

Félcsoportok kongruenciáinak különböző típusú redukzív lezártjai

Kiss Ferenc

Kivonat

Egy S félcsoportot *bal redukzív*nek nevezünk, ha tetszőleges a, b elemei esetén abból a feltételből, hogy minden S -beli x -re $xa = xb$ teljesül, az következik, hogy $a = b$. A *jobb redukzív* félcsoport fogalma a bal redukzív félcsoport fogalmának duálisa. Egy S félcsoportot *redukzív* félcsoportnak nevezünk, ha egyben bal és egyben jobb redukzív is. Egy S félcsoportot *gyengén redukzív*nek nevezünk, ha tetszőleges a, b elemei esetén abból a feltételből, hogy minden S -beli x -re az $xa = xb$ és $ax = bx$ egyenlőségek teljesülnek, az következik, hogy $a = b$. Egy S félcsoporton értelmezett ϱ kongruenciát bal [*jobb, gyengén, általánosan*] redukzívnek nevezünk, ha az általa vett S/ϱ faktor félcsoport bal [*jobb, gyengén, általánosan*] redukatív. A félcsoportok redukтивitására vonatkozó ismeretek például a félcsoportok mátrixokkal (transzformációkkal) való reprezentációinak megismeréséhez szükségesek.

Nagy Attila az [5] cikkben tetszőleges S félcsoport bal redukatív kongruenciáit vizsgálta. E célból S félcsoport tetszőleges ϱ kongruenciájának bevezette (a jelen dolgozat jelölését használva) a ϱ_l lezártját, melyet az alábbi módon definiált: tetszőleges a, b elemei az S félcsoportnak ϱ_l relációban állnak egymással, akkor és csak akkor, ha S minden x eleme esetén $(xa, xb) \in \varrho$ teljesül. Ezen kongruencia alapvető tulajdonságainak ismertetése után definiálta kongruenciák egy bővülő sorozatát, melyben a kezdő elem $\varrho_{l^0} = \varrho$, a további kongruenciák pedig az $\varrho_{l^{n+1}} = (\varrho_{l^n})_l$. Egyéb tételek mellett bebizonyította, hogy S félcsoport ι_S identikus kongruenciájával képzett ilyen sorozathoz akkor és csak akkor létezik n nem-negatív egész, melyre $(\iota_S)_{l^n} = lrc(\iota_S) = \omega_S$, azaz az S félcsoport univerzális kongruenciája (ahol $lrc(\iota_S)$ a legszűkebb, ι_S -et tartalmazó bal redukatív kongruenciát jelöli), amennyiben S félcsoport előáll egy bal zéró félcsoportnak egy nilpotens félcsoporttal vett ideálbővítéseként.

Jelen dolgozatban a [5]-ben végzett vizsgálatokat terjesztem ki gyengén redukatív és redukatív kongruenciákra. Ehhez bevezetem tetszőleges, S félcsoporton értelmezett ϱ kongruencia következő lezártját: ϱ_{l^n, r^m} ,

melynek akkor és csak akkor eleme az S félcsoporth egy tetszőleges (a, b) elempárja, ha $(xay, xby) \in \varrho$ minden S^n -beli x és S^m -beli y elem esetén teljesül. Ezzel a jelöléssel a fentebb bemutatott $\varrho_l = \varrho_{l^1, r^0}$, míg a duálisa $\varrho_r = \varrho_{l^0, r^1}$.

A gyengén redukzív kongruenciák vizsgálatára bevezetem tetszőleges ϱ kongruencia $\varrho_w = \varrho_l \cap \varrho_r$ bővítését. Ebből képezem a $\varrho_{w^0} = \varrho$ kezdetű, $\varrho_{w^{n+1}} = (\varrho_{w^n})_w$ által definiált sorozatot. Bemutatom erre vonatkozó állításokat majd bebizonyítom, hogy tetszőleges S félcsoporth ι_S kongruenciájával ilyen módon képzett sorozathoz akkor és csak akkor létezik n nem-negatív egész, melyre $(\iota_S)_{w^n} = \text{wrc}(\iota_S) = \omega_S$ (ahol $\text{wrc}(\iota_S)$ az ι_S -et tartalmazó legszűkebb gyengén redukzív kongruenciát jelöli), ha S egy nilpotens félcsoporth.

Tetszőleges S félcsoporth redukzív kongruenciáinak vizsgálatához, az alábbi sorozatot tekintem: az S egy tetszőleges ϱ kongruenciájával képezem a $\varrho_{t^0} = \varrho$ kezdetű, $\varrho_{t^n} = \varrho_{l^n, r^n}$ módon definiált kongruenciákat. Egyéb ide vonatkozó tételek igazolása mellett megmutatom, hogy adott S félcsoporth ι_S kongruenciájával ezen a módon előállított sorozathoz pontosan akkor létezik n nem-negatív egész, melyre $(\iota_S)_{t^n} = \text{rc}(\iota_S) = \omega_S$ (ahol $\text{rc}(\iota_S)$ az ι_S -et tartalmazó legszűkebb redukzív kongruenciát jelöli), amennyiben az S félcsoporth egy derékszögű kötegnek egy nilpotens félcsoporthtal vett ideálbővítése.

Bevezetés és Motiváció

Egy S félcsoporthot *bal (jobb) redukzív*nak nevezünk, amennyiben S tetszőleges a, b elemeire, a feltételből, hogy S minden x elemével $xa = xb$ ($ax = bx$), az következik, hogy $a = b$. Egy S félcsoporthot *redukatív* félcsoporthnak nevezünk, ha egyben bal és jobb redukatív is. Egy S félcsoporthot *gyengén redukatív*nak nevezünk, ha tetszőleges a, b elemei esetén abból a feltételből, hogy minden S -beli x -re az $xa = xb$ és $ax = bx$ egyenlőségek teljesülnek, az következik, hogy $a = b$. A definíciókból világos, hogy minden redukatív félcsoporth gyengén redukatív is. Egy S félcsoporthon értelmezett ϱ kongruenciát bal [*jobb, gyengén, általánosan*] redukatívnek nevezünk, ha az általa vett S/ϱ faktor félcsoporth bal [*jobb, gyengén, általánosan*] redukatív. A redukatív félcsoporthok és kongruenciák fontosak a félcsoporthelmélet több területén is. Ezek közül a legjelentősebb a félcsoporthok reprezentációelmélete.

Egy S félcsoporth egy homomorfizmusát, egy nem-üres X halmaz $\mathcal{T}_X$ transzformáció félcsoporthjára, az S -nek X transzformációival való reprezentációjának nevezzük. Minden $a \in S$ -hez hozzárendelhetjük S -nek egy jobb (bal) transzformációját ρ_a (λ_a) melyet a következő módon definiálunk: $\forall x \in S : (x)\rho_a = xa$ ($\lambda_a(x) =$

ax). Ezen ρ_a -t (λ_a -t) az S , a eleméhez rendelt *belső jobb (bal) translációjának* nevezzük. Az $a \rightarrow \rho_a$ ($a \rightarrow \lambda_a$) leképezést hívjuk az S *reguláris (anti-) reprezentációjának*. Ismert eredmény, hogy az S reguláris (anti-) reprezentációja injektív (*hű*), akkor és csak akkor, ha S bal (jobb) redukzív. Tehát egy S félcsoporth epimorf képének reguláris (anti-)reprezentációja hű, akkor és csak akkor, ha az epimorfizmus magja az S -nek egy bal (jobb) redukzív kongruenciája.

Ismert továbbá az is, hogy tetszőleges S félcsoporthnak létezik egy homomorfizmusa amely S -et leképezi $\Omega(S)$ -nek, az S translációs burkának belső részére (ami az összes olyan (ρ_a, λ_a) párokból áll, ahol $a \in S$). Ez a homomorfizmus pontosan akkor izomorfizmus, ha S gyengén redukzív. Tehát egy S félcsoporth S/ϱ faktor félcsoporthja akkor és csak akkor izomorf az $\Omega(S/\varrho)$ belső részével, ha a ϱ egy gyengén redukzív kongruenciája S -nek.

További érdekes alkalmazási területe a bal redukzív félcsoporthoknak az automataelméletben az automaták karakterisztikus félcsoporthjainak vizsgálata. Minden kimenet nélküli (A, X, δ) automatához társíthatjuk az X feletti $\mathcal{F}_X$ szabad félcsoporth $\mathcal{F}_X/\varrho(A)$ faktor félcsoporthját, ahol a $\varrho(A)$ kongruenciát az alábbi módon definiáljuk: $w_1 \varrho(A) w_2$ ($w_1, w_2 \in \mathcal{F}_X$) akkor és csak akkor, ha minden $a \in A$, $aw_1 = aw_2$ ([7]). Ezt a faktor félcsoporthot nevezzük a az (A, X, δ) automata karakterisztikus félcsoporthjának. Az automataelméletben fontosak az erősen összefüggő automaták. Ezekről pedig tudjuk, hogy karakterisztikus félcsoporthjuk, $\mathcal{F}_X/\varrho(A)$ bal redukzív, azaz $\varrho(A)$ egy bal redukzív kongruenciája $\mathcal{F}_X$ -nek.

Ezen a néhány példán is látszik, hogy a különböző típusú redukzív félcsoporthok és kongruenciák vizsgálata fontos a félcsoporthelméletben.

A dolgozatban ι_S és ω_S jelöli rendre az identikus relációt és az univerzális relációt S -en. Azon jelölések amelyeket nem definiálok a dolgozatban megtalálhatók [4, 2, 3] művekben.

Egy S félcsoporth tetszőleges ϱ kongruenciáját véve, vizsgáljuk a következő sorozatokat:

Elsőként az

$$\varrho_{l^0} \subseteq \varrho_{l^1} \subseteq \cdots \subseteq \varrho_{l^n} \subseteq \cdots \quad (1)$$

kongruenciák sorozatát S -en, ahol $\varrho_{l^0} = \varrho$ és tetszőleges nem-negatív egész n -re, $\varrho_{l^{n+1}}$ -et a következő módon definiáljuk: $(a, b) \in \varrho_{l^{n+1}}$ akkor és csak akkor, ha $\forall x \in S$: $(xa, xb) \in \varrho_{l^n}$. Az [5]-ből tudjuk ezekről, hogy valamely nem-negatív egész n -re, $\varrho_{l^n} = \varrho_{l^{n+1}}$, akkor $\varrho_{l^n} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} = lrc(\varrho)$, azaz

$\varrho_l^n = lrc(\varrho)$, ahol $lrc(\varrho)$ jelöli a legszűkebb bal redukzív kongruenciát S -en, amely tartalmazza ϱ -t. Az erre vonatkozó tételeket és bizonyításokat az [5] szerint ismertetjük. Természetesen ezen állítások duálisai is érvényesek.

Ezek után áttérünk az ott leírt eredmények általánosítására, követve az [1] kézirat felépítését. Következőnek tekintsük a

$$\varrho_{w^0} \subseteq \varrho_{w^1} \subseteq \cdots \subseteq \varrho_{w^n} \subseteq \cdots \quad (2)$$

kongruenciák sorozatát S -en, ahol $\varrho_{w^0} = \varrho$ és tetszőleges nem-negatív egész n -re, $\varrho_{w^{n+1}}$ -et a következő módon definiáljuk: $(a, b) \in \varrho_{w^{n+1}}$ akkor és csak akkor, ha $\forall x \in S: (xa, xb) \in \varrho_{w^n} \wedge (ax, bx) \in \varrho_{w^n}$. Megmutatjuk, hogy $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i} \subseteq wrc(\varrho)$ egy S félcsoporth tetszőleges ϱ kongruenciája esetén, ahol $wrc(\varrho)$ jelöli a legszűkebb gyengén redukzív kongruenciát S -en, ami tartalmazza ϱ -t. Majd figyelmünket az S félcsoporth azon ϱ kongruenciáira irányítjuk, melyekre a $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i}$ kongruencia gyengén redukzív. Megmutatjuk, hogy, ha $\varrho_{w^n} = \varrho_{w^{n+1}}$ teljesül az S félcsoporth valamely ϱ kongruenciájára és egy nem-negatív egész n -re, akkor $\varrho_{w^n} = \varrho_{w^{n+k}}$ minden nem-negatív egész k -ra. Továbbá, hogy ϱ_{w^n} ($n = 0, 1, \dots$) pontosan akkor gyengén redukzív kongruenciája az S félcsoporthnak, ha $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i} = \varrho_{w^n}$. Bebizonyítjuk, hogy egy S félcsoporth egy ϱ kongruenciájára, $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i}$ gyengén redukzív kongruenciája S -nek akkor és csak akkor, ha $\bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_{(S/\varrho)})_{w^i}$ gyengén redukzív kongruenciája az S/ϱ faktor félcsoporthnak. Így vizsgálatainkat elég, ha azon S félcsoporthokra korlátozzuk, melyekben $\bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_S)_{w^i} = (\iota_S)_{w^n} = \omega_S$ teljesül valamely nem-negatív egész n -re. (Ami ekvivalens azzal a feltétellel, hogy $(\iota_S)_{w^n} = \omega_S$). Bebizonyítjuk, hogy $(\iota_S)_{w^n} = wrc(\varrho) = \omega_S$ akkor és csak akkor teljesül valamely nem-negatív egész n -re, ha S egy nilpotens félcsoporth.

Vizsgáljuk végül a

$$\varrho_{t^0} \subseteq \varrho_{t^1} \subseteq \cdots \subseteq \varrho_{t^n} \subseteq \cdots \quad (3)$$

kongruenciák sorozatát S -en, ahol $\varrho_{t^0} = \varrho$ és tetszőleges nem-negatív egész n -re, $\varrho_{t^{n+1}}$ -et a következő módon definiáljuk: $(a, b) \in \varrho_{t^{n+1}}$ akkor és csak akkor, ha $\forall x, y \in S: (xay, xby) \in \varrho_{t^n}$. Ez után az előző fejezethez hasonlóan felvázoljuk az alábbi lényegi eredményekhez vezető lépéseket: Megmutatjuk, hogy $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{t^i} \subseteq rc(\varrho)$ egy S félcsoporth tetszőleges ϱ kongruenciája esetén, ahol $rc(\varrho)$ jelöli a legszűkebb redukzív kongruenciát S -en, ami tartalmazza ϱ -t. Bebizonyítjuk, hogy $(\iota_S)_{t^n} = rc(\varrho) = \omega_S$ akkor és csak akkor teljesül valamely nem-negatív egész n -re, ha az S félcsoporth egy derékszögű kötegnek egy nilpotens félcsoporthtal vett ideálbővítése.

1. Bal redukzív kongruenciák félcsoporthokon

Legyen S félcsoporth és ϱ egy kongruenciája S -nek. Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\varrho_l = \{(a, b) \in S \times S : (\forall x \in S) (xa, xb) \in \varrho\}.$$

1.1. Lemma. *Egy S félcsoporth tetszőleges ϱ kongruenciája esetén, ϱ_l kongruenciája S -nek.*

Bizonyítás. Legyen ϱ az S félcsoporth egy kongruenciája. Látható, hogy ϱ_l ekvivalencia reláció S -en. Ahhoz, hogy azt is belássuk, hogy ϱ_l kongruencia, legyenek $s, a, b \in S$ tetszőleges elemek úgy, hogy $(a, b) \in \varrho_l$. Ekkor minden $x \in S$ -re,

$$x(sa) = (xs)a \varrho (xs)b = x(sb).$$

Tehát

$$(sa, sb) \in \varrho_l.$$

Így ϱ_l bal kongruencia S -en. Hasonlóan

$$x(as) = (xa)s \varrho (xb)s = x(bs)$$

minden $x \in S$ -re, így

$$(as, bs) \in \varrho_l.$$

Azaz ϱ_l jobb kongruencia S -en. Azaz, ϱ_l kongruencia S -en. $\square$

1.2. Lemma. *Egy S félcsoporth bármely α, β kongruenciái esetén teljesül, hogy:*

1. $\alpha \subseteq \alpha_l$,
2. $\alpha \subseteq \beta$ -ből következik, hogy $\alpha_l \subseteq \beta_l$.

Bizonyítás. Mindkét állítás nyilvánvaló. $\square$

1.3. Lemma. *Egy S félcsoporth kongruenciáinak bármely nem-üres $\{\varrho_i : i \in I\}$ családjára teljesül, hogy $(\cap_{i \in I} \varrho_i)_l = \cap_{i \in I} (\varrho_i)_l$.*

Bizonyítás. Bármely $a, b \in S$ -re, $(a, b) \in (\cap_{i \in I} \varrho_i)_l$ akkor és csak akkor, ha $(xa, xb) \in \cap_{i \in I} \varrho_i$ minden $x \in S$ -re, akkor és csak akkor, ha $(xa, xb) \in \varrho_i$ minden $x \in S$ -re és minden $i \in I$ -re, akkor és csak akkor, ha $(a, b) \in (\varrho_i)_l$ minden $i \in I$ -re, akkor és csak akkor, ha $(a, b) \in \cap_{i \in I} (\varrho_i)_l$. $\square$

1.1. Korollárium. *Bármely S félcsoporth esetén, $(\cdot)l : \varrho \mapsto \varrho_l$ leképezés eleme az $\text{End}(\mathcal{L}(S); \wedge)$ -nek, ami az S összes kongruenciáinak $\wedge$ -félhálójának endomorfizmus félcsoporthja.*

Bizonyítás. Az 1.3 Lemmát alkalmazhatjuk az S bármely két kongruenciájára, ebből az állítás nyilvánvalóan következik. $\square$

1.1. Tétel. *Egy S félcsoporth egy ϱ kongruenciája pontosan akkor bal redukzív, ha $\varrho = \varrho_l$ (azaz, ϱ fixpontja az 1.1 Korolláriumban definiált $(\cdot)l$ endomorfizmusnak).*

Bizonyítás. Legyen ϱ egy kongruenciája az S félcsoporthnak, amire $\varrho = \varrho_l$ teljesül. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $(xa, xb) \in \varrho$ minden $x \in S$ -re. Ekkor

$$(a, b) \in \varrho_l = \varrho$$

ami azt jelenti, hogy ϱ egy bal redukzív kongruenciája S -nek.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy ϱ egy bal redukzív kongruenciája az S félcsoporthnak. Mivel $\varrho \subseteq \varrho_l$, elég megmutatnunk, hogy $\varrho_l \subseteq \varrho$. Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \varrho_l$$

valamely $a, b \in S$ -re. Ekkor minden $x \in S$ -re,

$$(xa, xb) \in \varrho$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$(a, b) \in \varrho,$$

mivel ϱ egy bal redukzív kongruencia S -en. Így

$$\varrho_l \subseteq \varrho,$$

teljesül. $\square$

1.2. Korollárium. *Egy nem-üres $\{\varrho_i : i \in I\}$ családjára az S félcsoporth ϱ_i bal redukzív kongruenciáinak mindig teljesül, hogy a $\bigcap_{i \in I} \varrho_i$ bal redukzív kongruenciája S -nek.*

Bizonyítás. Az állítás a bal redukтивitás definíciójából, vagy az 1.1 Tétel és az 1.3 Lemma egyszerű következményeként könnyen belátható. $\square$

Mivel egy S félcsoporth univerzális relációja bal redukzív kongruenciája S -nek, ezért az 1.2 Korollárium következményeként adódik, hogy létezik $\text{lrc}(\varrho)$ bal redukzív lezártja a ϱ -nak (azaz az S -nek legszűkebb, ϱ -t tartalmazó bal

reduktív kongruenciája). Világos, hogy $lrc(\iota_S)$ az S félcsoporthoz legszűkebb redukálós kongruenciája.

Tetszőleges S félcsoporthoz egy tetszőleges ϱ kongruenciája esetén tekintsük az S kongruenciáinak a következő sorozatát:

$$\begin{aligned}\varrho_{l^0} &= \varrho \\ \varrho_{l^1} &= (\varrho_{l^0})_l \\ &\vdots \\ \varrho_{l^{n+1}} &= (\varrho_{l^n})_l \\ &\vdots\end{aligned}$$

Az 1.2 Lemma (1)-es pontja szerint,

$$\varrho_{l^0} \subseteq \varrho_{l^1} \subseteq \cdots \subseteq \varrho_{l^n} \subseteq \cdots.$$

Érdekes észrevennünk, hogy a fent definiált sorozat kongruenciáit egyesével, az $\varrho_{l^i} = \{(a, b) \in S \times S : (xa, xb) \in \varrho \ (\forall x \in S^i)\}$ összefüggéssel is megadhatjuk. Így a ϱ_l -vel kapcsolatos eddigi eredményeinket és ezeknek ϱ_r -re vonatkozó duálisait felhasználva, a későbbi fejezetek számára fontos összefüggéseket vehetünk észre. Tudjuk, hogy $(\cdot)_l : \varrho \mapsto \varrho_l$ és $(\cdot)_r : \varrho \mapsto \varrho_r$ elemei az $End(\mathcal{L}(S); \wedge)$ -nek. Könnyen belátható, hogy $(\varrho_l)_r = (\varrho_r)_l$, így $l \circ r = r \circ l$ teljesül $End(\mathcal{L}(S); \wedge)$ -ben. Vagyis az $End(\mathcal{L}(S); \wedge)$ -nek az l és az r által generált $\langle l, r \rangle$ részfélcsoporthoz kommutatív. Tehát, ha $\alpha \in \langle l, r \rangle$ és α előáll l -ek és r -ek szorzataként úgy, hogy l és r rendre i -szer és j -szer szerepelnek α -ban, akkor $\alpha = l^i, r^j$. Így $(\varrho)\alpha = \{(a, b) \in S \times S : (xay, xby) \in \varrho \ (\forall x \in S^i, y \in S^j)\}$. Bevezetjük a következő (ld.: [1]) jelölést:

$$\varrho_{l^i, r^j} = \{(a, b) \in S \times S : (xay, xby) \in \varrho \ (\forall x \in S^i, y \in S^j)\}$$

(S^0 jelöli az üres halmazt, l^0 és r^0 az üres szót (string) jelölik). Speciálisan:

$$\varrho_l = \varrho_{l^1, r^0} \quad \varrho_r = \varrho_{l^0, r^1} \quad \varrho = \varrho_{l^0, r^0}.$$

1.1. *Megjegyzés.* Egy S félcsoporthoz ϱ kongruenciájára és tetszőleges I és J ideáljaira, definiálhatjuk a következő módon az S -nek egy ${}_I\varrho_J$ kongruenciáját: $(a, b) \in {}_I\varrho_J$ akkor és csak akkor $(xay, xby) \in \varrho$ minden $x \in I$ -re és $y \in J$ -re. Ezen jelöléssel,

$$\varrho_{l^i, r^j} = S^i \varrho S^j.$$

1.4. Lemma. *Egy tetszőleges S félcsoporth bármely ϱ kongruenciája esetén, $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$ kongruenciája S -nek.*

Bizonyítás. Legyen S egy félcsoporth és ϱ egy kongruencia S -en! Ekkor az 1.1 Lemma szerint, ϱ_{l^n} kongruenciája S -nek, minden nem-negatív n egészre. Nyilvánvalóan $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$ reflexív és szimmetrikus. Hogy lássuk, az $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$ tranzitív is, tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} \quad \text{és} \quad (b, c) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$$

valamely $a, b, c \in S$ -re. Ekkor léteznek olyan m és n nem-negatív egészek, melyekre

$$(a, b) \in \varrho_{l^m} \quad \text{és} \quad (b, c) \in \varrho_{l^n}.$$

Legyen

$$k = \max\{m, n\}.$$

Az 1.2 Lemma (1)-es pontja szerint,

$$(a, b) \in \varrho_{l^k} \quad \text{and} \quad (b, c) \in \varrho_{l^k}.$$

Ekkor

$$(a, c) \in \varrho_{l^k}$$

és így

$$(a, c) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}.$$

Tehát $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$ tranzitív. Könnyen belátható továbbá, hogy $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$ kongruencia S -en. $\square$

1.5. Lemma. *Egy S félcsoporth bármely ϱ kongruenciájára, $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} \subseteq \text{lrc}(\varrho)$. Az $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} = \text{lrc}(\varrho)$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$ bal redukzív kongruenciája S -nek.*

Bizonyítás. Legyen ϱ egy tetszőleges kongruenciája az S félcsoporthnak! Mivel $\text{lrc}(\varrho)$ bal redukzív, így

$$(\text{lrc}(\varrho))_l = \text{lrc}(\varrho)$$

az 1.1 Tétel szerint. Mivel $\varrho \subseteq \text{lrc}(\varrho)$, tudjuk (az 1.2 Lemma (2) pontja szerint), hogy

$$\varrho_{l^n} \subseteq \text{lrc}(\varrho)$$

minden n nem-negatív egészre. Így

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} \subseteq \text{lrc}(\varrho).$$

Mivel $\varrho \subseteq \cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$ és $\text{lrc}(\varrho)$ bal redukzív kongruenciája S -nek, az $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} \subseteq \text{lrc}(\varrho)$ tartalmazásból következik, hogy $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} = \text{lrc}(\varrho)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$ bal redukzív kongruenciája S -nek. $\square$

A fejezet további részében olyan ϱ kongruenciákat vizsgálunk S félcsoporthokon, amelyekre teljesül, hogy $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$ bal redukzív kongruenciája S -nek.

1.2. Tétel. *Legyen S egy félcsoporth és ϱ egy kongruencia S -en. Ha valamely nem-negatív egész n -re teljesül, hogy $\varrho_{l^n} = \varrho_{l^{n+1}}$, akkor $\varrho_{l^n} = \varrho_{l^{n+k}}$ teljesül minden pozitív egész k -ra és így $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} = \varrho_{l^n}$. Továbbá ϱ_{l^m} ($m = 0, 1, \dots$) bal redukzív kongruenciája S -nek akkor és csak akkor, ha $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} = \varrho_{l^m}$; ebben az esetben $\text{lrc}(\varrho) = \varrho_{l^m}$.*

Bizonyítás. Legyen S egy tetszőleges félcsoporth. Tegyük fel, hogy az S valamely ϱ kongruenciájára teljesül, hogy $\varrho_{l^n} = \varrho_{l^{n+1}}$, valamely n nem-negatív egészre. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \varrho_{l^{n+2}} = (\varrho_{l^{n+1}})_l$ valamely $a, b \in S$ -re. Ekkor minden $x \in S$ -re,

$$(xa, xb) \in \varrho_{l^{n+1}} = \varrho_{l^n}$$

ami azt jelenti, hogy

$$(a, b) \in \varrho_{l^{n+1}}.$$

Így

$$\varrho_{l^{n+2}} \subseteq \varrho_{l^{n+1}}$$

amiből az következik, hogy

$$\varrho_{l^{n+1}} = \varrho_{l^{n+2}}.$$

Indukciót alkalmazva kapjuk, hogy

$$\varrho_{l^n} = \varrho_{l^{n+k}}$$

minden k pozitív egészre. Így

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} = \varrho_{l^n}.$$

Az állítás második részének bizonyításához, először is tegyük fel, hogy ϱ_{l^m} ($m = 0, 1, \dots$) bal redukzív kongruencia S -en. Ekkor, az 1.1 Tétel szerint

$$\varrho_{l^m} = (\varrho_{l^m})_l = \varrho_{l^{m+1}}.$$

A fentiekből következik, hogy

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} = \varrho_{l^m}.$$

A fordított irány bizonyításához tegyük fel, hogy

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} = \varrho_{l^m}$$

valamely m nem-negatív egészre. Ekkor

$$\varrho_{l^{m+1}} \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} = \varrho_{l^m}$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\varrho_{l^m} = \varrho_{l^{m+1}} = (\varrho_{l^m})_l.$$

Felhasználva az 1.1 Tételt, kapjuk, hogy ϱ_{l^m} bal redukzív kongruenciája S -nek. Az 1.5 Lemma szerint,

$$lrc(\varrho) = \varrho_{l^m}.$$

□

1.3. Tétel. *Legyen S egy félcsoporth, amire teljesül, hogy $S^n = S^{n+1}$, valamely nem-negatív egész n esetén. Ekkor az S minden ϱ kongruenciájára teljesül, hogy $\varrho_{l^n} = \varrho_{l^{n+1}}$ és így az is, hogy $\varrho_{l^n} = lrc(\varrho)$. Speciálisan, $(\iota_S)_{l^n}$ a legszűkebb bal redukzív kongruencia S -en.*

Bizonyítás. Legyen S egy félcsoporth és ϱ egy tetszőleges kongruencia S -en. Tegyük fel, hogy $S^n = S^{n+1}$ valamely nem-negatív egész n -re.

Az 1.1 Megjegyzés alapján,

$$\varrho_{l^n} = \varrho_{S^n} = \varrho_{S^{n+1}} = \varrho_{l^{n+1}}.$$

Ekkor, az 1.2 Tétel szerint,

$$\varrho_{l^n} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} = lrc(\varrho).$$

Speciálisan, $(\iota_S)_{l^n}$ a legszűkebb bal redukzív kongruencia S -en.

□

1.6. Lemma. (I.3.3 Lemma a [6]-ban) Legyen α az S félcsoporth egy kongruenciája! Az S minden olyan β kongruenciájára, amely tartalmazza α -t, definiálunk egy β/α relációt az S/α faktor félcsoporthon, az alábbi módon:

$$\beta/\alpha = \{([a]_\alpha, [b]_\alpha) \in S/\alpha \times S/\alpha : (a, b) \in \beta\}.$$

Ekkor a

$$\beta \mapsto \beta/\alpha \text{ (}\beta \text{ kongruenciája } S\text{-nek)}$$

leképezés egy hálózomorfizmus az S összes, α -t tartalmazó kongruenciáinak hálójáról az S/α összes kongruenciáinak hálójára.

1.2. *Megjegyzés.* Az 1.6 Lemma szerint, ha α egy kongruenciája az S félcsoporthnak és a β_i -k ($i = 1, 2, \dots$) az S olyan kongruenciái, melyek tartalmazzák α -t, méghozzá úgy, hogy

$$\beta_1/\alpha \subset \beta_2/\alpha \subset \dots$$

teljesül S/α -ban, akkor

$$\beta_1 \subset \beta_2 \subset$$

teljesül S -ben.

A következő lemma az [5]-ben szereplő 7. Lemma általánosítása, melyet sokszor fel fogunk használni a további vizsgálódásaink során.

1.7. Lemma. (2.5 Lemma az [1]-ben) Egy S félcsoporth minden ϱ kongruenciájára teljesül, hogy $\varrho_{l^i, r^j} / \varrho = \left(\iota_{(S/\varrho)} \right)_{l^i, r^j}$ bármely nem-negatív i, j egészek esetén.

Bizonyítás. Legyen S egy tetszőleges félcsoporth és ϱ egy kongruencia S -en! Világos, hogy

$$\varrho_{l^0, r^0} / \varrho = \left(\iota_{(S/\varrho)} \right)_{l^0, r^0}.$$

Tegyük fel, hogy $i, j \geq 1$. Először is vegyük észre, hogy

$$(S/\varrho)^{(k)} = \{[x]_\varrho \in S/\varrho : (\exists s \in S^k) [x]_\varrho = [s]_\varrho\}$$

minden k pozitív egészre. Tetszőleges $a, b \in S$ -re,

$$([a]_\varrho, [b]_\varrho) \in \varrho_{l^i, r^j} / \varrho$$

akkor és csak akkor, ha

$$(a, b) \in \varrho_{l^i, r^j}$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$\forall x \in S^i \text{ és } \forall y \in S^j : (xay, xby) \in \varrho$$

azaz,

$$\forall x \in S^i \text{ és } \forall y \in S^j : [xay]_{\varrho} = [xby]_{\varrho}.$$

Ez az utolsó feltétel ekvivalens azzal, hogy

$$\forall [x]_{\varrho} \in (S/\varrho)^i \text{ és } \forall [y]_{\varrho} \in (S/\varrho)^j : [x]_{\varrho}[a]_{\varrho}[y]_{\varrho} = [x]_{\varrho}[b]_{\varrho}[y]_{\varrho},$$

azaz

$$([a]_{\varrho}, [b]_{\varrho}) \in \left(\iota_{(S/\varrho)} \right)_{l^i, r^j}.$$

Tehát

$$\varrho_{l^i, r^j} / \varrho = \left(\iota_{(S/\varrho)} \right)_{l^i, r^j}.$$

□

1.3. Korollárium. *Egy S félcsoporth minden ϱ kongruenciájára teljesül, minden nem-negatív egész n -re, hogy $\varrho_{l^n} / \varrho = \left(\iota_{(S/\varrho)} \right)_{l^n}$.*

Továbbá,

$$\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} \right) / \varrho = \bigcup_{i=0}^{\infty} \left(\iota_{(S/\varrho)} \right)_{l^i}.$$

Bizonyítás. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Ekkor

$$([a]_{\varrho}, [b]_{\varrho}) \in \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} \right) / \varrho$$

akkor és csak akkor, ha

$$(a, b) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$$

ami ekvivalens azzal, hogy valamely nem-negatív egész n -re,

$$(a, b) \in \varrho_{l^n},$$

azaz,

$$([a]_{\varrho}, [b]_{\varrho}) \in \varrho_{l^n} / \varrho = \left(\iota_{(S/\varrho)} \right)_{l^n}.$$

Ez az utolsó feltétel ekvivalens azzal, hogy

$$([a]_{\varrho}, [b]_{\varrho}) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \left(\iota_{(S/\varrho)} \right)_{l^i}.$$

Amiből az következik, hogy

$$\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i} \right) / \varrho = \bigcup_{i=0}^{\infty} \left(\iota_{(S/\varrho)} \right)_{l^i}$$

teljesül S/ϱ -ben.

□

1.4. Tétel. Egy S félcsoporthnak egy ϱ kongruenciája esetén, $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$ bal redukatív kongruenciája S -nek akkor és csak akkor, ha az $\cup_{i=0}^{\infty} (\iota_{(S/\varrho)})_{l^i}$ bal redukatív kongruenciája az S/ϱ faktor félcsoporthnak.

Bizonyítás. Legyen S egy félcsoport és ϱ egy kongruencia S -en. Az 1.3 Korollárium szerint,

$$(\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i})/\varrho = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_{(S/\varrho)})_{l^i}.$$

Így valamely $a, b \in S$ elemekre,

$$(xa, xb) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$$

akkor és csak akkor teljesül minden $x \in S$ -re, ha

$$([x]_{\varrho}[a]_{\varrho}, [x]_{\varrho}[b]_{\varrho}) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_{(S/\varrho)})_{l^i}$$

teljesül minden $[x]_{\varrho}$ elemére az S/ϱ -nak. Ebből az következik, hogy $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{l^i}$ akkor és csak akkor bal redukatív kongruenciája S -nek, ha $\cup_{i=0}^{\infty} (\iota_{(S/\varrho)})_{l^i}$ bal redukatív kongruenciája az S/ϱ faktor félcsoporthnak. $\square$

Az 1.4 Tétel miatt megtehetjük, hogy vizsgálatainkat az olyan S félcsoporthokra korlátozzuk, melyekben az $\cup_{i=0}^{\infty} (\iota_S)_{l^i}$ bal redukatív kongruenciája az S -nek. Az 1.2 Tétel miatt $\cup_{i=0}^{\infty} (\iota_S)_{l^i} = (\iota_S)_{l^n}$ ($n = 0, 1, \dots$) akkor és csak akkor teljesül egy S félcsoporthban, ha az $(\iota_S)_{l^n}$ egy bal redukatív kongruencia S -en. A következőkben olyan S félcsoporthokat fogunk vizsgálni, melyekben $\cup_{i=0}^{\infty} (\iota_S)_{l^i} = (\iota_S)_{l^n} = \omega_S$ teljesül valamely n nem-negatív egészre. Világos, hogy ez ekvivalens azzal a feltétellel, hogy $(\iota_S)_{l^n} = \omega_S$. (Azaz, hogy S -en az egyetlen bal redukatív kongruencia az ω_S).

1.1. Definíció. Egy S félcsoporthot *bal (jobb) zéró félcsoporthnak* nevezünk, ha $ab = a$ ($ab = b$) teljesül minden $a, b \in S$ -re.

1.2. Definíció. Egy 0-elemes S félcsoporthot *nilpotens félcsoporthnak* nevezünk, ha létezik pozitív egész n , hogy $S^n = \{0\}$. A legkisebb pozitív egész n -t, amelyre $S^n = \{0\}$, nevezzük az S nilpotenciája fokának.

1.5. Tétel. Az S félcsoporthban teljesül $(\iota_S)_{l^n} = \omega_S$ valamely nem-negatív n egészre, akkor és csak akkor, ha S egy bal zéró félcsoporthnak egy nilpotens félcsoporthtal vett ideálbővítése.

Bizonyítás. Legyen S egy félcsoporth, amiben $(\iota_S)_{l^n} = \omega_S$ teljesül valamely nem-negatív egész n -re. Tegyük fel, hogy $n \geq 1$ (az $n = 0$ esetben $\iota_S = \omega_S$, így S a triviális félcsoporth). Ekkor, az 1.1 Megjegyzés szerint,

$$xa = xb$$

minden $x, a, b \in S^n$ -re. Legyen $x \in S^n$ tetszőleges elem. Az $a = x^2$ -et tekintve azt látjuk, hogy

$$a^2 = xx^3 = x^2 = a,$$

vagyis, a idempotens eleme S -nek. Mivel

$$xS^n = \{x^2\} = \{a\},$$

így azt kaptuk, hogy S^{2n} minden eleme idempotens elem. Így

$$S^{2n} \subseteq E(S),$$

ahol $E(S)$ jelöli az S összes idempotens elemeinek halmazát. Mivel $E(S) \subseteq S^k$ minden pozitív egész k -ra igaz, így azt kaptuk, hogy

$$E(S) = S^{2n}.$$

Azaz minden S^{2n} minden b, c elemére,

$$bc = bb = b$$

ami pontosan azt jelenti, hogy S^{2n} egy bal zéró félcsoporth. Mivel az S/S^{2n} Rees faktor félcsoporthja az S -nek egy nilpotens félcsoporth, így S az S^{2n} bal zéró félcsoporthnak az S/S^{2n} nilpotens félcsoporthtal való ideálbővítése.

A fordított irány bizonyításához tegyük fel, hogy S egy bal zéró félcsoporthnak egy nilpotens félcsoporthtal vett ideálbővítése. Ekkor S tartalmaz egy L ideált, ami egy bal zéró félcsoporth úgy, hogy az S/L Rees faktor félcsoporth egy nilpotens félcsoporth. Legyen n az S/L nilpotenciájának foka. Ekkor

$$S^n \subseteq L.$$

Mivel $L \subseteq E(S) \subseteq S^n$, kapjuk, hogy

$$L = S^n.$$

Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Ekkor minden $x \in S^n = L$ -re,

$$xa = (x^n x^{n-1})a = x^n(x^{n-1}a) = x^n = x^n(x^{n-1}b) = (x^n x^{n-1})b = xb,$$

mivel $x^n, x^{n-1}a, x^{n-1}b \in L$ és L egy bal zéró félcsoporth. Tehát $(a, b) \in (\iota_S)_{l^n}$ az 1.1 Megjegyzés szerint. Mivel a és b tetszőleges elemei voltak S -nek, azt kaptuk, hogy $\omega_S \subseteq (\iota_S)_{l^n}$ amiből következik, hogy $(\iota_S)_{l^n} = \omega_S$. $\square$

Ez után kiterjesztjük az 1.5 Tételben kapott eredményt tetszőleges kongruenciákra egy félcsoporthoz. Pontosabban, leírjuk azokat a ϱ kongruenciákat az S félcsoporthoz, melyekre $\varrho^n = \omega_S$ igaz valamely nem-negatív egész n -re.

1.6. Tétel. *Egy S félcsoport ϱ kongruenciájára teljesül, hogy $\varrho^n = \omega_S$ valamely nem-negatív n egészre, akkor és csak akkor, ha az S/ϱ faktor félcsoport egy bal zéró félcsoporthoz egy nilpotens félcsoporthoz vett ideálbővítése.*

Bizonyítás. Legyen ϱ egy tetszőleges kongruenciája az S félcsoporthoz. Az 1.6 Lemma és az 1.7 Lemma szerint, $\varrho^n = \omega_S$ akkor és csak akkor teljesül az S -ben valamely nem-negatív egész n -re, ha

$$(\iota_{(S/\varrho)})^n = \varrho^n/\varrho = (\omega_S)/\varrho = \omega_{(S/\varrho)}$$

az S/ϱ -ban. Az 1.5 Tétel szerint, ez az egyenlőség ekvivalens azzal a feltétellel, hogy az S/ϱ faktor félcsoport egy bal zéró félcsoporthoz egy nilpotens félcsoporthoz vett ideálbővítése. $\square$

1.7. Tétel. *Legyen S egy olyan félcsoport, amelyre igaz, hogy $S^n = S^{n+1}$ valamely n nem-negatív egészre. Ekkor az S tetszőleges ϱ kongruenciájára teljesül, hogy az S univerzális relációja az egyetlen bal redukzív kongruenciája S -nek, ami tartalmazza ϱ -t akkor és csak akkor, ha $(S/\varrho)^n$ egy bal zéró félcsoport (azaz az S/ϱ faktor félcsoport az $(S/\varrho)^n$ bal zéró félcsoporthoz az $(S/\varrho)/(S/\varrho)^n$ nilpotens félcsoporthoz vett ideálbővítése).*

Bizonyítás. Legyen S egy olyan félcsoport, amelyre igaz, hogy $S^n = S^{n+1}$ valamely n nem-negatív egészre. Legyen ϱ egy tetszőleges kongruenciája S -nek. Az 1.3 Tétel szerint, $\text{lrc}(\varrho) = \varrho^n$. Így az univerzális reláció az egyetlen bal redukzív kongruenciája S -nek, ami tartalmazza ϱ -t akkor és csak akkor, ha $\varrho^n = \omega_S$.

Tegyük fel, hogy $\varrho^n = \omega_S$. Ekkor az 1.6 Lemma és az 1.7 Lemma szerint,

$$(\iota_{(S/\varrho)})^n = \omega_{(S/\varrho)}.$$

Az 1.5 Tétel bizonyításának első része alapján látható, hogy, $(S/\varrho)^{2n}$ egy bal zéró félcsoport. Mivel abból a feltételből, hogy $S^n = S^{n+1}$ következik, hogy $S^n = S^{2n}$, azt kaptuk, hogy

$$(S/\varrho)^n = (S/\varrho)^{2n}$$

és így $(S/\varrho)^n$ egy bal zéró félcsoport.

A fordított irány bizonyításához tegyük fel, hogy $(S/\varrho)^n$ egy bal zéró félcsoport. Ekkor az 1.6 Tétel és az 1.5 Tétel bizonyítása alapján,

$$\varrho^n = \omega_S.$$

$\square$

1.8. Tétel. Legyen S egy olyan félcsoporth, amelyre igaz, hogy $S^n = S^{n+1}$ valamely n nem-negatív egészre. Ekkor az S univerzális relációja az egyetlen bal redukzív kongruenciája S -nek akkor és csak akkor, ha S^n egy bal zéró félcsoporth (azaz, S előáll az S^n bal zéró félcsoporthnak az S/S^n nilpotens félcsoporthtal vett ideálbővítéseként).

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 1.7 Tételt $\varrho = \iota_S$ -re. □

2. Gyengén redukzív kongruenciák félcsoporthokon

Ebben a részben az [1] eredményeit ismertetjük a gyengén redukzív kongruenciákról.

2.1. Definíció. Legyen S egy félcsoporth és ϱ egy kongruencia S -en. Legyen $\varrho_w = \varrho_l \cap \varrho_r$, azaz:

$$\varrho_w := \{(a, b) \in S \times S \mid \forall x \in S : (xa \varrho xb) \wedge (ax \varrho bx)\}.$$

Könnyen látható, hogy $w : \varrho \mapsto \varrho_w$ leképezés eleme az $\text{End}(\mathcal{L}(S); \wedge)$ -nek.

2.1. Lemma. Egy S félcsoporth kongruenciáinak bármely nem-üres $\{\varrho_i : i \in I\}$ családjára teljesül, hogy

$$\left(\bigcap_{i \in I} \varrho_i \right)_w = \bigcap_{i \in I} (\varrho_i)_w.$$

Bizonyítás. Az 1.3 Lemma és duálisa szerint,

$$\left(\bigcap_{i \in I} \varrho_i \right)_l = \bigcap_{i \in I} (\varrho_i)_l, \quad \left(\bigcap_{i \in I} \varrho_i \right)_r = \bigcap_{i \in I} (\varrho_i)_r.$$

Így

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i \in I} \varrho_i \right)_w &= \left(\bigcap_{i \in I} \varrho_i \right)_l \cap \left(\bigcap_{i \in I} \varrho_i \right)_r = \left(\bigcap_{i \in I} (\varrho_i)_l \right) \cap \left(\bigcap_{i \in I} (\varrho_i)_r \right) = \\ &= \bigcap_{i \in I} ((\varrho_i)_l \cap (\varrho_i)_r) = \bigcap_{i \in I} (\varrho_i)_w. \end{aligned}$$

□

2.1. Tétel. Egy S félcsoporth egy ϱ kongruenciája pontosan akkor gyengén redukzív, ha $\varrho = \varrho_w$.

Bizonyítás. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Ha $(xa, xb) \in \varrho$ és $(ax, bx) \in \varrho$ is teljesül minden $x \in S$ -re, akkor:

$$(a, b) \in \varrho_w = \varrho$$

ami azt jelenti, hogy a ϱ gyengén reduktív kongruenciája S -nek.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy ϱ egy gyengén reduktív kongruencia. Mivel $\varrho \subseteq \varrho_w$, így elég megmutatnunk, hogy $\varrho_w \subseteq \varrho$. Tegyük fel valamely $a, b \in S$ elemekről, hogy

$$(a, b) \in \varrho_w.$$

Ekkor minden $x \in S$ -re,

$$(xa, xb) \in \varrho \wedge (ax, bx) \in \varrho.$$

Mivel ϱ gyengén reduktív kongruenciája S -nek, azt kapjuk, hogy

$$(a, b) \in \varrho.$$

Így

$$\varrho_w \subseteq \varrho.$$

□

Mivel egy S félcsoporth univerzális relációja gyengén reduktív kongruenciája S -nek, ezért az S tetszőleges ϱ kongruenciájához létezik $wrc(\varrho)$ *gyengén reduktív lezártja* a ϱ -nak (azaz az S -nek legszűkebb, ϱ -t tartalmazó gyengén reduktív kongruenciája). Világos, hogy $wrc(\iota_S)$ az S félcsoporth legszűkebb gyengén reduktív kongruenciája.

Tetszőleges S félcsoporth egy tetszőleges ϱ kongruenciája esetén tekintsük az S kongruenciáinak a következő sorozatát:

$$\begin{aligned} \varrho_{w^0} &= \varrho \\ \varrho_{w^1} &= (\varrho_{w^0})_w \\ &\vdots \\ \varrho_{w^{n+1}} &= (\varrho_{w^n})_w \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nyilvánvaló, az 1.2 Lemma (1)-es pontja és annak duálisa alapján, hogy

$$\varrho_{w^0} \subseteq \varrho_{w^1} \subseteq \cdots \subseteq \varrho_{w^n} \subseteq \cdots$$

2.2. Lemma. *Egy S félcsoporth egy tetszőleges ϱ kongruenciája esetén*

$$\varrho_{w^n} = \bigcap_{i=0}^n \varrho_{l^i, r^{n-i}}$$

Bizonyítás. A bizonyítást n szerinti indukcióval végezzük: $n = 0$ -ra az állítás evidens.

Az egyenlőség definíció szerint teljesül $n = 1$ -re. Tegyük fel, hogy érvényes valamely $n \geq 1$ esetén. Ekkor

$$\varrho_{w^{n+1}} = (\varrho_{w^n})_w = \left(\bigcap_{i=0}^n \varrho_{l^i, r^{n-i}} \right)_w$$

Az 2.1 Lemma szerint, ez tovább egyenlő azzal, hogy

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=0}^n (\varrho_{l^i, r^{n-i}})_w &= \bigcap_{i=0}^n ((\varrho_{l^i, r^{n-i}})_l \cap (\varrho_{l^i, r^{n-i}})_r) = \\ &= \left(\bigcap_{i=0}^n (\varrho_{l^i, r^{n-i}})_l \right) \cap \left(\bigcap_{i=0}^n (\varrho_{l^i, r^{n-i}})_r \right) = \left(\bigcap_{i=0}^n \varrho_{l^{i+1}, r^{n-i}} \right) \cap \left(\bigcap_{i=0}^n \varrho_{l^i, r^{n-i+1}} \right) = \\ &= (\varrho_{l^{n+1}, r^0}) \cap \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \varrho_{l^{i+1}, r^{n-i}} \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \varrho_{l^i, r^{n-i+1}} \right) \cap (\varrho_{l^0, r^{n+1}}) \\ &= (\varrho_{l^{n+1}, r^0}) \cap \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \varrho_{l^{i+1}, r^{n-i}} \right) \cap (\varrho_{l^0, r^{n+1}}) = \bigcap_{i=0}^{n+1} \varrho_{l^i, r^{n+1-i}}, \end{aligned}$$

mivel

$$\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \varrho_{l^{i+1}, r^{n-i}} \right) = \left(\bigcap_{i=1}^n \varrho_{l^i, r^{n-i+1}} \right).$$

□

2.3. Lemma. *Egy S félcsoporth bármely ϱ kongruenciájára, $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i} \subseteq \text{wrc}(\varrho)$. Az $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i} = \text{wrc}(\varrho)$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i}$ gyengén redukzív kongruenciája S -nek.*

Bizonyítás. Az állítást a 2.1 Lemma és a 2.1 Tétel ismételt alkalmazásával bizonyítjuk: $\varrho_{w^n} = (\varrho \cap \text{wrc}(\varrho))_{w^n} = \varrho_{w^n} \cap \text{wrc}(\varrho)$. Mivel $\varrho \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i}$ és a $\text{wrc}(\varrho)$ gyengén redukzív kongruenciája S -nek, így az $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i} \subseteq \text{wrc}(\varrho)$ tartalmazásból az következik, hogy $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i} = \text{wrc}(\varrho)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i}$ gyengén redukzív kongruenciája S -nek. □

2.2. Tétel. Legyen S egy félcsoporth és ϱ egy kongruencia S -en. Ha valamely nem-negatív egész n -re teljesül, hogy $\varrho_{w^n} = \varrho_{w^{n+1}}$, akkor $\varrho_{w^n} = \varrho_{w^{n+k}}$ teljesül minden pozitív egész k -ra és így $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i} = \varrho_{w^n}$. Továbbá ϱ_{w^m} ($m = 0, 1, \dots$) gyengén reduktív kongruenciája S -nek akkor és csak akkor, ha $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i} = \varrho_{w^m}$; ebben az esetben $\text{wrc}(\varrho) = \varrho_{w^m}$.

Bizonyítás. A bizonyítás az 1.2 Tétel bizonyításához hasonló módon történik. $\square$

2.3. Tétel. Legyen S egy félcsoporth, amire teljesül, hogy $S^n = S^{n+1}$, valamely nem-negatív egész n esetén. Ekkor az S minden ϱ kongruenciájára teljesül, hogy $\varrho_{w^n} = \varrho_{w^{n+1}}$ és így az is, hogy $\varrho_{w^n} = \text{wrc}(\varrho)$. Speciálisan, $(\iota_S)_{w^n}$ a legszűkebb gyengén reduktív kongruencia S -en.

Bizonyítás. A bizonyítás az 1.3 Tétel bizonyításához hasonló módon történik. $\square$

A fejezet további részében olyan ϱ kongruenciákat vizsgálunk S félcsoporthokon, amelyekre teljesül, hogy $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i}$ gyengén reduktív kongruenciája S -nek.

2.1. Korollárium. Egy S félcsoporth minden ϱ kongruenciájára teljesül, minden nem-negatív egész n -re, hogy $\varrho_{w^n}/\varrho = (\iota_{(S/\varrho)})_{w^n}$.

Továbbá,

$$\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i} \right) / \varrho = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_{(S/\varrho)})_{w^i}.$$

Bizonyítás. Az állítás első részét könnyű belátni az 1.6 Lemma és az 1.7 Lemma alapján.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy $(\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i})/\varrho = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_{(S/\varrho)})_{w^i}$, tekintsük $a, b \in S$ tetszőleges elemeket. Ekkor

$$([a]_{\varrho}, [b]_{\varrho}) \in \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i} \right) / \varrho$$

akkor és csak akkor, ha

$$(a, b) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i},$$

ami ekvivalens azzal, hogy valamely nem-negatív egész n -re,

$$(a, b) \in \varrho_{w^n},$$

azaz,

$$([a]_{\varrho}, [b]_{\varrho}) \in \varrho_{w^n}/\varrho = (\iota_{(S/\varrho)})_{w^n}.$$

Ez az utolsó feltétel ekvivalens azzal, hogy

$$([a]_{\varrho}, [b]_{\varrho}) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_{(S/\varrho)})_{w^i}.$$

Ebből az következik, hogy

$$\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i} \right) / \varrho = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_{(S/\varrho)})_{w^i}$$

teljesül S/ϱ -ban. □

2.4. Tétel. *Egy S félcsoporthnak egy ϱ kongruenciája esetén, $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{w^i}$ gyengén redukzív kongruenciája S -nek akkor és csak akkor, ha az $\bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_{(S/\varrho)})_{w^i}$ gyengén redukzív kongruenciája az S/ϱ faktor félcsoporthnak.*

Bizonyítás. Mint az 1.4 Tétel bizonyítása. □

A 2.4 Tétel miatt megtehetjük, hogy vizsgálatainkat az olyan S félcsoporthokra korlátozzuk, melyekben az $\bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_S)_{w^i}$ gyengén redukzív kongruenciája az S -nek. A 2.2 Tétel miatt $\bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_S)_{w^i} = (\iota_S)_{w^n}$ ($n = 0, 1, \dots$) akkor és csak akkor teljesül egy S félcsoporthban, ha az $(\iota_S)_{w^n}$ egy gyengén redukzív kongruencia S -en. A következőkben olyan S félcsoporthokat fogunk vizsgálni, melyekben $\bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_S)_{w^i} = (\iota_S)_{w^n} = \omega_S$ teljesül valamely n nem-negatív egészre. Világos, hogy ez ekvivalens azzal a feltétellel, hogy $(\iota_S)_{w^n} = \omega_S$. (Azaz, hogy S -en az egyetlen gyengén redukzív kongruencia az ω_S).

2.5. Tétel. *Az S félcsoporthban $(\iota_S)_{w^n} = \omega_S$ akkor és csak akkor teljesül valamely nem-negatív egész n -re, ha S egy nilpotens félcsoporth.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(\iota_S)_{w^n} = \omega_S$ teljesül valamely nem-negatív egész n -re. A 2.2 Lemma szerint $(\iota_S)_{w^n} \subseteq (\iota_S)_{l^n}$ és $(\iota_S)_{w^n} \subseteq (\iota_S)_{r^n}$. Így $(\iota_S)_{l^n} = \omega_S$ and $(\iota_S)_{r^n} = \omega_S$. Ekkor végigjárva az 1.5 Tétel bizonyítását és duálisát, azt kapjuk, hogy S^{2n} bal zéró félcsoporth és jobb zéró félcsoporth egyben. Ebből az következik, hogy $|S^{2n}| = 1$ azaz S egy nilpotens félcsoporth; az S nilpotenciájának foka kisebb vagy egyenlő $2n$.

A fordított irányhoz, tekintsünk egy S nilpotens félcsoporthot. Ez azt jelenti, hogy $S^n = \{0\}$ teljesül valamely nem-negatív egész n -re. Ekkor $S^i a S^{n-i} = \{0\} = S^i b S^{n-i}$ minden $a, b \in S$ -re és minden nem-negatív egész $i \leq n$ -re. Így azt kapjuk, hogy $(a, b) \in (\iota_S)_{l^i, r^{n-i}}$ teljesül minden nem-negatív egész $i \leq n$ -re. Ebből következik, hogy $(a, b) \in (\iota_S)_{w^n}$. Így $(\iota_S)_{w^n} = \omega_S$. □

A bizonyítás második felének lépéseit visszafelé alkalmazva megkaphatjuk az állítás első részének is egy bizonyítását. Megmutatható, hogy a feltételből az következik, hogy minden, az S elemeiből képzett, $n + 1$ hosszú szorzat egyenlő az S -nek egy egyértelműen meghatározott elemével, mivel a feltételt ismételten alkalmazva akárhányszor kicserélhetünk tetszőleges elemet a szorzatban tetszőleges másik elemre, úgy hogy a szorzat eredménye nem változik meg. Ezzel egy élesebb alsó korlátot kapunk S nilpotenciájának fokára, ami tehát kisebb vagy egyenlő $n + 1$.

Ez után kiterjesztjük a 2.5 Tételben kapott eredményt tetszőleges kongruenciákra egy félcsoporthoz. Pontosabban, leírjuk azokat a ϱ kongruenciákat az S félcsoporthoz, melyekre $\varrho_{w^n} = \omega_S$ teljesül valamely nem-negatív egész n -re.

2.6. Tétel. *Az S félcsoporthoz egy ϱ kongruenciájára akkor és csak akkor teljesül valamely nem-negatív egész n -re, hogy $\varrho_{w^n} = \omega_S$, ha S/ϱ egy nilpotens félcsoporthoz.*

Bizonyítás. Legyen ϱ egy tetszőleges kongruenciája az S félcsoporthoz. A 2.1 Korollárium első állítása szerint, $\varrho_{w^n} = \omega_S$ akkor és csak akkor teljesül az S -ben, valamely nem-negatív egész n -re, ha

$$(\iota_{(S/\varrho)})_{w^n} = \varrho_{w^n}/\varrho = (\omega_S)/\varrho = \omega_{(S/\varrho)}$$

az S/ϱ -ban. A 2.5 Tétel szerint, ez az egyenlőség ekvivalens azzal, hogy az S/ϱ faktor félcsoporthoz nilpotens. $\square$

2.2. Definíció. Egy S félcsoporthoz egy ϱ kongruenciáját az S maximális kongruenciájának nevezzük, ha $\varrho \neq \omega_S$ és ha az S valamely α kongruenciájára $\varrho \subseteq \alpha$ teljesül, abból az következik, hogy $\alpha = \varrho$ vagy $\alpha = \omega_S$.

2.7. Tétel. *Ha a ϱ egy maximális kongruenciája S -nek, akkor az S/ϱ faktorfélcsoporthoz vagy gyengén redukál, vagy S/ϱ egy zéró félcsoporthoz.*

Bizonyítás. Legyen ϱ egy maximális kongruenciája S -nek. Mivel

$$\varrho \subseteq \varrho_{w^1} \subseteq \omega_S$$

ezért vagy $\varrho_{w^1} = \varrho$ vagy $\varrho_{w^1} = \omega_S$ teljesül. Az első esetben, a 2.1 Tétel szerint, ϱ egy gyengén redukál kongruencia S -en, azaz az S/ϱ faktor félcsoporthoz gyengén redukál. Tegyük fel, hogy $\varrho_{w^1} = \omega_S$. Ekkor a 1.6 Lemma és az 1.7 Lemma szerint,

$$(\iota_{(S/\varrho)})_{w^1} = \varrho_{w^1}/\varrho = (\omega_S)/\varrho = \omega_{(S/\varrho)}$$

így az 2.5 Tétel bizonyításának első fele szerint, $|(S/\varrho)^2| = 1$, azaz pontosan egy eleme van, amit jelölhetünk 0-val, mivel így minden $a, b \in S/\varrho$ -ra teljesül, hogy $ab = 0$. Tehát S/ϱ egy zéró félcsoporthoz. $\square$

2.8. Tétel. *Legyen S egy olyan félcsoporth, amelyre igaz, hogy $S^n = S^{n+1}$ valamely n nem-negatív egészre. Ekkor az S tetszőleges ϱ kongruenciájára teljesül, hogy az S univerzális relációja az egyetlen bal redukzív kongruenciája S -nek, ami tartalmazza ϱ -t akkor és csak akkor, ha az S/ϱ faktor félcsoporth egy nilpotens félcsoporth és a nilpotenciájának fokja pontosan n .*

Bizonyítás. Legyen S egy olyan félcsoporth, amelyre igaz, hogy $S^n = S^{n+1}$ valamely n nem-negatív egészre. Legyen ϱ egy tetszőleges kongruenciája S -nek. A 2.3 Tétel szerint, $wrc(\varrho) = \varrho_{w^n}$. Így az univerzális reláció az egyetlen gyengén redukzív kongruenciája S -nek, ami tartalmazza ϱ -t akkor és csak akkor, ha $\varrho_{w^n} = \omega_S$.

Tegyük fel, hogy $\varrho_{w^n} = \omega_S$. Ekkor az 1.6 Lemma és az 1.7 Lemma szerint,

$$(\iota_{(S/\varrho)})_{w^n} = \omega_{(S/\varrho)}.$$

A 2.5 Tétel bizonyításának első fele szerint, $((S/\varrho)^n)^2 = \{0\}$ Mivel az $S^n = S^{n+1}$ feltevésből az következik, hogy $S^n = S^{2n}$, azt kapjuk, hogy

$$(S/\varrho)^n = (S/\varrho)^{2n} = \{0\}.$$

A fordított irány bizonyításához tegyük fel, hogy $(S/\varrho)^n = \{0\}$. Ekkor a 2.6 Tétel miatt

$$\varrho_{w^n} = \omega_S.$$

□

2.9. Tétel. *Legyen S egy olyan félcsoporth, amelyre igaz, hogy $S^n = S^{n+1}$ valamely n nem-negatív egészre. Ekkor az S univerzális relációja az egyetlen gyengén redukzív kongruenciája S -nek akkor és csak akkor, ha S -ben vagy egy 0 null elem és $S^n = \{0\}$ (azaz, ha S egy nilpotens félcsoporth és a nilpotenciájának fokja pontosan n).*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2.8 Tételt $\varrho = \iota_S$ -re. □

3. Reduktív kongruenciák félcsoporthokon

Ebben a részben az [1] eredményeit ismertetjük, redukzív kongruenciákról. Bevezetjük a következő jelölést:

az S félcsoporth egy ϱ kongruenciája esetén, legyen

$$\varrho_t := \{(a, b) \in S \times S \mid \forall x, y \in S : (xay \varrho xby)\},$$

azaz $\varrho_t = \varrho_{\iota, r}$. Könnyen belátható, hogy $(\cdot)t \in \text{End}(\mathcal{L}(S); \wedge)$ teljesül, a $t : \varrho \mapsto \varrho_t$ leképezésre.

3.1. Lemma. *Egy S félcsoporth egy tetszőleges ϱ kongruenciája esetén*

$$\varrho \subseteq (\varrho_l \cap \varrho_r) \subseteq \varrho_l, \varrho_r \subseteq (\varrho_l \cup \varrho_r) \subseteq (\varrho_l \cup \varrho_r)^T \subseteq \varrho_{l,r} = \varrho_t,$$

ahol $(\varrho_l \cup \varrho_r)^T$ a $(\varrho_l \cup \varrho_r)$ tranzitív lezártját jelöli.

Bizonyítás. Ezen tartalmazások nagyrésze vagy triviális, vagy már bemutattuk fentebb. Van közöttük egy, amit még nem vizsgáltunk: Egy S félcsoporth egy tetszőleges α kongruenciája esetén, α^T egy kongruenciája S -nek, továbbá tranzitív, tehát $\varrho_l \cup \varrho_r \subseteq (\varrho_l \cup \varrho_r)^T \subseteq \varrho_t$ teljesül, mivel $(\varrho_l \cup \varrho_r)^T$ minimális, így része minden olyan kongruenciának, ami tartalmazza $(\varrho_l \cup \varrho_r)$ -t. $\square$

3.1. Tétel. *Egy S félcsoporth egy ϱ kongruenciája pontosan akkor redukzív, ha $\varrho = \varrho_t$.*

Bizonyítás. Legyen ϱ egy olyan kongruenciája az S félcsoporthnak, amelyre $\varrho = \varrho_t$ teljesül. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $\forall x \in S$ -re: $(xa, xb) \in \varrho$. Ekkor $\forall y \in S$ -re: $((xa)y, (xb)y) \in \varrho$. Így:

$$(a, b) \in \varrho_t = \varrho$$

ami azt jelenti, hogy ϱ egy bal redukzív kongruenciája S -nek.

Ha azt tesszük fel, hogy $\forall y \in S$ -re: $(ay, by) \in \varrho$, hasonló lépések után arra jutunk, hogy ϱ egy jobb redukzív kongruenciája S -nek.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy ϱ egy redukzív kongruenciája S -nek. Mivel $\varrho \subseteq \varrho_t$, elég megmutatnunk, hogy $\varrho_t \subseteq \varrho$. Tegyük fel valamely $a, b \in S$ elemekre, hogy $(a, b) \in \varrho_t$. Ekkor minden $x, y \in S$ -re:

$$xay = (xa)y \varrho (xb)y = xby.$$

Mivel ϱ redukzív kongruenciája S -nek, ez azt jelenti, hogy

$$\forall x \in S : (xa, xb) \in \varrho.$$

Amiből azt kapjuk, hogy:

$$(a, b) \in \varrho.$$

Így $\varrho_t \subseteq \varrho$. $\square$

3.1. Korollárium. *Az S félcsoporth valamely ϱ_i redukzív kongruenciáinak nem-üres $\{\varrho_i : i \in I\}$ családjára mindig teljesül, hogy a $\bigcap_{i \in I} \varrho_i$ redukzív kongruenciája S -nek.*

Bizonyítás. Az állítás a redukтивitás definíciójából, vagy az 3.1 Tétel és az 1.3 Lemma és annak duálisa egyszerű következményeként könnyen belátható. $\square$

Mivel egy S félcsoporth univerzális relációja redukatív kongruenciája S -nek, ezért a 3.1 Korollárium következményeként adódik, hogy az S tetszőleges ϱ kongruenciájához létezik $rc(\varrho)$ redukatív lezártja a ϱ -nak (azaz az S -nek legszűkebb, ϱ -t tartalmazó redukatív kongruenciája). Világos, hogy $rc(\iota_S)$ az S félcsoporth legszűkebb redukatív kongruenciája.

Ahogy a korábbi részekben is, egy tetszőleges S félcsoporth tetszőleges ϱ kongruenciájából megkonstruálhatjuk az S kongruenciáinak alábbi sorozatát:

$$\begin{aligned}\varrho_{t^0} &= \varrho \\ \varrho_{t^1} &= (\varrho_{t^0})_t \\ &\vdots \\ \varrho_{t^{n+1}} &= (\varrho_{t^n})_t \\ &\vdots\end{aligned}$$

Természetesen itt is igaz, hogy

$$\varrho_{t^0} \subseteq \varrho_{t^1} \subseteq \dots \subseteq \varrho_{t^n} \subseteq \dots$$

3.2. Lemma. *Egy S félcsoporth bármely ϱ kongruenciájára, $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{t^i} \subseteq rc(\varrho)$. Az $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{t^i} = rc(\varrho)$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{t^i}$ redukatív kongruenciája S -nek.*

Bizonyítás. A bizonyítás könnyen megkonstruálható az 1.3 Lemma, annak duálisa és a 3.1 Tétel alapján. $\square$

Ebben a részében olyan ϱ kongruenciákat vizsgálunk S félcsoporthokon, amelyekre teljesül, hogy $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{t^i}$ redukatív kongruenciája S -nek.

3.2. Tétel. *Legyen S egy félcsoporth és ϱ egy kongruencia S -en. Ha valamely nem-negatív egész n -re teljesül, hogy $\varrho_{t^n} = \varrho_{t^{n+1}}$, akkor $\varrho_{t^n} = \varrho_{t^{n+k}}$ teljesül minden pozitív egész k -ra és így $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{t^i} = \varrho_{t^n}$. Továbbá ϱ_{t^m} ($m = 0, 1, \dots$) redukatív kongruenciája S -nek akkor és csak akkor, ha $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{t^i} = \varrho_{t^m}$; ebben az esetben $rc(\varrho) = \varrho_{t^m}$.*

Bizonyítás. A bizonyítás az 1.2 Tétel bizonyításához hasonló módon történik. $\square$

3.3. Tétel. Legyen S egy félcsoporth, amire teljesül, hogy $S^n = S^{n+1}$, valamely nem-negatív egész n esetén. Ekkor az S minden ϱ kongruenciájára teljesül, hogy $\varrho_{t^n} = \varrho_{t^{n+1}}$ és így az is, hogy $\varrho_{t^n} = rc(\varrho)$. Speciálisan, $(\iota_S)_{t^n}$ a legszűkebb redukzív kongruencia S -en.

Bizonyítás. Amint arra az 1.1 Megjegyzésben felhívtuk a figyelmet, $\varrho_{t^n} = S^n \varrho_{S^n}$. Ezt figyelembe véve az állítás nyilvánvaló. $\square$

3.1. Definíció. Egy S félcsoporthot globálisan idempotens félcsoporthnak nevezünk, ha $S^2 = S$.

3.2. Korollárium. Ha S egy globálisan idempotens félcsoporth, akkor az S minden ϱ kongruenciájára teljesül, hogy, $rc(\varrho) = \varrho_{t^1}$ [$lrc(\varrho) = \varrho_{l^1}$, $wrc(\varrho) = \varrho_{w^1}$]. Speciálisan, $(\iota_S)_{t^1}$ [$(\iota_S)_{l^1}$, $(\iota_S)_{w^1}$] az S legszűkebb redukzív [bal redukzív, gyengén redukzív] kongruenciája.

Bizonyítás. A 3.3 Tételből [1.3 Tételből, 2.3 Tételből] nyilvánvaló. $\square$

3.3. Korollárium. Ha S egy reguláris félcsoporth vagy egy egyszerű félcsoporth, akkor az S minden ϱ kongruenciájára teljesül, hogy, $rc(\varrho) = \varrho_{t^1}$ [$lrc(\varrho) = \varrho_{l^1}$, $wrc(\varrho) = \varrho_{w^1}$]. Speciálisan, $(\iota_S)_{t^1}$ [$(\iota_S)_{l^1}$, $(\iota_S)_{w^1}$] az S legszűkebb redukzív [bal redukzív, gyengén redukzív] kongruenciája.

Bizonyítás. Mivel $S = S^2$ teljesül minden reguláris és minden egyszerű S félcsoporthban, ezért az állításunk a 3.2 Korollárium egyszerű következménye. $\square$

3.4. Korollárium. Egy S félcsoporth minden ϱ kongruenciájára teljesül, minden nem-negatív egész n -re, hogy $\varrho_{t^n} / \varrho = (\iota_{(S/\varrho)})_{t^n}$.

Továbbá,

$$\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \varrho_{t^i} \right) / \varrho = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_{(S/\varrho)})_{t^i}.$$

Bizonyítás. Az állítás első része az 1.7 Lemma $i = j$ speciális esete, a további része pedig ebből nyilvánvalóan következik. $\square$

3.4. Tétel. Egy S félcsoporthnak egy ϱ kongruenciája esetén, $\cup_{i=0}^{\infty} \varrho_{t^i}$ redukzív kongruenciája S -nek akkor és csak akkor, ha az $\cup_{i=0}^{\infty} (\iota_{(S/\varrho)})_{t^i}$ redukzív kongruenciája az S/ϱ faktor félcsoporthnak.

Bizonyítás. Mint az 1.4 Tétel bizonyítása. $\square$

Az 3.2 Tétel miatt $\cup_{i=0}^{\infty} (\iota_S)_{t^i} = (\iota_S)_{t^n}$ ($n = 0, 1, \dots$) akkor és csak akkor teljesül egy S félcsoporthban, ha az $(\iota_S)_{t^n}$ egy redukzív kongruencia S -en. A következőkben olyan S félcsoporthokat fogunk vizsgálni, melyekben

$\bigcup_{i=0}^{\infty} (\iota_S)_{t^i} = (\iota_S)_{t^n} = \omega_S$ teljesül valamely n nem-negatív egészre. Világos, hogy ez ekvivalens azzal a feltétellel, hogy $(\iota_S)_{t^n} = \omega_S$. (Azaz, hogy S -en az egyetlen redukatív kongruencia az ω_S).

3.2. Definíció. Derékszögű kötegnek nevezünk egy S köteget, ha teljesül benne

$$xyz = xz, \text{ minden } x, y, z \in S \text{ -re.}$$

3.5. Tétel. Az S félcsoporthban teljesül $(\iota_S)_{t^n} = \omega_S$ valamely nem-negatív n egészre, akkor és csak akkor, ha S egy derékszögű kötegnek egy nilpotens félcsoporthtal vett ideálbővítése.

Bizonyítás. Legyen S olyan félcsoporth, amire teljesül $(\iota_S)_{t^n} = \omega_S$ valamely nem-negatív n egészre. Tegyük fel, hogy $n \geq 1$ (az $n = 0$ esetben $\iota_S = \omega_S$, így S a triviális félcsoporth). Tekintsük S^{2n+1} egy tetszőleges elemét! Írjuk fel ezt az elemet xay alakban, ahol $x, y \in S^n$ és $a \in S$. Ekkor a feltétel miatt minden $a, b \in S$ -re: $(a, b) \in \omega_S = (\iota_S)_{t^n}$, így azt kapjuk, hogy:

$$xay = xby \quad \forall b \in S.$$

Legyen $b = ayxa$. Ekkor

$$xay = x(ayxa)y = (xay)(xay) = (xay)^2.$$

Tehát az S^{2n+1} minden eleme idempotens eleme az S -nek. Így minden $x, y, z \in S^{2n+1}$ elemre, a feltételünk szerint $(z, xy) \in \omega_S = (\iota_S)_{t^n}$, így

$$xzy = x(xy)y = (xx)(yy) = xy.$$

Vagyis az S^{2n+1} egy derékszögű köteg. Mivel az S/S^{2n+1} Rees faktor félcsoporthja az S -nek egy nilpotens félcsoporth, így S az S^{2n+1} derékszögű kötegnek az S/S^{2n+1} nilpotens félcsoporthtal való ideálbővítése.

A fordított irány bizonyításához tegyük fel, hogy S egy derékszögű kötegnek egy nilpotens félcsoporthtal vett ideálbővítése. Ekkor S tartalmaz egy D ideált, ami egy derékszögű köteg úgy, hogy az S/D Rees faktor félcsoporth egy nilpotens félcsoporth. Legyen n az S/D nilpotenciájának foka. Ekkor

$$S^n \subseteq D.$$

Mivel $D \subseteq E(S) \subseteq S^n$, kapjuk, hogy

$$D = S^n.$$

Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Ekkor minden $x \in S^n = D$ -re,

$$xay = (xx)a(yy) = x(xay)y = xy = x(xby)y = (xx)b(yy) = xby$$

mivel $x, xay, xby, y \in D$ és D egy derékszögű köteg. Tehát $(a, b) \in (\iota_S)_{t^n}$ az 1.1 Megjegyzés szerint. Mivel a és b tetszőleges elemei voltak S -nek, azt kaptuk, hogy $\omega_S \subseteq (\iota_S)_{t^n}$ amiből következik, hogy $(\iota_S)_{t^n} = \omega_S$. $\square$

3.6. Tétel. *Legyen S egy olyan félcsoporthat, amelyre igaz, hogy $S^n = S^{n+1}$ valamely n nem-negatív egészre. Ekkor az S tetszőleges ϱ kongruenciájára teljesül, hogy az S univerzális relációja az egyetlen redukatív kongruenciája S -nek, ami tartalmazza ϱ -t akkor és csak akkor, ha az $(S/\varrho)^n$ egy derékszögű köteg (azaz az S/ϱ faktor félcsoporthat az $(S/\varrho)^n$ derékszögű kötegnek az $(S/\varrho)/(S/\varrho)^n$ nilpotens félcsoporthat való ideálbővítése).*

Bizonyítás. Az 2.8 Tétel bizonyításához hasonlóan. $\square$

3.7. Tétel. *Legyen S egy olyan félcsoporthat, amelyre igaz, hogy $S^n = S^{n+1}$ valamely n nem-negatív egészre. Ekkor az S univerzális relációja az egyetlen redukatív kongruenciája S -nek akkor és csak akkor, ha S^n egy derékszögű köteg (azaz, S előáll az S^n derékszögű kötegnek az S/S^n nilpotens félcsoporthat vett ideálbővítéseként).*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 3.6 Tételt $\varrho = \iota_S$ -re. $\square$

3.5. Korollárium. *Egy S globálisan idempotens félcsoporthatnak az S univerzális relációja az egyetlen redukatív [bal redukatív, gyengén redukatív] kongruenciája akkor és csak akkor, ha S egy derékszögű köteg [bal zéró félcsoporthat, null félcsoporthat].*

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvaló a 3.7 Tételből [1.8 Tételből, 2.9 Tételből]. $\square$

3.6. Korollárium. *Egy S reguláris félcsoporthatnak vagy egyszerű félcsoporthatnak az S univerzális relációja az egyetlen redukatív [bal redukatív, gyengén redukatív] kongruenciája akkor és csak akkor, ha S egy derékszögű köteg [bal zéró félcsoporthat, null félcsoporthat].*

Bizonyítás. Mivel minden reguláris és minden egyszerű S félcsoporthat globálisan idempotens, ezért az állításunk a 3.5 Korollárium egyszerű következménye. $\square$

Hivatkozások

- [1] Kiss, F.: *Reductive Closures of Congruences on Semigroups*. [kézirat], 2013.
- [2] Clifford, A.H., Preston, G.B.: *The Algebraic Theory of Semigroups, vol. I*. Am. Math. Soc., Providence, 1961
- [3] Clifford, A.H., Preston, G.B.: *The Algebraic Theory of Semigroups, vol. II*. Am. Math. Soc., Providence, 1967
- [4] Nagy, A: *Special Classes of Semigroups*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2001.
- [5] Nagy, A: *Left Reductive Congruences on Semigroups*, Semigroup Forum, 87 (2013), 129-148.
- [6] Petrich, M.: *Lectures in Semigroups*, Akademie, Berlin, 1977
- [7] Gécseg, F. and I. Péák, *Algebraic theory of automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972

Kiss Ferenc
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Pf. 91, 1251 Budapest
e-mail: kferenc@math.bme.hu