

TDK DOLGOZAT

Hálózatokon keresztül vezérelt bizonytalan rendszerek stabilitásának és stabilizálásának vizsgálata

Eszes Dávid Csaba

Témavezető: Dr. Gyurkovics Éva
egyetemi docens
BME Matematika Intézet,
Differenciálegyenletek Tanszék

BME
2013

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. A probléma leírása	2
3. Szükséges ismeretek	6
3.1. Funkcionál-differenciálegyenletek	6
3.1.1. Alapok	6
3.1.2. Stabilitás	7
3.2. Lineáris mátrixegyenlőtlenségek	9
3.3. Lemmák	11
4. Eddigi eredmények áttekintése	12
4.1. Hao és Zhao [12] eredménye	12
4.2. Multiplikátor módszer	14
4.3. Szakdolgozat eredményei	16
4.3.1. Abszolút stabilitás	17
4.3.2. Stabilitásvizsgálat	18
4.3.3. Vezérlőtervezés	19
4.4. Irodalmi előzmény: Zeng et al [16] eredménye	19
4.5. Wirtinger-egyenlőtlenség	22
5. Fő eredmények	23
5.1. Bizonytalanság kezelése	23
5.2. Abszolút stabilitás	24
5.3. A Zeng et al [16] eredményeinek kiterjesztése	28
5.3.1. Analízis	28
5.3.2. Vezérlés	32
5.4. Szabad súlymátrixok alkalmazása	35
5.4.1. Analízis	35
5.4.2. Vezérlés	38
5.5. A Wirtinger-egyenlőtlenség alkalmazása	40
5.5.1. Analízis	40
5.5.2. Vezérlés	43
6. Eredmények szemléltetése	44
6.1. Szimuláció	44
6.2. Numerikus példák	46

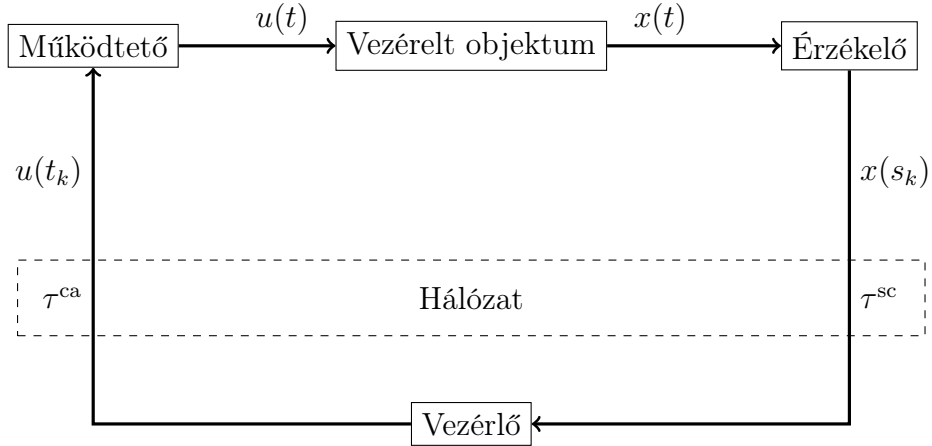
Jelölések

$\mathbb{N}$	természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	egész számok halmaza
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+$	valós, pozitív valós és nemnegatív valós számok halmaza
$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times m}$	n dimenziós valós vektorok halmaza, az $n \times m$ -es mátrixok halmaza
$\mathbb{S}^{n \times n} (\mathbb{S}_+^{n \times n})$	$n \times n$ méretű, szimmetrikus, (pozitív definit) mátrixok halmaza
I_n	$n \times n$ -es identitás
A^T	az A mátrix (vektor) transzponáltja
A^{-1}	az invertálható A mátrix inverze
$A > 0$ ($A \geq 0$)	az A szimmetrikus mátrix pozitív (szemi) definit
$A < 0$ ($A \leq 0$)	az A szimmetrikus mátrix negatív (szemi) definit
$\lambda_{\max}(A)$ ($\lambda_{\min}(A)$)	az A mátrix legnagyobb (legkisebb) sajátértéke
$\text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$	az A_i blokkokból álló blokkdiagonális mátrix
$\begin{pmatrix} A & * \\ B & C \end{pmatrix}$	az $\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrix, ahol A és C szimmetrikus
$(*)$	szorzat esetén a megfelelő tényezők transzponáltjával való szorzás. $(*)MA = A^TMA$
$C([a, b], \mathbb{R}^n)$	az $[a, b]$ intervallumon értelmezett $\mathbb{R}^n$ -be képező folytonos függvények vektortere
$\mathcal{C}$	$C([-\eta, 0], \mathbb{R}^n)$
W	$\mathcal{C}$ azon altere, amelynek elemei abszolút folytonosak-, deriváltfüggvényeik pedig négyzetesen integrálhatók a $[-\eta, 0)$ intervallumon
$\ \cdot\ $	az euklideszi norma $\mathbb{R}^n$ -en, illetve az általa indukált mátrix-norma $\mathbb{R}^{n \times m}$ -en
$\ \cdot\ _C$	a folytonos függvények normája $\ f\ _C = \max_{x \in [a, b]} f(x) $, ha $f \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$
$\ \cdot\ _w$	a W -n használatos norma, $\ f\ _w^2 = \max_{x \in [a, b]} f(x) ^2 + \int_{-\eta}^0 \ f'(x)\ ^2 dx$, ha $f \in W$
$\circ$	függvények kompozíciója
$\dot{x}$	az idő szerinti derivált, $\frac{d}{dt}x$
$\text{cone}\{\Omega\}$	$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ által generált kúp, $\{x \in \mathbb{R}^n : \exists x_0 \in \Omega, \lambda \in \mathbb{R}^+(x = \lambda x_0)\}$
$\overline{\Omega}$	a Ω halmaz lezártja
$\mathcal{F}[0, \Theta]$	szektor, azon $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvények halmaza, amelyekre $\varphi^T(t, x) [\varphi(t, x) - \Theta x] \leq 0$, ahol Θ valós diagonális mátrix

1. Bevezetés

Napjainkban egyre elterjedtebbek az úgynevezett hálózaton keresztül vezérelt rendszerek, vagy röviden HKV rendszerek. Ezek olyan berendezések, amelyek esetén a térben különböző elhelyezésű elemek, (tipikusan a gép, érzékelő, vezérlő és működtető) egymás között digitális hálózatokon keresztül kommunikálnak. A népszerűsége miatt a HKV rendszerekhez tartozó elmélet is komoly figyelmet érdemel. Ebben a dolgozatban HKV rendszerek visszacsatolt vezérléssel történő stabilizálásának feladatát vizsgáljuk. A hálózaton keresztül történő vezérlés alapvető sajátossága a késleltetés megjelenése: bár a vezérelt rendszer modellje közönséges differenciálegyenlet, a visszacsatolás után elkerülhetetlenül késleltetett differenciálegyenlethez jutunk. A késés kialakulásának egyik oka, hogy a hálózat korlátai miatt az eszközök közötti kommunikáció során az információ némi késéssel érkezik meg a feladótól a címzethez. A másik ok, hogy olyan rendszereket vizsgálunk, amelyeknél mintavételekkel nyerünk információt a rendszer állapotáról. A működés alapja, hogy az érzékelő mintát vesz, majd elküldi a vezérlőnek, amely a beérkező adatok alapján meghatározza a megfelelő reakciót. Itt a számolás szintén időbe telik, így tovább nő a késés. Ezt követően a működtető megkapja az utasításokat, ami alapján szabályozza az adott berendezést. Ez azt jelenti, hogy egy folytonos rendszert irányítunk diszkrét időpontokban történő mérések alapján, ami már önmagában késleltetést jelent. Ezen felül az is előfordulhat, hogy valamelyik adatcsomag elveszik és nem érkezik meg a címzethez. Mindezek elkerülhetetlenül rontják a rendszer teljesítményét, sőt, még a rendszer instabilitásához is vezethetnek. Ennek elkerülése érdekében két feladatot kell megoldanunk. Egyrészt biztosítanunk kell a rendszer stabilitását elfogadható késés és adatvesztés esetén, valamint meg kell tervezni a megfelelő vezérlőt, mely ellensúlyozza a késés és adatvesztés káros hatásait. A megfelelően tervezett vezérlő azt jelenti, hogy a kívánt állapotba hozza a rendszert abban az esetben, ha a késések egy meghatározott korlát alatt vannak. Előnynek számít, ha a megengedett késések korlátja minél nagyobb, hiszen minél lassabb rendszerre működik az elmélet, annál szélesebb körű lehet a felhasználása.

A feladatot több módon is meg lehet közelíteni, amelyek közül mi a Ljapunov módszerére alapulót választottuk. Nagy vonalakban a módszer lényege, hogy keresünk egy Ljapunov–Kraszovszkij-funkcionált, amely alapján garantálható a rendszer stabilitása, ha a funkcionál idő szerinti deriváltja negatív. Ezt követően megfogalmazunk egy könnyen ellenőrizhető feltételt a derivált előjelére vonatkozóan. Ehhez használjuk a lineáris mátrixegyenlőtlenségeket, vagy röviden LMI-eket (az angol Linear Matrix Inequality kifejezésből). Ezen módszer használatára példa a [12] cikk. Az eljáráshoz hozzátartozik, hogy miközben egyszerűbb feltételeket állítunk elő, becslé-



1. ábra. Az HKV rendszer felépítése

seket alkalmazunk, így kritériumaink szükségképpen gyengébbek lesznek. Tehát az eredmények továbbgondolásának kézenfekvő lehetősége a becslések kikerülése vagy élesebbekkel való helyettesítése. A [16] célja, hogy [12] két becslését javítsa. Az egyik a Jensen-egyenlőtlenség (lásd [8]) egy másik becsléssel való helyettesítése, a másik a kúp komplementens algoritmus fejlesztett változatának (improved cone complementary linearization ICCL, eredeti [6]) alkalmazása. Továbbá [12] megjelenése óta Seuret és Gouaisbaut [14]-ben megmutatták hogyan használható a Wirtinger-egyenlőtlenség a Jensen-egyenlőtlenség helyett a becslés finomítására.

Mivel bizonytalan rendszereket vizsgálunk, jelen dolgozat célja az előbbieken túlmenően az is, hogy kiterjesztjük, általánosítjuk az irodalomban tárgyalt megengedett bizonytalanságokat. Erre ad lehetőséget a multiplikátor mátrixok alkalmazása ([10]).

2. A probléma leírása

Vizsgáljuk az 1. ábrán látható tipikus HKV rendszert, melynél a vezérelt objektum működését a következő általánosított Lur'e rendszer modellje írja le:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_x x(t) + B_x u(t) + H_1 p_1(t) + H_2 p_2(t) \\ q_{1,i}(t) &= A_{q_{1,i}} x(t) + B_{q_{1,i}} u(t) \quad i = 1, 2, \dots, s \\ q_2(t) &= A_{q_2} x(t) + B_{q_2} u(t) + G p_1(t) \end{aligned} \tag{1}$$

ahol $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ az állapotvektor, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ a vezérlés, amely meghatározza a működtető által a objektumra kifejtett hatást. A $p_1(t) = (p_{1,1}^T(t), \dots, p_{1,s}^T(t))^T \in \mathbb{R}^{l_{p_1}}$, ahol $p_{1,i} \in \mathbb{R}^{l_{p_{1,i}}}$ reprezentálja a rendszer leírásához szükséges nemlineáris tagokat és a bizonytalanságot, $p_2(t) \in \mathbb{R}^{l_{p_2}}$ pedig a paraméterbizonytalanságot. A $q_{1,i}(t) \in \mathbb{R}^{l_{q_{1,i}}}$ és $q_2(t) \in \mathbb{R}^{l_{q_2}}$ jelöli a bizonytalan outputot. A $p_1(t)$ -vel összhangban legyen

$q_1(t) = (q_{1,1}^T(t), \dots, q_{1,s}^T(t))^T \in \mathbb{R}^{l_{q_1}}$, ahol $q_{1,i} \in \mathbb{R}^{l_{q_1,i}}$. Az $s = 1$ esetet strukturálatlan, az $s > 1$ esetet pedig strukturált bizonytalanságnak nevezzük. Az $A_x, B_x, A_{q_{1,i}}, B_{q_{1,i}}, A_{q_2}, B_{q_2}, H_1, H_2$ és G megfelelő méretű valós mátrixok. A továbbiakban a $(p_1^T, q_1^T)^T$ -ről feltesszük, hogy kvadratikusán korlátozott. Ezen feltételt úgy vesszük figyelembe, hogy $(p_1^T, q_1^T)^T$ az

$$\Omega_1 = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l_{p_1} + l_{q_1}} : \begin{pmatrix} p_{1,i} \\ q_{1,i} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_{0i} & S_{0i} \\ S_{0i}^T & R_{0i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,i} \\ q_{1,i} \end{pmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, s \right\}, \quad (2)$$

által definiált halmazból kerül ki, ahol $Q_{0i} = Q_{0i}^T, R_{0i} = R_{0i}^T \geq 0$ és S_{0i} előre meghatározott, megfelelő dimenziójú valós mátrixok. A p_1 és q_1 jelöléssel összhangban legyen

$$\begin{aligned} Q_0 &= \text{diag}\{Q_{01}, \dots, Q_{0s}\}, \\ R_0 &= \text{diag}\{R_{01}, \dots, R_{0s}\}, \\ S_0 &= \text{diag}\{S_{01}, \dots, S_{0s}\}. \end{aligned} \quad (3)$$

A [10] első feltevése szerint

$$Q_0 + D_q^T S_0^T + S_0 D_q + D_q^T R_0 D_q < 0, \quad (4)$$

ahol $D_q = \text{diag}\{D_{q_{1,1}}, \dots, D_{q_{1,s}}\} \in \mathbb{R}^{l_{q_1} \times l_{p_1}}$ a $D_{q_{1,i}}$ mátrix pedig a $q_{1,i}$ egyenletében a $p_{1,i}$ együtthatómátrixa. A mi esetünkben $q_{1,i}$ meghatározásában nem jelenik meg a $p_{1,i}$, ezért együtthatóját nullának (vagy nullmátrixnak) tekintjük, így mi azt feltételezzük, hogy $Q_0 < 0$. A [12, 16]-ban egyszerű Lur'e rendszereket tárgyalnak, ahol $p_1(t) = \varphi(t, q_1(t))$, és a φ függvény olyan, hogy a

$$p_1^T [p_1 + \Theta q_1] \leq 0 \quad (5)$$

úgynevezett szektor feltétel teljesül, ahol Θ valós diagonális mátrix. Könnyen belátható, hogy ez kevésbé általános megkötés, mint az általunk használt kvadratikus korlát, hiszen $Q_0 = -I, S_0 = -\frac{1}{2}\Theta$ és $R_0 = 0$ választással éppen (5) adódik.

A paraméterbizonytalanság leírásához vezessük be mátrixok egy $\mathcal{D}$ halmazát az alábbi definícióval:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_{n_\Delta}, \delta_1 I, \dots, \delta_{n_\delta} I) : \\ &\|\Delta\| \leq 1, \Delta_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \delta_j \in \mathbb{R}, n_\Delta, n_\delta \in \mathbb{Z}^+\} \end{aligned} \quad (6)$$

A megengedett paraméterbizonytalanságok az

$$\Omega_2 = \left\{ \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l_{p_2} + l_{q_2}} : p_2 = \Delta q_2, \Delta \in \mathcal{D} \right\} \quad (7)$$

halmazzal adottak. Fontos, hogy itt a Δ mátrixok függhetnek az időtől.

1. *Megjegyzés.* Ha $n_\delta = 0$, akkor az Ω_2 halmaz is megadható kvadratikus korlátozó feltételekkel:

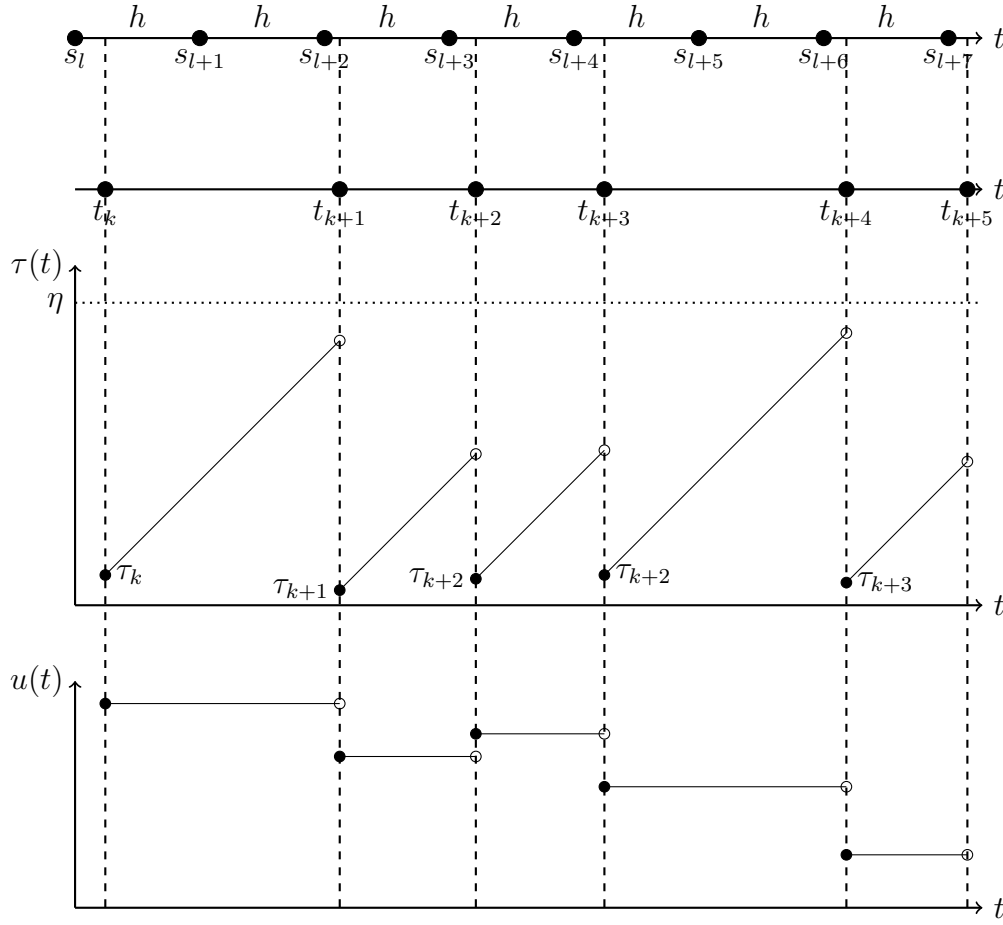
$$\Omega_2 = \left\{ \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l_{p_2} + l_{q_2}} : \begin{pmatrix} p_{2,i} \\ q_{2,i} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{2,i} \\ q_{2,i} \end{pmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, n_\Delta \right\}. \quad (8)$$

Ha azonban $n_\delta > 0$, akkor a $p_{2,n_\Delta+j} = \delta_j q_{2,n_\Delta+j}$, $|\delta_j| \leq 1$, $j = 1, \dots, n_\delta$ feltételnek eleget tevő vektorok nem jellemezhetőek egyetlen szimmetrikus mátrix segítségével.

A HKV rendszer működésével kapcsolatban feltesszük, hogy az eszközök az adatcsomagokat egyesével továbbítják, a rendszer állapotának mérése során a teljes állapot elérhető és hogy a szenzort egy időzítő hozza működésbe, így mindig azonos h időközönként vesz mintát. Ez azt jelenti, hogy a mérési eredmények csak a $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k < \dots$ diszkrét időpontokra vonatkoznak, ahol $s_{k+1} - s_k = h$ minden $k \in \mathbb{Z}^+$ -ra. Már említettük, hogy előfordulhat adatvesztés, amikor egy mérési eredmény nem érkezik meg a vezérlőhöz vagy egy későbbi adat hamarabb érkezik meg és így a vezérlő a régebbit nem veszi figyelembe. Ezért legyen $(\bar{s}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ az $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ azon részsorozata, mely az elvesztett adatok kihagyásával keletkezik. Így tulajdonképpen a vezérlést a $\bar{s}_0 < \bar{s}_1 < \dots$ időpontokban rögzített $x(\bar{s}_k)$ állapotok alapján kell meghatározni.

A vezérlő és a működtető viszont esemény hatására változik, vagyis ha bejövő információ van. Ezért úgy tekintjük, hogy a $u(t)$ vezérlés egy nulladrendű tartón (zero-order hold device) keresztül valósul meg. Azaz a diszkrét idejű jeleket úgy alakítja át folytonos idejűvé, hogy a diszkrét értéket megtartja, amíg új nem érkezik. Ezt szemlélteti a 2. Ábra, ahol s_l a mérések időpontja, mint előbb, a t_k az $x(\bar{s}_k)$ állapot alapján történő vezérlés megkezdésének időpontja, $\tau_k = \tau_k^{\text{sc}} + \tau_k^{\text{ca}}$ pedig a k -adik késés, az $\bar{s}_k$ és a t_k között eltelt idő, amíg τ_k^{sc} idő alatt megtörtént a jelátvitel az érzékelő és a vezérlő között, majd τ_k^{ca} amíg a feldolgozás folyt és az eredményt a működtető megkapta. Ekkor tehát $t_k = \bar{s}_k + \tau_k$. Látható, hogy az $x(\bar{s}_k)$ alapján meghatározott vezérlés t_k és t_{k+1} , a következő adat alapján meghatározott vezérlés beérkezése között állandó. Itt meg kell még említeni azt a gyakorlatban is elképzelhető jelenséget, hogy ha egy mérési adat sokat késik, akkor egy későbbi hamarabb elérheti a vezérlőt. Formálisan ez azt jelenti, hogy $t_k > t_{k+1}$. Feltesszük, hogy ilyen esetben a vezérlő a régebbi adatot figyelmen kívül hagyja és nem változtat a vezérlésen. Tehát a továbbiakban $t_k < t_{k+1}$ teljesül minden k -ra. Így a vezérlés egy szakaszonként konstans függvény lesz. Feltételezzük, hogy a vezérlő memória nélküli és az állapot lineáris függvényében reagál. Formálisan

$$u(t_k) = Kx(t_k - \tau_k). \quad (9)$$



2. ábra. A mintavétel idejét és a késést szemléltető ábra

Az előbbieket alapján a működtető rendszerre gyakorolt hatását a

$$u(t) = Kx(t_k - \tau_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (10)$$

összefüggés írja le. A könnyebb kezelhetőség érdekében definiáljuk a τ függvényt a $[t_k, t_{k+1})$ intervallumon a

$$\tau(t) = t - (t_k - \tau_k) \quad (11)$$

egyenlőséggel. Vegyük észre, hogy $\dot{\tau}(t) = 1$, ha $t \neq t_k$. Ez a HKV rendszerek fontos tulajdonsága. A $\tau(t)$ definícióját felhasználva adódik, hogy

$$x(t - \tau(t)) = x(t_k - \tau_k) = x(\bar{s}_k) \quad (12)$$

ha $t \in [t_k, t_{k+1})$. A vezérlés megvalósíthatóságának érdekében természetesnek tűnik az elvárás, hogy az adatvesztés és a késés felülről korlátos legyen. Ez garantálja egy $\eta \in \mathbb{R}^+$ létezését, melyre

$$\bar{s}_{k+1} - \bar{s}_k + \tau_{k+1} = t_{k+1} - \bar{s}_k \leq \eta \quad (13)$$

teljesül. Vagyis η felső korlátja a sikeresen továbbított mérés és a következő sikeres méréshez tartozó vezérlés kezdete közt eltelt időnek. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy mérés eredménye maximum η ideig befolyásolhatja közvetlenül a rendszer fejlődését.

Mindennek fényében a következőképpen módosíthatjuk az 1. ábrán látható hálózaton keresztül vezérelt rendszer előbbi (1) leírását.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_x x(t) + B_x K x(t - \tau(t)) + H_1 p_2(t) + H_2 p_2(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [t_0 - \eta, t_0] \\ q_{1,i}(t) &= A_{q_{1,i}} x(t) + B_{q_{1,i}} u(t) \quad i = 1, 2, \dots, s \\ q_2(t) &= A_{q_2} x(t) + B_{q_2} u(t) + G p_1(t) \end{aligned} \tag{14}$$

ahol a $\phi(t)$ a kezdeti értéknek tekinthető és $0 \leq \tau(t) \leq \eta$.

3. Szükséges ismeretek

Mielőtt rátérnénk az előző fejezetben ismertetett probléma megoldásainak részletes tárgyalására áttekintjük a szükséges matematikai háttér.

3.1. Funkcionál-differenciálegyenletek

Ebben a fejezetben megismerkedünk a késleltetett differenciálegyenlet rendszerekhez tartozó matematikai háttér, a funkcionál-differenciálegyenletek elméletének alapjaival. Néhány nélkülözhetetlen definíció és tétel után a stabilitással kapcsolatos fogalmak következnek, majd egy elégséges feltétel a stabilitásra. Mindehhez [11]-et és [15]-öt vettük alapul.

3.1.1. Alapok

Legyen $a \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor bármely $\psi \in C([t_0 - \eta, t_0 + a], \mathbb{R}^n)$ és $t \in [t_0, t_0 + a]$ esetén definiáljuk a $\psi_t \in \mathcal{C}$ függvényt a következőképpen:

$$\psi_t(\theta) = \psi(t + \theta) \tag{15}$$

ahol $\theta \in [-\eta, 0]$.

1. Definíció. Legyen $t_0 \in \mathbb{R}$, $\eta, a \in \mathbb{R}^+$, valamint $x \in C([t_0 - \eta, t_0 + a], \mathbb{R}^n)$, továbbá $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ adott függvény. Ekkor a

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{16}$$

relációt *funkcionál-differenciálegyenletnek* nevezzük.

2. Definíció. Az x függvény a (16) megoldása a $[t_0 - \eta, t_0 + a)$ intervallumon, ha $x \in C([t_0 - \eta, t_0 + a), \mathbb{R}^n)$ és $x(t)$ eleget tesz (16)-nak, ha $t \in (t_0, t_0 + a)$.

A közönséges differenciálegyenletekhez hasonlóan itt is több megoldás lehetséges, így értelmes adott kezdeti feltételt kielégítő megoldást keresni. Azonban az egyértelműséghez nem elegendő egy pontban egy adott értéket megkövetelni, hiszen nem csak a pillanatnyi $x(t)$ állapot számít, hanem az x_t függvény. Azaz a kezdeti feltételt egy $[-\eta, 0]$ intervallumon értelmezett függvény határozza meg.

3. Definíció. Adott $t_0 \in \mathbb{R}$ és $\varphi \in \mathcal{C}$ esetén az $x = x(t_0, \varphi)$ függvény a t_0 -ban φ kezdeti értékhez tartozó megoldás vagy megoldás a (t_0, φ) -n keresztül, ha létezik $a \in \mathbb{R}^+$, amelyre $x(t_0, \varphi)$ megoldása a (16)-nak a $[t_0 - \eta, t_0 + a)$ -n és $x_{t_0}(t_0, \varphi) = \varphi$.

Könnyen látható, hogy adott $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény esetén a

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), x(t - \tau(t))) \quad (17)$$

késleltetett egyenlet speciális esete (16)-nak. Hiszen $f = g \circ (\text{id}_{\mathbb{R}}, g_0)$, ahol $g_0 : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ és $g_0(x_t) = (x(t), x(t - \tau(t)))$.

Ahhoz, hogy érdemes legyen funkcionál-differenciálegyenletekkel foglalkozni, elengedhetetlen a következő tétel.

1. Tétel. Legyen D egy nyílt részhalmaz $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ -ben, f pedig D -ből $\mathbb{R}^n$ -be képező folytonos függvény, amely a második változójában minden D -beli kompakt halmazon kielégíti a Lipschitz feltételt. Ha $(t_0, \varphi) \in D$, akkor (16)-nak létezik egyértelmű megoldása, amely eleget tesz a (t_0, φ) kezdeti feltételnek.

3.1.2. Stabilitás

Most pedig rátérünk a stabilitáselméletre. A stabilitáselmélet vizsgálatainak célja, hogy kiderítse hogyan viselkedik egy adott rendszer, ha a kezdeti értékeket kicsit megváltoztatjuk vagy kimozdítjuk a rendszert az eredeti állapotából. Vajon a módosított feltételek hatása mellett hasonló eredményt kapunk, vagy nagymértékben eltérőt? Ezen gondolatokhoz kapcsolódó elmélettel ismerkedünk meg a következőkben.

Feltesszük, hogy (16)-nak megoldása az $x(t) = 0$, amelyre *triviális megoldásként* hivatkozunk. Belátható, hogy elegendő a triviális megoldás stabilitását vizsgálni. Hiszen ha van egy $y(t)$ nemtriviális megoldás, melynek stabilitása érdekel minket, akkor alkalmazva a $z(t) = x(t) - y(t)$ változótranszformációt, adódik a

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t) \quad (18)$$

egyenlet, melynek a $z(t) = 0$ megoldása.

A most következő definíciók nagyon hasonlítanak a közönséges differenciálegyenleteknél tárgyalt fogalmakhoz, csak most a térnek megfelelő távolságfogalmat kell alkalmazni.

4. Definíció. Azt mondjuk, hogy a (16) egyenlet triviális megoldása

1. *stabilis*, ha minden $t_0 \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) \in \mathbb{R}^+$, hogy $\|x_{t_0}\|_C < \delta$ feltételből következik, hogy $\|x_t\|_C < \varepsilon$ teljesül minden $t \geq t_0$ -ra;
2. *aszimptotikusan stabilis*, ha
 - a) stabilis és
 - b) minden $t_0 \in \mathbb{R}$ létezik $\delta_a = \delta_a(t_0) \in \mathbb{R}^+$, hogy $\|x_{t_0}\|_C < \delta_a$ feltételből következik, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$;
3. *egyenletesen stabilis*, ha
 - a) stabilis és
 - b) $\delta(t_0, \varepsilon)$ független t_0 választásától;
4. *egyenletesen aszimptotikusan stabilis*, ha
 - a) egyenletesen stabil és
 - b) létezik olyan $\delta_a \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\gamma \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik $T = T(\delta_a, \gamma)$, melyre $\|x_{t_0}\|_C < \delta_a$ feltételből következik, hogy $\|x(t)\| < \gamma$ minden $t > t_0 + T$ esetén;
5. *globálisan (egyenletesen) aszimptotikusan stabilis*, ha
 - a) (egyenletesen) aszimptotikusan stabilis és
 - b) δ_a tetszőlegesen nagy véges szám lehet;
6. *instabilis*, ha nem stabilis.

Most pedig a Ljapunov módszer következik funkcionál-differenciálegyenletek stabilitásának vizsgálatára. A közönséges differenciálegyenletekhez hasonlóan itt is abban rejlik a módszer ereje, hogy nem szükséges megoldanunk az egyenletet ahhoz, hogy meghatározzuk, hogy a rendszer stabilis-e.

Legyen $V : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, $x_t(s, \phi)$ pedig a (16) egyenlet (s, ϕ) kezdeti feltételt kielégítő megoldása a t pontban. A következő összefüggés mutatja a $V(t, x_t)$ függvény t szerinti felső Dini deriváltját a $t = s$ pontban.

$$\dot{V}(s, \phi) = \frac{d}{dt} V(t, x_t)|_{t=s, x_t=\phi} = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{V(s+h, x_{s+h}(s, \phi)) - V(s, \phi)}{h} \quad (19)$$

Az alapfogalmak után pedig következik a tétel, amelyből a módszer származik.

2. Tétel (Ljapunov–Kraszovszkij-tétel). *Legyen a (16) egyenletben szereplő $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény olyan, hogy $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ korlátos halmazait $\mathbb{R}^n$ korlátos halmazaiba képezi. Legyen továbbá $u, v, w : \overline{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ folytonos nemcsökkenő függvények, ahol $u(s)$ és $v(s)$ pozitívak $s > 0$ esetén és $u(0) = v(0) = 0$. Ekkor az alábbi állítások érvényesek.*

1. *Ha létezik $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos differenciálható funkcionál, melyre*

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_{\mathcal{C}}) \quad (20)$$

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|) \quad (21)$$

akkor a triviális megoldás egyenletesen stabilis.

2. *Ha a triviális megoldás egyenletesen stabilis és $w(s) > 0$ minden $s > 0$ -ra, akkor az $x = 0$ megoldás egyenletesen aszimptotikusan stabilis.*

3. *Ha a triviális megoldás egyenletesen aszimptotikusan stabilis és $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$, akkor az $x = 0$ megoldás globálisan egyenletesen aszimptotikusan stabilis.*

3.2. Lineáris mátrixegyenlőtlenségek

Az utóbbi évtizedekben a lineáris mátrixegyenlőtlenségek vagy röviden LMI-k (az angol Linear Matrix Inequality szóból) kiemelt figyelmet kapnak a késleltetett rendszerek stabilitásának vizsgálata során. Ennek oka, hogy a stabilitásra adott feltételek megfogalmazhatók LMI-k segítségével is, amelyek nagy előnye a könnyen számolhatóság. A dolgozat későbbi fejezeteiben mi is LMI feltételt fogalmazunk meg hálózatokon keresztül vezérelt rendszerek stabilitására, ezért nélkülözhetetlen, hogy megismerkedjünk az alapvető fogalmakkal. Itt a [7] és [4] felépítését követjük.

5. Definíció. *Lineáris mátrixegyenlőtlenségnek nevezzük azt a mátrixegyenlőtlenséget, amely felírható*

$$L(x) := L_0 + x_1 L_1 + x_2 L_2 + \cdots + x_m L_m < 0 \quad (22)$$

kanonikus alakban, ahol az $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^N$ a keresett, úgynevezett *döntési változók* vektora, $L_0, L_1, \dots, L_m$ pedig adott szimmetrikus mátrixok.

Vegyük észre, hogy ha $L(x) < 0$ és $L(y) < 0$ egyaránt teljesül, akkor minden $\lambda \in [0, 1]$ esetén $L(\lambda x + (1 - \lambda)y) < 0$ is fennáll. Azaz (22) egy konvex feltételt jelent x -re. Ez azért hasznos, mert (22) általában analitikusan nem kezelhető, azonban konvex optimalizálási feladatnak is tekinthető és így numerikus eljárásokkal meg lehet oldani, ha létezik megoldás.

6. Definíció. Azon $x \in \mathbb{R}^N$ vektorok halmazát, amelyekre a (22) teljesül, a *megengedett megoldások halmazának* nevezzük.

Belátható, hogy (22) felírható egy másik, ekvivalens alakban is. Nevezetesen:

$$\mathcal{N}^T \mathcal{L}(X_1, X_2, \dots, X_N) \mathcal{N} < \mathcal{M}^T \mathcal{R}(X_1, X_2, \dots, X_N) \mathcal{M} \quad (23)$$

ahol $X_1, X_2, \dots, X_N$ előírt struktúrájú mátrixváltozók, $\mathcal{N}$ és $\mathcal{M}$ adott, azonos méretű mátrixok, $\mathcal{L}$ és $\mathcal{R}$ szimmetrikus, azonos blokkstruktúrájú mátrix függvények, amelyekben minden blokk az ismeretlen $X_1, X_2, \dots, X_N$ mátrixoknak és transzponáltjaiknak affin függvénye. $\mathcal{N}$ és $\mathcal{M}$ mátrixokat szokás *bal*, illetve *jobb oldali külső tényező*nek, az $\mathcal{L}(\cdot)$ és $\mathcal{R}(\cdot)$ mátrix függvényeket pedig *bal*, illetve *jobb oldali belső tényező*nek nevezni. Itt a „bal oldali” és „jobb oldali” kifejezések az egyenlőtlenség „kisebb” és „nagyobb” oldalára vonatkoznak függetlenül a megjelenés sorrendjétől. A gyakorlatban az utóbbi (23) alak terjedt el. Ennek oka, hogy ez az alak áttekinthetőbb és a numerikus megoldóprogramok is hatékonyabban kezelik.

Ahhoz, hogy lássuk, hogy (23) ekvivalens az 5. Definícióban szereplő (22) alakkal két dolgot kell észrevennünk. Az egyik abból a tényből adódik, hogy $S^n = \{N \in \mathbb{R}^{n \times n} : N = N^T\}$ az $n \times n$ -es szimmetrikus mátrixok vektorteret alkotnak a valós számtest felett. Legyen $E_1, E_2, \dots, E_m$ egy tetszőleges bázisa S^n -nek. Ekkor minden $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix esetén léteznek olyan $x_1, x_2, \dots, x_m$ valós számok, hogy X előáll a $\sum_{i=1}^m x_i E_i$ összegként. Tudjuk azt is, hogy egy tetszőleges $\mathcal{F}(x)$ affin függvény felírható $F(x) + d$ alakban, ahol $F(x)$ lineáris függvény, d pedig egy eltolás. Ekkor

$$\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) = F\left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) + d = \sum_{i=1}^m x_i F(E_i) + d. \quad (24)$$

A (24)-ről pedig már látszik, hogy (22) típusú. A másik dolog, amelyet észre kell vennünk, hogy ha $F, G : \mathbb{R}^m \rightarrow S^n$ tetszőleges affin függvények, akkor

$$F(x) > 0, \quad (25)$$

$$F(x) < G(x) \quad (26)$$

egyenlőtlenségek ekvivalensek az alábbiakkal:

$$-F(x) < 0, \quad (27)$$

$$F(x) - G(x) < 0. \quad (28)$$

A lineáris mátrixegyenlőtlenségekkel kapcsolatban három feladatot fogalmazhatunk meg.

1. Megengedett megoldás keresése. Ebben az esetben el kell dönteni, hogy van-e olyan x döntési változó, amelyre

$$L(x) < 0 \quad (29)$$

teljesül és ha van, akkor keresni kell egyet.

2. Lineáris célfüggvény minimalizálása LMI feltételek mellett. A feladat az, hogy megtaláljuk a $c^T x$ függvény lehető legkisebb értékét a $L(x) < 0$ feltétel teljesülése mellett.
3. Általánosított sajátértékek minimalizálása. Itt meg kell találni a legkisebb λ értéket, amely kielégíti a $A(x) < \lambda B(x)$, $B(x) > 0$ és $C(x) < 0$ feltételeket.

3.3. Lemmák

Most pedig következzen néhány fontos lemma, amelyeket használni fogunk a későbbiekben.

1. Lemma (Schur komplement lemma). *Legyen B tetszőleges, A és C szimmetrikus mátrixok megfelelő dimenzióval. Ekkor*

$$\begin{pmatrix} A & * \\ B & C \end{pmatrix} < 0 \quad (30)$$

akkor és csak akkor teljesül, ha a következő feltételek egyike fennáll

1. $C < 0$ és $A - B^T C^{-1} B < 0$
2. $A < 0$ és $C - B A^{-1} B^T < 0$

Az 1. Lemma és a bizonyítás megtalálható az [1]-ben.

2. Lemma (Jensen-egyenlőtlenség). *Tetszőleges $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus pozitív definit mátrix és $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény esetén az*

$$\int_a^b x^T(t) M x(t) dt \geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b x(t) dt \right)^T M \left(\int_a^b x(t) dt \right) \quad (31)$$

egyenlőtlenség teljesül.

A lemma illetve azzal kapcsolatos további részletek a [8]-ban találhatóak.

3. Lemma (Wirtinger-egyenlőtlenség). *Legyen $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus pozitív definit mátrix és $x \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $x(a) = x(b) = 0$ teljesül. Ekkor fennáll a következő egyenlőtlenség*

$$\int_a^b \dot{x}^T(t) M \dot{x}(t) dt \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_a^b x^T(t) M x(t) dt. \quad (32)$$

A lemma és a bizonyítása a [13]-ban megtalálható. Az előbbi lemma feltételeit tekintve elsőre nem világos, hogyan is lehet hasznunkra. Ez a 4.5. alfejezetből fog kiderülni.

4. Eddigi eredmények áttekintése

Ezen fejezet célja a jelen dolgozatot megelőző ismeretek összefoglalása.

4.1. Hao és Zhao [12] eredménye

Ebben az alfejezetben áttekintjük a szakdolgozathoz (itt és a későbbiekben ez [2]-t jelenti) kiindulási pontként szolgáló [12] eredményeit. A cikk a HKV rendszerek következő - az (1)-hez hasonló - Lur'e modellt tekinti:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_x x(t) + B_x u(t) + H_1 p_1(t) \\ q_1(t) &= A_{q_1} x(t) \\ p_1(t) &= \varphi(t, q_1)\end{aligned}\tag{33}$$

ahol $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ az állapotvektor, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ a vezérlés, $q_1(t) \in \mathbb{R}^{l_{q_1}}$ a bizonytalan output. A_x , B_x , H_1 és A_{q_1} megfelelő méretű valós mátrixok. $\varphi(t, q_1) : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{l_{q_1}} \rightarrow \mathbb{R}^{l_{q_1}}$ nemlineáris függvény, amely t -ben szakaszonként folytonos, q_1 -ben pedig teljesíti a globális Lipschitz feltételt. Az eltérés elsősorban a φ függvénnyel kapcsolatos elvárásokban van. [12] ugyanis azt kéri, hogy φ tegyen eleget az úgynevezett szektorfeltételnek, azaz minden $t \geq 0$ esetén teljesüljön a

$$\varphi^T(t, q_1)[\varphi(t, q_1) + \Theta q_1] \leq 0\tag{34}$$

egyenlőtlenség, ahol Θ valós diagonális mátrix. Azon függvények halmazára, amelyekre (34) teljesül a $\mathcal{F}[0, \Theta]$ jelölést használjuk.

A 2. fejezetben leírtakhoz hasonlóan belátható, hogy (33) ekvivalens megfogalmazása

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_x x(t) + B_x K x(t - \tau(t)) + H_1 p_1(t), \quad t \in [t_0, \infty) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [t_0 - \eta, t_0] \\ q_1(t) &= A_{q_1} x(t) \\ p_1(t) &= \varphi(t, q_1)\end{aligned}\tag{35}$$

ahol a $\phi(t)$ kezdeti értéknek tekinthető és $0 \leq \tau(t) \leq \eta$.

7. Definíció. A (35) Lur'e rendszert *abszolút stabilis*nak mondjuk a $\mathcal{F}[0, \Theta]$ szektorban, ha a rendszer globálisan egyenletesen aszimptotikusan stabilis minden nemlineáris, a (34) feltételnek eleget tevő $\varphi(t, q_1)$ függvény esetén.

Hao és Zhao 1. ábrán látható Lur'e típusú HKV rendszer stabilitásvizsgálatával kapcsolatos fő eredménye az alábbi tétel.

3. Tétel. *Adott η skalár és K visszacsatolási mátrix esetén a (35) zárt rendszer abszolút stabilis a $\mathcal{F}[0, \Theta]$ szektorban, ha léteznek olyan $P, R \in \mathbb{S}_+^{n_x \times n_x}$ mátrixok, amelyekre*

$$\begin{pmatrix} A_x^T P + P A_x - R & * & * & * \\ K^T B_x^T P + R & -R & * & * \\ H_1^T P - \Theta A_{q_1} & 0 & -2I & * \\ \eta R A_x & \eta R B_x K & \eta R H_1 & -R \end{pmatrix} < 0 \quad (36)$$

teljesül.

A [12] vezérlés tervezéssel kapcsolatos fő eredménye pedig az alábbi.

4. Tétel. *Adott η skalár esetén a (35) zárt rendszer abszolút stabilis a $\mathcal{F}[0, \Theta]$ szektorban, ha léteznek olyan $\bar{P}, \bar{R} \in \mathbb{S}_+^{n_x \times n_x}$ és $\bar{X} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ mátrixok, amelyekre*

$$\begin{pmatrix} \bar{P} A_x^T + A_x \bar{P} - \bar{R} & * & * & * \\ \bar{X}^T B_x^T + \bar{R} & -\bar{R} & * & * \\ H_1^T - \Theta A_{q_1} \bar{P} & 0 & -2I & * \\ \eta A \bar{P} & \eta B \bar{X} & \eta H_1 & \bar{R} - 2\bar{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (37)$$

teljesül. Ekkor a visszacsatolás mátrixa a

$$K = \bar{X} \bar{P}^{-1} \quad (38)$$

összefüggéssel adható meg.

A [12] a φ által reprezentált bizonytalanságon kívül foglalkozik még paraméter-bizonytalansággal is. Ezek olyan rendszerek, ahol nem ismerjük pontosan a (33)-ban szereplő A_x, B_x és H_1 mátrixokat, vagy azok változhatnak az időben. A paraméter-bizonytalanságot egy speciális struktúrájú Δ mátrix segítségével veszi figyelembe. A speciális struktúra azt jelenti, hogy a Δ mátrix a (6)-ban definiált $\mathcal{D}$ -ből származik. Az előbbieket pontosan megfogalmazva írhatjuk, hogy

$$A_x = A_{x,0} + \Delta A_x, \quad B_x = B_{x,0} + \Delta B_x, \quad H_1 = H_{1,0} + \Delta H_1 \quad (39)$$

ahol $A_{x,0}, B_{x,0}$ és $H_{1,0}$ ismert valós mátrixok megfelelő dimenzióval. $\Delta A_x, \Delta B_x$ és ΔH_1 valós időfüggő mátrixfüggvények, melyek a strukturált bizonytalanságot reprezentálják és kielégítik a

$$\begin{pmatrix} \Delta A_x & \Delta B_x & \Delta H_1 \end{pmatrix} = U \Delta(t) \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} \quad (40)$$

relációt, ahol $\Delta(t) \in \mathcal{D}$ és U , N_1 , N_2 és N_3 megfelelő méretű adott valós mátrixok.

Mielőtt ismertetnénk a [12] strukturált paraméterbizonytalansággal ellátott rendszerekre vonatkozó eredményeit bevezetjük a következő jelölést:

$$\mathcal{L} = \{\text{diag}(s_1 I, \dots, s_{n_\Delta} I, S_1, \dots, S_{n_\delta}) : s_i \in \mathbb{R}^+, S_j \in \mathbb{S}_+^{n_j \times n_j}, n_\Delta, n_\delta \in \mathbb{Z}^+\} \quad (41)$$

5. Tétel. *Adott η skalár és K visszacsatolási mátrix esetén a bizonytalan Lur'e rendszer robusztusan abszolút stabilis a $\mathcal{F}[0, \Theta]$ szektorban, ha léteznek $P, R \in \mathbb{S}_+^{n_x \times n_x}$ illetve $L \in \mathcal{L}$ mátrixok, hogy*

$$\begin{pmatrix} A_{x,0}^T P + P A_{x,0} - R & * & * & * & * & * \\ K^T B_{x,0}^T P + R & -R & * & * & * & * \\ H_{1,0}^T P - \Theta A_{q1,0} & 0 & -2I & * & * & * \\ \eta R A_{x,0} & \eta R B_{x,0} K & \eta R H_{1,0} & -R & * & * \\ U^T P & 0 & 0 & \eta U^T R & -L & * \\ L N_1 & L N_2 K & L N_3 & 0 & 0 & -L \end{pmatrix} < 0 \quad (42)$$

teljesül.

6. Tétel. *Adott η skalár esetén a bizonytalan Lur'e rendszer robusztusan abszolút stabilis a $\mathcal{F}[0, \Theta]$ szektorban, ha léteznek $\bar{P}, \bar{R} \in \mathbb{S}_+^{n_x \times n_x}$, $\bar{L} \in \mathcal{L}$ és $\bar{X} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ mátrixok, hogy*

$$\begin{pmatrix} \bar{P} A_{x,0}^T + A_{x,0} \bar{P} - \bar{R} & * & * & * & * & * \\ \bar{X}^T B_{x,0}^T + \bar{R} & -\bar{R} & * & * & * & * \\ H_{1,0}^T - \Theta A_{q1,0} \bar{P} & 0 & -2I & * & * & * \\ \eta A_{x,0} \bar{P} & \eta B_{x,0} \bar{X} & \eta H_{1,0} & \bar{R} - 2\bar{P} & * & * \\ \bar{P} U^T & 0 & 0 & \eta \bar{P} U^T & -\bar{L} & * \\ N_1 \bar{P} & N_2 \bar{X} & N_3 & 0 & 0 & \bar{L} - 2\bar{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (43)$$

teljesül. Ekkor a visszacsatolás mátrixa

$$K = \bar{X} \bar{P}^{-1} \quad (44)$$

alakban adható meg.

4.2. Multiplikátor módszer

Ebben a fejezetben a [10] alapján áttekintjük a [9] eredményeit, hogy a későbbiekben használhassuk a multiplikátor módszert a 2. fejezetben ismertetett probléma megoldására.

Vizsgálatainkhoz adott egy $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$ altér, valamint $U \in \mathbb{R}^{j \times N}$ és $V \in \mathbb{R}^{l \times N}$ rögzített mátrixok, ahol V maximális sor rangú, továbbá egy $\Psi \in \mathbb{R}^{j \times j}$ szimmetrikus

mátrix. Legyen $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^l$, és feltételezzük, hogy $V\mathcal{B} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$. Érdemes bevezetni a következő jelölést:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{Q}} = \{y \in \mathcal{B} : Vy \in \mathcal{Q}\}. \quad (45)$$

A jelölések után pedig következhetnek a szükséges fogalmak.

8. Definíció. Az M szimmetrikus mátrix *multiplikátor mátrix* a $\mathcal{Q}$ halmazon, ha $q^T M q \geq 0 \quad \forall q \in \mathcal{Q}$ esetén. Ha szigorú egyenlőtlenség teljesül, akkor M *pozitív multiplikátor mátrix* $\mathcal{Q}$ -n.

9. Definíció. Legyen $\mathcal{M}^+$ pozitív multiplikátor mátrixok halmaza $\mathcal{Q}$ -n. Ekkor az $\mathcal{M}^+$ -t *elegendően gazdagnak* nevezzük, ha tetszőleges $\bar{M}$ pozitív multiplikátor mátrix esetén létezik $M \in \mathcal{M}^+$, amelyre $M \leq \bar{M}$ teljesül.

Most pedig vizsgáljuk a

$$y^T U^T \Psi U y < 0 \quad \forall y \in \mathcal{B}_{\mathcal{Q}} \quad (46)$$

egyenlőtlenség teljesülésének feltételeit. Ezt azzal kezdjük, hogy választunk egy olyan maximális dimenziójú $\mathcal{B}_0$ alteret $\mathcal{B}$ -ben, melyre teljesül, hogy $U^T \Psi U \geq 0$. Ekkor $\mathcal{B}_0$ dimenziója szerint két esetet különböztetünk meg. Egyrészt, ha a $\mathcal{B}_0$ dimenziója nulla, akkor $U^T \Psi U < 0$ teljesül $\mathcal{B}$ -n, és így létezik $\varepsilon > 0$, amelyre a (46) ekvivalens a

$$y^T (U^T \Psi U + \varepsilon V^T V) y < 0 \quad \forall y \in \mathcal{B} \setminus \{0\} \quad (47)$$

egyenlőtlenséggel. Vegyük észre, hogy $\varepsilon I \in \mathcal{M}^+$.

Másrészt, a [9] szerint, ha van olyan $\mathcal{B}_0$, melynek dimenziója legalább egy és $\mathcal{B}_0 \cap \mathcal{B}_{\text{cone}\mathcal{Q}} \neq \{0\}$, akkor

$$y^T (U^T \Psi U + V^T M V) y < 0 \quad (48)$$

nem teljesül minden $y \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ semmilyen $\mathcal{Q}$ -ra vonatkozó multiplikátor mátrixra sem.

Ezért az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a következő feltételek teljesülnek.

1. Feltétel. 1. $\mathcal{Q}$ egy kúp,

2. $\mathcal{B}_0 \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Q}} = \{0\} \quad \forall \mathcal{B}_0$,

3. $\mathcal{Q} \subset V\mathcal{B}$ vagy $\mathcal{Q}$ zárt.

Most pedig a szükséges előkészületek után [9] fő eredménye.

4. Lemma. *Tegyük fel, hogy az 1. Feltétel teljesül és $\mathcal{M}^+$ a $\mathcal{Q}$ halmazon pozitív multiplikátor mátrixok egy elegendően gazdag halmaza. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. $y^T U^T \Psi U y < 0$ teljesül minden $y \in \mathcal{B}_{\mathcal{Q}} \setminus \{0\}$ -ra.
2. létezik $M \in \mathcal{M}^+$, amelyre $y^T (U^T \Psi U + V^T M V) y < 0 \quad y \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ teljesül.

2. *Megjegyzés.* Az iménti lemma esetén a 2. $\Rightarrow$ 1. implikációhoz nem szükséges, hogy a multiplikátor mátrixok halmaza elegendően gazdag legyen. Az csak az ekvivalencia másik irányában játszik szerepet.

A [10]-zel összhangban bevezetünk néhány újabb jelölést.

$$\begin{aligned} \underline{\tau} &= \text{diag} \{ \tau_1 I_{l_{p_1}}, \dots, \tau_s I_{l_{p_s}} \}, \quad \underline{\varepsilon} = \text{diag} \{ \varepsilon_1 I_{l_{p_1}}, \dots, \varepsilon_s I_{l_{p_s}} \}, \\ \underline{\underline{\tau}} &= \text{diag} \{ \tau_1 I_{l_{q_1}}, \dots, \tau_s I_{l_{q_s}} \}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \text{diag} \{ \varepsilon_1 I_{l_{q_1}}, \dots, \varepsilon_s I_{l_{q_s}} \}, \end{aligned} \quad (49)$$

ahol τ_i és ε_i pozitív valós konstansok minden $i = 1, \dots, s$ -re. Vegyük észre, hogy ha $s = 1$, akkor $\underline{\tau} = \tau_1 I_{l_{p_1}}$, illetve $\underline{\underline{\tau}} = \tau_1 I_{l_{q_1}}$ továbbá $\underline{\varepsilon}$ és $\underline{\underline{\varepsilon}}$ is hasonlóan alakul. Tehát $s = 1$ esetén tulajdonképpen két paraméter τ_1 és ε_1 szerepel. Ennek ellenére az egyszerűség kedvéért a formulákban nem teszünk különbséget az $s = 1$ és az $s \neq 1$ esetek között.

5. Lemma. *Legyen*

$$\mathcal{M}_1^+ = \left\{ M : M = \begin{pmatrix} \underline{\tau} Q_0 + \underline{\varepsilon} & \underline{\tau} S_0 \\ S_0^T \underline{\tau} & \underline{\underline{\tau}} R_0 + \underline{\underline{\varepsilon}} \end{pmatrix}, \tau_i, \varepsilon_i > 0, i = 1, \dots, s \right\}. \quad (50)$$

Ekkor $\mathcal{M}_1^+$ a (2)-beli Ω_1 -re vonatkozó pozitív multiplikátor mátrixok halmaza. Ráadásul, ha $s = 1$, akkor $\mathcal{M}_1^+$ elegendően gazdag is.

A bizonyítás megtalálható a [10] cikkben.

3. *Megjegyzés.* Az előző lemma a lehető legtöbbet állítja, amit lehet. Ugyanis belátható, hogy $s > 1$ esetén az 5. Lemmában szereplő $\mathcal{M}^+$ nem elegendően gazdag.

4.3. Szakdolgozat eredményei

A szakdolgozat fő eredménye, hogy a pozitív multiplikátor módszer segítségével elégséges feltételt adtunk a rendszer stabilitásához kvadratikus bizonytalanság mellett. Ezt követően megmutattuk, hogyan számolható a visszacsatolás mátrixa lineáris mátrixegyenlőtlenség segítségével, majd megvizsgáltuk, miként terjeszthetők ki az elért eredmények paraméterbizonytalanságot tartalmazó rendszerekre.

4.3.1. Abszolút stabilitás

A szakdolgozatban azzal a megkötéssel éltünk, hogy az $x_t \in \mathcal{C}$ függvénynek abszolút folytonosnak-, a derivált függvényének pedig négyzetesen integrálhatónak kell lennie a $[-\eta, 0)$ intervallumon. Ezen függvények halmazára bevezettük a W jelölést. Az alkalmazások szempontjából ez nem jelent komoly megszorítást, hiszen a vizsgált rendszerek fizikai tulajdonságait szem előtt tartva kijelenthetjük, hogy az állapotváltozások nem lehetnek tetszőlegesen nagyok. A vizsgálatokhoz szükséges W -n egy norma, ezért legyen

$$\|\phi\|_w^2 = \max_{\theta \in [-\eta, 0]} \|\phi(\theta)\|^2 + \int_{-\eta}^0 \|\dot{\phi}(s)\|^2 ds. \quad (51)$$

Belátható, hogy az így definiált $\|\cdot\|_w$ valóban norma és ekvivalens az E. Fridman által [3]-ban használt

$$\|\phi\|_W = \max_{\theta \in [-\eta, 0]} \|\phi(\theta)\| + \left(\int_{-\eta}^0 \|\dot{\phi}(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (52)$$

normával. Utóbbihoz mindösszesen a $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ egyenlőtlenségekre van szükségünk. Igazolható, hogy a 3.1. fejezetben tárgyalt fogalmak értelmesek, a tételek pedig igazak, ha a folytonos függvényeknél megszokott normát a $\|\cdot\|_w$ -re cseréljük.

A szakdolgozatban vizsgált általánosított Lur'e rendszer modellje abban tér el a (33)-tól, hogy a bizonytalan output függhet a vezérléstől illetve, hogy lehetőség van a szektorfeltételnél általánosabb kvadratikus korlátozó feltételnek eleget tevő strukturált bizonytalanság kezelésére. A vizsgált modell az alábbi:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_x x(t) + B_x u(t) + \sum_{i=1}^s H_i p_i(t), \\ q_{1,i}(t) &= A_{q_{1,i}} x(t) + B_{q_{1,i}} u(t), \quad i = 1, \dots, s \\ p_1(t) &= \varphi(t, q_1(t)). \end{aligned} \quad (53)$$

Itt a jelölések megegyeznek a 2. fejezetekben használtakkal. A tekintett bizonytalanságot illetően a $(p_1^T, q_1^T)^T \in \Omega_1$ feltételnek kell teljesülnie.

A 7. Definícióhoz hasonló fogalom kvadratikus korlátozott bizonytalanság esetében a következő.

10. Definíció. Az mondjuk, hogy az (53) általánosított Lur'e rendszer *abszolút stabilis az Ω_1 kvadratikus bizonytalanság mellett*, ha léteznek olyan P és R pozitív

definit szimmetrikus mátrixok, valamint $\gamma > 0$ konstans, melyekre a

$$\begin{aligned} F(x(t), x(t - \tau(t)), p(t)) = & \\ & x^T(t)(PA_x + A_x^T P)x(t) + 2x^T(t - \tau(t))(B_x K)^T P x(t) + 2p^T(t)H_1^T P x(t) - \\ & - x^T(t)Rx(t) + 2x^T(t - \tau(t))Rx(t) - x^T(t - \tau(t))Rx(t - \tau(t)) + \eta^2 \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) \end{aligned} \quad (54)$$

függvény kielégíti a

$$\sup_{\left(\frac{p_1}{q_1}\right) \in \Omega_1} F(x(t), x(t - \tau(t)), p(t)) < -\gamma \|x(t)\|^2 \quad (55)$$

feltételt.

Most nézzük, hogyan kapcsolódik ez a definíció a funkcionál-differenciálegyenletek elméletéhez.

7. Tétel. *Ha az (53) Lur'e rendszer a 10. Definíció értelmében abszolút stabilis az Ω_1 kvadratikus bizonytalanság mellett, akkor a rendszer azonosan nulla megoldása globálisan egyenletesen aszimptotikusan stabilis.*

A bizonyítás megtalálható a szakdolgozatban.

4.3.2. Stabilitásvizsgálat

A szakdolgozat az 1. ábrán látható HKV rendszer stabilitásvizsgálatával kapcsolatos fő eredménye a következő.

8. Tétel. *Ha $s = 1$, akkor az (53) zárt rendszer az η skalár és K vezérlés mátrix esetén akkor és csak akkor abszolút stabilis a (2) kvadratikus bizonytalanság mellett, ha léteznek olyan τ_i, ε_i ($i = 1, \dots, s$) és γ pozitív konstansok, valamint $P, R \in \mathbb{S}_+^{n \times n}$ mátrixok, amelyekre a következő lineáris mátrixegyenlőtlenség teljesül:*

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} + \eta^2 A_x^T R A_x & * & * \\ \Gamma_{21} + \eta^2 (B_x K)^T R A_x & \Gamma_{22} + \eta^2 (B_x K)^T R B_x K & * \\ H_1^T P + \eta^2 H_1^T R A_1 + \underline{\tau} S_0 A_{q_1} & \eta^2 H_1^T R B_x K + \underline{\tau} S_0 B_{q_1} K & \Gamma_{33} \end{pmatrix} < 0, \quad (56)$$

ahol

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \gamma I + P A_x + A_x^T P - R + A_{q_1}^T (\underline{\tau} R_0 + \underline{\varepsilon}) A_{q_1} \\ \Gamma_{21} &= (B_x K)^T P + R + (B_{q_1} K)^T (\underline{\tau} R_0 + \underline{\varepsilon}) A_{q_1} \\ \Gamma_{22} &= -R + (B_{q_1} K)^T (\underline{\tau} R_0 + \underline{\varepsilon}) (B_{q_1} K) \\ \Gamma_{33} &= \eta^2 H_1^T R H_1 + \underline{\tau} Q_0 + \underline{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ha $s > 1$, akkor az (56) feltétel teljesülése esetén a rendszer abszolút stabilis.

Az (56)-ról látszik, hogy rögzített K esetén egy lineáris mátrixegyenlőtlenség az ismeretlen P , R pozitív definit szimmetrikus mátrix és a τ_i , ε_i pozitív skalár változókra vonatkozóan.

4.3.3. Vezérlőtervezés

A 8. Tétel csak adott K visszacsatolás mátrix esetén használható. Ebben az alfejezetben a szakdolgozat azon eredményével foglalkozunk, amely a megfelelő K mátrix meghatározására szolgál.

Mielőtt belekezdenénk, néhány új jelölés. Legyen $\varrho_i = \tau_i^{-1}$ és $\mu_i = \varepsilon_i^{-1}$ minden $i = 1, \dots, s$ esetén, ahol τ_i és ε_i a 8. Tételben szereplő pozitív konstansok. Legyen továbbá

$$\begin{aligned}\bar{\varrho} &= \text{diag} \{ \varrho_1 I_{l_{p_1}}, \dots, \varrho_s I_{l_{p_s}} \}, \quad \bar{\mu} = \text{diag} \{ \mu_1 I_{l_{p_1}}, \dots, \mu_s I_{l_{p_s}} \}, \\ \bar{\bar{\varrho}} &= \text{diag} \{ \varrho_1 I_{l_{q_1}}, \dots, \varrho_s I_{l_{q_s}} \}, \quad \bar{\bar{\mu}} = \text{diag} \{ \mu_1 I_{l_{q_1}}, \dots, \mu_s I_{l_{q_s}} \}.\end{aligned}\quad (57)$$

9. Tétel. *Az 1. ábrán látható HKV rendszerhez tartozó (53) zárt rendszer adott η skalár esetén abszolút stabilis a (2) kvadratikus bizonytalanság mellett, ha léteznek olyan ϱ_i , μ_i ($i = 1, \dots, s$) és σ pozitív konstansok, valamint $\bar{X} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $\bar{P}, \bar{R} \in \mathbb{S}_+^{n_x \times n_x}$ mátrixok, melyekre a*

$$\begin{pmatrix} A\bar{P} + \bar{P}A^T - \bar{R} & * & * & * & * & * & * & * \\ \bar{X}^T B^T + \bar{R} & -\bar{R} & * & * & * & * & * & * \\ \bar{\varrho} H^T - S_0 C \bar{P} & S_0 D \bar{X} & Q_0 \bar{\varrho} & * & * & * & * & * \\ \eta A \bar{P} & \eta B \bar{X} & \eta H \bar{\varrho} & \bar{R} - 2\bar{P} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bar{\varrho} & 0 & -\bar{\mu} & * & * & * \\ C \bar{P} & D \bar{X} & 0 & 0 & 0 & -\bar{\bar{\mu}} & * & * \\ R_0^{1/2} C \bar{P} & R_0^{1/2} D \bar{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\bar{\varrho}} & * \\ \bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma I \end{pmatrix} < 0 \quad (58)$$

lineáris mátrixegyenlőtlenség teljesül. Ekkor a visszacsatolás K mátrixát a

$$K = \bar{X} \bar{P}^{-1} \quad (59)$$

összefüggéssel kapjuk.

A szakdolgozatban a 8. és a 9. Tételt a [12] eredményeivel analóg módon kiterjesztettük paraméterbizonytalan rendszerekre is.

4.4. Irodalmi előzmény: Zeng et al [16] eredménye

Ebben a fejezetben a [16] eredményeivel foglalkozunk. A cikk a [12]-ben kitűzött feladatot gondolja tovább, azaz a HKV rendszerek (33) Lur'e modelljét tekinti a (34)

szektorfeltétel mellett paraméterbizonytalanság nélkül. Éppen ezért az abszolút stabilitás 7. Definícióját használjuk.

Zeng et al az 1. ábrán látható Lur'e HKV rendszer stabilitásvizsgálatával kapcsolatos fő eredménye az alábbi tétel:

10. Tétel. *Adott η skalár és K visszacsatolási mátrix esetén a (35) zárt rendszer abszolút stabilis a $\mathcal{F}[0, \Theta]$ szektorban, ha léteznek olyan $P, Q, R \in \mathbb{S}_+^{n_x \times n_x}$ továbbá N_1, N_2, M_1 és $M_2 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ mátrixok, amelyekre*

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & * & * & * & * \\ -M_1^T & -M_2^T & -Q & * & * & * \\ B_{q_1}^T P - \Theta A_{q_1} & 0 & 0 & -2I & * & * \\ -\eta N_1^T & -\eta N_2^T & 0 & 0 & -\eta R & * \\ \eta R A_x & \eta R B_x K & 0 & \eta R H_1 & 0 & -\eta R \end{pmatrix} < 0, \quad (60)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & * & * & * & * \\ -M_1^T & -M_2^T & -Q & * & * & * \\ B_{q_1}^T P - \Theta A_{q_1} & 0 & 0 & -2I & * & * \\ -\eta M_1^T & -\eta M_2^T & 0 & 0 & -\eta R & * \\ \eta R A_x & \eta R B_x K & 0 & \eta R H_1 & 0 & -\eta R \end{pmatrix} < 0 \quad (61)$$

teljesül, ahol

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= A_x^T P + P A_x + Q + N_1 + N_1^T, \\ \Phi_{21} &= K^T B_x^T P - N_1^T + N_2 + M_1^T, \\ \Phi_{22} &= -N_2 - N_2^T + M_2 + M_2^T. \end{aligned}$$

A [16] vezérlés tervezéssel kapcsolatos fő eredménye pedig a következő.

11. Tétel. *Adott η skalár esetén a (35) zárt rendszer abszolút stabilis a $\mathcal{F}[0, \Theta]$ szektorban, ha léteznek olyan $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R} \in \mathbb{S}_+^{n_x \times n_x}$, valamint $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{M}_1, \bar{M}_2 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ és $\bar{X} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ mátrixok, amelyekre*

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{11} & * & * & * & * & * \\ \bar{\Phi}_{21} & \bar{\Phi}_{22} & * & * & * & * \\ -\bar{M}_1^T & -\bar{M}_2^T & -\bar{Q} & * & * & * \\ B_{q_1}^T - \Theta A_{q_1} \bar{P} & 0 & 0 & -2I & * & * \\ -\eta \bar{N}_1^T & -\eta \bar{N}_2^T & 0 & 0 & -\eta \bar{P} R^{-1} \bar{P} & * \\ \eta A_x \bar{P} & \eta B_x \bar{X} & 0 & \eta H_1 & 0 & -\eta \bar{R} \end{pmatrix} < 0, \quad (62)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{11} & * & * & * & * & * \\ \bar{\Phi}_{21} & \bar{\Phi}_{22} & * & * & * & * \\ -\bar{M}_1^T & -\bar{M}_2^T & -\bar{Q} & * & * & * \\ B_{q_1}^T - \Theta A_{q_1} \bar{P} & 0 & 0 & -2I & * & * \\ -\eta \bar{M}_1^T & -\eta \bar{M}_2^T & 0 & 0 & -\eta \bar{P} R^{-1} \bar{P} & * \\ \eta A_x \bar{P} & \eta B_x \bar{X} & 0 & \eta H_1 & 0 & -\eta \bar{R} \end{pmatrix} < 0, \quad (63)$$

teljesül, ahol

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{11} &= \bar{P} A_x^T + A_x \bar{P} + \bar{Q} + \bar{N}_1 + \bar{N}_1^T, \\ \bar{\Phi}_{21} &= \bar{X}^T B_x^T - \bar{N}_1^T + \bar{N}_2 + \bar{M}_1^T, \\ \bar{\Phi}_{22} &= -\bar{N}_2 - \bar{N}_2^T + \bar{M}_2 + \bar{M}_2^T. \end{aligned}$$

Ekkor a visszacsatolás mátrixa a

$$K = \bar{X} \bar{P}^{-1} \quad (64)$$

képlettel számolható.

Az előző tételben kapott (62) és (63) egyenlőtlenségek nem lineáris mátrixegyenlőtlenségek a $-\eta \bar{P} \bar{R}^{-1} \bar{P}$ tag megjelenése miatt. Ezért további átalakításra van szükség. A [12] a $-\bar{P} \bar{R}^{-1} \bar{P} \leq \bar{R} - 2\bar{P}$ egyenlőtlenséget alkalmazza a tag kiküszöbölésére. Ehelyett [16]-ban a kúp komplementens algoritmus egy fejlesztett változatát használják. Ehhez először némi módosítást kell eszközölnünk a (62) illetve a (63) egyenlőtlenségeken. Az átfogalmazott feladat, hogy minimalizáljuk a $\text{tr}\{\bar{P}P + U\bar{U} + \bar{R}R\}$ függvényt a

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{11} & * & * & * & * & * \\ \bar{\Phi}_{21} & \bar{\Phi}_{22} & * & * & * & * \\ -\bar{M}_1^T & -\bar{M}_2^T & -\bar{Q} & * & * & * \\ B_{q_1}^T - \Theta A_{q_1} \bar{P} & 0 & 0 & -2I & * & * \\ -\eta \bar{N}_1^T & -\eta \bar{N}_2^T & 0 & 0 & -\eta U & * \\ \eta A_x \bar{P} & \eta B_x \bar{X} & 0 & \eta H_1 & 0 & -\eta \bar{R} \end{pmatrix} < 0, \quad (65)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{11} & * & * & * & * & * \\ \bar{\Phi}_{21} & \bar{\Phi}_{22} & * & * & * & * \\ -\bar{M}_1^T & -\bar{M}_2^T & -\bar{Q} & * & * & * \\ B_{q_1}^T - \Theta A_{q_1} \bar{P} & 0 & 0 & -2I & * & * \\ -\eta \bar{M}_1^T & -\eta \bar{M}_2^T & 0 & 0 & -\eta U & * \\ \eta A_x \bar{P} & \eta B_x \bar{X} & 0 & \eta H_1 & 0 & -\eta \bar{R} \end{pmatrix} < 0, \quad (66)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{U} & P \\ P & R \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \bar{P} & I \\ I & P \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} U & I \\ I & \bar{U} \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \bar{R} & I \\ I & R \end{pmatrix} \geq 0 \quad (67)$$

LMI feltételek mellett. Erre a feladatra már alkalmazhatjuk az ICCL algoritmust, amely a következő lépésekből áll.

1. Választunk egy elegendően kicsi $\eta > 0$ számot, amelyre a (65), (66) és (67)-nek létezik megvalósítható megoldása. Ekkor legyen $\eta_{\max} = \eta$.
2. Megkeressük a (65), (66) és (67) egy megengedett megoldását, amelyre a $P_0, \bar{P}_0, \bar{Q}_0, R_0, \bar{R}_0, \bar{N}_{i,0}, \bar{M}_{i,0}, U_0, \bar{U}_0$ és $\bar{X}_0$ jelöléssel élünk. Legyen $k = 0$.
3. Megoldjuk a következő LMI feladatot. Minimalizáljuk a $\text{tr}\{\bar{P}P_k + \bar{P}_kP + U\bar{U}_k + U_k\bar{U} + \bar{R}R_k + R_k\bar{R}\}$ függvényt a $P, \bar{P}, \bar{Q}, R, \bar{R}, \bar{N}_i, \bar{M}_i, U, \bar{U}$ és $\bar{X}$ változókra vonatkozóan a (65), (66) és (67) feltételek mellett. Ekkor legyen $P_{k+1} = P, \bar{P}_{k+1} = \bar{P}, U_{k+1} = u, \bar{U}_{k+1} = \bar{U}, R_{k+1} = R$ és $\bar{R}_{k+1} = \bar{R}$.
4. Ha az előző lépésben nyert eredmények alapján számolt K visszacsatolási mátrixszal a (60) és (61) LMI-nek létezik megvalósítható megoldása, akkor növeljük meg az η értéket és ugorjunk a 2. lépésre. Egyébként legyen $k = k + 1$ és folytassuk a 3. lépéssel. Ha azonban az említett LMI-k több iteráció alatt nem megvalósíthatók, akkor hagyjuk abba az eljárást.

4.5. Wirtinger-egyenlőtlenség

Ebben a fejezetben a [14] eredményein keresztül megtudjuk, hogyan használható a Wirtinger-egyenlőtlenség (3. Lemma) a Jensen-egyenlőtlenséggel (2. Lemma) kapott becslés javítására.

A Wirtinger-egyenlőtlenség akkor igazán hasznos, ha a megfelelő függvényre alkalmazzuk. Így [14] fő eredménye:

12. Tétel. *Legyen M pozitív definit szimmetrikus mátrix. Ekkor minden $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvényre a következő teljesül:*

$$\int_a^b \omega^T(t) M \omega(t) dt \geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b \omega(t) dt \right)^T M \left(\int_a^b \omega(t) dt \right) + \frac{3}{b-a} \Omega^T M \Omega, \quad (68)$$

ahol

$$\Omega = \int_a^b \omega(t) dt - \frac{2}{b-a} \int_a^b \int_a^t \omega(s) ds dt \quad (69)$$

Számunkra elsősorban a tétel alábbi következménye lesz igazán hasznos.

13. Tétel. *Legyen M pozitív definit szimmetrikus mátrix. Ekkor minden $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvényre a következő teljesül:*

$$\int_a^b \dot{\omega}^T(t) M \dot{\omega}(t) dt \geq \frac{1}{b-a} (\omega(b) - \omega(a))^T M (\omega(b) - \omega(a)) + \frac{3}{b-a} \tilde{\Omega}^T M \tilde{\Omega}, \quad (70)$$

ahol

$$\tilde{\Omega} = \omega(b) + \omega(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \omega(t) dt. \quad (71)$$

Ezen eredményhez mindösszesen a $\dot{\omega}$ függvényre kell alkalmazni a 12. Tételt.

A 13. Tétel már tényleg hasonlít a Jensen-egyenlőtlenségre, továbbá az is látszik, hogy erősebb nála, hiszen M pozitív definit.

5. Fő eredmények

Az előkészületek után ebben a fejezetben tárgyaljuk a jelen dolgozat eredményeit. Először megmutatjuk, hogyan nem csak a bizonytalanságra adott feltétel, hanem a bizonytalanság kezelése is történhet egységes formában. Szükségünk lesz az abszolút stabilitás definíciójának módosítására is, amit az 5.2 alfejezetben teszünk meg. Ezt követően a 2. fejezetben kitűzött feladat három lehetséges megoldását ismertetjük.

5.1. Bizonytalanság kezelése

Azzal, hogy eltértünk a paraméterbizonytalanság [12]-féle leírásától, szükségessé vált annak kezelésének a módosítása is. Az Ω_1 által reprezentált bizonytalanság esetén az 5. lemma értelmében ismerjük erre nézve pozitív multiplikátor mátrixoknak egy halmazát. Az alfejezet célja, hogy Ω_2 esetén is megtaláljuk a megfelelő multiplikátorokat. Az $\mathcal{L}$ továbbra is a (41)-ben definiált halmazt jelöli.

14. Tétel. *Legyen*

$$\mathcal{M}_2 = \{M_2 : M_2 = \text{diag}\{-L, L\}, L \in \mathcal{L}\}. \quad (72)$$

Ekkor $\mathcal{M}_2$ a (γ) -beli Ω_2 -re vonatkozó multiplikátor mátrixok halmaza.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(p_2^T, q_2^T) \in \Omega_2$, és mutassuk meg, hogy

$$\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (73)$$

teljesül. Ha elvégezzük a szorzást és felhasználjuk Ω_2 definícióját vagyis, hogy $p_2 = \Delta q_2$ valamely $\Delta \in \mathcal{D}$ -re, akkor látszik, hogy elegendő igazolni a

$$\Delta^T L \Delta - L \leq 0 \quad (74)$$

fennállását bármely $L \in \mathcal{L}$ és $\Delta \in \mathcal{D}$ esetén. $\mathcal{L}$ és $\mathcal{D}$ definíciója szerint ez akkor teljesül, ha

$$\begin{pmatrix} s_1 (\Delta_1^T \Delta_1 - I) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & s_k (\Delta_k^T \Delta_k - I) & & \\ & & & (\delta_1^2 - 1) S_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & (\delta_l^2 - 1) S_l \end{pmatrix} \leq 0, \quad (75)$$

azaz ha bármely $y \in \mathbb{R}^{l_{p2}}$ vektorra

$$y^T (\Delta^T L \Delta - L) y = \sum_{i=1}^k s_i y_i^T (\Delta_i^T \Delta_i - I) y_i + \sum_{j=1}^l (\delta_j^2 - 1) y_{k+j}^T S_j y_{k+j} \leq 0. \quad (76)$$

Mivel $\Delta \in \mathcal{D}$ esetén $\Delta_i^T \Delta_i - I \leq 0$ illetve $\delta_j^2 - 1 \leq 0$, így ez az egyenlőtlenség minden $y \in \mathbb{R}^{l_{p2}}$ vektorra igaz bármely $s_i > 0$, $S_j = S_j^T > 0$, azaz bármely $L \in \mathcal{L}$ esetén. $\square$

Ezek után a multiplikátor mátrixok két halmazának összevonásával együtt kezelhetjük a bizonytalanságokat.

15. Tétel. Az $M = \text{diag}\{M_1, M_2\}$ mátrixok, ahol $M_1 \in \mathcal{M}_1^+$ illetve $M_2 \in \mathcal{M}_2$ pozitív multiplikátor mátrixok egy halmazát alkotják az $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ halmazra nézve.

Bizonyítás.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}^T M_1 \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}^T M_2 \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad (77)$$

ahol $(p_1^T, q_1^T)^T \in \Omega_1$, $(p_2^T, q_2^T)^T \in \Omega_2$. A (77) biztosan pozitív, hiszen egy pozitív és egy nemnegatív szám összege pozitív. $\square$

5.2. Abszolút stabilitás

A szakdolgozathoz hasonlóan itt is feltételezzük, hogy $x_t \in W$ és használjuk a $\|\cdot\|_w$ normát (definíciók a 4.3. alfejezetben).

Az abszolút stabilitás jelenlegi bizonytalanságnak megfelelő definíciójával kezdünk, majd igazoljuk a funkcionál-differenciálegyenletekkel való kapcsolatát, ami tulajdonképpen megmagyarázza a definícióban szereplő F függvény választását.

11. Definíció. Az mondjuk, hogy a (14) általánosított Lur'e rendszer *robosztusan abszolút stabilis* az $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ bizonytalanság mellett, ha léteznek olyan P, Q és R pozitív definit szimmetrikus mátrixok, valamint $\gamma > 0$ konstans, amelyekre a (14) megoldása mentén tekintett

$$F(x(t), x(t - \tau(t)), x(t - \eta), p_1(t), p_2(t)) = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) - x^T(t - \eta)Qx(t - \eta) + \eta\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-\eta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s) ds \quad (78)$$

függvény kielégíti a

$$\sup_{\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \in \Omega} F(x(t), x(t - \tau(t)), x(t - \eta), p_1(t), p_2(t)) \leq -\gamma\|x(t)\|^2 \quad (79)$$

feltételt.

Mivel a későbbiekben többször előkerül a $F(x(t), x(t - \tau(t)), x(t - \eta), p_1(t), p_2(t)) + \gamma x^T(t)x(t)$ függvény, ezért erre bevezetjük a F_γ jelölést.

16. Tétel. Ha a (14) Lur'e rendszer a 11. Definíció értelmében *robosztusan abszolút stabilis* az $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ bizonytalanság mellett, akkor a rendszer *azonosan nulla megoldása globálisan egyenletesen aszimptotikusan stabilis*.

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy megadható egy V funkcionál úgy, hogy a Ljapunov–Kraszovszkij-tétel feltételei teljesülnek, hiszen a tételből következik, hogy az $x = 0$ megoldás globálisan egyenletesen aszimptotikusan stabilis. A Ljapunov–Kraszovszkij funkcionál a [16] mintájára legyen

$$V(t, x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\eta}^t x^T(\theta)Qx(\theta) d\theta + \int_{-\eta}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta, \quad (80)$$

ahol a P, Q és R az abszolút stabilitás definíciójában szereplő szimmetrikus pozitív definit mátrixok. Figyelembe véve a $x(t) = x_t(0)$ összefüggést könnyen belátható, hogy (80) ekvivalens a 3.1. alfejezet jelöléseivel jobban ragaszkodó

$$V(t, \phi) = \phi^T(0)P\phi(0) + \int_{-\eta}^0 \phi^T(\theta)Q\phi(\theta) d\theta + \int_{-\eta}^0 \int_{\beta}^0 \dot{\phi}^T(\alpha)R\dot{\phi}(\alpha) d\alpha d\beta \quad (81)$$

alakkal, ahol $\phi \in W$.

Célunk, hogy az imént definiált V függvényhez megtaláljuk a megfelelő u alsó és v felső korlátot. Első lépésként azt látjuk be, hogy

$$u(s) = \lambda_{\min}(P) s^2 \quad (82)$$

jó választás. Ennek igazolásához egyrészt tudjuk, hogy az $x^T P x \geq \lambda_{\min}(P) \|x\|^2$ reláció minden $\mathbb{R}^n$ -beli x vektorra teljesül, másrészt, mivel a Q és R mátrixok pozitív definiték $x^T(\theta)Qx(\theta) \geq 0$ és $\dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha) \geq 0$. Felhasználva, hogy nemnegatív függvény integrálja nemnegatív adódik, hogy

$$\int_{t-\eta}^t x^T(\theta)Qx(\theta) d\theta \geq 0, \quad (83)$$

$$\int_{-\eta}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta \geq 0. \quad (84)$$

Ebből pedig következik, hogy

$$V(t, x_t) \geq \lambda_{\min}(P) \|x_t(0)\|^2, \quad (85)$$

azaz (82) megfelelő.

Második lépés a felső korlát megtalálása. Igazolni fogjuk, hogy

$$v(s) = \max\{\lambda_{\max}(P) + \eta\lambda_{\max}(Q), \eta\lambda_{\max}(R)\} s^2 \quad (86)$$

eleget tesz az elvárásoknak. Most az u -nál használt becslés másik irányára lesz szükségünk, vagyis $x^T P x \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|^2$, ha $x \in \mathbb{R}^n$. Ugyanezt alkalmazzuk Q -ra is. Ekkor

$$\int_{t-\eta}^t x^T(\theta)Qx(\theta) d\theta \leq \lambda_{\max}(Q) \int_{t-\eta}^t \|x(\theta)\|^2 d\theta \leq \lambda_{\max}(Q) \max_{\theta \in [t-\eta, t]} \|x(\theta)\|^2 \eta \quad (87)$$

Az előbb láttuk, hogy $\dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha) > 0$. Mint már említettük, nemnegatív függvény integrálja nemnegatív. Ennek következménye, hogy ha az intervallumot, amelyen egy nemnegatív függvényt integrálunk, kiterjesztjük egy nagyobb intervallummá, akkor az integrál értéke nem lehet kevesebb az eredeti értéknél. Tehát

$$\int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha) d\alpha \leq \int_{t-\eta}^t \dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha) d\alpha, \quad (88)$$

mert $\beta \in [-\eta, 0]$. A jobb oldal viszont már nem függ β -től, így

$$\int_{-\eta}^0 \int_{t-\eta}^t \dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta = \eta \int_{t-\eta}^t \dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha) d\alpha. \quad (89)$$

Itt is alkalmazhatjuk az $\dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha) \leq \lambda_{\max}(R) \|\dot{x}(\alpha)\|^2$ becslést, majd ezt követően végrehajtjuk az $s = \alpha - t$ paramétertranszformációt. Felhasználva az eddigieket adódik a

$$\begin{aligned} V(t, x_t) &\leq (\lambda_{\max}(P) + \eta\lambda_{\max}(Q)) \max_{\theta \in [t-\eta, t]} \|x_t(\theta)\|^2 + \eta\lambda_{\max}(R) \int_{-\eta}^0 \|\dot{x}_t(s)\|^2 ds \leq \\ &\leq c \left(\max_{\theta \in [t-\eta, t]} \|x_t(\theta)\|^2 + \int_{-\eta}^0 \|\dot{x}_t(s)\|^2 ds \right) \end{aligned} \quad (90)$$

felső becslés, ahol $c = \max\{\lambda_{\max}(P) + \eta\lambda_{\max}(Q), \eta\lambda_{\max}(R)\}$. Ez pedig azt jelenti, hogy (86) megfelelő.

Harmadik lépésként a $\dot{V}$ -ra vonatkozó feltétel teljesülését vizsgáljuk. A V függvény t szerinti deriváltja a megoldások mentén a következőképpen alakul

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t) = & \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) - x^T(t-\eta)Qx(t-\eta) + \\ & + \frac{d}{dt} \int_{-\eta}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (91)$$

Nézzük (91) problémás tagját külön. Ha felcseréljük az integrálás és deriválás sorrendjét, a deriválás elvégezhető.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\eta}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta = \\ = \int_{-\eta}^0 \frac{d}{dt} \left(\int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha) d\alpha \right) d\beta = \\ = \int_{-\eta}^0 \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) d\beta - \int_{-\eta}^0 \dot{x}^T(t+\beta)R\dot{x}(t+\beta) d\beta \end{aligned} \quad (92)$$

Ezt követően látható, hogy

$$\int_{-\eta}^0 \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) d\beta = \eta \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t). \quad (93)$$

Utóbbi eredményeket felhasználva kapjuk a következőt.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t) = & \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) - x^T(t-\eta)Qx(t-\eta) + \\ & + \eta \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{-\eta}^0 \dot{x}^T(t+\beta)R\dot{x}(t+\beta) d\beta \end{aligned} \quad (94)$$

(78) és (94) alapján láthatjuk, hogy a 11. Definícióban szereplő F függvény és $\dot{V}$ megegyeznek. Tehát az robusztus abszolút stabilitás definíciójából következik, hogy $\dot{V}(t, x_t) \leq -\gamma\|x(t)\|^2$. Ezzel a Ljapunov–Kraszovszkij-tétel 1. pontjának utolsó feltétele is teljesül a (80)-ban definiált V funkcionálra, hiszen a

$$w(s) = \gamma s^2 \quad (95)$$

megfelelő függvény. Minthogy $w(s) > 0$ minden $s \neq 0$ esetén, továbbá a (82)-ben definiált u függvényre $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$ teljesül, ami pont a 2. és 3. pont feltételei. Tehát a Ljapunov–Kraszovszkij-tétel szerint a rendszer triviális megoldása globálisan egyenletesen aszimptotikusan stabilis. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. $\square$

4. *Megjegyzés.* Az iménti bizonyításban láttuk, hogy F megegyezik $\dot{V}$ -tal. Tehát a későbbiekben, amikor az F függvényen különböző átalakításokat hajtunk végre, gondolhatunk arra, hogy a (81) egyenlőséggel meghatározott $V(t, x_t)$ Ljapunov–Kraszovszkij-funkcionál (14) megoldásai mentén vett $\dot{V}(t, x_t)$ deriváltját alakítjuk.

5.3. A Zeng et al [16] eredményeinek kiterjesztése

5.3.1. Analízis

Elsőként azt nézzük meg, milyen eredményt kapunk, ha a [16] ötletét a multiplikátor módszerrel együtt alkalmazzuk a 2. fejezetben ismertetett probléma megoldására. Az 1. ábrán + multiplikátor látható Lur'e HKV rendszert vizsgáljuk. ...

17. Tétel. *Adott η skalár és K visszacsatolási mátrix esetén a (14) zárt rendszer robusztusan abszolút stabilis az $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ bizonytalanság mellett, ha léteznek olyan ε_i, τ_i ($i = 1, \dots, s$) és γ pozitív konstansok valamint $P, Q, R \in \mathbb{S}_+^{n_x \times n_x}$ továbbá $N = (N_1^T, N_2^T)^T$, $M = (M_1^T, M_2^T)^T \in \mathbb{R}^{2n_x \times n_x}$ megfelelő méretű mátrixok, amelyekre*

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11} + \phi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Phi_{21} + \phi_{21} & \Phi_{22} + \phi_{22} & * & * & * & * \\ -M_1^T & -M_2^T & -Q & * & * & * \\ \Phi_{41} + \phi_{41} & \Phi_{42} + \phi_{42} & 0 & \tau Q_0 + \phi_{44} & * & * \\ H_2^T P + \eta H_2^T R A_x & \eta H_2^T R B_x K & 0 & \eta H_2^T R H_1 & \eta H_2^T R H_2 - L & * \\ -\eta N_1^T & -\eta N_2^T & 0 & 0 & 0 & -\eta R \end{pmatrix} < 0, \quad (96)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11} + \phi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Phi_{21} + \phi_{21} & \Phi_{22} + \phi_{22} & * & * & * & * \\ -M_1^T & -M_2^T & -Q & * & * & * \\ \Phi_{41} + \phi_{41} & \Phi_{42} + \phi_{42} & 0 & \tau Q_0 + \phi_{44} & * & * \\ H_2^T P + \eta H_2^T R A_x & \eta H_2^T R B_x K & 0 & \eta H_2^T R H_1 & \eta H_2^T R H_2 - L & * \\ -\eta M_1^T & -\eta M_2^T & 0 & 0 & 0 & -\eta R \end{pmatrix} < 0, \quad (97)$$

ahol

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= A_x^T P + P A_x + Q + N_1 + N_1^T \\ \Phi_{21} &= K^T B_x^T P - N_1^T + N_2 + M_1^T \\ \Phi_{22} &= -N_2 - N_2^T + M_2 + M_2^T \\ \Phi_{41} &= H_1^T P + \tau S_0 A_{q_1} \\ \Phi_{42} &= \tau S_0 B_{q_1} K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{11} &= \gamma I + \eta A_x^T R A_x + A_{q_1} (\underline{\tau} R_0 + \underline{\epsilon}) A_{q_1} + A_{q_2}^T L A_{q_2} \\
\phi_{21} &= \eta K^T B_x^T R A_x + K^T B_{q_1} (\underline{\tau} R_0 + \underline{\epsilon}) A_{q_1} + K^T B_{q_2}^T L A_{q_2} \\
\phi_{22} &= \eta K^T B_x^T R B_x K + K^T B_{q_1} (\underline{\tau} R_0 + \underline{\epsilon}) B_{q_1} K + K^T B_{q_2}^T L B_{q_2} K \\
\phi_{41} &= \eta H_1^T R A_x + G^T L A_{q_2} \\
\phi_{42} &= \eta H_1^T R B_x K + G^T L B_{q_2} K \\
\phi_{44} &= \eta H_1^T R H_1 + \underline{\epsilon} + G^T L G
\end{aligned}$$

teljesül.

Bizonyítás. A tétel bizonyításához a 11. Definícióból kiindulva megmutatjuk, hogy az F függvény átalakításával a tétel feltételeihez juthatunk. Az említett átalakítások első lépéséhez a [16] ötletét használjuk.

Tudjuk, hogy a Newton–Leibnitz-formula alapján

$$x(t) - x(t - \tau(t)) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds = 0, \quad (98)$$

ezért a

$$\chi_1(t) := 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau(t)) \end{pmatrix} N \left(x(t) - x(t - \tau(t)) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \right) = 0, \quad (99)$$

$$\chi_2(t) := 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau(t)) \end{pmatrix} M \left(x(t - \tau(t)) - x(t - \eta) - \int_{t-\eta}^{t-\tau(t)} \dot{x}(s) ds \right) = 0 \quad (100)$$

egyenlőségek bármely $N, M \in \mathbb{R}^{2n_x \times n_x}$ mátrixok esetén teljesülnek. Ezek szerint a 11. Definícióban szereplő F függvény értéke nem változik, ha $\chi_1(t)$ és $\chi_2(t)$ függvényeket hozzáadjuk, így

$$\begin{aligned}
F &= \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) + x^T(t) Q x(t) - x^T(t - \eta) Q x(t - \eta) \\
&+ \eta \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) - \int_{t-\eta}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds + \chi_1(t) + \chi_2(t)
\end{aligned} \quad (101)$$

A [16] ötlete alapján (101) felhasználásával F_γ felírható két integrál összegeként.

$$F_\gamma = \frac{1}{\eta} \int_{t-\tau(t)}^t f_1(t, s) ds + \frac{1}{\eta} \int_{t-\eta}^{t-\tau(t)} f_2(t, s) ds \quad (102)$$

Ez esetben, ha $f_i(t, s) \leq 0$ teljesül $i = 1, 2$ -re a megengedett bizonytalanságok mellett, akkor a (102)-beli két integrál is nempozitív. Most tehát van egy elégséges feltételünk az abszolút stabilitásra. Következő lépésként vizsgáljuk meg az f_i függ-

vényeket, hogy a tételben szereplő egyenlőtlenségek felé haladhattunk.

$$\begin{aligned}
f_1(t, s) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) - x^T(t - \eta)Qx(t - \eta) \\
&+ \dot{x}^T(t)(\eta R)\dot{x}(t) - \dot{x}^T(s)(\eta R)\dot{x}(s) + \gamma x^T(t)x(t) \\
&+ 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau(t)) \end{pmatrix} N (x(t) - x(t - \tau(t)) - \eta \dot{x}(s)) \\
&+ 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau(t)) \end{pmatrix} M (x(t - \tau(t)) - x(t - \eta)) \quad (103)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(t, s) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) - x^T(t - \eta)Qx(t - \eta) \\
&+ \dot{x}^T(t)(\eta R)\dot{x}(t) - \dot{x}^T(s)(\eta R)\dot{x}(s) + \gamma x^T(t)x(t) \\
&+ 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau(t)) \end{pmatrix} N (x(t) - x(t - \tau(t))) \quad (104) \\
&+ 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau(t)) \end{pmatrix} M (x(t - \tau(t)) - x(t - \eta) - \eta \dot{x}(s))
\end{aligned}$$

A célunk egy LMI feltétel megtalálása, ezért fogalmazzuk át az f_i függvényeket mátrixok segítségével. Ehhez vezessük be a következő jelölést.

$$\xi(t, s) = \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau(t)) & x^T(t - \eta) & p_1^T & p_2^T & \dot{x}^T(s) \end{pmatrix}^T \quad (105)$$

Ezt követően a $\xi(t, s)$ segítségével (103) és (104) átírhatók mátrixokkal.

$$\begin{aligned}
f_1(t, s) &= (*) \begin{pmatrix} \gamma I & P \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_x & B_x K & 0 & H_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi(t, s) \\
&+ (*) \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi(t, s) \\
&+ (*) \begin{pmatrix} \eta R & 0 \\ 0 & -\eta R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x & B_x K & 0 & H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \xi(t, s) \\
&+ (*) \begin{pmatrix} N_1 + N_1^T & * & * \\ -N_1^T + N_2 & -N_2 - N_2^T & * \\ -\eta N_1 & -\eta N_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \xi(t, s) \\
&+ (*) \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ M_1^T & M_2 + M_2^T & * \\ -M_1^T & -M_2^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi(t, s) \quad (106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(t, s) = & (*) \begin{pmatrix} \gamma I & P \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_x & B_x K & 0 & H_1 & H_2 & 0 \end{pmatrix} \xi(t, s) \\
& + (*) \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi(t, s) \\
& + (*) \begin{pmatrix} \eta R & 0 \\ 0 & -\eta R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x & B_x K & 0 & H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \xi(t, s) \\
& + (*) \begin{pmatrix} N_1 + N_1^T & * \\ -N_1^T + N_2 & -N_2 - N_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi(t, s) \\
& + (*) \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ -\eta M_1 & 0 & * & * \\ -\eta M_2 & M_1^T & M_2 + M_2^T & * \\ 0 & -M_1^T & -M_2^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi(t, s) \quad (107)
\end{aligned}$$

Két nagy mátrix bevezetésével a következő egyszerű alakot kapjuk.

$$f_i(t, s) = \xi^T(t, s) \mathcal{L}^T \Psi_{i,0} \mathcal{L} \xi(t, s), \quad (108)$$

ahol $\Psi_{i,0} = \text{diag} \{ \Psi_{i,0_{l \times l}} \}$, $l = l_{p_1} + l_{q_1} + l_{p_2} + l_{q_2}$,

$$\begin{aligned}
\Psi_1 = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \gamma I & P \\ P & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta R & 0 \\ 0 & -\eta R \end{pmatrix}, \right. \\
\left. \begin{pmatrix} N_1 + N_1^T & * & * \\ -N_1^T + N_2 & -N_2 - N_2^T & * \\ -\eta N_1 & -\eta N_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ M_1^T & M_2 + M_2^T & * \\ -M_1^T & -M_2^T & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (109)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_2 = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \gamma I & P \\ P & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta R & 0 \\ 0 & -\eta R \end{pmatrix}, \right. \\
\left. \begin{pmatrix} N_1 + N_1^T & * \\ -N_1^T + N_2 & -N_2 - N_2^T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ -\eta M_1 & 0 & * & * \\ -\eta M_2 & M_1^T & M_2 + M_2^T & * \\ 0 & -M_1^T & -M_2^T & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (110)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_x & B_x K & 0 & H_1 & H_2 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ A_x & B_x K & 0 & H_1 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ A_{q_1} & B_{q_1} K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ A_{q_2} & B_{q_2} K & 0 & G & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (111)$$

Ez a felírás már kezd hasonlítani a multiplikátor módszernél tárgyalt feladatra. A 4.2. alfejezet jelöléseivel összhangban legyen $U = I_{\bar{l} \times \bar{l}}$, ahol $\bar{l} = 12n_x + l$, továbbá $V = \begin{pmatrix} 0_{l \times 12n_x} & I_{l \times l} \end{pmatrix}$. A $\mathcal{B}$ altér szerepén most az $\mathcal{L}$ képtere tölti be, míg $\mathcal{Q}$ -ét az Ω halmaz. A 15. Tétel alapján

$$M = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \underline{\tau} Q_0 + \underline{\varepsilon} & * \\ S_0^T \underline{\tau} & \underline{\tau} R_0 + \underline{\varepsilon} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \right\} \quad (112)$$

pozitív multiplikátor mátrix az Ω halmazon. Mindezek után, ha $\hat{\Psi}_i = \Psi_{i,0} + V^T M V < 0$ teljesül az $\mathcal{L}$ egész képterén, akkor a 4. Lemma szerint $\Psi_{i,0} < 0$ a $\mathcal{B}_\Omega$ halmazon és így a (79) egyenlőtlenség is igaz. A $\hat{\Psi}_i$ mátrix viszont nem más, mint

$$\hat{\Psi}_i = \text{diag} \left\{ \Psi_i, \begin{pmatrix} \underline{\tau} Q_0 + \underline{\varepsilon} & * \\ S_0^T \underline{\tau} & \underline{\tau} R_0 + \underline{\varepsilon} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \right\}. \quad (113)$$

Ezek után a $\mathcal{L}^T \hat{\Psi}_i \mathcal{L}$ szorzást elvégezve adódik az állítás. □

5.3.2. Vezérlés

A célunk, hogy az eddigi eredmények alapján meghatározzuk a visszacsatolás mátrixát az 1. ábrán látható Lur'e HKV rendszerhez.

18. Tétel. Adott η skalár esetén a (14) zárt rendszer robusztusan abszolút stabilis az $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ bizonytalanság mellett, ha léteznek olyan ϱ_i, μ_i ($i = 1, \dots, s$) és σ pozitív konstansok valamint $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R} \in \mathbb{S}_+^{n_x \times n_x}$ valamint $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{M}_1, \bar{M}_2 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ és $\bar{X} \in \mathbb{R}_+^{n_u \times n_x}$ megfelelő méretű mátrixok, amelyekre

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi}_N & * \\ \bar{\Gamma}_1 & \bar{\Gamma}_2 \end{pmatrix} < 0 \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_M & * \\ \bar{\Gamma}_1 & \bar{\Gamma}_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (114)$$

teljesül, ahol

$$\bar{\Phi}_N = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{11} & * & * & * & * & * \\ \bar{\Phi}_{21} & \bar{\Phi}_{22} & * & * & * & * \\ -\bar{M}_1^T & -\bar{M}_2^T & -\bar{Q} & * & * & * \\ \bar{\varrho}H_1^T + S_0A_{q_1}\bar{P} & S_0B_{q_1}\bar{X} & 0 & Q_0\bar{\varrho} & * & * \\ \bar{L}H_2^T & 0 & 0 & 0 & -\bar{L} & * \\ -\eta\bar{N}_1^T & -\eta\bar{N}_2^T & 0 & 0 & 0 & -\eta\bar{R} \end{pmatrix}, \quad (115)$$

$$\bar{\Phi}_M = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{11} & * & * & * & * & * \\ \bar{\Phi}_{21} & \bar{\Phi}_{22} & * & * & * & * \\ -\bar{M}_1^T & -\bar{M}_2^T & -\bar{Q} & * & * & * \\ \bar{\varrho}H_1^T + S_0A_{q_1}\bar{P} & S_0B_{q_1}\bar{X} & 0 & Q_0\bar{\varrho} & * & * \\ \bar{L}H_2^T & 0 & 0 & 0 & -\bar{L} & * \\ -\eta\bar{M}_1^T & -\eta\bar{M}_2^T & 0 & 0 & 0 & -\eta\bar{R} \end{pmatrix}, \quad (116)$$

$$\bar{\Phi}_{11} = \bar{P}A_x^T + A_x\bar{P} + \bar{Q} + \bar{N}_1 + \bar{N}_1^T,$$

$$\bar{\Phi}_{21} = \bar{X}^TB_x^T - \bar{N}_1^T + \bar{N}_2 + \bar{M}_1^T,$$

$$\bar{\Phi}_{22} = -\bar{N}_2 - \bar{N}_2^T + \bar{M}_2 + \bar{M}_2^T,$$

$$\bar{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} \eta A_x \bar{P} & \eta B_x \bar{X} & 0 & \eta H_1 \bar{\varrho} & \eta H_2 \bar{L} & 0 \\ A_{q_2} \bar{P} & B_{q_2} \bar{X} & 0 & G \bar{\varrho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\varrho} & 0 & 0 \\ A_{q_1} \bar{P} & B_{q_1} \bar{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_0^{1/2} A_{q_1} \bar{P} & R_0^{1/2} B_{q_1} \bar{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (117)$$

$$\bar{\Gamma}_2 = \text{diag} \{ -\eta \bar{P} \bar{R}^{-1} \bar{P}, -\bar{L}, -\bar{\mu}, -\bar{\mu}, -\bar{\varrho}, -\sigma I \}. \quad (118)$$

Ekkor a visszacsatolás mátrixa a

$$K = \bar{X} \bar{P}^{-1}. \quad (119)$$

képlettel számolható.

Bizonyítás. Több ízben alkalmazva a Schur lemmát (1. Lemma) a (96)-ban és (97)-ben szereplő mátrixokra a következő egyenlőtlenségekhez jutunk.

$$\begin{pmatrix} \Phi_N & * \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} \Phi_M & * \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{pmatrix} < 0, \quad (120)$$

ahol

$$\Phi_N = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & * & * & * & * \\ -M_1^T & -M_2^T & -Q & * & * & * \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & 0 & \underline{\tau}Q_0 & * & * \\ H_2^T P & 0 & 0 & 0 & -L & * \\ -\eta N_1^T & -\eta N_2^T & 0 & 0 & 0 & -\eta R \end{pmatrix}, \quad (121)$$

$$\Phi_M = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & * & * & * & * \\ -M_1^T & -M_2^T & -Q & * & * & * \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & 0 & \underline{\tau}Q_0 & * & * \\ H_2^T P & 0 & 0 & 0 & -L & * \\ -\eta M_1^T & -\eta M_2^T & 0 & 0 & 0 & -\eta R \end{pmatrix}, \quad (122)$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \eta R A_x & \eta R B_x K & 0 & \eta R H_1 & \eta R H_2 & 0 \\ L A_{q_2} & L B_{q_2} K & 0 & L G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ A_{q_1} & B_{q_1} K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_0^{1/2} A_{q_1} & R_0^{1/2} B_{q_1} K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (123)$$

$$\Gamma_2 = \text{diag} \{ -\eta R, -L, -\underline{\varepsilon}^{-1}, -\underline{\underline{\varepsilon}}^{-1}, -\underline{\underline{\tau}}^{-1}, -\gamma^{-1} I \}. \quad (124)$$

A (120) mátrixait megszorozva jobbról és balról is a

$$\text{diag} \{ P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, \underline{\tau}^{-1}, L^{-1}, P^{-1}, R^{-1}, L^{-1}, I, I, I, I \} \quad (125)$$

mátrixszal, majd bevezetve a $\bar{\varrho} = \underline{\tau}^{-1}$, $\bar{\mu} = \underline{\varepsilon}^{-1}$, $\bar{\bar{\varrho}} = \underline{\underline{\tau}}^{-1}$, $\bar{\bar{\mu}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{-1}$, $\sigma = \gamma^{-1}$, $\bar{P} = P^{-1}$, $\bar{Q} = P^{-1} Q P^{-1}$, $\bar{R}$ (ekkor $R^{-1} = \bar{P} \bar{R}^{-1} \bar{P}$), $\bar{L} = L^{-1}$, $\bar{N}_i = P^{-1} N_i P^{-1}$, $\bar{M}_i = P^{-1} M_i P^{-1}$ valamint a $\bar{X} = K P^{-1}$ jelöléseket adódik az állítás. $\square$

5. *Megjegyzés.* A $\bar{\Gamma}_2$ -ben megjelenő $-\eta \bar{P} \bar{R}^{-1} \bar{P}$ miatt a (114) nem lineáris mátrix-egyenlőtlenség. Tehát ahhoz, hogy jól használható eredményt kapjunk, [16]-hoz hasonlóan itt is szükség van az ICCL algoritmusra. Másik lehetőség, hogy alkalmazzuk a [12]-ben használt a $-\bar{P} \bar{R}^{-1} \bar{P} \leq \bar{R} - 2\bar{P}$ becslést.

5.4. Szabad súlymátrixok alkalmazása

A fejezet célja, hogy egy újabb megoldást mutasson be a 2. fejezet problémájára.

5.4.1. Analízis

19. Tétel. *Adott η skalár és K visszacsatolási mátrix esetén a (14) zárt rendszer robusztusan abszolút stabilis az $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ bizonytalanság mellett, ha léteznek olyan ε_i, τ_i ($i = 1, \dots, s$) és γ pozitív konstansok valamint $P, Q, R \in \mathbb{S}_+^{n_x \times n_x}$ továbbá $N = (N_1, N_2, N_3), M = (M_1, M_2, M_3) \in \mathbb{R}^{n_x \times 3n_x}$ és $U \in \mathbb{S}^{3n_x \times 3n_x}$ mátrixok, amelyekre*

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11} + \phi_{11} & * & * & * & * \\ \Phi_{21} + \phi_{21} & \Phi_{22} + \phi_{22} & * & * & * \\ \eta U_{31} + N_3 - M_1^T & \eta U_{32} - N_3 - M_2^T + M_3 & \Phi_{33} & * & * \\ \Phi_{41} + \phi_{41} & \underline{\tau} S_0 B_{q_1} K + \phi_{42} & 0 & \underline{\tau} Q_0 + \phi_{44} & * \\ H_2^T P + \eta H_2^T R A_x & \eta H_2^T R B_x K & 0 & \eta H_2^T R H_1 & \eta H_2^T R H_2 - L \end{pmatrix} < 0, \quad (126)$$

$$\Xi_N = \begin{pmatrix} U_{11} & * & * & * \\ U_{21} & U_{22} & * & * \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & * \\ N_1 & N_2 & N_3 & R \end{pmatrix} > 0, \quad \Xi_M = \begin{pmatrix} U_{11} & * & * & * \\ U_{21} & U_{22} & * & * \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & * \\ M_1 & M_2 & M_3 & R \end{pmatrix} > 0, \quad (127)$$

teljesül, ahol

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= A_x^T P + P A_x + Q + \eta U_{11} + N_1 + N_1^T, \\ \Phi_{21} &= K^T B_x^T P + \eta U_{21} - N_1^T + N_2 + M_1^T, \\ \Phi_{22} &= \eta U_{22} - N_2 - N_2^T + M_2 + M_2^T, \\ \Phi_{33} &= -Q + \eta U_{33} - M_3 - M_3^T, \\ \Phi_{41} &= H_1^T P + \underline{\tau} S_0 A_{q_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \gamma I + \eta A_x^T R A_x + A_{q_1} (\underline{\tau} R_0 + \underline{\varepsilon}) A_{q_1} + A_{q_2}^T L A_{q_2}, \\ \phi_{21} &= \eta K^T B_x^T R A_x + K^T B_{q_1} (\underline{\tau} R_0 + \underline{\varepsilon}) A_{q_1} + K^T B_{q_2}^T L A_{q_2}, \\ \phi_{22} &= \eta K^T B_x^T R B_x K + K^T B_{q_1} (\underline{\tau} R_0 + \underline{\varepsilon}) B_{q_1} K + K^T B_{q_2}^T L B_{q_2} K, \\ \phi_{41} &= \eta H_1^T R A_x + G^T L A_{q_2}, \\ \phi_{42} &= \eta H_1^T R B_x K + G^T L B_{q_2} K, \\ \phi_{44} &= \eta H_1^T R H_1 + \underline{\varepsilon} + G^T L G. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A tétel bizonyításához ezúttal is a 11. Definícióból indulunk ki és megmutatjuk, hogy az F függvény átalakításával a tétel feltételeihez juthatunk. Vegyünk

két mátrixot

$$\Xi_N = \begin{pmatrix} U_{11} & * & * & * \\ U_{21} & U_{22} & * & * \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & * \\ N_1 & N_2 & N_3 & R \end{pmatrix} > 0, \quad \Xi_M = \begin{pmatrix} U_{11} & * & * & * \\ U_{21} & U_{22} & * & * \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & * \\ M_1 & M_2 & M_3 & R \end{pmatrix} > 0. \quad (128)$$

Mivel a mátrixok pozitív definiték, ezért

$$\int_{t-\tau(t)}^t \zeta^T(t, s) \Xi_N \zeta(t, s) ds \geq 0, \quad (129)$$

$$\int_{t-\eta}^{t-\tau(t)} \zeta^T(t, s) \Xi_M \zeta(t, s) ds \geq 0, \quad (130)$$

ahol $\zeta(t, s) = (x^T(t), x^T(t - \tau(t)), x^T(t - \eta), \dot{x}^T(s))^T$. Adjuk hozzá (129)-et és (130)-at a 11. Definícióban szereplő F függvényhez. Ekkor

$$\begin{aligned} F_\gamma &\leq \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + \gamma x^T(t)x(t) + x^T(t)Qx(t) \\ &\quad - x^T(t - \eta)Qx(t - \eta) + \eta \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-\eta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s) ds \\ &\quad + \int_{t-\tau(t)}^t \zeta^T(t, s) \Xi_N \zeta(t, s) ds + \int_{t-\eta}^{t-\tau(t)} \zeta^T(t, s) \Xi_M \zeta(t, s) ds \end{aligned} \quad (131)$$

Bontsuk szét a (129) kifejezést.

$$\begin{aligned} &\int_{t-\tau(t)}^t \zeta^T(t, s) \Xi_N \zeta(t, s) ds = \\ &= \int_{t-\tau(t)}^t (\zeta_0^T(t)U\zeta_0(t) + \zeta_0^T(t)N^T\dot{x}(s) + \dot{x}^T(s)N\zeta_0(t) + \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)) ds, \end{aligned} \quad (132)$$

ahol $\zeta_0(t) = (x^T(t), x^T(t - \tau(t)), x^T(t - \eta))^T$,

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & * & * \\ U_{21} & U_{22} & * \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix}, \quad N = (N_1, N_2, N_3). \quad (133)$$

(132) tovább egyenlő a

$$\begin{aligned} &\tau(t)\zeta_0^T(t)U\zeta_0(t) + \zeta_0^T(t)N^T(x(t) - x(t - \tau(t))) + \\ &\quad (x^T(t) - x^T(t - \tau(t)))N\zeta_0(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s) ds. \end{aligned} \quad (134)$$

vektorral. Ugyanezeket a műveleteket elvégezve (130)-on, adódik a

$$\begin{aligned}
& (\eta - \tau(t)) \zeta_0^T(t) U \zeta_0(t) + \zeta_0^T(t) M^T (x(t - \tau(t)) - x(t - \eta)) + \\
& (x^T(t - \tau(t)) - x^T(t - \eta)) M \zeta_0(t) + \int_{t-\eta}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds. \quad (135)
\end{aligned}$$

vektor. Behelyettesítve a (134)-et és (135)-öt a (131)-be, látható, hogy az $\dot{x}(s)$ -et tartalmazó integrálos tagok éppen kiesnek, így

$$\begin{aligned}
F_\gamma & \leq \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) + x^T(t) Q x(t) - x^T(t - \eta) Q x(t - \eta) \\
& + \eta \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) + \gamma x^T(t) x(t) + \eta \zeta_0^T(t) U \zeta_0(t) \\
& + \zeta_0^T(t) N^T (x(t) - x(t - \tau(t))) + (x^T(t) - x^T(t - \tau(t))) N \zeta_0(t) \\
& + \zeta_0^T(t) M^T (x(t - \tau(t)) - x(t - \eta)) + (x^T(t - \tau(t)) - x^T(t - \eta)) M \zeta_0(t). \quad (136)
\end{aligned}$$

Legyen

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau(t)) & x^T(t - \eta) & p_1^T & p_2^T \end{pmatrix}^T. \quad (137)$$

Ekkor (136) ekvivalens megfogalmazása a következő.

$$\begin{aligned}
F_\gamma & \leq (*) \begin{pmatrix} \gamma I & P \\ P & \eta R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_x & B_x K & 0 & H_1 & H_2 \end{pmatrix} \xi(t) \\
& + (*) \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi(t) \\
& + (*) \eta (U + \Gamma_N + \Gamma_M) \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi(t), \quad (138)
\end{aligned}$$

ahol

$$\Gamma_N = \begin{pmatrix} N_1 + N_1^T & * & * \\ -N_1^T + N_2 & -N_2 - N_2^T & * \\ N_3 & -N_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_M = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ M_1^T & M_2 + M_2^T & * \\ -M_1^T & -M_2^T + M_3 & -M_3 - M_3^T \end{pmatrix}. \quad (139)$$

Legyen ezek után

$$\Psi = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \gamma I & P \\ P & \eta R \end{pmatrix}, Q, -Q, \eta U + \Gamma_N + \Gamma_M \right\} \quad (140)$$

és $\Psi_0 = \text{diag} \{ \Psi, 0_{l \times l} \}$, $l = l_{p_1} + l_{q_1} + l_{p_2} + l_{q_2}$. A leképezés, amelynek a képterére a

továbbiakban szorítkozunk

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_x & B_x K & 0 & H_1 & H_2 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ A_{q_1} & B_{q_1} K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ A_{q_2} & B_{q_2} K & 0 & G & 0 \end{pmatrix} \quad (141)$$

Mint az előző fejezetben, most is a multiplikátor módszert alkalmazzuk. A 4.2. alfejezet jelöléseit használva $U = I_{\bar{l} \times \bar{l}}$, ahol $\bar{l} = 7n_x + l$, $V = \begin{pmatrix} 0_{l \times 7n_x} & I_{l \times l} \end{pmatrix}$, szereposztás mellett. Mint arra utaltunk $\mathcal{B} = \text{Ran} \mathcal{L}$. Továbbá $\mathcal{Q} = \Omega$. A 15. Tétel alapján

$$M = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \underline{\tau} Q_0 + \underline{\epsilon} & * \\ S_0^T \underline{\tau} & \underline{\tau} R_0 + \underline{\epsilon} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \right\} \quad (142)$$

pozitív multiplikátor mátrix az Ω halmazon. Mindezek után, ha $\hat{\Psi} = \Psi_0 + V^T M V < 0$ teljesül az egész $\mathcal{B}$ altéren, akkor a 4. Lemma szerint $\Psi_0 < 0$ a $\mathcal{B}_\Omega$ halmazon és így a (79) egyenlőtlenség is igaz. A $\hat{\Psi}$ mátrix viszont nem más, mint

$$\hat{\Psi} = \text{diag} \left\{ \Psi, \begin{pmatrix} \underline{\tau} Q_0 + \underline{\epsilon} & * \\ S_0^T \underline{\tau} & \underline{\tau} R_0 + \underline{\epsilon} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \right\} \quad (143)$$

Ezek után a $\mathcal{L}^T \hat{\Psi} \mathcal{L}$ szorzást elvégezve és figyelembe véve a (128) kiegészítő feltételeket adódik az állítás. $\square$

5.4.2. Vezérlés

Ezen rész célja, hogy az előző tétel alapján módszert adjon a visszacsatolás mátrixának meghatározására az 1. ábrán látható Lur'e HKV rendszerhez.

20. Tétel. *Adott η skalár esetén az (1) zárt rendszer abszolút stabilis az $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ kvadratikus bizonytalanság mellett, ha léteznek olyan ϱ_i, μ_i ($i = 1, \dots, s$) és σ pozitív konstansok valamint $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R} \in \mathbb{S}_+^{n_x \times n_x}$ valamint $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\bar{U} \in \mathbb{R}^{3n_x \times 3n_x}$ és $\bar{X} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ mátrixok, amelyekre*

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi} & * \\ \bar{\Gamma}_1 & \bar{\Gamma}_2 \end{pmatrix} < 0, \quad (144)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_{11} & * & * & * \\ \bar{U}_{21} & \bar{U}_{22} & * & * \\ \bar{U}_{31} & \bar{U}_{32} & \bar{U}_{33} & * \\ \bar{N}_1 & \bar{N}_2 & \bar{N}_3 & \bar{R} \end{pmatrix} > 0 \quad \text{s} \quad \begin{pmatrix} \bar{U}_{11} & * & * & * \\ \bar{U}_{21} & \bar{U}_{22} & * & * \\ \bar{U}_{31} & \bar{U}_{32} & \bar{U}_{33} & * \\ \bar{M}_1 & \bar{M}_2 & \bar{M}_3 & \bar{R} \end{pmatrix} > 0 \quad (145)$$

teljesül, ahol

$$\bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{11} & * & * & * & * \\ \bar{\Phi}_{21} & \bar{\Phi}_{22} & * & * & * \\ \eta\bar{U}_{31} + \bar{N}_3 - \bar{M}_1^T & \eta\bar{U}_{32} - \bar{N}_3 - \bar{M}_2^T + \bar{M}_3 & \bar{\Phi}_{33} & * & * \\ \bar{\varrho}H_1^T + S_0A_{q_1}\bar{P} & S_0B_{q_1}\bar{X} & 0 & Q_0\bar{\varrho} & * \\ H_2^T\bar{P} & 0 & 0 & 0 & -\bar{L} \end{pmatrix}, \quad (146)$$

$$\bar{\Phi}_{11} = \bar{P}A_x^T + A_x\bar{P} + \bar{Q} + \eta\bar{U}_{11} + \bar{N}_1 + \bar{N}_1^T,$$

$$\bar{\Phi}_{21} = \bar{X}^TB_x^T + \eta\bar{U}_{21} - \bar{N}_1^T + \bar{N}_2 + \bar{M}_1^T,$$

$$\bar{\Phi}_{22} = \eta\bar{U}_{22} - \bar{N}_2 - \bar{N}_2^T + \bar{M}_2 + \bar{M}_2^T,$$

$$\bar{\Phi}_{33} = -\bar{Q} + \eta\bar{U}_{33} - \bar{M}_3 - \bar{M}_3^T,$$

$$\bar{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} \eta A_x\bar{P} & \eta B_x\bar{X} & 0 & \eta H_1\bar{\varrho} & \eta H_2\bar{L} \\ A_{q_2}\bar{P} & B_{q_2}\bar{X} & 0 & G\bar{\varrho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\varrho} & 0 \\ A_{q_1}\bar{P} & B_{q_1}\bar{X} & 0 & 0 & 0 \\ R_0^{1/2}A_{q_1}\bar{P} & R_0^{1/2}B_{q_1}\bar{X} & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (147)$$

$$\bar{\Gamma}_2 = \text{diag}\{-\eta\bar{P}\bar{R}^{-1}\bar{P}, -\bar{L}, -\bar{\mu}, -\bar{\mu}, -\bar{\varrho}, -\sigma I\}. \quad (148)$$

Ekkor a visszacsatolás mátrixa a

$$K = \bar{X}\bar{P}^{-1} \quad (149)$$

összefüggés alapján számolható.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Schur lemmát a (126)-ban szereplő mátrixra. Ekkor a következő egyenlőtlenséghez jutunk.

$$\begin{pmatrix} \Phi & * \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{pmatrix} < 0, \quad (150)$$

ahol

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & * & * & * \\ \eta U_{31} + N_3 - M_1^T & \eta U_{32} - N_3 - M_2^T + M_3 & \Phi_{33} & * & * \\ H_1^T P + \tau S_0 A_{q_1} & \tau S_0 B_{q_1} K & 0 & \tau Q_0 & * \\ H_2^T P & 0 & 0 & 0 & -L \end{pmatrix}, \quad (151)$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \eta R A_x & \eta R B_x K & 0 & \eta R H_1 & \eta R H_2 \\ L A_{q_2} & L B_{q_2} K & 0 & L G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ A_{q_1} & B_{q_1} K & 0 & 0 & 0 \\ R_0^{1/2} A_{q_1} & R_0^{1/2} B_{q_1} K & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (152)$$

$$\Gamma_2 = \text{diag} \{ -\eta R, -L, -\underline{\varepsilon}^{-1}, -\underline{\underline{\varepsilon}}^{-1}, -\underline{\tau}^{-1}, -\gamma^{-1} I \} \quad (153)$$

A (150)-et megszorozva jobbról és balról is a

$$\text{diag} \{ P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, \underline{\tau}^{-1}, L^{-1}, R^{-1}, L^{-1}, I, I, I, I \}, \quad (154)$$

a kiegészítő feltételeket pedig a $\text{diag} \{ P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1} \}$ mátrixszal, majd bevezetve a $\bar{\varrho} = \underline{\tau}^{-1}$, $\bar{\mu} = \underline{\varepsilon}^{-1}$, $\bar{\bar{\varrho}} = \underline{\underline{\tau}}^{-1}$, $\bar{\bar{\mu}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{-1}$, $\sigma = \gamma^{-1}$, $\bar{P} = P^{-1}$, $\bar{Q} = P^{-1} Q P^{-1}$, $\bar{R} = P^{-1} R P^{-1}$ (ekkor $R^{-1} = \bar{P} \bar{R}^{-1} \bar{P}$), $\bar{U}_{ij} = P^{-1} U_{ij} P^{-1}$, $\bar{L} = L^{-1}$, $\bar{N}_i = P^{-1} N_i P^{-1}$, $\bar{M}_i = P^{-1} M_i P^{-1}$ valamint a $\bar{X} = K P^{-1}$ jelöléseket adódik az állítás. $\square$

6. *Megjegyzés.* A $\bar{\Gamma}_2$ -ben megjelenő $-\eta \bar{P} \bar{R}^{-1} \bar{P}$ miatt a (144) nem lineáris mátrix-egyenlőtlenség. Tehát ahhoz, hogy jól használható eredményt kapjunk, [16]-hoz hasonlóan itt is szükség van az ICCL algoritmusra. Másik lehetőség, hogy alkalmazzuk a [12]-ben használt a $-\bar{P} \bar{R}^{-1} \bar{P} \leq \bar{R} - 2\bar{P}$ becslést.

5.5. A Wirtinger-egyenlőtlenség alkalmazása

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogyan javítható [12] eredménye, ha a Jensen-egyenlőtlenség helyett a 13. Tételt alkalmazzuk.

5.5.1. Analízis

21. Tétel. *Adott η skalár és K visszacsatolási mátrix esetén a (14) zárt rendszer robusztusan abszolút stabilis az $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ bizonytalanság mellett, ha léteznek olyan ε_i , τ_i ($i = 1, \dots, s$) és γ pozitív konstansok valamint $P, Q, R \in \mathbb{S}_+^{n_x \times n_x}$ mátrixok, amelyekre*

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11} + \phi_{11} & * & * & * & * & * \\ K^T B_x^T P + \phi_{21} & \phi_{22} & * & * & * & * \\ -\frac{2}{\eta} R & 0 & -Q - \frac{4}{\eta} R & * & * & * \\ \Phi_{41} + \phi_{41} & \Phi_{42} + \phi_{42} & 0 & \underline{\tau} Q_0 + \phi_{44} & * & * \\ H_2^T P + \eta H_2^T R A_x & \eta H_2^T R B_x K & 0 & \eta H_2^T R H_1 & \phi_{55} - L & * \\ \frac{6}{\eta} R & 0 & \frac{6}{\eta} R & 0 & 0 & -\frac{12}{\eta} R \end{pmatrix} < 0, \quad (155)$$

ahol

$$\begin{aligned}\Phi_{11} &= A_x^T P + P A_x + Q - \frac{4}{\eta} R, \\ \Phi_{41} &= H_1^T P + \underline{\tau} S_0 A_{q_1}, \\ \Phi_{42} &= \underline{\tau} S_0 B_{q_1} K,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \gamma I + \eta A_x^T R A_x + A_{q_1}^T (\underline{\tau} R_0 + \underline{\varepsilon}) A_{q_1} + A_{q_2}^T L A_{q_2}, \\ \phi_{21} &= \eta K^T B_x^T R A_x + K^T B_{q_1} (\underline{\tau} R_0 + \underline{\varepsilon}) A_{q_1} + K^T B_{q_2}^T L A_{q_2}, \\ \phi_{22} &= \eta K^T B_x^T R B_x K + K^T B_{q_1}^T (\underline{\tau} R_0 + \underline{\varepsilon}) B_{q_1} K + K^T B_{q_2}^T L B_{q_2} K, \\ \phi_{41} &= \eta H_1^T R A_x + G^T L A_{q_2}, \\ \phi_{42} &= \eta H_1^T R B_x K + G^T L B_{q_2} K, \\ \phi_{44} &= \eta H_1^T R H_1 + \underline{\varepsilon} + G^T L G, \\ \phi_{55} &= \eta H_2^T R H_2.\end{aligned}$$

Bizonyítás. A bevált módszer szerint most is a definíciótól haladunk a tétel feltételei felé. Vegyük a 11. Definícióban szereplő F függvényt és alkalmazzuk rá a Wirtinger-egyenlőtlenség segítségével levezetett 13. Tételt, amely jelen esetben a következő egyenlőtlenséget jelenti

$$\begin{aligned}\int_{t-\eta}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds &\geq \frac{1}{\eta} (x(t) - x(t-\eta))^T R (x(t) - x(t-\eta)) \\ &+ \frac{3}{\eta} \left(x(t) + x(t-\eta) - \frac{2}{\eta} \int_{t-\eta}^t x(u) du \right)^T R \left(x(t) + x(t-\eta) - \frac{2}{\eta} \int_{t-\eta}^t x(u) du \right)\end{aligned}$$

Ekkor a következő adódik.

$$\begin{aligned}F_\gamma &\leq \gamma x^T(t)x(t) + \dot{x}^T(t)P x(t) + x^T(t)P \dot{x}(t) + x^T(t)Q x(t) - x^T(t-\eta)Q x(t-\eta) \\ &+ \eta \dot{x}^T(t)R \dot{x}(t) - \frac{1}{\eta} (x(t) - x(t-\eta))^T R (x(t) - x(t-\eta)) \\ &- \frac{3}{\eta} \left(x(t) + x(t-\eta) - \frac{2}{\eta} \int_{t-\eta}^t x(u) du \right)^T R \left(x(t) + x(t-\eta) - \frac{2}{\eta} \int_{t-\eta}^t x(u) du \right)\end{aligned} \quad (156)$$

A mátrixokkal való felíráshoz legyen

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau(t)) & x^T(t-\eta) & p_1^T & p_2^T & \frac{1}{\eta} \int_{t-\eta}^t x^T(u) du \end{pmatrix}^T. \quad (157)$$

Ezt felhasználva (156) így írható:

$$\begin{aligned}
F_\gamma &\leq (*) \begin{pmatrix} \gamma I & P \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_x & B_x K & 0 & H_1 & H_2 & 0 \end{pmatrix} \xi(t) \\
&+ (*) \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi(t) \\
&+ (*) \begin{pmatrix} \eta R & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\eta} R & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\eta} R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x & B_x K & 0 & H_1 & H_2 & 0 \\ I & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 & -2I \end{pmatrix} \xi(t) \quad (158)
\end{aligned}$$

Ahhoz, hogy egyben fel lehessen írni legyen

$$\Psi = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \gamma I & P \\ P & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta R & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\eta} R & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\eta} R \end{pmatrix} \right\}, \quad (159)$$

illetve $\Psi_0 = \text{diag} \{ \Psi, 0_{l \times l} \}$, $l = l_{p_1} + l_{q_1} + l_{p_2} + l_{q_2}$.

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_x & B_x K & 0 & H_1 & H_2 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ A_x & B_x K & 0 & H_1 & H_2 & 0 \\ I & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 & -2I \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ A_{q_1} & B_{q_1} K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ A_{q_2} & B_{q_2} K & 0 & G & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (160)$$

Ezúttal is csak az $\mathcal{L}$ képterére szorítkozunk, azaz $\mathcal{B} = \text{Ran} \mathcal{L}$. A $\mathcal{Q}$ továbbra is Ω halmazzal egyenlő és így a 15. Tétel alapján a multiplikátor mátrix

$$M = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \underline{\tau} Q_0 + \underline{\varepsilon} & * \\ S_0^T \underline{\tau} & \underline{\tau} R_0 + \underline{\varepsilon} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \right\}. \quad (161)$$

A szokott jelölésekkel $U = I_{\bar{l} \times \bar{l}}$, $\bar{l} = 7n_x + l$, továbbá $V = \begin{pmatrix} 0_{l \times 7n_x} & I_{l \times l} \end{pmatrix}$. Ekkor, ha $\Psi_0 + V^T M V \leq 0$ teljesül a $\mathcal{B}$ altéren, akkor a 4. Lemma alapján $\Psi_0 \leq 0$ a $\mathcal{B}_\Omega$ halmazon, ami azt jelenti, hogy a (79) egyenlőtlenség igaz. Mindezek fényében elvégezve a $\mathcal{L}^T (\Psi_0 + V^T M V) \mathcal{L}$ szorzást adódik az állítás.

□

5.5.2. Vezérlés

22. Tétel. Adott η skalár esetén a (14) zárt rendszer robusztusan abszolút stabilis az $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ kvadratikusan bizonytalanság mellett, ha léteznek olyan ϱ_i, μ_i ($i = 1, \dots, s$) és σ pozitív konstansok valamint $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R} \in \mathbb{S}_+^{n_x \times n_x}$ és $\bar{X} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ mátrixok, amelyekre

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi} & * \\ \bar{\Gamma}_1 & \bar{\Gamma}_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (162)$$

teljesül, ahol

$$\bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \bar{P}A_x^T + A_x\bar{P} + \bar{Q} - \frac{4}{\eta}\bar{R} & * & * & * & * & * \\ \bar{X}^T B_x^T & 0 & * & * & * & * \\ -\frac{2}{\eta}\bar{R} & 0 & -\bar{Q} - \frac{4}{\eta}\bar{R} & * & * & * \\ \bar{\varrho}H_1^T + S_0A_{q_1}\bar{P} & S_0B_{q_1}\bar{X} & 0 & Q_0\bar{\varrho} & * & * \\ \bar{L}H_2^T & 0 & 0 & 0 & -\bar{L} & * \\ \frac{6}{\eta}\bar{R} & 0 & \frac{6}{\eta}\bar{R} & 0 & 0 & -\frac{12}{\eta}\bar{R} \end{pmatrix}, \quad (163)$$

$$\bar{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} \eta A_x \bar{P} & \eta B_x \bar{X} & 0 & \eta H_1 \bar{\varrho} & \eta H_2 \bar{L} & 0 \\ A_{q_2} \bar{P} & B_{q_2} \bar{X} & 0 & G \bar{\varrho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\varrho} & 0 & 0 \\ A_{q_1} \bar{P} & B_{q_1} \bar{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_0^{1/2} A_{q_1} \bar{P} & R_0^{1/2} B_{q_1} \bar{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (164)$$

$$\bar{\Gamma}_2 = \text{diag}\{-\eta \bar{P} \bar{R}^{-1} \bar{P}, -\bar{L}, -\bar{\mu}, -\bar{\mu}, -\bar{\varrho}, -\sigma I\}. \quad (165)$$

Ekkor a visszacsatolás mátrixa a

$$K = \bar{X} \bar{P}^{-1} \quad (166)$$

képlettel számolható.

Bizonyítás. A Schur lemma többszöri alkalmazása után a következő egyenlőtlenséget kapjuk.

$$\begin{pmatrix} \Phi & * \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{pmatrix} < 0, \quad (167)$$

ahol

$$\Phi = \begin{pmatrix} A_x^T P + P A_x + Q - \frac{4}{\eta} R & * & * & * & * & * \\ K^T B_x^T P & 0 & * & * & * & * \\ -\frac{2}{\eta} R & 0 & -Q - \frac{4}{\eta} R & * & * & * \\ H_1^T P + \mathcal{I} S_0 A_{q_1} & \mathcal{I} S_0 B_{q_1} K & 0 & \mathcal{I} Q_0 & * & * \\ H_2^T P & 0 & 0 & 0_1 & -L & * \\ \frac{6}{\eta} R & 0 & \frac{6}{\eta} R & 0 & 0 & -\frac{12}{\eta} R \end{pmatrix}, \quad (168)$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \eta R A_x & \eta R B_x K & 0 & \eta R H_1 & \eta R H_2 & 0 \\ L A_{q_2} & L B_{q_2} K & 0 & L G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ A_{q_1} & B_{q_1} K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_0^{1/2} A_{q_1} & R_0^{1/2} B_{q_1} K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (169)$$

$$\Gamma_2 = \text{diag} \{ -\eta R, -L, -\underline{\varepsilon}^{-1}, -\underline{\underline{\varepsilon}}^{-1}, -\underline{\tau}^{-1}, -\gamma^{-1} I \}. \quad (170)$$

Szorozzuk meg (167)-et jobbról és balról is a

$$\text{diag} \{ P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, \underline{\tau}^{-1}, L^{-1}, P^{-1}, R^{-1}, L^{-1}, I, I, I, I \}, \quad (171)$$

mátrixszal. Ezt követően vezessük be a $\bar{\varrho} = \underline{\tau}^{-1}$, $\bar{\mu} = \underline{\varepsilon}^{-1}$, $\bar{\varrho} = \underline{\tau}^{-1}$, $\bar{\mu} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{-1}$, $\sigma = \gamma^{-1}$, $\bar{P} = P^{-1}$, $\bar{Q} = P^{-1} Q P^{-1}$, $\bar{R} = P^{-1} R P^{-1}$, $\bar{L} = L^{-1}$, valamint a $\bar{X} = K P^{-1}$ jelöléseket és adódik az állítás. $\square$

7. *Megjegyzés.* Nem meglepő módon a $\bar{\Gamma}_2$ -ben ezúttal is megjelent a $-\eta \bar{P} \bar{R}^{-1} \bar{P}$ tag, ezért a (162) nem lineáris mátrixegyenlőtlenség. Tehát LMI feltételt szeretnénk, akkor itt is használnunk kell az ICCL algoritmust vagy a becslést.

6. Eredmények szemléltetése

Egy ilyen alkalmazott matematikai eredmény esetén természetes elvárás, hogy az elmélet működését numerikus példákon megmutassuk. Ezért ebben a fejezetben az eddigi eredmények alkalmazhatóságával foglalkozunk. Megnézzük, hogyan teljesít az elmélet alapján konstruált módszer konkrét példa esetén. A Matlabnak köszönhetően ugyanis lehetőségünk nyílik a késleltetett rendszerek szimulálására, valamint a LMI Toolbox révén a szükséges számolások elvégzésére és az eredmények tesztelésére.

6.1. Szimuláció

Először bemutatjuk, hogyan valósítottuk meg a késleltetett rendszerek szimulálását, majd rátérünk a számolás és kiértékelés megvalósításának módjára.

A szimuláció első lépéseként meghatározzuk a mintavételek időpontját. Ehhez létrehozunk egy n elemű tömböt, amelynek értékei 0-tól indulnak és a különbségük h egész számú többszöröse. Egy véletlen szám generátor gondoskodik arról, hogy ne legyen azonos a távolság az időpontok között. Ezzel vesszük figyelembe, hogy az adatsomagok nem mindig érik el a vezérlőt. Itt a h a mintavételek között eltelt idő.

Ezt követően szükségünk van egy véletlen tömbre, amely elemei a $[0, \tau^{sc}]$ intervallumból kerülnek ki és az érzékelő és a vezérlő közötti hálózaton keresztül történő adattovábbításból származó késést hivatottak reprezentálni. A két vektor összeadását követően megkapjuk az adatok vezérlőbe érkezésének időpontját. Ebből töröljük azokat az elemeket, amelyek értéke nagyobb az őket követő elemek értékénél. Így kizárjuk azokat az eseteket, amikor egy korábbi mérés eredménye később érkezik a vezérlőhöz. Ezt követően egy újabb tömbben eltároljuk a vezérlés megváltoztatásának időpontjait, amelyet az adatok vezérlőbe érkezésének időpontját tartalmazó tömbből úgy kapunk, hogy egy $[0, \tau^{ca}]$ -beli véletlen számmal megnöveljük az elemek értékét. Ezzel figyelembe vesszük a vezérlés meghatározásához szükséges számolásokból és a működtetőnek küldött parancsok hálózaton keresztül történő továbbításából adódó késéseket. Arra is ügyelünk, hogy egy adott számolás alatt érkező adatok közül csak az utolsót őrizzük meg és csak akkor kezdjük el a feldolgozást, ha az éppen folyamatban lévő művelet befejeződött. Így a vezérlés meghatározásához mindig a rendelkezésre álló legfrissebb adatot használjuk. Közben egy segédtömb használatával megjegyezzük, hogy az egyes vezérlések amely mintákhoz tartoznak. Erre azért van szükség, mert most csak az időpontokkal foglalkozunk, viszont később szeretnénk a rendszer állapotát is figyelemmel kísérni. Ezért amikor a méréseknek már meglesz a konkrét eredményük és ténylegesen meghatározzuk a vezérlést, akkor tudnunk kell, hogy melyik minta alapján számoljunk.

Miután szimuláltuk az érzékelő berendezés működését, azaz megvannak a mintavételek és vezérlés módosításának időpontjai, következhet a rendszer viselkedésének vizsgálata. Első lépésként valamilyen módszerrel meghatározzuk a visszacsatolás mátrixát. Ehhez szükségünk lesz a feltételben szereplő lineáris mátrixegyenlőtlenségek megoldására. Ezen probléma megoldásához a kínálkozó lehetőségek közül mi a Matlab LMI Toolboxot használjuk. A program két függvénye kiemelten fontos a számunkra. Ezek a `feasp` és a `mincx` parancsok. Előbbi az LMI feltételt kielégítő megengedett megoldást keres, míg az utóbbi egy szabadon választható lineáris célfüggvény minimalizálása mellett teszi ugyanezt. A Matlab LMI Toolboxszal kapcsolatban további információk találhatók a [4]-ben.

Következő lépésként megoldjuk a differenciálegyenletet minden intervallumon, amelyen a vezérlés állandó. Ügyelünk arra, hogy eltároljuk a rendszer utolsó állapotát a vezérlés megváltoztatása előtt annak érdekében, hogy a következő intervallumon kezdeti értéként tudjuk használni. Az intervallumonként kapott értékeket feljegyezzük és a végén egy grafikonon megjelenítjük. Ennek köszönhetően tényleg megbizonyosodhatunk afelől, hogy a vezérlés megfelelően működik.

6.2. Numerikus példák

Ebben a fejezetben a már ismerttetett módszerek alapján a megvalósított számolások eredményeit mutatjuk be.

1. Példa. Tekintsük a [12]-ben és [16]-ban szereplő példát.

Az 1. ábrán látható HKV rendszer (1) modelljét vizsgáljuk a következő paraméterek esetén:

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (172)$$

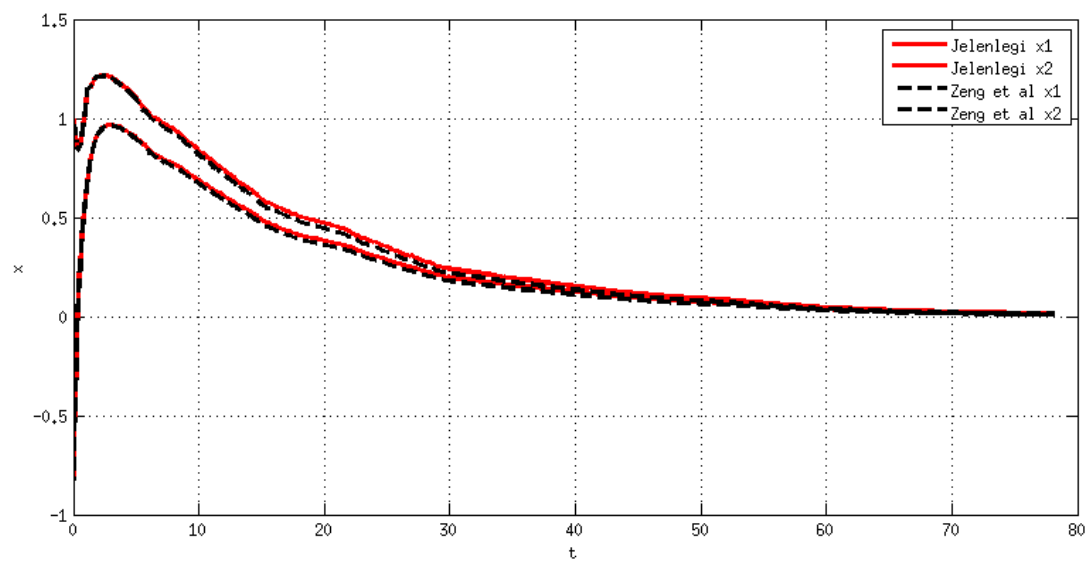
továbbá

$$A_{q_1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \end{pmatrix}, \quad B_{q_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (173)$$

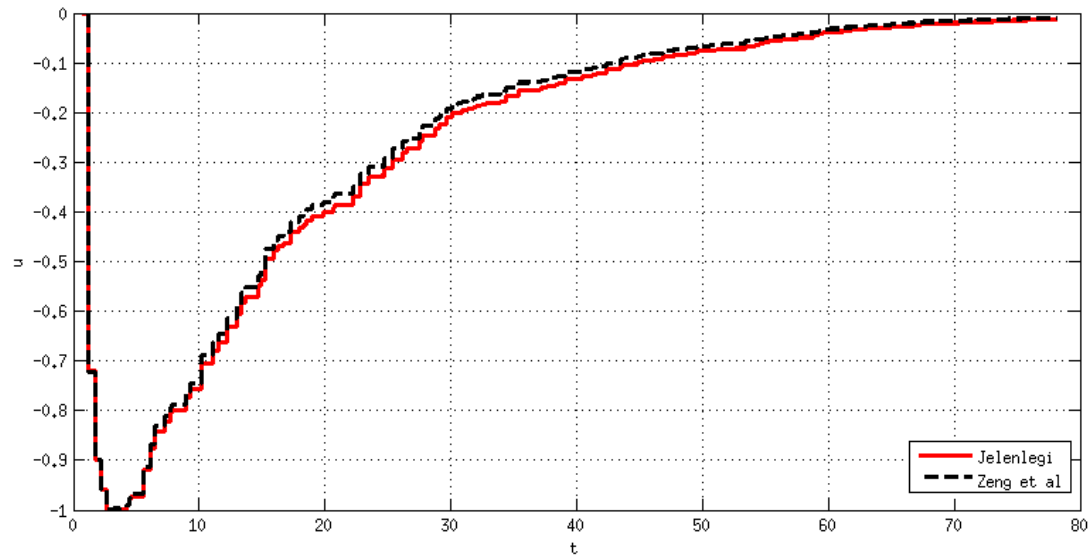
Ezúttal a paraméterbizonytalanságtól tekintünk el. Mivel az A_x mátrix egyik sajátértéke pozitív, ezért a nyílt rendszer instabilis. Mint a 2. fejezetben megmutattuk, a $\Theta = 1$ esetén az (5) szektorfeltételt a $Q_0 = -1$, $S_0 = -\frac{1}{2}$ és $R_0 = 0$ mátrixokkal vehetjük figyelembe.

A [16] mintájára használni fogjuk az ICCL algoritmust. Mivel [16]-ban nem szerepelt a pontos implementáció és nem közöltek konkrét számszerű adatokat a kezdő η -ra illetve annak növelésére vonatkozóan, ezért a mi megvalósításunk némileg eltér az eredetitől. Szerencsére a közölt eredmények lehetőséget adnak az összehasonlításra. [16] megvalósításával egy iteráció után a maximálisan megengedett késésre $\eta = 1,4584$ míg a visszacsatolás mátrixára $K = \begin{pmatrix} -0,6130 & -0,2687 \end{pmatrix}$ érték adódik. Az általunk használt paraméterekkel a harmadik iteráció után $\eta = 1,4600$, míg a $K = \begin{pmatrix} -0,6109 & -0,2696 \end{pmatrix}$. A különbség szinte elhanyagolható. A 3. ábrán látható, hogy mekkora az eltérés egy szimuláció esetén. Az általunk megvalósított ICCL algoritmussal 3 iteráció után kapott visszacsatolási mátrix rendszerre kifejtett hatása (ábrán piros folytonos) majdnem megegyezik a [16]-ban megadott konkrét K hatásával (ábrán fekete szaggatott). Ez alapján feltételezhetjük, hogy az algoritmus megfelelő és a módszerek összehasonlításánál kapott eredmények a valóságot tükrözik.

Most pedig lássuk a különböző módszerek összehasonlítását. Mi $\eta = 1$ kezdeti értékkel indítottuk el az ICCL-t, de a szimuláció, amely alapján a grafikonok készültek $\eta = 1,4$ értékkel számol. Ez megtehető, hiszen mindegyik módszer ennél nagyobb maximális késleltetést is el tud viselni. A 4. és 5. ábrán láthatjuk, hogy az egy iteráció után kapott visszacsatolási mátrixok tényleg megfelelőek. A zöld folytonos grafikon a 4.4. fejezet, a kék folytonos az 5.3. fejezet és a piros szaggatott pedig az 5.4. fejezet eredménye alapján számított állapot illetve vezérlés. Ez esetben az 5.3. és az 5.4. fejezet eredményei alapján számolt visszacsatolással az állapot

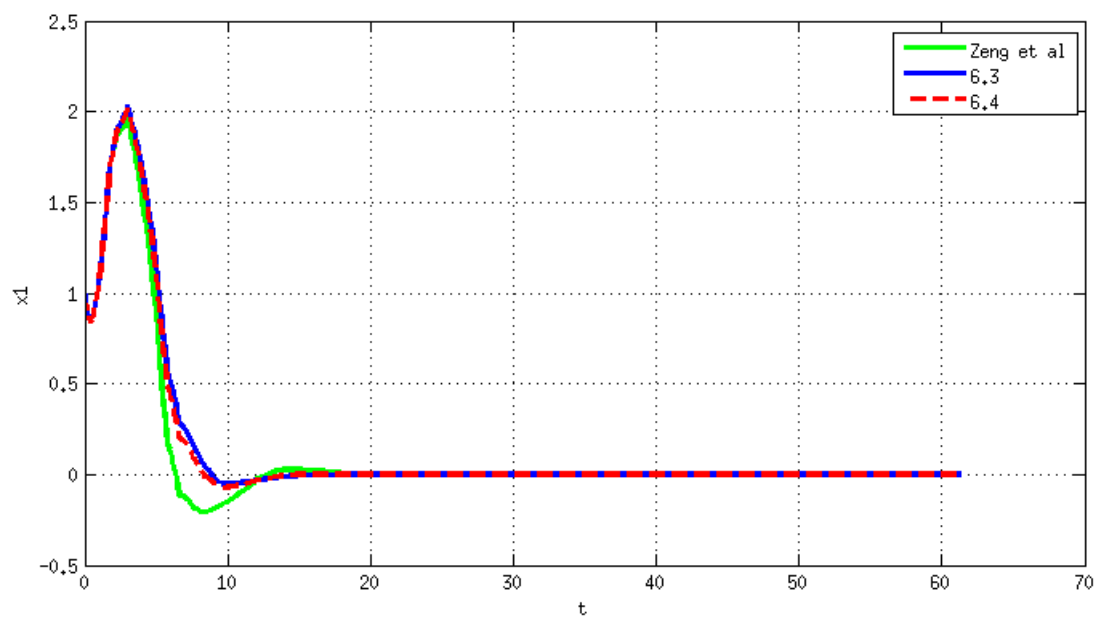


(a) Az állapot

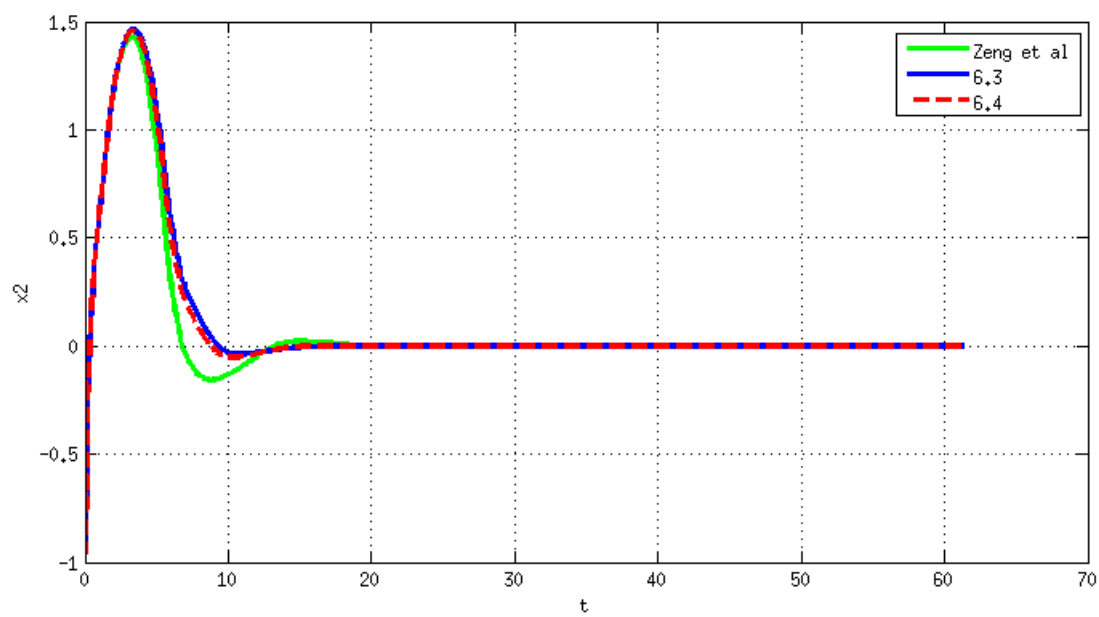


(b) A vezérlés

3. ábra. Az ICCL algoritmus különböző megvalósításai közötti eltérés

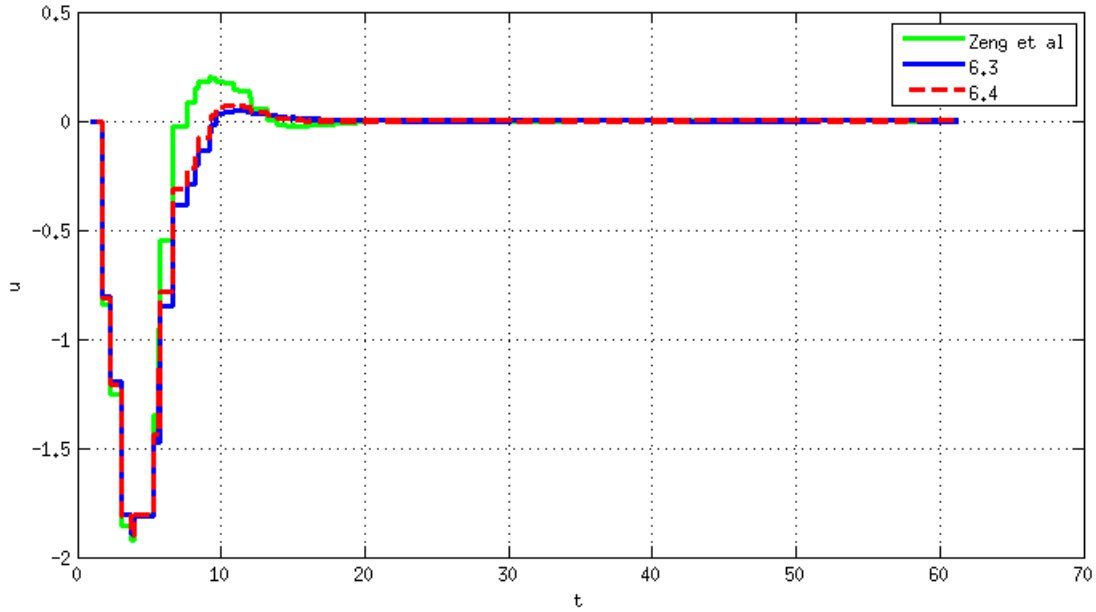


(a) Az első koordináta



(b) A második koordináta

4. ábra. Az állapot alakulása a különböző visszacsatolási mátrixok hatására az 1. Példa esetén



5. ábra. A vezérlés alakulása a különböző visszacsatolási mátrixok hatására az 1. Példa esetén

Elmélet	K 10 iteráció után	η
4.4. fejezet	$K = \begin{pmatrix} -0,5470 & -0,2510 \end{pmatrix}$	1,5206
5.3. fejezet	$K = \begin{pmatrix} -0,5383 & -0,2416 \end{pmatrix}$	1,5229
5.4. fejezet	$K = \begin{pmatrix} -0,5373 & -0,2416 \end{pmatrix}$	1,5232

1. táblázat. Eredmények összefoglalása

kicsivel gyorsabb konvergál. A 10 iteráció végrehajtása után adódó eredményeket az 1. táblázatban foglaltuk össze. Megfigyelhető az a nem meglepő jelenség, hogy a megengedett maximális késleltetési korlát növelésével a konvergencia sebessége egyre romlik. Így a Zeng et al eredménye esetén ugyan pár századdal kisebb η adódik, viszont a konvergencia gyorsabb lesz. A másik két módszer eredményei között ezen példa esetén nincs lényeges eltérés.

Második körben a vizsgálódásunk a Wirtinger-egyenlőtlenséggel nyert módszer és a [12] eredményeinek összehasonlítására irányulna. Azonban az 5.5. fejezetben nyer egyenlőtlenségek megoldása során az $\bar{X}$ változóra a nullmátrix adódott margiális megoldásként, így K szintén a nullmátrix. A dolgozat megírásáig nem sikerül kideríteni mi ennek az oka.

A grafikonok elkészítéséhez a szimuláció során kezdeti értéknek $(1, -1)$ -et válasz-

tottuk. A mintavétel periódusát $h = 0.2$ -nek, a δ -t, az elvesztett adatok maximális számát egynek, a késéseket pedig $\tau^{\text{sc}} = 0,4$, $\tau^{\text{ca}} = 0,2$ értékeknek tekintettük. A nemlinearitást a $\text{sat}(\cdot)$ függvénnyel vettük figyelembe, amely teljesíti az elvárt szektorfeltételt. A rendszer ezen adatai a [12]-re épülnek.

A tárgyalt példában láttuk, hogy minden módszernek volt előnye valamilyen szempontból, de egyiket sem lehet a legjobbnak mondani. Természetesen ahhoz, hogy egyáltalán esélyünk legyen felderíteni a módszerek sajátosságait jóval több példát kéne megvizsgálni, mint amennyire itt lehetőségünk van.

7. Összefoglalás

A dolgozatban mindenek előtt megismerkedtünk a hálózatokon keresztül vezérelt rendszereknél felmerülő problémákkal, majd a megoldásukhoz szükséges ismeretekkel, úgymint a funkcionál-differenciálegyenletek alapfogalmaival és a stabilitáselmélet néhány eredményével, továbbá a lineáris mátrixegyenlőtlenség definíciójával és pár tulajdonságával. Ezt követően áttekintettük a feladat néhány korábbi megoldását, köztük a jelen dolgozat közvetlen előzményeit ([16, 14]). Mindezek után rátértünk a fő eredményekre. Megmutattuk, hogyan kezelhető a paraméterbizonytalanság egységesen és ezt be is mutattuk a problémára adott három új megoldáson keresztül. A [16] eredményeit kibővítettük általánosabb bizonytalanságokra, megnéztük, milyen kiegészítő feltételek bevezetése árán lehet megszabadulni a kellemetlen integrálos tagtól az abszolút stabilitás F függvényében. Továbbá alkalmaztuk a Wirtinger-egyenlőtlenségből nemrég levezetett tételt a Jensen-egyenlőtlenség becslésének finomítására. Végezetül numerikus eszközök segítségével kipróbáltuk az elméleteket és láttuk, hogy két módszer működik, ráadásul bizonyos területen még jobban mint a [16] eredménye. A harmadik módszer tesztelése pedig megmaradt későbbi feladatnak.

Hivatkozások

- [1] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM: Philadelphia, 1994.
- [2] Eszes Dávid Csaba. *Késleltetett rendszerek stabilitásának vizsgálata lineáris mátrixegyenlőtlenségek segítségével*. Szakdolgozat, 2013.

- [3] Emilia Fridman. A refined input delay approach to sampled-data control. *Automatica*, 46(2):421–427, 2010.
- [4] Pascal Gahinet, Arkadi Nemirovski, Alan J. Laub, and Mahmoud Chilali. *LMI control toolbox for use with Matlab*. MathWorks, 1995.
- [5] Laurent El Ghaoui and Hervé Lebret. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 18(4):1035–1064, 1997.
- [6] Laurent El Ghaoui, Francois Oustry, and Mustapha Aitrami. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, pages 1171–1176, 1997.
- [7] Stoyan Gisbert. *MATLAB*. TYPOTEX, Budapest, 2008.
- [8] Keqin Gu. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems. In *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, volume 3, pages 2805–2810 vol.3, 2000.
- [9] Éva Gyurkovics and Tibor Takács. A remark on abstract multiplier conditions for robustness problems. *Systems & Control Letters*, 58:276–281, 2008.
- [10] Éva Gyurkovics and Tibor Takács. Application of a multiplier method to uncertain Lur’e-like systems. *Systems & Control Letters*, 60:854–862, 2011.
- [11] Jack K. Hale. *Functional differential equations*. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, 1971.
- [12] Fei Hao and Xianghui Zhao. Absolute stability of Lurie networked control systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(12):1326–1337, 2010.
- [13] G. Hardy, J. Littlewood, and G. Polya. *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press, 1936.
- [14] A. Seuret and F. Gouaisbaut. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems. *Automatica*, 49(9):2860 – 2866, 2013.
- [15] Min Wu, Yong He, and Jin-Hua She. *Stability Analysis and Robust Control of Time-Delay Systems*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [16] Hong-Bing Zeng, Yong He, Min Wu, and Shen-Ping Xiao. Absolute stability and stabilization for Lurie networked control systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(14):1667–1676, 2011.