. A program vázlatos működése

Az (1.4.1) ábrán is látható, hogy a programnak a két leglényegesebb ciklusa az idő szerinti iteráció, valamint a $p_{\parallel}$ szerinti iterációk. Az inicializálás során definiálja a program a szükséges változókat, valamint kiszámolja megadott képletek alapján a folyamat során állandó mennyiségeket. Az inicializálást követően az első lépés kiszámolni az egyes $p_{\parallel}$ értékekre a hullám destabilizációjához szükséges időt, mivel a diffúziós folyamat csak ez után várható. Ennek meghatározása után indul el az időszerinti iterálás. Minden időlépésen belül egy belső ciklus végig megy az összes $p_{\parallel}$ -ra és megnézi, hogy van-e már destabilizáció (azaz a növekedési ráta pozitív) valahol, ha igen, akkor megvizsgálja mely θ értékek esetén teljesül. További szempont, hogy van-e releváns hullámenergia (a plazma termikus fluktuációiból származó kinetikus energiával minimum azonos nagyságrend). Az így kapott θ tartományhoz a rezonancia feltételt kezelő függvény hozzárendeli a rezonáns k hullámszám értékeket. Ezt követően a (1.3.10) formula θ szerinti integrálját Romberg-módszer (lásd a 45. oldalt a függelékben) segítségével elvégezve, megkapjuk a diffúziós állandó vektorát, majd ennek segítségével meghatározzuk a τ értéket egy iterációs lépésből. Ezzel a belső ciklus véget ér. Az analitikus eloszlás függvénybe (1.3.11) behelyettesítve a τ -t, majd azt ábrázolva véget ér az idő szerinti iteráció és az egész kezdődik előről.

1.4.2. A meghívott függvények

Az előbbi fejezetben említett lépések egy részét külön függvények végzik. A program meghív egy függvényt a növekedési ráta számításához (growth), ami meghív egy függvényt a lineáris növekedési ráta számításához (gamma). A diszperziós reláció megoldását is külön függvény adja meg (omegaEX), valamint a rezonancia feltétel megoldása is egy külön rutin (resvector). Az integrálás (integralDiff2) és a deriválás (differentiation) is külön történik.



1.4.1. ábra. A program működésének vázlatos rajza.

1.4.3. A program változókészlete

A program önálló függvényeket hív meg és az egyes függvények közötti információ cserét globális változók biztosítják. Az átláthatóságot megkönnyítendő a program változóit osztályozom: fizikai változók, technikai paraméterek és operatív változók. Az alábbiakban ezeket sorra vesszük.

Fizikai változók

Ide azokat a változókat sorolom, amelyek a plazma fizikai jellemzéséhez szükségesek, de

a fizikai változók közé sorolom még az univerzális állandókat (pl.: vákuum permittivitás, permeabilitás, Boltzmann-állandó, elektron töltése, tömege stb.).

- Hőmérséklet (ion hőmérséklet, elektron hőmérséklet)–Az ion hőmérsékletet és az elektron hőmérsékletet egyenlőnek tekintjük. Ennek magyarázata, hogy az általunk vizsgált hőmérséklet tartományban (5 eV–100 eV) az elektronok és az ionok között elég sok ütközés zajlik, ezért az energia ugyanúgy oszlik el az ionokon és az elektronokon.
- Sűrűség (ion sűrűség, elektron sűrűség)–A megjelölt sűrűségek azonosak. Egyszeres ionizációt tételezünk fel. Jellemző érték: $10^{18} - 10^{20} \text{ 1/m}^3$.
- Mágneses tér (külső tér, ezzel hat kölcsön a plazma) – Jellemző értékek: 2 – 5 T.
- Elektromos tér (külső tér, ezzel kölcsönhat a plazma) – Tipikus érték: 40 V/m.

Ezek a paraméterek adják a program bemenetét.

Technikai paraméterek

A megfelelő pontosságú eredményekhez illetve egyes műveletekhez (pl.: deriválás, integrálás) szükségesek. Most felsorolom és röviden jellemzem ezeket annak érdekében, hogy később hivatkozhasak rájuk.

- *integráló paraméter (interr)*: A Romberg-szabály segítségével elvégzett integrálás pontosságát szabályozza.
- *időlépés p.*: A fizikai időben való haladás sebessége hogyan aránylik a növekedési ráta reciprokához.
- *maxidőlépés*: A fizikai időben ennél nem engedünk gyorsabb haladást az iterációk során.
- *pozitív növekedési rátát biztosító p. (factor)*: Az időfejlődés követése attól az időponttól indul, ahol már az egyik párhuzamos impulzus esetén a növekedési ráta pozitív. Ennek megadása zérushely kereséssel történik, de numerikus hiba miatt nem kereshetünk pontosan nullát. Az eltérést jellemzi annak az ütközéses csillapításhoz (12. oldal) való viszonyán keresztül.
- *zérushely keresés kiindulópontja (mintime0)*: A fent említett függvény ennek az időpontnak a közelében keresi a zérushelyet.
- *dkderiv*: A k (hullámszám) szerinti deriváláshoz szükséges érték a differencia képzésben.
- *dthetaderiv*: A θ szerinti deriváláshoz szükséges az előzőhöz hasonlóan.
- *deltatheta*: A rezonáns k értékeket kiszámolva egy adott felbontású griden ($p_{\parallel}$ és θ által kifeszített rácsozat) egy mátrixot kapunk. A θ felbontását a deltatheta szabályozza.

- *thetastep*: A program által használt szögtartomány finomságát szabályozza.

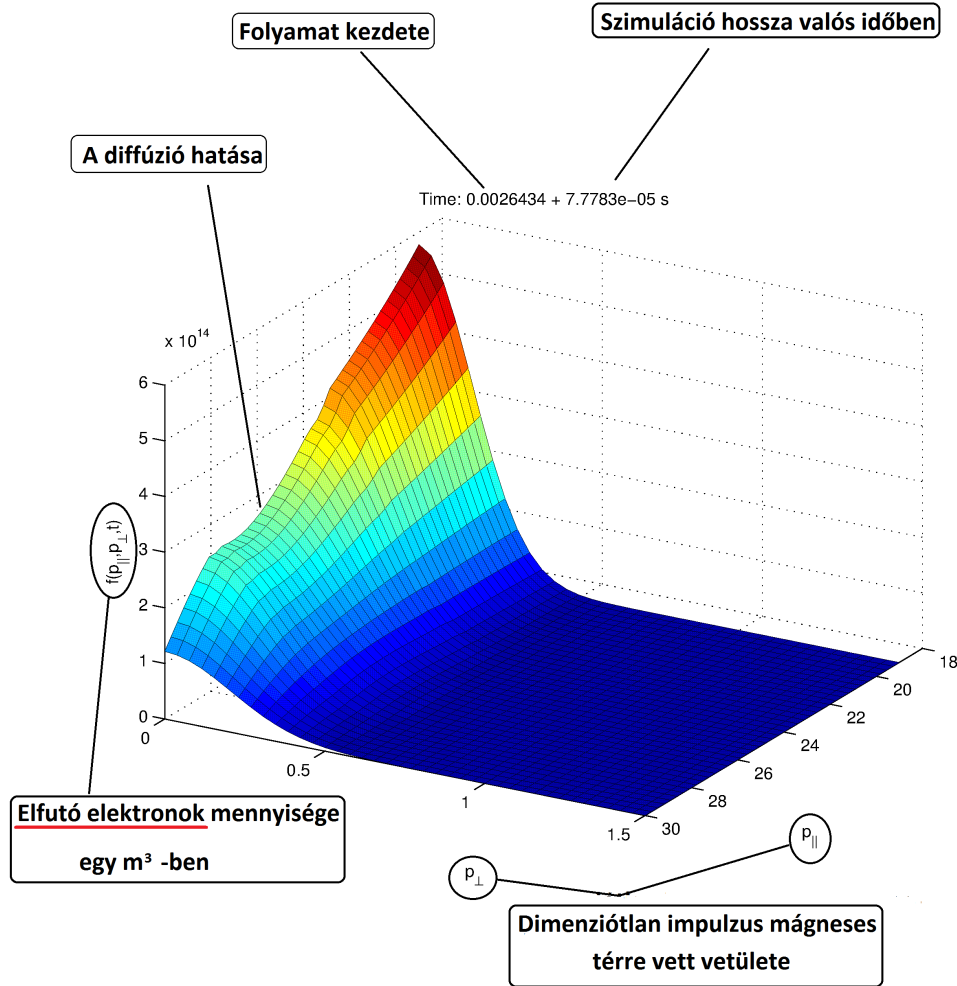
Operatív változók

Adatokat tárolnak, annak érdekében, hogy az egyes iterációk során bekövetkező változásokat kezelni lehessen.

- *hullámenergia* (wk): Cella amely elraktározza minden $p_{\parallel}$ (B -vel párhuzamos impulzus) és minden időlépésre a hullám energiáját egy mátrixban. A mátrix elemei az egyes hullám-szám és terjedési szög értékekhez tartozó hullámenergia.
- *növekedési ráta mátrix* (*growthresmtx*): A növekedési ráta vektorok gyűjteménye, idő és $p_{\parallel}$ alapján.
- *szögtartomány vektor* (*theta*): Az iterációk során a kvázilineáris kölcsönhatáshoz azon irányú hullámokat kell számba venni, amelyeknek pozitív a növekedési rátája vagy legalább elegendően nagy hullámenergiával rendelkeznek. Ez a vektor azokat a szögeket tartalmazza megfelelő (az integrálás pontosságához) lépésközzel amelyek teljesítik e kritériumot.
- *a rezonáns k értékeket tartalmazó mátrix* (*resmatrix*): Adott $p_{\parallel}$ -ra és θ szögekre tartalmazza a rezonáns k értékeket.
- *diffúziós együttható* (D): Mátrix amely minden időlépésre és $p_{\parallel}$ értékre elraktározza a diffúziós együttható értékét.

Vannak még egyéb segéd vektorok, amelyek a fentiek kezeléséhez (kiszámítás, értékátadás, összehasonlítás) szükségesek. Ezeket nem részletezem.

1.4.4. A program kimenete



1.4.2. ábra. Az ábrán az elfutó elektronok mennyisége látszik m^{-3} egységekben.

Az (1.4.2) ábra mutatja, hogyan jelenítjük meg az effektus hatását az impulzus térben. A helyfüggés nem szerepel, mivel a plazmát homogénnek és végtelennek tételeztük fel az elméletben. Jól látható, hogy a függvény erősen anizotróp az elektromos tér irányában. Ez a keletkezési mechanizmusok (ld. 1.1 rész) alapján jól érthető. A jelölt bemélyedésnél az elektronok kiszóródnak a nagyobb merőleges impulzusú tartományba. Az is látható, hogy a destabilizáció kezdetéig eltelt idő (az elektromos tér bekapcsolása óta) lényegesen hosszabb a diffúzió időskálájánál, összhangban a 1.3–dik oldalon mondottakkal.

2. fejezet

A kvázilineáris kölcsönhatást számoló rutin gyorsítása és tesztelése

Dolgozatomban két problémát vizsgáltam. Az egyik, hogy a (1.4) alfejezetben részletezett program nagyon lassú, ezért nem teszi lehetővé a hosszabb futásokat, amik alatt már jól kirajzolódna a kölcsönhatás. A program numerikus stabilitása szintén lényeges kérdés, ehhez sok futtatás kell. Ugyanakkor lényeges tesztelni a fizikai paraméterek változtatásának következményeit az optimális paraméterek mellett. A másik probléma, hogy az általunk használt eloszlásfüggvény (1.1.4) csak nagy és állandó elektromos terek esetén érvényes, ami a valóságban nem teljesül. Ezért a CODE nevű kinetikus egyenlet megoldó programba beleintegráltam a kvázilineáris kölcsönhatást. A következőkben ezekről lesz szó.

2.1. A program felgyorsítása

Alapvetően háromféle módszert próbáltam meg a program felgyorsításának elérésére. A következőkben ezeket sorra vesszük. A 1.4 fejezetben bevezetett fogalmakat használni fogom, hogy részletesen leírhassem az eljárásokat.

1.módszer

Megkerestem a program leglassabb és legtöbbet meghívott részét. Elsőként az 'omegaEX' függvényre gyanakodtam. Ezért az 'omegaEX' függvény segítségével kiszámoltam egy k (hullámszám) és θ griden az egyes értékpárokhoz tartozó ω -kat. Az eredményt az 'omegamtxEX' nevű mátrixban tároltam el. Ezt a műveletet még az inicializálás részben elvégeztem. A ciklusokban az 'omegaEX' függvény helyére egy 2D-ös interpoláló rutin került (MATLAB-ban: interp2). Így a sebességcsökkenést az 'interp2' rutin és az 'omegaEX' függvények futásidőbeli különbségétől vártam. Ennek vizsgálatához megnéztem, hogy különböző felbontású mátrixok és különböző típusú interpolációk esetén, mennyi a futás ideje és a kapott eredmények pontossága. Utóbbit az 'omegaEX'-hez (ezt vettem pontosnak) való hasonlításal kaptam. Erre egy külön programot írtam *optimaliz* néven. Az eredmény az lett, hogy a legnagyobb felbontású mátrix (k -ban 50, θ -ban 500-as felbontás) pontossága 3 százalék felett marad, valamint a program

nagyságrendileg ugyanannyi idő alatt futott le. A lefutási idő csökkentése érdekében rontottam a mátrix felbontását 10×10 környékére. Ekkor a pontosság romlott 10 százalék körüli értékre, de a legmeglepőbb, hogy a futási idő még mindig az 'omegaEX' futásidejével vetélkedett. Ezért ezt a módszert fel kellett adni.

2.módszer

Az első módszerhez hasonlóan megkerestem a program további olyan részeit, amik lassúnak tűntek. A 'resvector' nevű függvény szintén nagyon lassú volt és nagyon sokszor (1000 – *es* nagyságrendű lépésszám esetén kb. milliószor) volt meghívva. Az eljárás ugyanaz volt, mint az előbb, így gyakorlatilag csak az előző megoldásban át kellett neveznem az egyes változókat és függvényeket. A függvény jellege miatt csak 1 D-ós interpoláció (interp1) kellett. Az 'omegamtxEX' helyére a 'resmatrix' került, míg a 'resvector' helyére az 'interpRES' függvény. Az interpoláció típusa 'cubic' volt, mert pontosságban és sebességben ez adta a legjobb eredményt. Az új függvény futásideje kb. a 10-ed része az eredetinek. Ezért a teljes időciklus futása körülbelül harmadannyi ideig tart. A számítás hibája csak néhány százalék.

3.módszer

Kísérletet tettem az interpoláció megszüntetésére oly módon, hogy a megfelelő szögtartomány kiszámítására alkalmazott programrészben megpróbáltam az egyes θ értékeket előre meghatározni, melyeknél az 'interpRES' meg lenne hívva. Ez azért tűnt megvalósíthatónak, mert az egyes θ tartományok mindig ugyanannyi részre vannak osztva. A mélyebb vizsgálat azonban rámutatott arra, hogy a tartomány kezdő és végpontja teljesen kiszámíthatatlanul változik, ezért nem lehet előre megmondani, mely értékeket kell kiszámolni. A szögtartomány esetleges kényszerítése egy előre definiálthoz az integrálás pontosságát veszélyezteti, így nem jelent jobb alternatívát.

2.2. A program numerikus stabilitásának tesztelése

A legtöbb esetben a választott numerikus paraméterek értékeinek megválasztása nem triviális. Ezért az elsőre jónak tűnő beállításokat ellenőrizni kell. Ennek érdekében a következő módszert alkalmaztam. Az eredeti beállítást tekintjük referenciának. A plazma paraméterei ($B = 2T$, $n = 5 \cdot 10^{19} \text{ m}^3$, $E = 40V/m$, $T = 20eV$). Minden egyes futtatás során megváltoztatjuk az egyik paraméter értékét. A változtatást a referenciához képest mindkét irányba elvégezzük körülbelül kettes alapú logaritmikus skálán. A kapott eredményeket összehasonlítjuk a referenciával. A cél, hogy a paramétereknek olyan értékeit találjuk meg, ahol a fenti eljárást alkalmazva kicsi az eltérés a referenciához képest. Ez lesz az optimális paraméter szett. Az alábbi táblázatban (2.1 táblázat) megtalálhatók az egyes paraméterek és azok megváltoztatott értékei, amelyekre futtattam.

	referencia	érték1	érték2
mintime0	1e-4	2e-4	5e-5
interr	1e-2	2e-2	5e-3
	1e-2	5e-2	1e-1
factor	1e-3	2e-3	5e-4
	1e-3	1e-5	1e-6
deltatheta	2e-3	5e-3	1e-3
thetastep	5e-3	1e-2	2e-3
dkderiv	1	2	5e-1
dthetaderiv	1e-3	2e-3	5e-4
maximumdt	5e-5	1e-4	1e-5
thetatartom	1.0-1.4	0-1.57	0-3

2.1. táblázat. A numerikus stabilitás vizsgálata során elemzett paraméterek.

Mindegyik programnál: A párhuzamos impulzus momentum maximális értéke 30, a vizsgált tartomány [23, 30], amit 33 részre osztunk egyenletesen. A lépés szám (az időbeli iterációk száma) 500. A mérőleges impulzus értéke az következő tartomány 40 részre történő egyenletes felosztásával keletkezik: [0, 1.5]. A következőkben végig vesszük az egyes változók jelentését és a vizsgálat eredményét, amely a (2.2) táblázatban van összefoglalva. A kék színű számok mutatják, a referencia és a vizsgált paraméter megváltoztatásával kapott eredmény összehasonlításához vett időpontok eltérését. Egy összehasonlítás akkor releváns, ha ez az érték nagyságrendben kisebb, mint 5e-8 s, mert ez felel meg egy iterációs lépés időtartamának. A piros színű számokat a következőképpen kapjuk: $\max \frac{|referencia - változtatott|}{referencia} \cdot 100$. Tehát százalékot jelentenek. Ennek értékét össze kell vetni egy folyamat alatt a kvázi-lineáris kölcsönhatás okozta változással. Ennek értéke 450 %.

Paraméter	Érték	Maximális eltérés (s, %)		Érték	Maximális eltérés (s, %)	
mintime0	2e-4	2e-16	0.25	5e-5	2e-16	0.25
interr	2e-2	0	0.22	5e-3	0	0.12
interr	5e-2	0	0.4	1e-1	0	0.4
factor	2e-3	4e-12	1.8	5e-4	2e-8	9.4
factor	1e-5	2e-5	80	1e-6	1e-3	81
deltatheta	5e-3	2e-19	6e-2	1e-3	4e-19	7e-2
thetastep	1e-2	5e-18	1	2e-3	2e-8	6e-3
dkderiv	2	3e-11	2e-6	5e-1	7e-12	6e-7
dthetaderiv	2e-3	2e-10	2e-5	5e-4	4e-11	4e-6
maximumdt	1e-4	0	0	1e-5	0	0
thetatartom	0-1.57	2e-16	5e-2	0-3	2e-16	5e-2

2.2. táblázat. A numerikus stabilitás vizsgálata során kapott eredmények. A kék színű számok a referencia és a megváltoztatott scenáriók összehasonlítási időpontjai közötti eltérést jelentik. A piros számok százalékban adják meg a kettő közötti maximális relatív eltérést.

mintime0 (zérushely keresés kiinduló pontja)

A kvázi-lineáris diffúzióhoz szükség van a pozitív növekedési rátára vagy legalább arra, hogy a hullám energiája elegendően nagy legyen. Amikor a folyamatot időben szemléljük, akkor a program futásának időtartama lényegesen csökkenthető, ha meghatározzuk az egyes $p_{\parallel}$ értékekhez tartozó azon időpontokat amikor a növekedési ráta már pozitív. Azt a $p_{\parallel}$ értéket, amire a legkisebb ez az időpont, a legrezonánsabb $p_{\parallel}$ érték. A fenti értékek meghatározása a MATLAB 'fzero' nevű függvénye segítségével történik, amelyben be kell állítani egy értéket (mintime0), hogy minek a közelében keresse a vizsgált függvény zérushelyét. Ebből a gondolatmenetből arra következtethetünk, hogy ez a paraméter nem okozhat változást. Ez a táblázat alapján igazolást nyer. Hiszen a maximális érték mindkét irányban a 0.25%, és ez a különbség kis $p_{\perp}$ -nél van körülbelül a legrezonánsabb $p_{\parallel}$ -nél, ahol a legnagyobb érzékenység várható. A többi helyen az eltérés nagyon kicsi, ezért erre a paraméterre stabil.

interr (integrálóparaméter)

Az (1.3.10) egyenlet numerikus implementációja a Romberg-módszer alkalmazásával történik. Az integrál kiszámításának pontosságára ad megkötést ez a paraméter, ezért fontos a jó beállítás. Az ábrák alapján a fenti gondolatmenethez hasonlóan elmondható, hogy itt sem történt releváns változás. Az is feltűnő, hogy a paramétert nagy értékekre beállítva sem kapunk drasztikus eltérést, ami a későbbiekben a CODE-nál előnyt jelenthet, mivel ennek a programnak a bemeneti paraméterekre jóval nagyobb az érzékenysége.

deltatheta

Ez a paraméter az 'interpolRES' függvény 'resmatrix' nevű mátrixában a θ vektor felbontását szabályozza. Ez minél kisebb, annál rövidebb lehet a program futásideje. A táblázat szerint itt kicsik az eltérések. A 0.01-ra (ez nincs a táblázatban) már jelentős az eltérés. Ennél durvább felosztás nem használható.

thetastep

A program által figyelembe vett szögtartomány lépésközeinek nagyságát adja meg. A θ csökkenése során nem látunk lényegi változást. Azonban fontos, hogy itt az összehasonlító program az egyik esetben csak elég távoli időpontokat talált ($2e-8$ s). A növekedés eredményez komolyabb, nagyobb tartományra kiterjedő változást, ezért ezt a paramétert az optimálisra való hangolás során nem érdemes tovább növelni.

dkderiv

A k szerinti deriváláshoz kell. Itt nem veszünk észre változást a várakozásnak megfelelően.

dthetaderiv

A θ szerinti deriválásokhoz szükséges. Itt sincs változás.

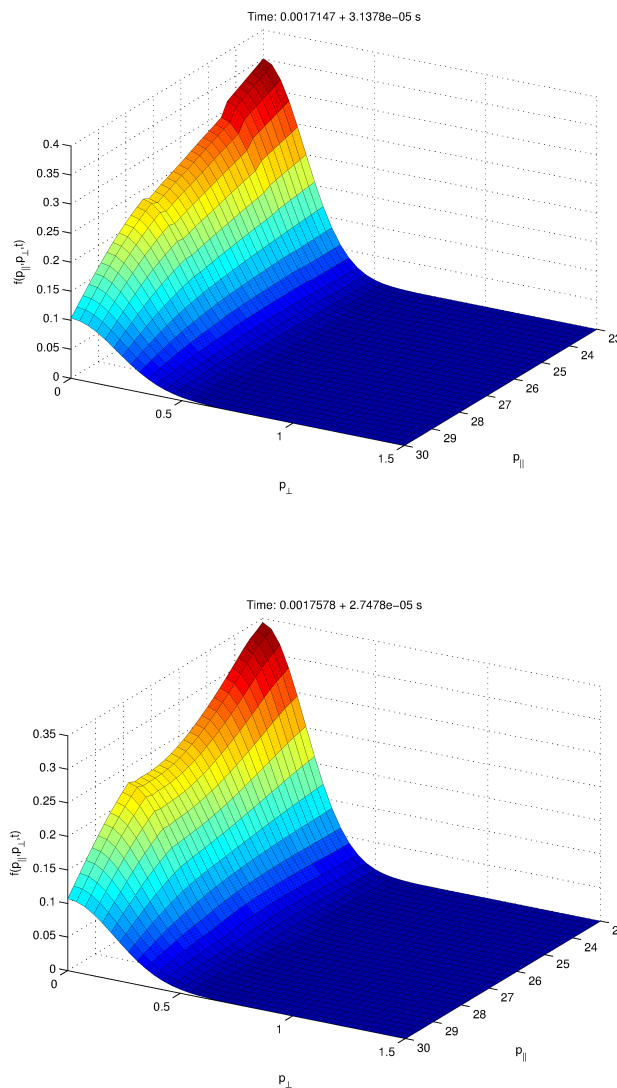
thetatartom

A figyelembe vett szögtartományt ezzel állítjuk be. A hullámenergiánál előfordulhat, hogy szélesebb szögtartományban lesz releváns, mint amit figyelembe vettünk. Itt nem látunk változást, de a későbbiekben ezt szélesre kell választani. A szélesítés hátránya, hogy ahányszor szélesebb ez a tartomány, annyszor tovább fut a program. A későbbiekben a 0–1.57 lesz az ideális.

maximumdt (maxidőlépés)

Meghatározza az időlépés maximális értékét egy iteráció során. Ez egy biztonsági feltétel, hogy a folyamat akkor se menjen túl gyorsan, ha a növekedési ráta nagy. A fentiek alapján, úgy tűnik, hogy ez a paraméter teljesen hatástalan, de a biztonság kedvéért benne hagytuk a programban.

factor (pozitív növekedési rátát biztosító p.)



2.2.1. ábra. A referenciában factor = 5e-5, a felső ábrán: 1e-4, az alsó ábrán: 1e-5.

Ez a paraméter nagy meglepetést okozott, mert mint az ábrákon látható, a lépcső helyett egy folytonos völgyet kaptunk. Az optimális paraméter szett esetén olyan paramétertartomány kerestem, ahol a végeredmény nem függött a paraméter értékétől és ezen a tartományon lépcső nélküli eloszlásfüggvényt kaptam. Ennek az lehet a magyarázata, hogy a D -t integráló programrészbe való belépés feltételét ez a paraméter megszabja. Tehát minél kisebb, annál jobban, finomabban tudják követni az egyes $p_{||}$ -ekhez tartozó destabilizációs ciklusokat. Ezért a korábban jellemző platók eltűntek. Látható a táblázatban, hogy a kisebb 'factor' értékekhez tartozó eltérés már 80% körül van. Ez várható, mivel a képen is jelentős a különbség. Az is látható, hogy $1e-5$ alatt nincs további változás. Ezt későbbi futtatások megerősítették.

Végül az alábbi táblázat foglalja össze, hogy mi a választott optimális paraméter beállítás:

dkderiv	dthetaderiv	interr	factor
2	2e-3	1e-2	1e-6
deltatheta	thetatartom	mintime0	maximumdt
5e-3	0–1.57	1e-4	5e-5

2.3. táblázat. Az optimális paraméter szett adatai.

2.3. A fizikai paraméterektől való függés

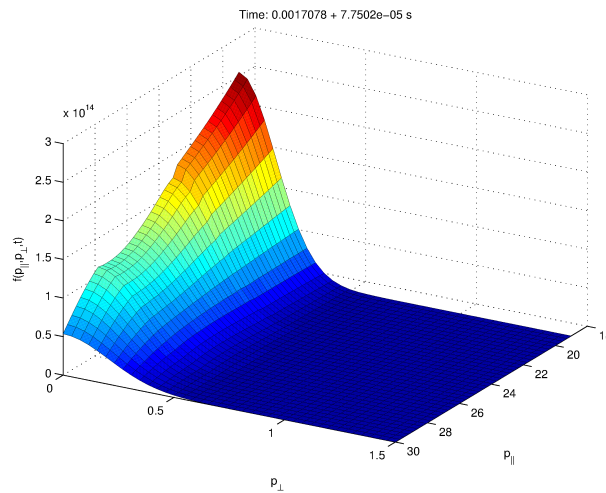
A munkám talán legfontosabb része volt, hogy megvizsgáljam az egész folyamat fizikai paraméterektől való függését. Az alábbiakban az optimális technikai paraméterek mellett relatíve hosszú futtatások eredményei láthatóak. Minden paraméternél két irányt vizsgáltam, ha növelem illetve ha csökkentem az egyes paraméterek értékét. Itt is ugyanaz az eljárás, mint a numerikus paramétereknél, mindig csak egyet változtatok és annak hatását vizsgálom. Az egyes paraméterek hatását a folyamatot leginkább jellemző adatok összehasonlításával kapjuk. A folyamat kvázilinearitása miatt az egyes paraméterek hatása nem triviális. Ezért ebben a fejezetben többnyire konklúziók lesznek.

Referencia

Az egyes paraméterek kiválasztásában a ma működő fúziós berendezések tipikus értékeit vettük alapul. A referenciának nevezetesen a JET paraméterek szolgáltak. Ezek pedig a következők:

$$B = 2 \text{ T}, n_e = 5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}, T = 20 \text{ eV}, E = 40 \text{ V/m}$$

Az alábbi ábra (2.3.1 ábra) mutatja a kialakuló eloszlásfüggvényt.

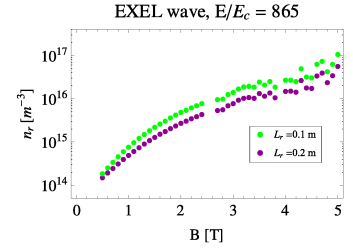


2.3.1. ábra. A referencia scenáriót jelentő futás eredménye JET paraméterekre és optimális technikai paraméterek mellett.

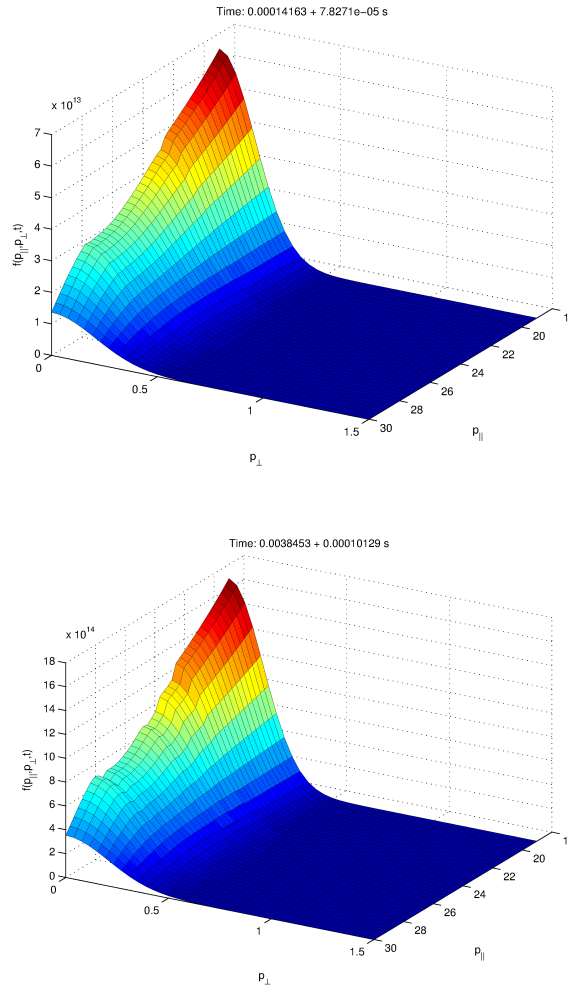
A mágneses tér hatása

Nagyobb mágneses tér esetén később kezdődik a destabilizáció és több elfutó elektron kell hozzá. A leginstabilabb hullám frekvenciája nagyobb, hullámenergiája kisebb.

A ábrán látható, hogy a destabilizációhoz szükséges elfutó elektron sűrűség hogyan függ a mágneses tértől. Ez egyezik a tapasztalattal. Ameddig nem kezdődik el a destabilizáció τ értéke nulla az analitikus eloszlás függvényben. Azaz a kezdeti időpontig mind a három esetben ugyanaz a függvény írja le az elfutó elektronok eloszlását. Ennek a függvénynek a jellemzője, mivel az elfutó elektronok lavina keletkezésére helyezi a hangsúlyt, hogy szigorú monoton növekvő. Azaz, ha később kezdődik a destabilizáció az azt jelenti, hogy addig több elfutó elektron fog keletkezni.



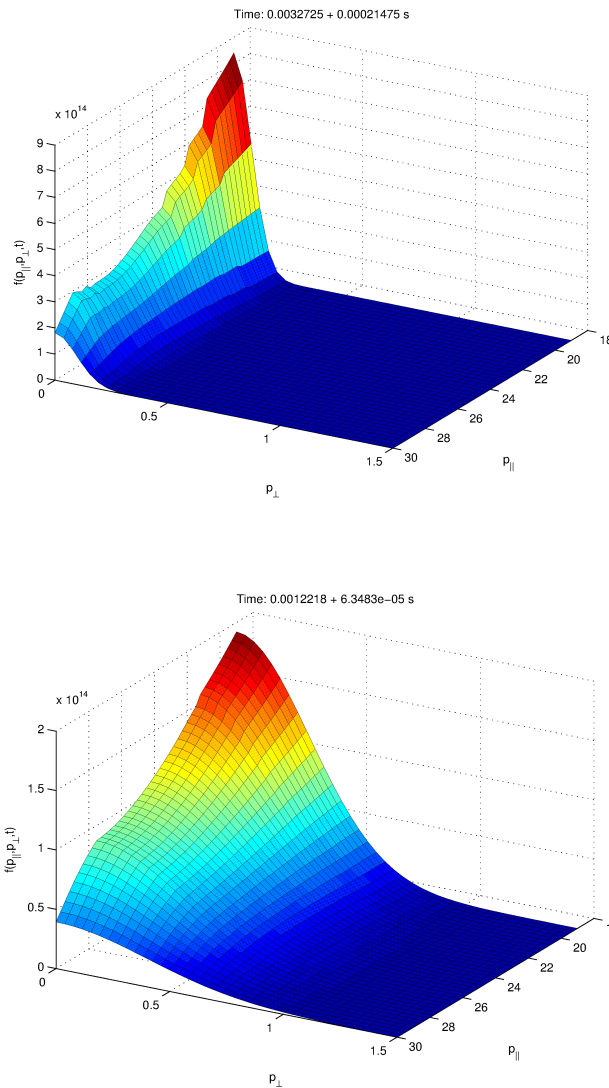
2.3.2. ábra. A stabilitási határok a mágneses tér függvényében különböző sugarú nyalábok esetén [10]



2.3.3. ábra. A bal oldali ábrán a $B=1$ T-hoz, a jobb oldali ábrán a $B=5$ T-hoz tartozó eloszlás függvények láthatók.

Az elektronsűrűség hatása

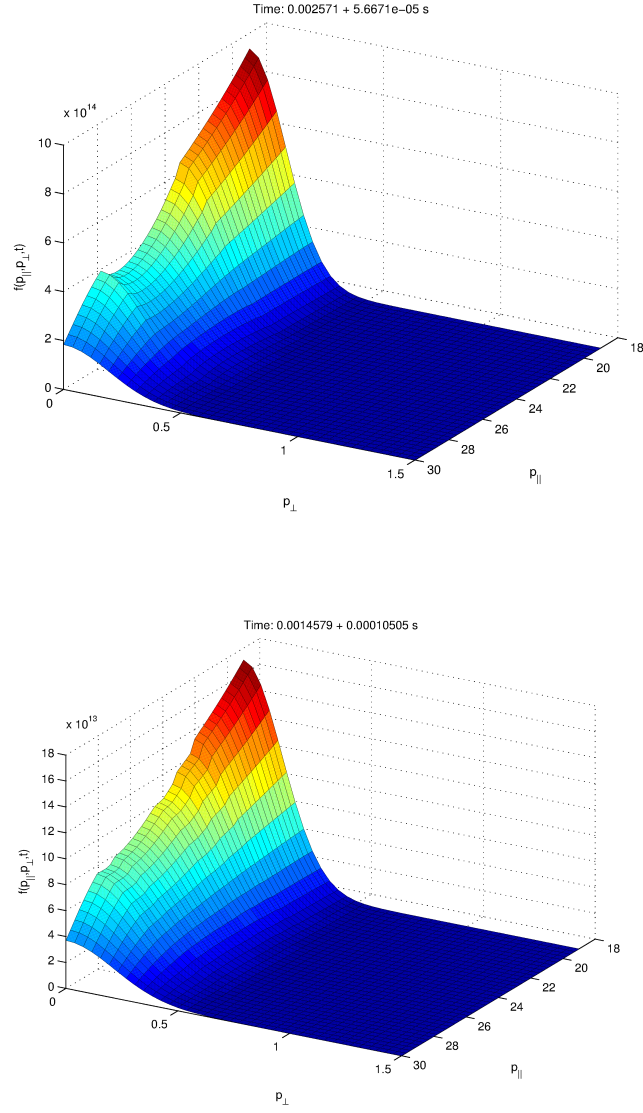
Ha nagyobb az elektronsűrűség, akkor hamarabb van a destabilizáció és a várakozásainknak megfelelően kevesebb elfutó elektron kell. A hullám energiája sokkal nagyobb. Alacsony elektronsűrűsénél a kvázilineáris kölcsönhatás feltűnően nagy változást okozott.



2.3.4. ábra. A felső ábrán az $n=1e19 \text{ m}^{-3}$ esete, míg az alsó ábrán az $n=2e20 \text{ m}^{-3}$ esete látható.

Az elektronhőmérséklet hatása

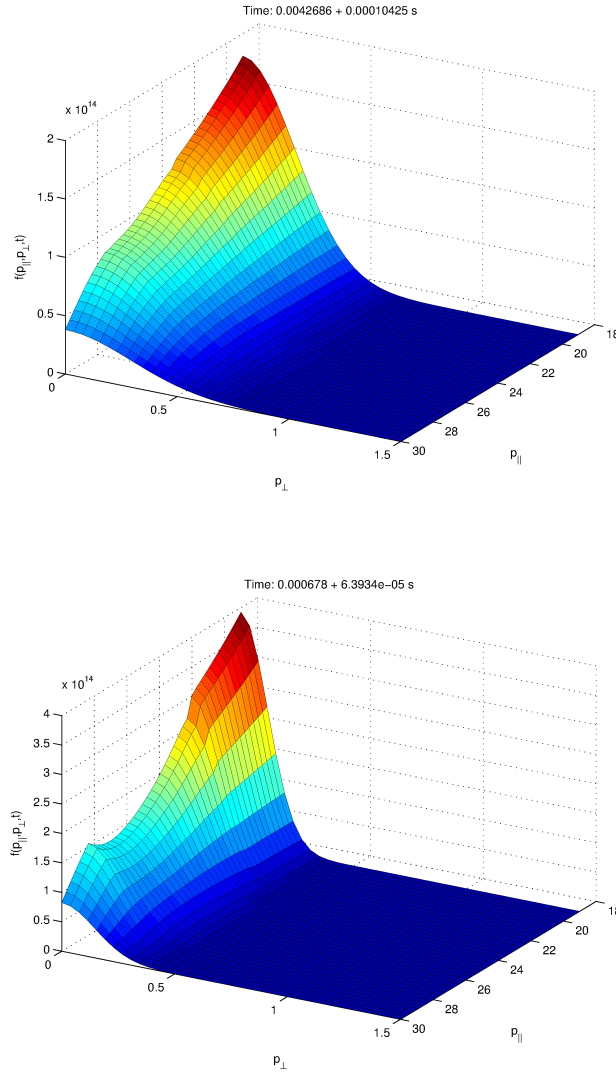
Nagyobb elektronhőmérséklet hamarabb kezdődik a folyamat és kevesebb elfutó elektron kell. A hullám energiája csökken. Tudjuk, hogy a konvektív csillapítás csökken, ha nő a hőmérséklet. Ezért kevesebb idő kell a destabilizációhoz.



2.3.5. ábra. A felső ábrán a $T=5$ eV esete, míg az alsó ábrán a $T=50$ eV esete látható.

Az elektromos térerősség hatása

Nagyobb elektromos tér esetén kevesebb idő és kevesebb elfutó elektron kell a destabilizációhoz. A hullámenergiája szinte nem változik. Ha nagyobb az elektromos tér, akkor több elfutó elektron keletkezik ugyanannyi idő alatt. Nagyobb lesz a lineáris növekedési ráta, míg a konvektív- és az ütközéses csillapítás elektromos tér független. Ezért hamarabb kezdődik el a folyamat.



2.3.6. ábra. A felső ábrán az $E=20$ V/m esete, míg az alsó ábrán az $E=80$ V/m esete látható.

A legjellemzőbb adatok

Az alábbi táblázatban (2.4. táblázat) össze vannak gyűjtve az egyes esetekhez tartozó jellemző adatok, amelyek a referenciával való összehasonlítás alapját szolgálják. A táblázatban levő számokhoz az alábbiak tartoznak:

$p_{\parallel}^m$: A leginstabilabb $p_{\parallel}$ érték. Ehhez tartozik megfelelő k értéknél a leginstabilabb hullám. Ennél kezdődik a leghamarabb a destabilizáció.

T_0 : A destabilizáció kezdete a leginstabilabb hullám esetén. Ezt másodpercben mérjük.

n_{r1} : A destabilizációhoz szükséges elfutó elektronok száma a leginstabilabb hullámnál. Ez egy sűrűség érték: m^{-3} .

η : A kvázilineáris kölcsönhatás utáni eloszlásfüggvény és a kölcsönhatás nélküli eloszlásfüggvény viszonya. Ezt úgy kapjuk, hogy ugyanarra az időpontra kiszámoljuk az analitikus eloszlásfüggvény értékét $\tau = 0$ mellett, majd ebből levonjuk a kvázilineáris kölcsönhatás

mellett kapott eloszlásfüggvényt és az így kapott értéket leosztjuk a kölcsönhatás nélküli eloszlásfüggvénnyel (ugyanabban az időpontban). Az eredmény százalékban értendő.

k_m, θ_m : A leginstabilabb hullámot jellemző k és θ érték.

W_{max} : A leginstabilabb hullám maximális energiája.

	B=1 T	B=5 T	n=1e19 m ⁻³	n=2e20 m ⁻³
$p_{\parallel}^m$	25,8	26,1	26,4	25,3
T_0	1,4e-4	3,8e-3	3,3e-3	1,2e-3
n_{r1}	3,4e13	8,4e14	3,8e14	1e14
η	14,1	21,1	36,6	11,5
θ_m	1,06	1,24	1,4	0,85
k_m	2,92e3	1,01e4	8,2e3	4,2e3
W_{max}	7,6e-12	5e-13	3,9e-14	5,5e-11
	T=5 eV	T=50 eV	E=20 V/m	E=80 V/m
$p_{\parallel}^m$	26,1	25,8	25,8	26,1
T_0	2,5e-3	1,5e-3	4,3e-3	6,8e-4
n_{r1}	4,6e14	8,9e13	9,7e13	1,9e14
η	25,6	13	7,6	32,4
θ_m	1,14	1,23	1,12	1,26
k_m	4,15e3	5,28e3	4e3	5,9e3
W_{max}	2,1e-11	1,1e-12	3,4e-12	2,4e-12

2.4. táblázat. A legjellemzőbb adatok táblázatba gyűjtve.

A referenciára ugyanezek az értékek az alábbi táblázatban (2.5. táblázat) láthatók.

$p_{\parallel}^m$	T_0	n_{r1}	η	θ_m	k_m	W_{max}
26,1	1,7e-3	1,3e14	16,2	1,2	4,85e3	2,6e-12

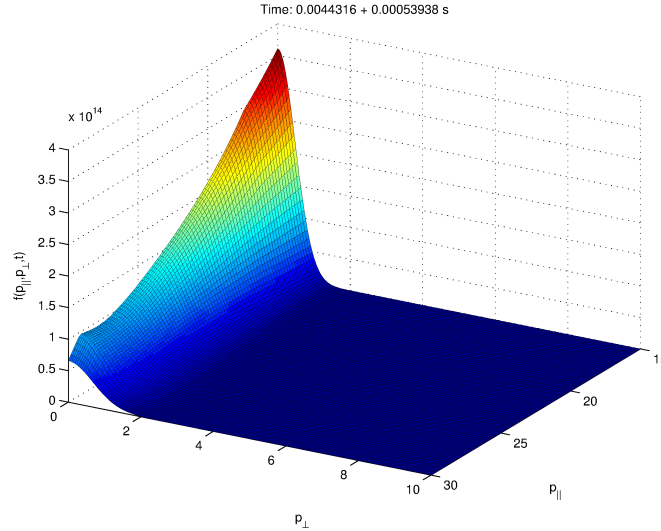
2.5. táblázat. A referencia paraméterekhez tartozó jellemzők.

A táblázatok alapján még levonhatunk néhány következtetést: a legrezonánsabb $p_{\parallel}$ értékek szinte megegyeznek az egyes esetekben. Gyakorlatilag ugyanez mondható el a terjedési irányról és a hullámszámról. Utóbbinál egyedül a B=5 T –nél tapasztalunk komoly eltérést.

2.4. Alkalmazás az ITER paramétereire

Az ITER jelenti az egyik motivációját a dolgozatnak, ezért ennek paramétereire is futtattam. A következők voltak az adatok: $B = 5.3$ T, $T = 20$ eV, $E = 40$ V/m és $n = 3e20$ m^{-3} .

Az eredményül kapott eloszlásfüggvény az alábbi ábrán látható (2.4.1 ábra):



2.4.1. ábra. Az ITER paramétereire történt futtatás végén kapott eloszlásfüggvény.

A leginstabilabb hullámot jellemző paraméterek: A legrezonánsabb $p_{\parallel}$ érték: 26,4.
A kvázi-lineáris kölcsönhatás miatt 25,1 százalékkal csökkent az elfutó elektronok száma.
A destabilizációhoz szükséges elektronok száma: $1,2e14$ m^{-3} .
A hullámenergia: $W_k = 6,7e - 12$ J.
A terjedési iránya: 0,875 .
A hullám hullámszáma: $6,25e3$ 1/m.
A destabilizáció kezdete: 0,0044 s.

Az adatokból látható, hogy rengeteg idő kell a destabilizáláshoz. Azonban érdekes, hogy a destabilizációhoz szükséges elfutó elektronok száma ugyanabban a nagyságrendben maradt, mint az előző fejezetben tárgyalt esetekben. Ennek oka az elfutó elektronok számára a sűrűség növelésének gyakorolt hatása, mivel ez csökkenti, míg a mágneses tér növeli. Így a két hatás gyakorlatilag kompenzálta egymást.

Említésre méltó, hogy az előző fejezet végén említett mennyiségek, melyek szinte függetlenek, itt is annak bizonyulnak, mert értékük szinte ugyanannyi.

3. fejezet

Egyesítés a CODE-dal

A kvázi-lineáris kölcsönhatást számoló rutin, továbbiakban QALIN, és a CODE (COLlisional Distribution of Electrons) összekapcsolására először 2013 augusztusában tettem kísérletet Adam Stahl, a svédországi Chalmers University of Technology hallgatójának segítségével, aki a programot legjobban ismerők egyike. A célom az volt, hogy a kvázi-lineáris kölcsönhatást beleintegráljam a CODE-ba, a diffúziós operátor megfelelő átalakításával. Ezt az elkezdett munkát a svédországi látogatásom során igyekeztem befejezni, bár mint ahogyan látható lesz ez sokkal nehezebbnek és problematikusabbnak adódott, mint azt eleinte hittük.

3.1. Az összekapcsolás elméleti háttere

Az általunk használt eloszlásfüggvény csak irracionálisan magas és időben állandó elektromos terek esetén tekinthető érvényesnek. Bár a CODE még nem tudja kezelni az időben változó elektromos teret, de tetszőleges állandó elektromos térre tud számolni, valamint az elfutó elektronok számát is pontosabban határozza meg. A CODE azért ígérkezik alkalmasnak, mert numerikusan, jóval kevesebb közelítéssel meg tudja oldani a Fokker-Planck egyenletet.

3.1.1. A CODE működésének alapelve

A Fokker-Planck egyenlet (lásd: 3.1.1 egyenlet) a Boltzmann-egyenlet egy speciális alakja, amelyet akkor kapunk, ha az ütközési operátornak a Fokker-Planck ütközési operátort választjuk. Az összefüggés jobb oldalának S tagja az ún. forrás. A forrás tartalmazza a másodlagos keletkezést, míg az elsődleges keletkezést az ütközési operátor foglalja magába.

Mivel egy ITER méretű tokamakban az elfutó elektronok keletkezésében a másodlagos keletkezés játssza a domináns szerepet, ezért a programot is ennek megfelelően kellett futtatni. Alapvetően háromféleképpen lehet használni: csak elsődleges keletkezést vegyen figyelembe, ekkor van időfüggő- (az eloszlásfüggvény időfejlődését írja le) és időfüggetlen- (stacionárius megoldás keresése) mód. Ha a másodlagos keletkezést is figyelembe akarjuk venni, akkor csak időfüggő módban futtatható [13].

A probléma megoldásának kulcsa a Fokker-Planck egyenlet diszkretizációjában rejlik. Erről

az áttekinthetőség megőrzése végett bővebben a függelékben (5.3) lehet olvasni. Az eredeti egyenlet:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + eE\mathbf{e} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = C(f) + S \quad (3.1.1)$$

Itt a nablás tag a relativisztikus impulzus térbeli gradiensét jelenti. A $\mathbf{C}$ az elektron ütközési operátor, míg az $\mathbf{S}$ a forrást jelenti, E az elektromos tér, e az elektron töltése, míg az $\mathbf{e}$ az elektromos térrel antiparallel vektor. A Legendre-polinomok (lásd 5.3) segítségével ezt át lehet alakítani és a nyert formulával numerikus eljárást kifejleszteni. A fenti egyenletet dimenziótlanítva és diszkretizálva:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_L}{\partial t} + F_l \sum_{l=0}^{\infty} (E \left[\frac{L+1}{2L+3} \delta_{L+1,l} + \frac{L}{2L-1} \delta_{L-1,l} \right] \frac{\partial}{\partial y} \\ + \frac{E}{y} \left[\frac{(L+1)(L+2)}{2L+3} \delta_{L+1,l} - \frac{(L-1)L}{2L-1} \delta_{L-1,l} \right] \\ - \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\psi(x)}{x} \delta_{L,l} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \left[\frac{2\psi(x)}{y} + \frac{dx}{dy} \frac{d\psi}{dx} \right] \delta_{L,l} \\ - \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left[\frac{1}{x} \frac{dx}{dy} \frac{d\psi}{dx} + \frac{2\psi(x)}{xy} - \frac{\psi(x)}{x^2} \frac{dx}{dy} + 2\psi(x) \right] \delta_{L,l} \frac{\partial}{\partial y} \\ + \frac{3\sqrt{\pi}}{8xy^2} \left[Z + \phi(x) - \psi(x) + \frac{\delta^4 x^2}{2} \right] L(L+1) \delta_{L,l}) = S_L, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

ahol az egyes változók jelentése megtalálható a következő hivatkozás alatt: [13].

A fenti összefüggés (3.1.2 egyenlet) alapján látható, hogy a parciális differenciálegyenlet differenciálegyenlet-rendszert jelent a diszkretizáció után az egyes Legendre-polinom együtt-hatókra: az F_L -ekre. A differenciálegyenlet-rendszert mátrixos alakba írhatjuk, ha az F_L -eket és az S_L -eket egy-egy vektorba tesszük, akkor a következő formulát adhatjuk meg:

$$\frac{\partial F_v}{\partial t} + \mathbf{M}F_v = S_v \quad (3.1.3)$$

ahol

F_v az egyes Legendre-polinomok együtt-hatóiból képezett vektor,

S_v az egyes Legendre-polinomok együtt-hatóiból képezett vektor.

Ez a differenciálegyenlet-rendszer többféle módszerrel oldható meg. A programban is választhatunk (Runge-Kutta, trapéz szabály stb.). A megoldás során szükség van a mátrix inverzére, amit a CODE LU-faktorizációval számol. A mátrix időfüggetlen, ezért az előbbi műveleteket csak egyszer az idő szerinti iteráció előtt kell elvégezni. Az időfejlődést ezek után a következő módon határozza meg. Fix időlépésekkel halad és megnézi a forrás értékét, melyet a [13] cikk (19)-es egyenlete adja meg. Ehhez kell az eloszlásfüggvény is. Erre a forrásra megoldja az egyenletet, majd újra számolja a forrást és így tovább. Ha a megoldással előállított Legendre-

együtthatókat beírjuk az eloszlásfüggvény Legendre-sorfejtésébe, akkor fontos kérdés az így kapott összeg konvergenciája. A CODE különösen érzékeny ebből a szempontból a bemeneti paraméterekre, ami rendkívül megnehezíti a két program összekapcsolását.

3.1.2. Az összekapcsolás lehetőségei

Két program összecsatolásánál a legkézenfekvőbb ötlet az egyes programok egymás utáni alkalmazása felváltva. Ezt nem lehetett megtenni, mert a QALIN csak az analitikus eloszlásfüggvényen tudja a kvázi-lineáris kölcsönhatást szimulálni a τ kiszámításán keresztül. Ezért tetszőleges eloszlásfüggvényre nem tud hatni.

Ezért a járható út az volt, hogy a Fokker-Planck egyenlet ütközési operátorába egyszerűen beleírtam a koordináta-transzformált diffúziós operátort. Ezt diszkretizáltuk. Így a kód régi mátrixa helyett kreáltunk egy újat és egyszerűen ezt tesszük a régi helyére. Pontosabban mivel az eredeti mátrix időfüggetlen volt az új pedig már nem az, ezért át kellett tennem a főciklusba (idő szerint iterál). Ezenkívül összehangoltam a változó készletet és a mértékegység-rendszereket. A következő pontban részletesen ismertetem az eljárást.

3.2. Gyakorlati megvalósítás

Megmutatom a diffúziós egyenleten (1.3.6 egyenlet) végrehajtott számításokat. A kvázilineáris diffúzió CODE-ba való beillesztéséhez át kell térnünk a QALIN $(p_{\parallel}, p_{\perp})$ változókészletéről a CODE (y, ξ) változókészletére. A következő egyenletekben a ξ az elektromos (vagy a párhuzamosság miatt a mágneses) tér és a részecske sebesség vektora által bezárt szög koszinuszát jelenti. A CODE-ban és QALIN-ban lévő normálások alapján a kapcsolat:

$$p_{\parallel} = y \cdot \delta \cdot \xi \quad (3.2.1)$$

$$p_{\perp} = y \cdot \delta \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.2.2)$$

ahol:

$$\delta = \frac{v_e}{c} \quad (3.2.3)$$

Itt a c a fénysebesség, míg a számláló a termikus elektronok sebessége:

$$v_e = \sqrt{\frac{2T}{m}} \quad (3.2.4)$$

Fontos a következő átalakítás:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{D} \quad (3.2.5)$$

Figyelembe véve, hogy az elfutó elektron energiája nagy, használhatjuk az ultra-

relativisztikus közelítést, továbbá az eloszlásfüggvény nyaláb jellege miatt igaz, hogy $\xi \simeq 1$. Ezért a következő írható fel:

$$\frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \simeq \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial p_{\perp}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial p_{\perp}} \quad (3.2.6)$$

A levezetés:

A $p_{\parallel}$ -ra és a $p_{\perp}$ -re adott formulák alapján:

$$y = \sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2} \quad (3.2.7)$$

$$\xi = \frac{p_{\parallel}}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}} \quad (3.2.8)$$

A 3.2.6 formulában látható tagokra a következő írható:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p_{\perp}} = \frac{\xi \sqrt{1 - \xi^2}}{y \cdot \delta} \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_{\perp}} = \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.2.10)$$

A $\xi \simeq 1$ miatt, valamint az eloszlásfüggvény nyalábszerűsége miatt, igaz a következő reláció:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \ll \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad (3.2.11)$$

Ezért a 3.2.6 összefüggés érvényes.

A függelékben megtalálható az alábbi két formula pontos levezetése. Az elsőt az előzőek összevonásával kapjuk. A diffúziós operátor hatását az eloszlásfüggvényre megadó parciális differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D(y, t)}{y^2 \cdot \delta^2} \cdot \xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi(1 - \xi^2) \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (3.2.12)$$

Megfelelő aszimptotikus közelítéssel, valamint a diszkretizáció végrehajtásával az előző formula jobb oldalán (lásd 5.3 fejezet) kapjuk azt az alakot, amit a 3.1.2 egyenlet bal oldalának szummájába írunk:

$$-\frac{D(y, t)}{y^2 \delta^2} (L + 1) L \delta_{L, l} f_l \quad (3.2.13)$$

Az új diszkretizált operátor, ami tehát tartalmazza az ütközési- és a kvázi-lineáris diffúzió operátorát, lehetővé teszi a CODE megoldási módszerének eddigihez hasonló alkalmazását. Az egyetlen nehézség, amit még meg kellett oldani, hogy a diffúziós együttható időben változik. Ezért a mátrixot minden időlépésben újra kell generálni, azaz a mátrixot építő program részt be kell tenni az időciklusba. A mátrix létrehozása előtt pedig ki kell számítani a QALIN-ból vett diffúziós együtthatót számoló programrésszel a diffúziós együtthatót. Ezt is minden lépésben. Ez egy külön függvény lett, a bemenetek pedig globális változók segítségével.

vel vannak biztosítva. Probléma a két program eltérő mértékegység-rendszere, valamint hogy eltérő módon tárolják az eloszlásfüggvényt, ugyanis a CODE egy vektorban az eloszlás függvény Legendre-polinomok szerinti sorfejtés együtthatóit tartalmazza, míg a QALIN egy 3D-ös mátrixban tárolja az eloszlásfüggvény értékét az egyes $p_{\parallel}$, $p_{\perp}$ értékekre az egyes időpontokban. Ezért a CODE eloszlásfüggvény reprezentációját meg kellett feleltetni a mi reprezentációnknak. Ezt egy gyakorlatilag a Legendre-sorfejtést megvalósító függvény hajtja végre, azáltal, hogy kiszámolja a QALIN impulzustartomány gridjének pontjaiban a CODE eloszlásfüggvényt tároló vektorából vett együtthatókkal súlyozott Legendre-polinomok összegét. A mértékegység-váltásokat elvégeztem a program legelején. A teljesség igénye nélkül felsorolok néhány szükséges mértékegység-váltást: statcoulombból coulombba (töltés), ergből joule-ba (hőmérséklet), elektronvoltból joule-ba (energia), cm^3 -ből m^3 -be (sűrűség) stb.

A fenti módszerek leprogramozása után egy működőképes, eredményeket adó programot kaptam, amelynek a kulcsfontosságú részei is működésbe léptek, vagyis a diffúziós együttható számítására is sor kerül a futás során.

3.3. Eredmények

Eddig nem tértem ki rá, de a CODE nagyon érzékeny a bemeneti paraméterek helyes megválasztására. Ezért a futtatás eredményét illetőleg a konvergencia előtérbe kerül. Egyelőre nem sikerült olyan beállítást találnom amire a konvergencia teljesülne.

A továbbiak szempontjából eredményt jelenhet, ha kihasználjuk, hogy a CODE a konvergencia biztosítására több speciális programrészt is tartalmaz. Ezek jelenleg nincsenek kellőképpen kihasználva, mert olyan feltételek mellett lehet őket csak használni, amik szemben állnak az ultra-relativisztikus közelítéssel. A későbbiekben megoldást jelenthet ezen bonyolult programrészek megértése és esetleges módosítása, valamint az alkalmazott közelítések relaxálása.

Összefoglalás

Az energiatermelés illetve a környezetszennyezés problémáinak az enyhítésére a fúziós berendezések jó lehetőséget nyújtanak. Ennek köszönhető az a nemzetközi összefogás, amely során a franciaországi Cadarache-ban fogják felépíteni a világ valaha volt legnagyobb tokamakját, az ITER -t. A tokamakokban tapasztalható plazmastabilitási problémák aggodalomra adnak okot, mivel a diszrupciók (a plazma összeomlása) során elfutó elektronok jöhetnek létre, amelyek a nagy energiájuk miatt képesek kárt tenni a plazmát határoló elemekben. Az ITER-ben ezeknek a száma a jelenlegi berendezésekhez képest várhatóan sokkal nagyobb lesz, ezért fontos az elfutó elektronokat csillapító hatások vizsgálata.

A munkám során elemzett kölcsönhatás jelentősége abban rejlik, hogy elősegítheti ezen elfutó elektronok alkotta elektronnyaláb szétszórását. Munkám első részében az elfutó elektronok és az extraordinárius elektron hullám (EXEL) között lezajló kvázi-lineáris kölcsönhatást számoló program felgyorsítását, numerikus stabilitásának ellenőrzését, finomhangolását, valamint különböző fizikaiparaméter-szenáriókon való futtatását és az eredmények diszkusszióját végeztem. A második felében az elfutó elektronok eloszlásfüggvényének numerikus szimulációjára alkalmas CODE-ba [13] integráltam a kvázi-lineáris kölcsönhatást.

A program valamint a kölcsönhatás mibenlétének mélyebb vizsgálatához hosszú fizikai időtartam szükséges, ami sok időlépést tartalmazó futtatást igényel. A rendelkezésemre álló program ehhez túl lassú volt, ezért első lépésként felgyorsítottam a leglassabb részek megkeresése és megfelelő átírása által. Az elfutó elektronok impulzusához tartozó rezonáns görbét számoló rutin már nincs minden időlépésben meghívva, ehelyett minden lépésben interpolációval határozom meg az új rezonáns hullámszám és szög értékeket. Ennek eredményeképp körülbelül háromszoros sebesség növekedést értem el.

Ezt követően a numerikus hibákból adódó esetleges hibás következtetések megelőzése végett, teszteltem a numerikus stabilitást, amely –a pozitív növekedési ráta meghatározásában szerepet játszó paramétert kivéve – valamennyi paraméterre fennállt. A stabilitási vizsgálat során tapasztaltak lehetővé tették olyan numerikus paraméterek beállítását, amelyekre a program futása a legstabilabb, azaz az egyes numerikus paraméterek kisebb változtatásától a végeredmény (a fizika) nem függ. A program stabilitása lehetővé tette, hogy hitelesebbnek tekintsük a plazma fizikai paramétereinek változtatása során kapott szimulációs eredményeket.

Az így finomhangolt, felgyorsított program segítségével megvizsgáltam a kölcsönhatásnak az elfutó elektronok eloszlásfüggvényére gyakorolt hatását különböző paraméterű plazmák esetére.

A vizsgált paraméterek: mágneses tér, elektromos tér, elektron-hőmérséklet és elektronsűrűség. A fizikai paraméterek változtatása során azt találtam, hogy a mágneses tér növelésével a hullám destabilizációjában szükséges idő nő, azaz később, több elfutó elektron jelenlétében indul csak el a folyamat. A termikus sűrűség, a hőmérséklet és az elektromos tér növelésével azonban ez az időtartam csökkenthető. Így a folyamat elindulása szempontjából az elektromos tér és a sűrűség növelése ellensúlyozni tudja a mágneses tér növeléséből ill. a hőmérséklet csökkenéséből adódó késleltetett indulást.

Az elfutó elektronok eloszlásfüggvényére használt analitikus formula több, a valóságban ritkán teljesülő feltétel mellett érvényes (túl nagy, időben állandó elektromos tér). Ennek kiküszöbölése végett az elfutó elektronok eloszlását a Fokker–Planck egyenlet numerikus megoldásával szimuláló CODE-ba integráltam a kvázi-lineáris kölcsönhatást, azáltal, hogy az ütközési operátorhoz hozzáadtam a kvázi-lineáris kölcsönhatás diffúziós operátorát.

Amint a CODE és a kvázi-lineáris kölcsönhatást szimuláló rutin egyesítése eredményeképp numerikusan stabil eloszlásfüggvényeket tudunk kapni, rendelkezésünkre fog állni egy, a jelenleginél általánosabb, így a valóságnak jobban megfelelő eredményeket adó rutin, mely képes az elfutóelektron-keletkezés időbeli szimulációjára.

4. fejezet

I. Függelék

Első feladatom az elfutó elektronok gerjesztette EXEL hullám okozta kvázilineáris diffúziós kölcsönhatást szimuláló program gyorsítása és tesztelése volt.

Először megkerestem a program leglassabb részeit, majd ezek közül kiválasztottam azt amelyik a legdominánsabbnak tűnt. Mivel ez a rész a futás során újra és újra meghívásra került, melynek során egy a szimulációhoz szükséges paramétertartományt töltött fel értékekkel, egyre finomodó felbontással, úgy módosítottam a programot, hogy az előre kiszámolja az említett paraméter tartományban az értékeket. A szükséges, egyre finomodó felbontású értékeket ezen előre kiszámolt mennyiségekből interpolációval határozza meg. Ennek eredményeként a program a 3-szorosára gyorsult.

A tesztelés során kitértem a numerikus stabilitás vizsgálatára. Minden numerikus paraméterre megnéztem egy megválasztott referenciához képesti eltéréseket egy széles tartományon. Olyan optimális beállítást kerestem, melynek környezetében csak nagyon kicsi a változás.

Az optimalizált program segítségével különböző plazma scenáriókra futtatva megvizsgáltam az egyes paraméterek hatását a diffúzió jellegére és a látottakat az elmélet alapján értelmeztem. Nem találtam a várttól eltérő eredményt.

Feladatom volt még előkészíteni az analitikus eloszlásfüggvény hiányosságainak relaxálása is, amelyhez meg kellett alapoznom a CODE nevű kinetikus egyenlet megoldó rutinba való integrálását a kvázilineáris kölcsönhatásnak.

Először átalakítottam az eredetileg használt diffúziós egyenletet, mert a CODE–ot megvizsgálva kiderült, hogy az polárkoordináta-rendszerben számol. A CODE által alkalmazott eljáráshoz diszkretizálnom kellett a diffúziós egyenletet a Legendre–polinomok bázisán. Jelenleg a konvergencia problémák megoldásán dolgozom.

5. fejezet

II. Függelék

5.1. Az elfutó elektron szuszceptibilitás kiszámítása

A szuszceptibilitás meghatározására a következő formulát vesszük alapul:

$$\chi^r(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_{pr}^2}{\omega \omega_{ce}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} 2\pi p_{\perp} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{\Omega_e \mathbf{S}_n}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_e}. \quad (5.1.1)$$

A jelölés egyszerűsítése végett kicsit átrendezve:

$$\chi^r(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_{pr}^2 2\pi}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{\mathbf{S}_n}{\gamma\omega - k_{\parallel} p_{\parallel} c - n\omega_{ce}}, \quad (5.1.2)$$

ahol az átalakításnál fel kell használni, hogy $\Omega_e = \frac{\omega_{ce}}{\gamma}$ és $p = \gamma v/c$. Még egyszerűbb a jelölés, ha:

$$\chi^r(\vec{k}, \omega) = \hat{\Pi} \cdot \eta, \quad (5.1.3)$$

ahol

$$\hat{\Pi} = \frac{\omega_{pr}^2 2\pi}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp}, \quad (5.1.4)$$

és

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{\mathbf{S}_n}{\gamma\omega - k_{\parallel} p_{\parallel} c - n\omega_{ce}}. \quad (5.1.5)$$

Az η integrálás elvégezhető. A cél, hogy a lineáris növekedési rátához meghatározzuk az (1.2.16) egyenletben látható tenzor komponenseket: χ_{11} , χ_{12} , χ_{22} és χ_{33} .

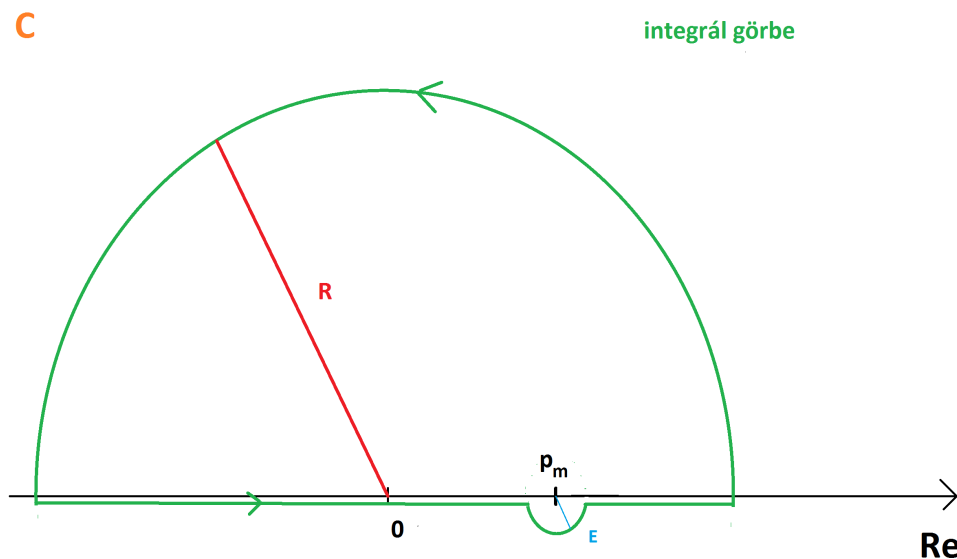
Jelölje az η tenzor integrandusát I . Ekkor a következő írható fel:

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} I \quad (5.1.6)$$

Az improprius integrál elvégzéséhez térjünk át a komplex síkra a $p_{\parallel}$ szerint és integráljunk a (5.1.1) ábrán vázolt görbe mentén. Ekkor a következő összefüggés írható fel, amelyek tartal-

mazzák a kiszámítandó integrált is:

$$\underbrace{\oint d\tilde{p}_{\parallel} \tilde{I}}_{(1)} = \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{nagykör} d\tilde{p}_{\parallel} \tilde{I}}_{(2)} + \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{kiskör} d\tilde{p}_{\parallel} \tilde{I}}_{(3)} + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-R}^{p_m - \epsilon} d\tilde{p}_{\parallel} \tilde{I} + \int_{p_m + \epsilon}^{+R} d\tilde{p}_{\parallel} \tilde{I} \right)}_{(4)} \quad (5.1.7)$$



5.1.1. ábra. A komplex síkon (C) történő integráláshoz használt görbe és jelölések.

Az (1) és a (3) integrál kiszámításához kihasználjuk a következő matematikából ismert állításokat:

1. Állítás

$$\oint d\tilde{z} \frac{f(\tilde{z})}{g(\tilde{z})} = i2\pi \frac{f(\tilde{z}_0)}{g'(\tilde{z}_0)}, \quad (5.1.8)$$

ahol g' jelöli a g függvény deriváltját. A $\tilde{z}_0$ a g elsőrendű zérushelye, azaz a reciprokanak elsőrendű pólusa van. Az f függvénynek nincs zérushelye a $\tilde{z}_0$ -ban.

2. Állítás

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\tilde{z} f(\tilde{z}) = i(\Theta_2 - \Theta_1) \text{Res}(f, \tilde{z}_0), \quad (5.1.9)$$

ahol a $\text{Res}(f, \tilde{z}_0)$ az f komplex függvény $\tilde{z}_0$ pontbeli reziduumát jelöli. Az integrálás egy ϵ sugarú köríven történik a pólus körül a Θ_2 és a Θ_1 középponti szögekkel jellemezhető végpontok között.

(Esetünkben ez π .)

A fenti tételek *csak elsőrendű pólus* esetén igazak. Ez igaz lesz, mivel az esetünkben vizsgált nevezőre igaz, hogy:

$$M(\gamma\omega - n\omega_{ce} - k_{\parallel}p_{\parallel}c) = p_m \rightarrow \frac{-n\omega_{ce}}{k_{\parallel} - \omega}, \quad (5.1.10)$$

ha $\gamma \approx p$, azaz ultrarelativisztikus (UV) határesetet veszünk és $p_{\perp} \ll p_{\parallel}$, azaz az eloszlásfüggvény erősen anizotróp. Az M megadja, hogy az argumentum mely $p_{\parallel}$ -nél 0. Ha deriváljuk a nevezőt:

$$\left(\frac{p_{\parallel}}{\gamma}\omega - k_{\parallel}c\right)_{p_{\parallel}=p_m} \xrightarrow{UV} \omega - k_{\parallel}c \neq 0 \quad (5.1.11)$$

Vagyis ultrarelativisztikus határesetben az I integrandus nevezője csak elsőrendű zérushely. (Az eloszlásfüggvényt úgy konstruáljuk meg, hogy egy bizonyos, az ultrarelativisztikus tartományba eső, de a vizsgálatainkba még bele nem tartozó impulzus alatt az eloszlásfüggvényt levágjuk, míg felette az analitikus eloszlásfüggvényt (1.1.4) használjuk.)

A (3)-sal jelölt tag 0, mivel az eloszlásfüggvény a növekvő sugárral gyorsabban tart a nullához, mint a körív hossza, amely csak lineárisan nő. A (4)-es integrál pontosan az általunk keresett improprius integrál. Mindent egybe vetve a keresett szuszceptibilitás tenzor ultrarelativisztikus határesetben a következőképpen számolható:

$$\chi^r = \hat{\Pi} \cdot i\pi \left(\frac{\mathbf{S}_n}{\omega - k_{\parallel}c} \right)_{p_{\parallel}=p_{res}, p_{\parallel} \approx \gamma}, \quad (5.1.12)$$

ahol $p_{res} = -\frac{n\omega_{ce}}{k_{\parallel}c - \omega}$. Behelyettesítve a (1.2.13) tenzor 11, 22, 33 és 12 elemeit, valamint a (5.1.4) egyenletet a $\hat{\Pi}$ helyére a (5.1.12) formulába, adódnak a keresett szuszceptibilitás tenzor komponensek:

$$\chi_{11} = i \frac{2\pi^2 \omega_{pr}^2 \omega_{ce}^2}{(\omega - k_{\parallel}c)\omega^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{n^2 J_n^2(z)}{k_{\perp}^2 c^2} \left[\left(n\omega_{ce} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} p_{\perp} c \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} \right) \frac{1}{p_{\parallel}} \right]_{p_{\parallel}=p_{res}} \quad (5.1.13)$$

$$\chi_{12} = -\frac{2\pi^2 \omega_{pr}^2 \omega_{ce}}{(\omega - k_{\parallel}c)\omega^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \frac{n J_n(z) J'_n(z)}{k_{\perp} c} \left[\left(n\omega_{ce} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} p_{\perp} c \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} \right) \frac{1}{p_{\parallel}} \right]_{p_{\parallel}=p_{res}} \quad (5.1.14)$$

$$\chi_{22} = i \frac{2\pi^2 \omega_{pr}^2}{(\omega - k_{\parallel}c)\omega^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp}^2 (J'_n(z))^2 \left[\left(n\omega_{ce} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} p_{\perp} c \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} \right) \frac{1}{p_{\parallel}} \right]_{p_{\parallel}=p_{res}} \quad (5.1.15)$$

$$\chi_{33} = i \frac{2\pi^2 \omega_{pr}^2}{(\omega - k_{\parallel}c)\omega^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} p_{\parallel} \frac{J_n^2(z)}{k_{\perp}^2 c^2} \left[\left(\frac{n\omega_{ce}}{p_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} c \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} \right) \right]_{p_{\parallel}=p_{res}} \quad (5.1.16)$$

5.2. Romberg–módszer

Az alábbiakban a kvázi–lineáris kölcsönhatást számoló rutin integrálját megvalósító numerikus eljárást ismertetem. A módszer a következő alakú integrálok számítására alkalmasak:

$$\int_a^b dx F(x) \quad (5.2.1)$$

Az alábbi lépéseket kell követni az iterációhoz (egy háromszöget hozunk létre szemléletesen, ha egymás mellé írjuk a megfelelő értékeket):

$$R(0, 0) = \frac{1}{2}(b - a) (f(a) + f(b)) \quad (5.2.2)$$

$$R(n, 0) = R(n - 1, 0) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a + (2k - 1)h_n) \quad (5.2.3)$$

$$R(n, m) = R(n, m - 1) + \frac{1}{4^m - 1} (4^m R(n, m - 1) - R(n - 1, m - 1)), \quad (5.2.4)$$

ahol

$$h_n = \frac{b - a}{2^n} \quad (5.2.5)$$

Az $R(n, m)$ egy n -ed rendű m -edik extrapolációt jelent. A hiba:

$$O(h_n^{2m+2}) \quad (5.2.6)$$

Ennek kell kisebbnek lennie az h_n paraméternél.

5.3. Diffúziós operátor a Legendre–polinomok bázisán

A Legendre–polinomok az alábbi *sajátérték probléma* megoldásánál előjövő sajátérték függvényeket jelentik. A jelentőségük hasznos tulajdonságaikban rejlik. Az alábbiakban ezt röviden, bizonyítások nélkül említem. A részletek bármely komolyabb matematikai kézikönyvben fellelhetők.

A Legendre–differenciál egyenlet:

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{df}{dx} \right] + l(l + 1)f(x) = 0 \quad (5.3.1)$$

Ekkor minden l -hez tartozik egy és csak egy P_l (konstans szorzó erejéig egyértelmű). A számunkra legfontosabb állítás, hogy ezek az $L^2[(-1, 1); \mathbf{R}]$ Hilbert-téren a következő skálár-

szorzattal ellátva teljes ortogonális rendszert alkot:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 dx f(x)g(x) \quad (5.3.2)$$

Ekkor igaz a következő formula:

$$\langle P_l, P_{l'} \rangle = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \quad (5.3.3)$$

Ez lehetővé teszi a fenti Hilbert-tér elemeinek (függvények) az általános Fourier-sorfejtését.

A következőkben a kimaradt eljárásokat mutatom be.

A diszkretizáció során (ezt értem a dolgozat minden pontján diszkretizációnak) a következő operátorokat használjuk az alábbi sorrendben:

Sorba fejtjük az $F(y, \xi)$ eloszlás függvényt a $P_L(\xi)$ polinomok szerint:

$$F(y, \xi) = \sum_{L=0}^{\infty} F_L(y) P_L(\xi) \quad (5.3.4)$$

Majd az alábbi operátort használjuk:

$$\frac{2L+1}{2} \int_{-1}^1 P_L \xi(\cdot) d\xi \quad (5.3.5)$$

Ha ezeket végre akarjuk hajtani az 3.2.12 összefüggésen, valamint figyelembe vesszük, hogy a következő azonosság igaz:

$$\frac{2L+1}{2} \int_{-1}^1 d\xi P_L(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} (1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} P_l(\xi) = -(L+1) L \delta_{L,l}, \quad (5.3.6)$$

akkor azt találjuk, hogy érdemes némi átalakítást végezni. Az F -et átírva és behelyettesítve a vizsgált formulába az alábbiakat kapjuk:

$$\sum_{L=0}^{\infty} F_L(y) \frac{D(y, t)}{y^2 \cdot \delta^2} \cdot \xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi(1 - \xi^2) \cdot \frac{\partial P_L(\xi)}{\partial \xi} \right) \quad (5.3.7)$$

Az integrál elvégzése ezen relatíve nehéz, ezért kihasználjuk, hogy a csak ξ -ket tartalmazó része az egyenletnek a $\xi \simeq 1$ miatt aszimptotikusan az alábbival közelíthető:

$$\frac{D(y, t)}{y^2 \cdot \delta^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1 - \xi^2) \cdot \frac{\partial P_L(\xi)}{\partial \xi} \right) \quad (5.3.8)$$

Ezt megtehetjük, ugyanis végezzünk el néhány deriválást és vegyük a $\xi \rightarrow 1$ közelítést:

$$\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi(1 - \xi^2) \cdot \frac{\partial P_L(\xi)}{\partial \xi} \right) = \xi(1 - \xi^2) \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1 - \xi^2) \cdot \frac{\partial P_L(\xi)}{\partial \xi} \right) \quad (5.3.9)$$

Az említett közelítés miatt az első tag elhanyagolható a másodikhoz képest, mert $(1 - \xi^2) \simeq 0$, továbbá a második tag egyezik az azonosságban fellelhető operátorral, mert $\xi^2 \simeq 1$.

Tehát az említett azonosságot használva kapjuk az itt levezetni kívánt összefüggést:

$$-\frac{D(y, t)}{y^2 \delta^2} (L + 1) L \delta_{L, l} f_l. \quad (5.3.10)$$

Ábrák jegyzéke

1.1.1. Az egyes elemek kötési energiái az atomtömeg függvényében. Látható, hogy egy elemi folyamat során sokkal több energia keletkezik a fúziónál, mint a fissionál.	5
1.1.2. Az ábra baloldalán egy tokamak, míg a jobb oldalán egy sztellarátor illusztrációja látható. A toroidális tértekercsek által létrehozott mágneses tér megcsavarását a tokamakok esetében a plazmaáram, míg a sztellarátor esetén a poloidális tértekercsek valósítják meg. A megcsavarás célja a mágneses tér okozta driftek során kiszökő anyagmennyiség megakadályozása.	6
1.1.3. Az ábrán látható, hogy az elektronra ható fékező erő nem monoton növekvő függvénye az elektron energiájának.	6
1.2.1. A képen eltérő mágneses terek mellett láthatók az egyes hullámok. A kék a fűtülő elektron hullám, míg a piros az EXEL hullám.[7]	10
1.4.1. A program működésének vázlatos rajza.	17
1.4.2. Az ábrán az elfutó elektronok mennyisége látszik m^{-3} egységekben.	20
2.2.1. A referenciában factor = 5e-5, a felső ábrán: 1e-4, az alsó ábrán: 1e-5.	25
2.3.1. A referencia scénárió jelentő futás eredménye JET paraméterekre és optimális technikai paraméterek mellett.	27
2.3.2. A stabilitási határok a mágneses tér függvényében különböző sugarú nyalábok esetén [10]	28
2.3.3. A bal oldali ábrán a B=1 T-hoz, a jobb oldali ábrán a B=5 T-hoz tartozó eloszlás függvények láthatók.	28
2.3.4. A felső ábrán az $n=1e19 m^{-3}$ esete, míg az alsó ábrán az $n=2e20 m^{-3}$ esete látható.	29
2.3.5. A felső ábrán a T=5 eV esete, míg az alsó ábrán a T=50 eV esete látható. . . .	30
2.3.6. A felső ábrán az E=20 V/m esete, míg az alsó ábrán az E=80 V/m esete látható.	31
2.4.1. Az ITER paramétereire történt futtatás végén kapott eloszlásfüggvény.	33
5.1.1. A komplex síkon (C) történő integráláshoz használt görbe és jelölések.	43

Táblázatok jegyzéke

2.1. A numerikus stabilitás vizsgálata során elemzett paraméterek.	23
2.2. A numerikus stabilitás vizsgálata során kapott eredmények. A kék színű számok a referencia és a megváltoztatott scenáriók összehasonlítási időpontjai közötti eltérést jelentik. A piros számok százalékban adják meg a kettő közötti maximális relatív eltérést.	23
2.3. Az optimális paraméter szett adatai.	26
2.4. A legjellemzőbb adatok táblázatba gyűjtve.	32
2.5. A referencia paraméterekhez tartozó jellemzők.	32

Irodalomjegyzék

- [1] ITER Physics Basis Editors, ITER Physics Expert Groups, ITER Joint Central Team, and Physics Integration Unit. ITER Physics Basis. *Nuclear Fusion*, 39(12):2137 – 2638, 1999. 5
- [2] P. Helander and D.J. Sigmar. *Collisional Transport in Magnetized Plasmas*. Cambridge University Press, 2002. 5
- [3] H. Dreicer. Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas. *Physical Review*, 115:238–249, 1959. 7
- [4] G. I. Pokol. *Fúziós berendezésekben fellépo tranziens hullámjelenségek tanulmányozása statisztikus eljárásokkal és elméleti modellekkel*. PhD thesis, Budapest University of Technology and Economics, Hungary, 2009. 7, 16
- [5] T. Fulop, G. Pokol, P. Helander, and M. Lisak. Destabilization of magnetosonic-whistler waves by a relativistic runaway beam. *Physics of Plasmas*, 13(062506), 2006. 7, 8, 14
- [6] T.H. Stix. *Waves in plasmas*. Springer-Verlag New York, 1992. 9, 11, 13
- [7] A. Kómár. Msc thesis, 2013. 9, 10, 12, 13, 16, 48
- [8] A. Kómár. Interaction between runaway electrons and whistler waves in tokamak plasmas, 2011. 12
- [9] G. pokol, T. Fulop, and M. Lisak. Quasi-linear analysis of whistler waves driven by relativistic runaway beams in tokamaks. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 50(045003), 2008. 13
- [10] A. Kómár, T. Fulop, and G.I. Pokol. Quasi-linear analysis of the extraordinary electromagnetic wave destabilized by runaway electrons. page P5.170, 2013. 40th EPS Conference on Plasma Physics. 13, 28, 48
- [11] G. Papp, M. Drevlak, and T. Fulop. Runaway electron losses caused by resonant magnetic perturbations in ITER. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 53(095004), 2011. 14
- [12] A. H. Boozer. Theory of tokamak disruptions. *Phys. Plasmas*, 19(058101), 2012. 14

- [13] M. Landreman, A. Stahl, and T. Fulop. Numerical solution of the Fokker-Planck equation with electric field and collisions. *Computer Physics Communications*, 2013. submitted. 34, 35, 39