

**Csapdázott kölcsönható Bose-gázok kinetikus
energiaeloszlásának vizsgálata kvantum kvencs
során**

TDK DOLGOZAT

Lovas Izabella

KONZULENS:

DR. ZARÁND GERGELY

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Elméleti Fizika Tanszék

2013. november 12.

Tartalomjegyzék

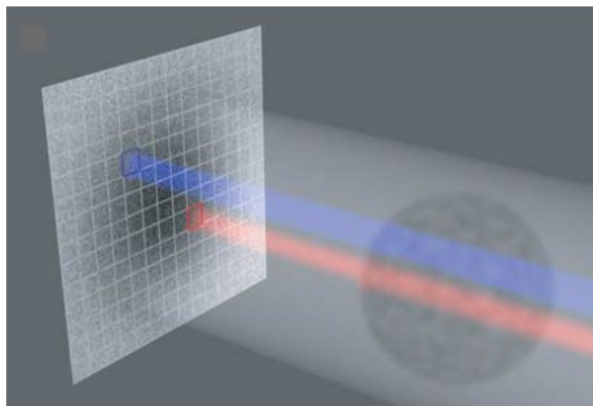
1. Bevezetés	2
2. A kölcsönható Bose-rendszer Hamilton-operátora	5
3. A kinetikus energia karakterisztikus függvénye	9
3.1. Homogén Bose-rendszer	9
3.2. Bose-rendszer harmonikus csapdában	16
4. Összefoglalás	24

1. fejezet

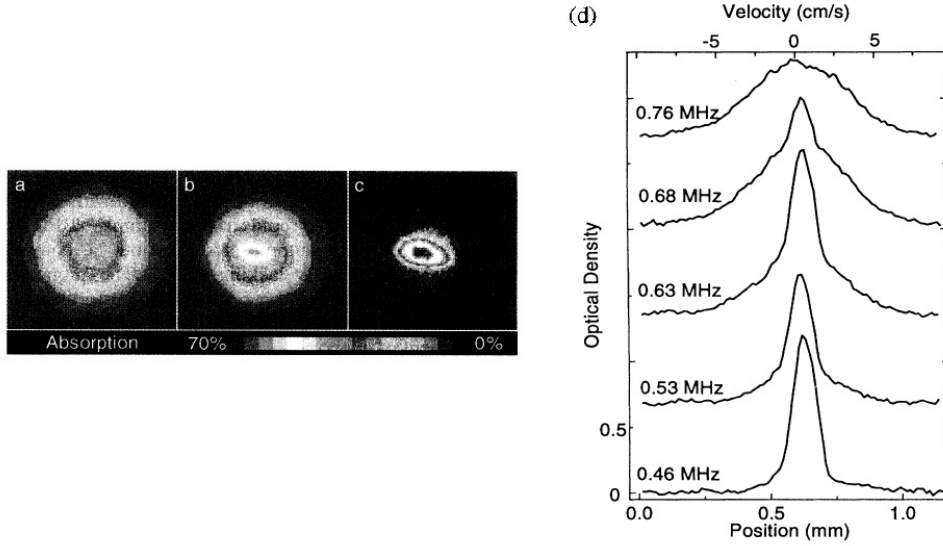
Bevezetés

A kölcsönható kvantumrendszerek hirtelen bekapcsolási jelenségek, ún. kvantum kvencsek során fellépő viselkedése az utóbbi időszak aktív kutatási területe. Mára lehetségessé vált, hogy ultrahideg atomi rendszerekben optikai rácsok segítségével erős periodikus potenciálokat hozzanak létre, továbbá külső mágneses terekkel a Feshbach-rezonancia felhasználásával az atomok közötti kölcsönhatás is hangolható. Ezek a paraméterek időben változtathatók, ami lehetővé teszi erősen kölcsönható rendszerek nem-egyensúlyi dinamikájának tanulmányozását.

Az atomokat összetartó csapdázó potenciál kikapcsolása után kitáguló atomfelhő sűrűségprofilja, illetve a mérhető térbeli korrelációs függvények alapján következtetni lehet a kiin-



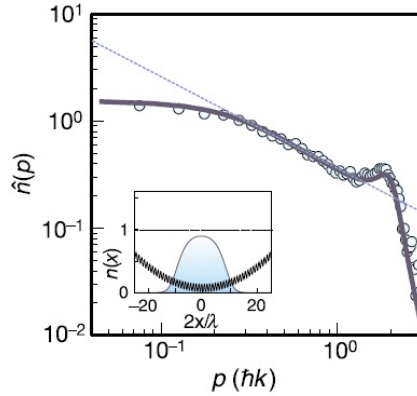
1.1. ábra. Az ún. repülési idő kísérletekben a csapdázott atomokat összetartó potenciált kikapcsolják, majd a rendszert t ideig hagyják szabadon tágulni. Ezután az atomfelhőt adott irányból megvilágítva a gáz abszorpciós képe CCD kamerával felvehető. A kamera minden pixele egy hasáb alakú térrészbe eső atomokat regisztrál, így egy kétdimenziós, a megvilágító nyaláb irányában integrált sűrűségprofil vehető fel, mely a kiindulási rendszer állapotáról ad információt. [2] alapján.



1.2. ábra. Bose-Einstein kondenzáció detektálása egy optikailag és mágnesesen csapdázott, gyengén kölcsönható bozonrendszerben. Az a.), b.) és c.) ábrákon a repülési idő kísérletekben felvett, különböző T hőmérsékletekhez tartozó abszorpciós képek láthatók. a.) A T_{BC} átalakulási hőmérséklet felett a sűrűségprofil forgásszimmetrikus. b.), c.) A $T < T_{BC}$ esetben egy T csökkenésével növekvő intenzitású elliptikus tartomány jelenik meg az abszorpciós kép közepén, mely a kondenzálódott atomoktól származik. d.) Az atomfelhő sűrűségprofilja az abszorpciós képek középpontján átmenő vonal mentén, illetve az ehhez tartozó sebességeloszlás. A feltüntetett frekvenciaértékek a rendszer hűtéséhez használt, a kialakuló hőmérsékletet meghatározó rádiófrekvenciák. A T_{BC} hőmérsékletre tartozó frekvencia felett a sebességeloszlás Gauss-függvénnyel írható le. Ennél alacsonyabb frekvenciák esetén a normál állapotú atomoktól származó széles háttér felett $v = 0$ körül egy keskeny, éles maximum jelenik meg a kondenzálódott atomok járuléka miatt. [5] alapján.

dulási rendszer állapotára [1, 2, 3, 4]. Ezekben az ún. repülési idő kísérletekben az atomokat adott t ideig hagyják szabadon szétrepülni, majd az 1.1 ábrán látható módon felveszik a gáz abszorpciós képét. Elegendően hosszú repülési idő esetén az eredeti csapdázott rendszer pontszerűnek tekinthető, így t idő után az $\mathbf{r}$ helyen található részecskék sebessége $\mathbf{v} \approx \mathbf{r}/t$. Az $\mathbf{r}$ helyen mért $n(\mathbf{r})$ részecskeszám ez alapján a $\mathbf{v}$ sebességgel kirepülő részecskék számát adja meg. Ezzel a módszerrel az eredeti rendszer ψ hullámfüggvényét momentumtérbe képezik le, az $n(\mathbf{r})$ részecskeszám, továbbá az $n(\mathbf{r})$ és $n(\mathbf{r}')$ közötti korrelációs függvények kifejezhetők ψ Fourier-transzformáltjával.

A fent leírt módszer alkalmas a Bose-Einstein kondenzátum kialakulásának detektálására egy mágneses és optikai csapdával összetartott, gyengén kölcsönható bozonrendszerben [5]. A T_{BC} kritikus hőmérséklet felett a kitáguló atomfelhő sűrűségprofilja, és ennek megfelelően a részecskék sebességeloszlása gömbszimmetrikus. A $T < T_{BC}$ hőmérséklettartományban a felvett abszorpciós képek közepén egy elliptikus, a hőmérséklet csökkenésével növekvő intenzitású tartomány látható, jelezve a kondenzátum kialakulását. Az atomok sebességeloszlása $T > T_{BC}$ esetén Gauss-függvénnyel írható le, $T < T_{BC}$ hőmérsékletekre viszont $\mathbf{v} = 0$ körül egy keskeny, éles maximum jelenik meg a normál állapotú atomokból származó széles háttéren (1.2 ábra).



1.3. ábra. A csapdázó potenciál kikapcsolása után az egydimenziós, erősen kölcsönható bozonrendszerből $p = \hbar k$ momentummal kirepülő részecskék átlagos száma p függvényében logaritmikus skálán. Az ábra lineáris szakasza alapján bizonyos momentumtartományban n_p hatványfüggvény viselkedést mutat. [6] alapján.

Repülési idő kísérletekkel az erősen kölcsönható bozonokból álló, egydimenziós ún. Tonks-Girardeau gáz momentumeloszlása is vizsgálható [6]. Ebben az esetben analitikus számítások szerint $T = 0$ hőmérsékleten, homogén rendszerben a k momentummal kilépő részecskék átlagos számára a hosszú hullámhosszú tartományban $\langle n_k \rangle \sim 1/k^{1/2}$ érvényes [7]. A modell kísérleti megvalósítása során az egydimenziós kvantum gáz létrehozásához optikai rácsot használnak, az $\langle n_k \rangle$ várható értéket pedig a repülési idő kísérletekben kapott abszorpciós képek alapján határozzák meg [6]. A mérési eredmények szerint bizonyos momentumtartományon $\langle n_k \rangle$ valóban hatványfüggvény szerint cseng le, a véges részecskeszám, a nem zérus hőmérséklet és a csapdázó potenciál miatt $1/2$ -nél nagyobb exponenssel (lásd 1.3 ábra).

Ahogy a fenti példák is mutatják, a csapdázott rendszerből a kvencs után $\mathbf{k}$ momentummal kilépő részecskék számának $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle$ várható értéke, illetve az $\langle n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} \rangle$ korrelációs függvények mérhetők, és értékük a kezdeti állapotra és annak korrelált struktúrájára jellemző. Elvileg az általánosabb $\langle n_{\mathbf{k}}^{m_1} n_{\mathbf{k}'}^{m_2} \rangle$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ függvények is vizsgálhatók kísérletileg, és információt szolgáltatnak a rendszer teljes sűrűségmátrixáról. Az $\{n_{\mathbf{k}}\}$ részecskeszámok teljes eloszlásfüggvénye alapján minden korrelációs függvény kiszámítható, így az eloszlás meghatározása fontos, mérésekkel összevethető eredményeket ad. Ezeket a számításokat tudomásunk szerint kölcsönható csapdázott rendszerekre még nem végezték el.

A dolgozat célja egy kölcsönható Bose-rendszerből a csapdázó potenciál kikapcsolása után különböző $\mathbf{k}$ momentummal kirepülő részecskék teljes eloszlásfüggvényének meghatározása. A 2. fejezetben először levezetjük a Bose-rendszert modellező, a Bose-Einstein kondenzátum körüli fluktuációkat kvadratikus rendig figyelembe vevő Hamilton-operátort. Ezután a 3. fejezetben részletesen megvizsgáljuk az $n_{\mathbf{k}}$ részecskeszám eloszlását előbb egy homogén, külső potenciál nélküli rendszerre, majd harmonikusan csapdázott bozonokra is (3.1, illetve 3.2 fejezet). A saját eredményeket a dolgozat 3. fejezete tartalmazza. Ebben megmutatjuk, hogy Bogoljubov-közelítésben homogén rendszerben $\mathbf{k}' \neq \pm \mathbf{k}$ esetén az $n_{\mathbf{k}}$ és $n_{\mathbf{k}'}$ részecskeszámok függetlenek, a $\mathbf{k}$ és $-\mathbf{k}$ módusok között viszont tökéletes a korreláció, azaz $n_{\mathbf{k}} = n_{-\mathbf{k}}$. Ezenfelül az $n_{\mathbf{k}}$ eloszlás leírható egy általánosított Gibbs-sokasággal, melynek paramétere egy k -függő T_k^{eff} effektív hőmérséklet. Harmonikusan csapdázott bozonok esetén megadunk egy formulát az $n_{\mathbf{k}}$ részecskeszám karakterisztikus függvényére.

2. fejezet

A kölcsönható Bose-rendszer Hamilton-operátora

A dolgozatban egy három dimenziós kölcsönható Bose-rendszer kvantum kvencs utáni kinetikus energia eloszlásával foglalkozunk. Ebben a fejezetben a számításokban használt kvadratikus Hamilton-operátort vezetjük le. Hideg atomi rendszerekben a λ_T termikus hullámhossz nagyon nagy, így a részecskék közötti tasztító kölcsönhatást egy $V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = g\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ Dirac-delta potenciállal írhatjuk le. Alacsony hőmérsékleten a rendszerben egy $\psi_0(\mathbf{x})$ hullámfüggvényű kvázi-kondenzátum jelenik meg, ennek alakja és gerjesztési spektruma a részecskék közötti kölcsönhatásról hordoz információt. A gerjesztések meghatározásához a fluktuációkat perturbatív módszerrel vesszük figyelembe, a $\psi_0(\mathbf{x})$ módus körül másodrendű sorfejtést végzünk, így egy kvadratikus Hamilton-operátorhoz jutunk.

A kölcsönható Bose-rendszer leírásánál egy klasszikus $\mathcal{L}(\mathbf{x}, t)$ Lagrange-sűrűségből indulunk ki. Az ebben szereplő $\psi(\mathbf{x}, t)$ és $\psi^*(\mathbf{x}, t)$ komplex tereket független változóknak tekintve kanonikus kvantálással kapjuk a $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ és $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)$ operátorok kommutációs relációját, továbbá levezetjük az érvényes mozgásegyenleteket. A kialakuló kondenzátum makroszkopikusan betöltött $\psi_0(\mathbf{x})$ hullámfüggvényét¹ és annak dinamikáját a Gross-Pitaevski egyenlet adja meg [8, 9]. A fluktuációkban másodrendig sorba fejtünk a $\psi_0(\mathbf{x})$ megoldás körül, így egy standard eljárással egzaktul diagonalizálható Bogoljubov-Hamilton-operátorhoz jutunk [10].

A vizsgált rendszert a következő klasszikus Lagrange-sűrűséggel modellezzük:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = & i\psi^*(\mathbf{x}, t)\partial_t\psi(\mathbf{x}, t) \\ & - \left(\frac{1}{2m} \nabla\psi^*(\mathbf{x}, t)\nabla\psi(\mathbf{x}, t) + (U(\mathbf{x}) - \mu)\psi^*(\mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}g(\psi^*(\mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t))^2 \right). \end{aligned}$$

Itt m az atomok tömege, $U(\mathbf{x})$ a külső csapdázó potenciál, μ pedig a kémiai potenciál. A vizsgált hideg atomi rendszerekben a teljes részecskeszám állandó, de a számításokat mikrokanonikus helyett nagykanonikus sokaságra fogjuk elvégezni. A μ kémiai potenciál megválasztása így a teljes részecskeszám várható értékét rögzíti. Az $(\mathbf{x}, t)$ -függés explicit jelölését a továbbiakban helyenként elhagyjuk.

A $\psi(\mathbf{x}, t)$ és $\psi^*(\mathbf{x}, t)$ komplex terekre vonatkozó mozgásegyenletek az alábbi Lagrange-

¹Nagykanonikus formalizmusban $\psi_0(\mathbf{x}) = \langle \hat{\psi}(\mathbf{x}) \rangle$.

egyenletekből adódnak:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} + \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} + \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi^*)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*}.\end{aligned}$$

Az eredmény a már említett Gross-Pitaevski egyenlet:

$$i\partial_t \psi = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi + (U - \mu)\psi + g|\psi|^2 \psi, \quad (2.1)$$

illetve ennek komplex konjugáltja.

A $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^*$ összefüggés alapján ψ kanonikus impulzusa $\pi_\psi = i\psi^*$, így a következő Hamilton-függvényt írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x (i\psi^* \partial_t \psi - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x \left(\frac{1}{2m} |\nabla \psi|^2 + (U - \mu)|\psi|^2 + \frac{1}{2} g |\psi|^4 \right).\end{aligned} \quad (2.2)$$

A vizsgált Bose-rendszer Hamilton-operátorát kanonikus kvantálással kapjuk az előző eredményből:

$$[i\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}), \hat{\psi}(\mathbf{x}')] = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

azaz

$$[\hat{\psi}(\mathbf{x}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}')] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.3)$$

Ekkor a (2.2) egyenletben a ψ és ψ^* függvényeket operátorokkal helyettesítve a (2.1) mozgásegyenlet a $\hat{\psi}$ operátorra is érvényes marad.

Elegendően alacsony hőmérsékleten nemkölsönható esetben a rendszer alapállapota makroszkopikusan betöltött. Kölsönható rendszerben szintén megjelenik egy nagy betöltöttségű φ_0 módus, az ehhez tartozó eltüntető operátor $\hat{a}_0$. Ekkor a $\hat{\psi}$ téroperátort a következő alakban írhatjuk fel:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \hat{a}_0 \varphi_0(\mathbf{x}) + \delta\hat{\psi}(\mathbf{x}),$$

ahol $\delta\hat{\psi}(\mathbf{x})$ a többi módus járulékát veszi figyelembe. A leválasztott módus nagy betöltöttsége miatt a felbontás első tagjára alkalmazhatjuk a következő közelítést:

$$\hat{a}_0 \varphi_0(\mathbf{x}) \approx \sqrt{N_0} \varphi_0(\mathbf{x}) = \psi_0(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

ahol $\psi_0(\mathbf{x})$ a kialakuló kondenzátum hullámfüggvénye, N_0 a kondenzátum részecskeszáma. A $\psi_0(\mathbf{x})$ függvényt meghatározó Gross-Pitaevski egyenletet a (2.2) Hamilton-operátor minimalizálásával kapjuk:

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi_0 + (U - \mu)\psi_0 + g|\psi_0|^2 \psi_0 = 0. \quad (2.5)$$

Ez megegyezik a klasszikus (2.1) egyenlettel a $\partial_t \psi_0 = 0$ feltétel mellett. A ψ_0 megoldás a fentiek szerint következő normálási feltételt teljesíti:

$$\int d^3x |\psi_0(\mathbf{x})|^2 = N_0.$$

A fluktuációk figyelembe vételéhez a téroperátort az imént látott alakban írjuk fel:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \psi_0(\mathbf{x}) + \delta\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$$

A (2.2) Hamilton-operátor sorfejtését $\delta\hat{\psi}^\dagger$ és $\delta\hat{\psi}$ szerint másodrendig elvégezve a lineáris tagok a (2.5) Gross-Pitaevski egyenlet miatt eltűnnek. A kapott Hamilton-operátor két részből áll, egy ψ_0 -tól függő konstans H_0 járulékból és egy $\delta\hat{\psi}$ fluktuációkban kvadratikus H_2 tagból:

$$H_0 = \int d^3x \left(\frac{1}{2m} |\nabla \psi_0|^2 + (U - \mu) |\psi_0|^2 + \frac{1}{2} g |\psi_0|^4 \right),$$

továbbá

$$H_2 = \int d^3x \left(\delta\hat{\psi}^\dagger \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + U - \mu \right) \delta\hat{\psi} + \frac{1}{2} g \left((\psi_0^*)^2 \delta\hat{\psi}^2 + \psi_0^2 (\delta\hat{\psi}^\dagger)^2 \right) + 2g |\psi_0|^2 \delta\hat{\psi}^\dagger \delta\hat{\psi} \right). \quad (2.6)$$

A $\delta\hat{\psi}$ és $\delta\hat{\psi}^\dagger$ operátorok mozgásegyenletei a $\partial_t \delta\hat{\psi} = i [H, \delta\hat{\psi}]$ egyenletből származtathatók:

$$i\partial_t \begin{pmatrix} \delta\hat{\psi} \\ \delta\hat{\psi}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2m} \nabla^2 + U - \mu + 2g |\psi_0|^2 & g \psi_0^2 \\ -g (\psi_0^*)^2 & -\left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + U - \mu + 2g |\psi_0|^2 \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\hat{\psi} \\ \delta\hat{\psi}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

A (2.7) egyenlet jobb oldalán az $\mathcal{L}_{GP}$ Bogoljubov-operátor jelent meg. Az $\mathcal{L}_{GP}$ nem hermitikus operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit felhasználva a H_2 Hamilton-operátor standard módszerrel diagonalizálható [11, 12]. A következőkben röviden összefoglaljuk a főbb lépéseket.

Legyen $(u_s(\mathbf{x}), v_s(\mathbf{x}))$ az $\mathcal{L}_{GP}$ operátor $\varepsilon_s \neq 0$ sajátértékhez tartozó sajátfüggvénye a következő normálással:

$$\int d^3x \left(|u_s(\mathbf{x})|^2 - |v_s(\mathbf{x})|^2 \right) = 1. \quad (2.8)$$

Látható, hogy ekkor $(v_s^*(\mathbf{x}), u_s^*(\mathbf{x}))$ is sajátfüggvény $-\varepsilon_s$ sajátértékkel. A (2.5) Gross-Pitaevski egyenlet alapján a $(\psi_0, -\psi_0^*)$ nullmódus szintén sajátfüggvény, a hozzá tartozó sajátérték 0. Ezek a vektorok a $(\partial_{N_0} \psi_0, \partial_{N_0} \psi_0^*)$ ún. anomáliás módussal kiegészítve teljes rendszert alkotnak, így a $\delta\hat{\psi}$ és $\delta\hat{\psi}^\dagger$ operátorok kifejezhetők a különböző módusok szerint:

$$\begin{pmatrix} \delta\hat{\psi} \\ \delta\hat{\psi}^\dagger \end{pmatrix} = -i\hat{Q} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ -\psi_0^* \end{pmatrix} + \hat{P} \begin{pmatrix} \partial_{N_0} \psi_0 \\ \partial_{N_0} \psi_0^* \end{pmatrix} + \sum_s \left[\hat{b}_s \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix} + \hat{b}_s^\dagger \begin{pmatrix} v_s^* \\ u_s^* \end{pmatrix} \right]. \quad (2.9)$$

Itt $\hat{Q}$ a fázist reprezentáló kollektív koordináta, a hozzá tartozó $\hat{P}$ konjugált momentum pedig a kondenzátum részecskeszámának fluktuációit írja le [12]. A $\hat{b}_s^\dagger$ és $\hat{b}_s$ operátorok bozonikus keltő és eltüntető operátorok, melyek felcserélhetők a $\hat{Q}$ és $\hat{P}$ operátorokkal. A $[\delta\hat{\psi}(\mathbf{x}), \delta\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}')] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ és $[\delta\hat{\psi}(\mathbf{x}), \delta\hat{\psi}(\mathbf{x}')] = 0$ felcserélési relációk alapján a következő kommutációs relációk teljesülnek:

$$[\hat{P}, \hat{Q}] = -i, \quad [\hat{b}_s, \hat{b}_{s'}^\dagger] = \delta_{ss'}.$$

A (2.6) Hamilton-operátort átírhatjuk a következő alakba:

$$H_2 =$$

$$\frac{1}{2} \int d^3x \begin{pmatrix} \delta\hat{\psi}^\dagger & \delta\hat{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2m} \nabla^2 + U - \mu + 2g |\psi_0|^2 & g \psi_0 \\ g \psi_0^* & -\frac{1}{2m} \nabla^2 + U - \mu + 2g |\psi_0|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\hat{\psi} \\ \delta\hat{\psi}^\dagger \end{pmatrix} + E_0,$$

ahol az E_0 konstans a $\delta\hat{\psi}$ és $\delta\hat{\psi}^\dagger$ operátorok felcserélési relációiból származik². A fent megadott (2.9) módusok szerinti kifejtést a H_2 Hamilton-operátorba behelyettesítve az alábbi eredményt kapjuk:

$$H_2 = \frac{1}{2\kappa} \hat{P}^2 + \sum_s \varepsilon_s \left(\hat{b}_s^\dagger \hat{b}_s + \frac{1}{2} \right) + E_0, \quad (2.10)$$

ahol $1/\kappa = d\mu/dN_0$, κ a kondenzátum kompresszibilitása. Az első tag a szabad $\hat{Q}$ fázis járulékát veszi figyelembe κ effektív tömeggel, H_2 fennmaradó része pedig független harmonikus oszcillátorok összegeként áll elő.

²Az E_0 konstansra végtelen adódik, de értéke nem befolyásolja a gerjesztési spektrumot.

3. fejezet

A kinetikus energia karakterisztikus függvénye

Az előző fejezetben levezettük a kölcsönható Bose-rendszert modellező diagonális (2.10) Hamilton-operátort. Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a kvencs után különböző $\mathbf{k}$ momentummal kilépő részecskék $n_{\mathbf{k}}$ számának eloszlását. Ehhez a H_{kin} kinetikus energia $G(u)$ karakterisztikus függvényét fogjuk tanulmányozni $T = 0$ hőmérsékleten:

$$G(u) = \langle 0 | e^{iuH_{\text{kin}}} | 0 \rangle, \quad (3.1)$$

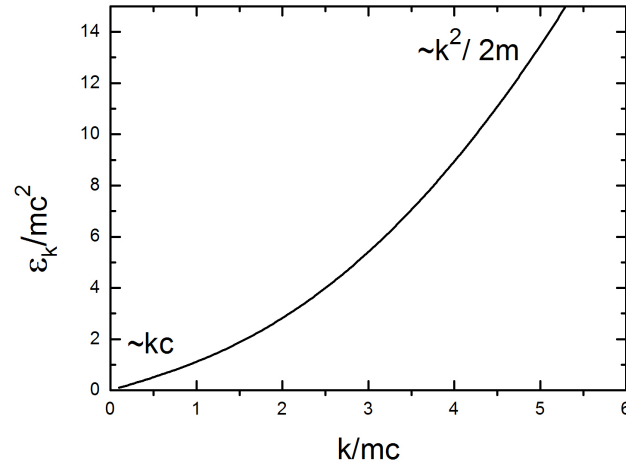
ahol $|0\rangle$ a (2.10) egyenletben szereplő H_2 Hamilton-operátorral leírt rendszer alapállapota. Két esetet vizsgálunk meg részletesebben: a homogén, külső csapdázó potenciál nélküli rendszert, illetve a harmonikus $U(\mathbf{x})$ potenciállal összetartott bozonokat.

3.1. Homogén Bose-rendszer

Az alábbiakban egy homogén, külső csapdázó potenciál nélküli rendszert vizsgálunk. Meghatározzuk a (2.7) egyenletben szereplő mátrix $(u_s(\mathbf{x}), v_s(\mathbf{x}))$ sajátfüggvényeit, majd a $\delta\hat{\psi}(\mathbf{x})$ és $\delta\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})$ operátorok (2.9) kifejtése alapján a kinetikus energiát a $\hat{b}_s$ és $\hat{b}_s^\dagger$ operátorokkal fejezzük ki. Mivel a (2.10) Hamilton-operátorral leírt rendszer alapállapotára $\hat{b}_s|0\rangle = 0$ teljesül $\forall s$ -re, ez lehetővé teszi a kinetikus energia karakterisztikus függvényének kiszámítását $T = 0$ hőmérsékleten. Ennek ismeretében megvizsgáljuk a kvencs után adott $\mathbf{k}$ hullámszámmal kilépő részecskék $n_{\mathbf{k}}$ számának eloszlását, illetve a különböző $n_{\mathbf{k}}, n_{\mathbf{k}'}$ értékek közötti korrelációkat. Ahogy a bevezetésben említettük, megmutatjuk, hogy $\mathbf{k}' \neq \pm\mathbf{k}$ momentumokra az $n_{\mathbf{k}}$ és $n_{\mathbf{k}'}$ részecskeszámok között nincs korreláció, a $\mathbf{k}$ és $-\mathbf{k}$ módusokra viszont $n_{\mathbf{k}} = n_{-\mathbf{k}}$ teljesül. Látni fogjuk, hogy az $n_{\mathbf{k}}$ eloszlás leírható egy általánosított Gibbs-sokasággal, melynek paramétere egy k -függő T_k^{eff} effektív hőmérséklet.

A továbbiakban feltesszük, hogy a rendszer x_i irányú kiterjedése L_i , térfogata $V = \prod_{i=1}^3 L_i$. A számolás során periodikus határfeltételekkel dolgozunk. A csapdázó potenciál $U(\mathbf{x}) = 0$, így homogén, $\rho_0 = |\psi_0|^2 = N_0/V$ sűrűségű kondenzátum alakul ki, a kémiai potenciál értéke pedig $\mu = g\rho_0$. A kapott eltolásinvariáns rendszerre a $\mathbf{k}$ hullámszámmal indexelt $(u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), v_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}))$ sajátfüggvények kereshetők a következő alakban:

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} u_{\mathbf{k}}, \quad v_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} v_{\mathbf{k}},$$



3.1. ábra. Homogén kölcsönható Bose-rendszer $\varepsilon_{\mathbf{k}}/mc^2$ átskálázott gerjesztési spektruma k/mc függvényében. Itt $k = |\mathbf{k}|$, c a hangsebesség. Tetszőlegesen kis taszító kölcsönhatás esetén $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ lineárisan indul, nagy k/mc értékekre pedig jó közelítéssel kvadratikussá válik.

ahol $u_{-\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})$, $v_{-\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})$, továbbá a periodikus határfeltételeket figyelembe véve $k_i = \frac{2\pi}{L_i}n_i$ és $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, 3$.

Az $(u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}})$ vektorok a következő sajátértékegyenletet teljesítik:

$$\begin{pmatrix} \frac{k^2}{2m} + g\rho_0 & g\rho_0 \\ -g\rho_0 & -\left(\frac{k^2}{2m} + g\rho_0\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \varepsilon_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

A megjelenő mátrix spektruma a korábbi megállapításokkal összhangban szimmetrikus, a pozitív sajátértékek:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{k^2}{2m} \left(\frac{k^2}{2m} + 2g\rho_0 \right)}, \quad k_i = \frac{2\pi}{L_i}n_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

A (3.3) egyenlet éppen a jól ismert Bogoljubov-spektrumot adja. Az $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ gerjesztési spektrum tehát tetszőleges $g > 0$ taszító kölcsönhatás esetén lineárisan indul:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} \approx k \sqrt{\frac{g\rho_0}{m}} = kc, \quad \text{ha } k \ll mc,$$

ahol $c = \sqrt{g\rho_0/m}$ a hangsebesség a rendszerben. A $k = |\mathbf{k}| \gg mc$ tartományban jó közelítéssel visszkapjuk a nemkölcsönható részecskék kvadratikus spektrumát. Az $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ értékek k -függését a 3.1 ábrán láthatjuk.

A (2.9) egyenlet most a következő alakba írható:

$$\begin{pmatrix} \delta\hat{\psi}(\mathbf{x}) \\ \delta\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = -i\hat{Q}\sqrt{\frac{N_0}{L}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{N_0L}}\hat{P} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\hat{b}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \begin{pmatrix} v_{\mathbf{k}}^* \\ u_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} \right].$$

Az $\int d^3x e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = V\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}',0}$ összefüggést felhasználva kifejezhetjük a kinetikus energiát a $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ és $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ operátorokkal:

$$\begin{aligned} H_{\text{kin}} &= -\frac{1}{2m} \int d^3x \delta\hat{\psi}^\dagger \nabla^2 \delta\hat{\psi} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{k^2}{2m} \left[(|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + u_{\mathbf{k}}^* v_{-\mathbf{k}}^* \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger + u_{-\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}} + |v_{\mathbf{k}}|^2 \right] V \end{aligned}$$

Itt $v_{-\mathbf{k}}^* = v_{\mathbf{k}}$ és $u_{-\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}^*$. A (2.8) normálási feltétel alapján a (3.2) sajátértékegyenlet megoldásait kereshetjük a következő valós alakban:

$$u_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \cosh \eta_{\mathbf{k}}, \quad v_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{\sqrt{V}} \sinh \eta_{\mathbf{k}}.$$

A (3.2) egyenletből $\eta_{\mathbf{k}}$ -ra a következő eredményt kapjuk:

$$\tanh(2\eta_{\mathbf{k}}) = \frac{g\rho_0}{k^2/2m + g\rho_0}. \quad (3.4)$$

A kinetikus energia operátor az $\eta_{\mathbf{k}}$ paraméterrel felírva:

$$H_{\text{kin}} = \sum'_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{k^2}{2m} \left[\cosh(2\eta_{\mathbf{k}}) (\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger) - \sinh(2\eta_{\mathbf{k}}) (\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}) - 1 \right], \quad (3.5)$$

ahol $\sum'$ azt jelöli, hogy az összegzést csak a $\mathbf{k}$ momentumok felére kell elvégezni. A zárójelben megjelenő tag a $\pm\mathbf{k}$ hullámszámmal kilépő részecskék száma:

$$\hat{N}_{\mathbf{k}} = \hat{n}_{\mathbf{k}} + \hat{n}_{-\mathbf{k}} = \cosh(2\eta_{\mathbf{k}}) (\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger) - \sinh(2\eta_{\mathbf{k}}) (\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}) - 1,$$

ahol

$$\hat{n}_{\mathbf{k}} = \cosh^2(\eta_{\mathbf{k}}) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \sinh^2(\eta_{\mathbf{k}}) \hat{b}_{-\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger - \frac{\sinh(2\eta_{\mathbf{k}})}{2} (\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}).$$

A kinetikus energiára kapott (3.5) alak már alkalmas arra, hogy kiszámítsuk a $G(u)$ karakterisztikus függvényt $T = 0$ hőmérsékleten:

$$G(u) = \langle 0 | e^{iuH_{\text{kin}}} | 0 \rangle, \quad \hat{b}_{\mathbf{k}} | 0 \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}.$$

A (3.5) egyenlet szerint a H_{kin} operátorban a $\mathbf{k}$ hullámszámú komponens csak $-\mathbf{k}$ -val van összecsatolva, így $\mathbf{k}' \neq \pm\mathbf{k}$ esetén a kvencs után $\mathbf{k}$ és $\mathbf{k}'$ hullámszámmal kilépő részecskék között nincs korreláció. Ezzel összhangban $G(u)$ a következő szorzat alakra bomlik:

$$G(u) = \prod'_{\mathbf{k} \neq 0} G^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(u),$$

ahol a szorzást csak a hullámszámok felére kell elvégezni, és $G^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(u)$ a $\pm\mathbf{k}$ komponensek járulékát veszi figyelembe.

A $G^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(u)$ karakterisztikus függvény kiszámításához a $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ operátorokban kvadratikus $\hat{N}_{\mathbf{k}}$ operátor $e^{\hat{N}_{\mathbf{k}} i u k^2 / 2m}$ exponenciális alakját kell normálrendezett formában felírni. Ehhez célszerű bevezetni a következő operátorokat [13]:

$$K_0(\mathbf{k}) = \frac{\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger}{2}, \quad K_-(\mathbf{k}) = \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}, \quad K_+(\mathbf{k}) = \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger.$$

A kommutációs relációk ellenőrzésével igazolható, hogy ezek az $SU(1, 1)$ Lie-algebra generátorai. Az ilyen operátorokra érvényes Baker-Campbell-Hausdorff reláció felhasználásával a normálrendezés elvégezhető, és a $\hat{b}_{\pm \mathbf{k}}|0\rangle = 0$ összefüggést felhasználva (3.5) alapján a következő eredményt kapjuk [13]:

$$G^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(u) = e^{-iuk^2/2m} \frac{1}{\cos\left(\frac{k^2}{2m}u\right) - i \cosh(2\eta_{\mathbf{k}}) \sin\left(\frac{k^2}{2m}u\right)}.$$

A kiszámított $G^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(u)$ függvény minden információt tartalmaz a $\pm \mathbf{k}$ hullámszámmal kilépő részecskék $n_{\mathbf{k}} + n_{-\mathbf{k}}$ számának eloszlásáról. A $\pm \mathbf{k}$ momentumokhoz tartozó $\hat{N}_{\mathbf{k}}k^2/2m$ kinetikus energia sűrűségfüggvénye $G^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(u)$ Fourier-transzformálásával határozható meg:

$$\begin{aligned} P^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-i u \varepsilon} G^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(u) \\ &= \frac{2}{1 + \cosh(2\eta_{\mathbf{k}})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cosh(2\eta_{\mathbf{k}}) - 1}{1 + \cosh(2\eta_{\mathbf{k}})} \right)^n \delta\left(\varepsilon - 2n \frac{k^2}{2m}\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

A teljes kinetikus energia $P(\varepsilon)$ sűrűségfüggvénye a különböző $\mathbf{k}$ -hoz tartozó, független $P^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(\varepsilon)$ eloszlások konvolúciójaként áll elő. A továbbiakban egyetlen $\mathbf{k}$ komponens $P^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(\varepsilon)$ eloszlásával foglalkozunk, illetve az $n_{\pm \mathbf{k}}$ részecskeszámok eloszlását és a közöttük levő korrelációt tanulmányozzuk.

Könnyen ellenőrizhető, hogy $P^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(\varepsilon)$ egy megfelelően normált sűrűségfüggvény:

$$\int_0^{\infty} d\varepsilon P^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(\varepsilon) = 1.$$

A (3.6) összefüggés szerint az $\varepsilon = (n_{\mathbf{k}} + n_{-\mathbf{k}})k^2/2m$ kinetikus energia egy geometriai eloszlású valószínűségi változó:

$$P^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - q_k)^n q_k \cdot \delta\left(\varepsilon - n \frac{k^2}{m}\right),$$

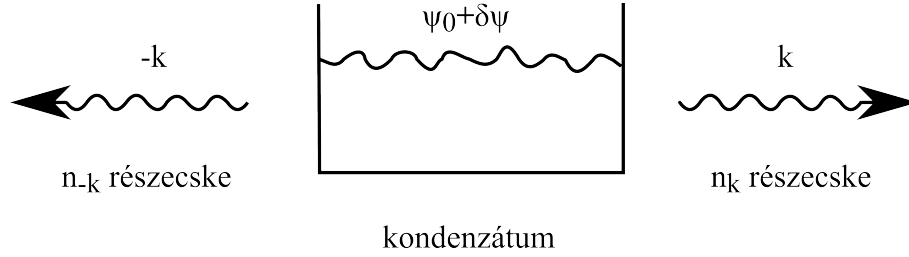
ahol az eloszlás csak $k = |\mathbf{k}|$ -től függő q_k paramétere a (3.4) egyenletet felhasználva

$$q_k = \frac{2}{1 + \cosh(2\eta_{\mathbf{k}})} = \frac{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}} + k^2/2m + g\rho_0}. \quad (3.7)$$

A $P^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(\varepsilon)$ sűrűségfüggvényben megjelenő szomszédos Dirac-delta csúcsok távolsága $2 \cdot k^2/2m$. Ennek oka, hogy a kvencs után kilépő $\mathbf{k}$ és $-\mathbf{k}$ hullámszámú részecskék száma teljesen korrelált, azaz $n_{\mathbf{k}} = n_{-\mathbf{k}}$, így $n_{\mathbf{k}} + n_{-\mathbf{k}}$ értéke csak kettesével változhat. Az $n_{\mathbf{k}} = n_{-\mathbf{k}}$ egyenlet az impulzummegmaradás, továbbá a kvázirészecskék közötti kölcsönhatás elhanyagolásának következménye, a $\mathbf{k}$ és $-\mathbf{k}$ momentummal kirepülő részecskék száma megegyezik (3.2 ábra).

A kapott eloszlás alapján megállapíthatjuk, hogy egy $\pm \mathbf{k}$ momentum pár kinetikus energiájának eloszlása termalizálódik a kvencs során az $n_{\mathbf{k}} = n_{-\mathbf{k}}$ feltétel mellett. A sűrűségfüggvény lecsengése alapján definiálhatjuk a β_k inverz hőmérsékletet:

$$(1 - q_k)^n = e^{-\beta_k \frac{k^2}{m} n}. \quad (3.8)$$



3.2. ábra. A homogén rendszerből a kvencs után $\mathbf{k}$ és $-\mathbf{k}$ momentummal kirepülő részecskék között tökéletes a korreláció, a részecskeszámokra $n_{\mathbf{k}} = n_{-\mathbf{k}}$ teljesül. A $\mathbf{k}' \neq \pm\mathbf{k}$ momentumú részecskékre $n_{\mathbf{k}'}$ és $n_{-\mathbf{k}'}$ függetlenek.

A részecskeszámok várható értékére ekkor a következő egyenlet írható fel:

$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \langle n_{-\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta_k k^2/2m} - 1} = \sinh^2(\eta_{\mathbf{k}}). \quad (3.9)$$

Figyelemre méltó, hogy a (3.9) összefüggésben egy részecske $k^2/2m$ kinetikus energiájának a kétszerese szerepel. Ez annak a következménye, hogy az $n_{\mathbf{k}} = n_{-\mathbf{k}}$ feltétel miatt a $\mathbf{k}$ és $-\mathbf{k}$ momentumú részecskék párokban keletkeznek.

Eredményeink szerint a (3.8) egyenletben definiált β_k inverz hőmérséklet felhasználásával a kitáguló atomfelhőt leírhatjuk egy ún. általánosított Gibbs-sokasággal. Statisztikus fizikai rendszerekben egyensúlyban a $\hat{\rho}$ sűrűségmátrix exponensében a különböző megmaradó mennyiségek (E energia, V térfogat, N részecskeszám) hozzájuk tartozó intenzív paraméterrel vett szorzata szerepel (ilyen konjugált paraméter a β inverz hőmérséklet, a p nyomás és a μ kémiai potenciál). Alacsony dimenziós rendszerek esetén a megmaradó mennyiségek száma jóval nagyobb lehet, ilyenkor mindegyikhez rendelhetünk egy-egy konjugált változót, így egy ún. általánosított Gibbs-sokasághoz jutunk [14]. A kvencs után $\mathbf{k}$ momentummal kirepülő részecskék $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ száma mozgásállandó, így a Gibbs-sokaság sűrűségmátrixa tartalmazza ezeket az operátorokat. Definiálhatunk egy $\hat{\rho}(\{\hat{n}_{\mathbf{k}}\})$ sűrűségoperátort, mellyel az összes, csak az $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ részecskeszámokat tartalmazó korrelációs függvény kiszámítható:

$$\hat{\rho}(\{n_{\mathbf{k}}\}) = \frac{1}{Z} \prod'_{\mathbf{k} \neq 0} e^{-\beta_k k^2/2m(\hat{n}_{\mathbf{k}} + \hat{n}_{-\mathbf{k}})} \delta_{\hat{n}_{\mathbf{k}}, \hat{n}_{-\mathbf{k}}}.$$

Itt Z a $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ feltételt biztosító normálási tényező. A megjelenő $\delta_{\hat{n}_{\mathbf{k}}, \hat{n}_{-\mathbf{k}}}$ faktor a $\mathbf{k}$ és $-\mathbf{k}$ módus közötti tökéletes korrelációból származik, az $n_{\mathbf{k}} = n_{-\mathbf{k}}$ feltételt biztosítja.

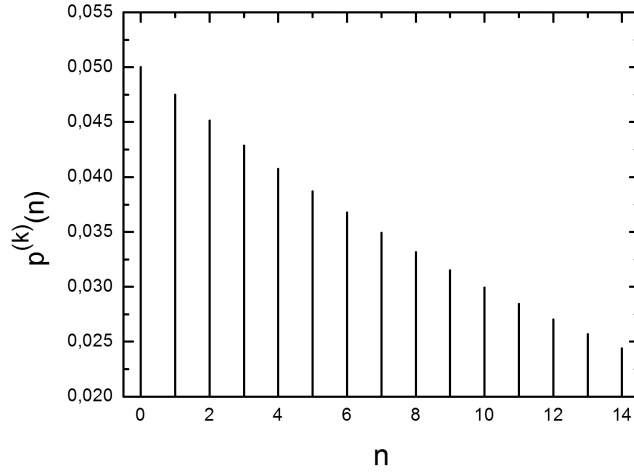
Ahogy a (3.3) egyenlet vizsgálatánál láttuk, az $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ spektrum a $g > 0$ kölcsönható esetben kis $k = |\mathbf{k}|$ értékeknél lineárisan indul, elegendően nagy k hullámszámokra viszont jó közelítéssel kvadrátikus. Az alábbiakban megvizsgáljuk az $n_{\mathbf{k}}$ átlagos kimenő részecskeszámot ebben a két határesetben.

A lineáris spektrum tartománya $k \ll mc$, ugyanis ekkor:

$$\frac{k^2}{2m} \ll 2g\rho_0 \Rightarrow \varepsilon_{\mathbf{k}} \approx k \sqrt{\frac{g\rho_0}{m}} = kc,$$

ahol c a hangsebesség a rendszerben. A $P^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(\varepsilon)$ geometriai eloszlás paramétere a (3.7) egyenlet alapján:

$$q_k \approx \frac{2k}{\sqrt{mg\rho_0}} = \frac{2k}{mc} \ll 1.$$



3.3. ábra. A kvencs után $\mathbf{k}$ momentummal kirepülő atomok $n_{\mathbf{k}}$ részecskeszámának sűrűségfüggvénye. A grafikonon $n_{\mathbf{k}} = n$ valószínűségét láthatjuk n függvényében a $k \ll mc$ momentumtartományban. A grafikonhoz használt paraméter: $2k/mc = 0.05$.

Ebben az esetben tehát egy kis paraméterű, lassan lecsengő sűrűségfüggvény adódik, melynek teljes súlya sok Dirac-delta csúcs között oszlik meg.

Amíg a $2nk/mc \ll 1$ feltétel teljesül, a $P^{(\mathbf{k}, -\mathbf{k})}(\varepsilon)$ függvény $\delta(\varepsilon - nk^2/m)$ csúcsának súlya, azaz $n_{\mathbf{k}} = n$ valószínűsége jó közelítéssel:

$$p^{(k)}(n) \approx q_k(1 - nq_k) = \frac{2k}{mc} \left(1 - 2n \frac{k}{mc}\right),$$

azaz a sűrűségfüggvény kezdeti lecsengése n -ben lineáris (lásd 3.3 ábra), továbbá az eloszlás jellemző szélessége $\sim mc/k$. A látott lassú lecsengés megfelel a várakozásnak, hiszen ebben a határesetben egy $\mathbf{k}$ momentumú részecskéhez kis $k^2/2m$ kinetikus energia tartozik. Így a kölcsönhatás szerepe jelentős, nagy súllyal kever a hullámfüggvénybe magas betöltöttségű bozon állapotokat, emiatt nagy $n_{\mathbf{k}}$ részecskeszámok is számottevő valószínűséggel fordulnak elő.

Most rátérünk a rövid hullámhosszú tartomány vizsgálatára:

$$\frac{k^2}{2m} \gg 2g\rho_0,$$

azaz $k \gg mc$. Ekkor $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ -ra a következő közelítést használhatjuk:

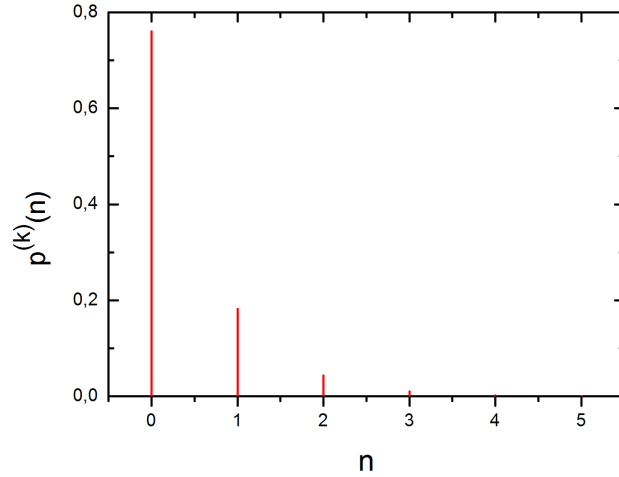
$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{k^2}{2m} \sqrt{1 + \frac{4mg\rho_0}{k^2}} \approx \frac{k^2}{2m} + g\rho_0 - \frac{k^2}{m} \left(\frac{mg\rho_0}{k^2}\right)^2.$$

Innen (3.7) alapján:

$$q_k \approx 1 - \left(\frac{mg\rho_0}{k^2}\right)^2 \Rightarrow q_k \approx 1.$$

Az eloszlás $\delta(\varepsilon - nk^2/m)$ csúcsának súlya, és így $n_{\mathbf{k}} = n$ valószínűsége most:

$$p^{(k)}(n) \approx \left(1 - \left(\frac{mc}{k}\right)^4\right) \left(\frac{mc}{k}\right)^{4n}, \quad \text{ahol } k \gg mc.$$



3.4. ábra. A *k*vencs után $\mathbf{k}$ momentummal kirepülő atomok $n_{\mathbf{k}}$ részecskeszámának sűrűségfüggvénye. A grafikonon $n_{\mathbf{k}} = n$ valószínűségét láthatjuk n függvényében az $(mc/k)^4 \ll 1$ momentum-tartományban. A grafikonhoz használt paraméter: $mc/k = 0.7$.

Ebben az esetben gyorsan lecsengő sűrűségfüggvényhez jutunk, csaknem az eloszlás teljes súlya az $n = 0$ Dirac-delta csúcsra koncentrálódik, ahogy a 3.4 ábrán látható. Ekkor egy $\pm \mathbf{k}$ momentumú részecskepárhoz nagy k^2/m kinetikus energia tartozik, melyhez viszonyítva a kölcsönhatás csak gyenge perturbáció, ezért $n_{\mathbf{k}}$ eloszlása keskeny.

A (3.9) és (3.4) egyenletek alapján megvizsgálhatjuk az $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle$ átlagos kimenő részecskeszám $k = |\mathbf{k}|$ -függését. Egyszerű átalakítások után a következőt kapjuk:

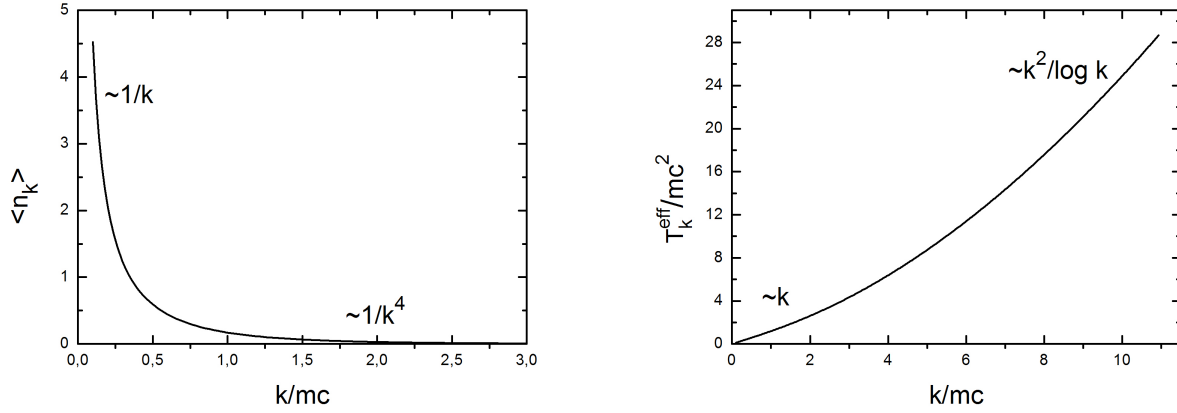
$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \left(\frac{2}{2 + (k/mc)^2} \right)^2 \right)^{-1/2} - 1 \right]. \quad (3.10)$$

Ez egy k szerint monoton csökkenő függvény, mely $k \ll mc$ momentumokra $1/k$ szerint divergál, a $k \gg mc$ határesetben pedig $1/k^4$ szerint cseng le (3.5 ábra). A számolást $d = 3$ dimenzióban végeztük el, de tetszőleges d dimenzióra megismételhetjük, és a (3.10) egyenlet érvényes marad. Míg $d > 1$ esetén a kirepülő bozonok száma, $\langle N \rangle = \int d^d k \langle n_{\mathbf{k}} \rangle$ véges, $d = 1$ dimenzióban az integrál divergens. Ennek az az oka, hogy 1 dimenzióban az átlagtér közelítés hibás eredményre vezet. Valójában ekkor a $\langle \psi^\dagger(x) \psi(0) \rangle$ korrelációs függvény hatványfüggvény lecsengést mutat, és ennek megfelelően asszimptotikusan $\langle n_k \rangle \sim 1/k^{1-\alpha}$, ahol $\alpha > 0$ egy kölcsönhatásfüggő exponens [15]. Pl. ahogy a bevezetésben láttuk, egy egydimenziós végtelenül erősen kölcsönható Tonks-Girardeau gázban $\langle n_k \rangle$ kis k értékekre $1/k^{1/2}$ hatványfüggvény szerint változik, azaz $\alpha = 1/2$.

Az $n_{\mathbf{k}}$ eloszlását megadó általánosított Gibbs-sokaság (3.8) egyenlettel definiált $T_k^{\text{eff}} = 1/\beta_k$ effektív hőmérséklet-paraméterét szintén a 3.5 ábrán láthatjuk k függvényében. A $k \rightarrow 0$ határesetben:

$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle \approx \frac{T_k^{\text{eff}}}{k^2/m}, \quad (3.11)$$

így $k \ll mc$ esetén $T_k^{\text{eff}} \sim k$. Mivel egy $\pm \mathbf{k}$ momentumú részecskepárhoz k^2/m kinetikus energia tartozik, a (3.11) egyenletet értelmezhetjük úgy, hogy a $\pm \mathbf{k}$ módusra T_k^{eff} energia jut,



3.5. ábra. A kvencs után $\mathbf{k}$ momentummal kilépő részecskék számának $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle$ várható értéke, továbbá a $\mathbf{k}$ módushoz tartozó, a rendszert leíró általánosított Gibbs-sokaság paramétereiként megjelenő $T_{\mathbf{k}}^{\text{eff}}$ effektív hőmérséklet k/mc függvényében.

ami valóban az itt szereplő $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle$ várható értéket adja. Nagy k értékekre az effektív hőmérséklet asszimptotikus viselkedése:

$$T_{\mathbf{k}}^{\text{eff}} \sim \frac{k^2}{\log k}.$$

A k momentummal $T_{\mathbf{k}}^{\text{eff}}$ is monoton nő, de kvadratikusanál lassabb ütemben, így az $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle$ átlagos részecskeszám $k \rightarrow \infty$ -re nullához tart.

3.2. Bose-rendszer harmonikus csapdában

Valódi mérésekben a rendszert felépítő atomokat valamilyen külső potenciállal csapdazzák, így az előző alfejezetben tárgyalt homogén kondenzátum nem megfelelő leírás. Az alábbiakban egy harmonikus potenciállal összetartott Bose-rendszert tanulmányozunk részletesebben. Ahogy a bevezetőben említettük a kvencs után $\mathbf{k}$ momentummal kirepülő részecskék $n_{\mathbf{k}}$ számának eloszlására kapott eredmény kísérletileg is vizsgálható lehet.

Figyelembe vesszük, hogy egy valódi mérés során a felbontás nem lehet tetszőlegesen nagy, így a mért $n_{\mathbf{k}}$ érték a $\mathbf{k}$ momentum körüli véges méretű impulzustartományba eső momentummal kilépő részecskék száma. Tekintsük a következő Δk^3 térfogatú momentumtérbeli tartományt:

$$V_{\mathbf{k}} = \{\mathbf{k}' : k_i < k'_i < k_i + \Delta k, i = 1, 2, 3\}. \quad (3.12)$$

A továbbiakban $n_{\mathbf{k}}$ a $V_{\mathbf{k}}$ -ba eső impulzusú részecskék számát jelöli. Erre a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\hat{n}_{\mathbf{k}} = \int_{\mathbf{k}' \in V_{\mathbf{k}}} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{a}(\mathbf{k}'), \quad (3.13)$$

ahol

$$\hat{a}(\mathbf{k}') = \int d^3 x e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \hat{\psi}(\mathbf{x})$$

a $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ téroperátor Fourier-transzformáltja. A kiszámítandó $T = 0$ hőmérséklethez tartozó karakterisztikus függvény:

$$G(u) = \langle 0 | e^{iu\hat{n}_{\mathbf{k}}} | 0 \rangle, \quad (3.14)$$

ahol $|0\rangle$ továbbra is a rendszer alapállapotát jelöli.

Az alábbiakban a téroperátor (2.9) kifejtése alapján kifejezzük a (3.14) karakterisztikus függvényt a kondenzátum $\psi_0(\mathbf{x})$ hullámfüggvényének, illetve az $\mathcal{L}_{GP}$ mátrix $(u_s(\mathbf{x}), v_s(\mathbf{x}))$ sajátfüggvényeinek Fourier-transzformáltjával. Ezután a $\psi_0(\mathbf{x})$ függvényre az ún. Thomas-Fermi közelítést alkalmazva közelítő formulát adunk az $\mathcal{L}_{GP}$ operátor sajátfüggvényeire [19]. Ezeket az eredményeket felhasználva a (3.14) karakterisztikus függvény kiszámítható.

A Fourier-transzformáltakra használjuk a következő jelöléseket:

$$\tilde{\psi}_0(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \psi_0(\mathbf{x}), \quad \tilde{u}_s(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} u_s(\mathbf{x}), \quad \tilde{v}_s(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} v_s(\mathbf{x}).$$

Ekkor a (2.9) egyenlet szerint:

$$\hat{a}(\mathbf{k}) = \tilde{\psi}_0(\mathbf{k})(1 - i\hat{Q}) + \partial_{N_0} \tilde{\psi}_0(\mathbf{k}) \hat{P} + \sum_s [\tilde{u}_s(\mathbf{k}) \hat{b}_s + \tilde{v}_s^*(-\mathbf{k}) \hat{b}_s^\dagger]. \quad (3.15)$$

A ψ_0 függvényt definiáló (2.4) egyenletből látható, hogy a $\hat{P}$ operátor együtthatójának nagyságrendje $1/\sqrt{N_0}$, ahol $N_0 \gg 1$ a kondenzátum részecskeszáma. Ezzel szemben a $\hat{Q}$ -ot szorozó tényező $\sqrt{N_0}$ -al arányos, a $\hat{b}_s$ operátorokat tartalmazó összeg pedig a módusok nagy száma miatt járul hozzá jelentősen az $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ részecskeszám momentumaihoz. A $\hat{P}|0\rangle = 0$ összefüggés alapján megmutatható, hogy a $\hat{P}$ operátort tartalmazó tag eltűnik az $\langle \hat{n}_{\mathbf{k}} \rangle$ várható érték kiszámítása során, és az is ellenőrizhető, hogy a részecskeszám első néhány momentumához $\hat{P}$ valóban kis járulékot ad. Az előbbi érvelés szerint a $\partial_{N_0} \tilde{\psi}_0(\mathbf{k}) \hat{P}$ tag a karakterisztikus függvény kiszámításánál elhanyagolható.

Láttuk, hogy $\hat{Q}$ a rendszer kollektív fázisfluktuációt írja le [12]. Ez alapján a (3.15) egyenlet jobboldalának első tagja a $\tilde{\psi}_0(\mathbf{k})e^{-i\hat{Q}}$ operátor elsőrendű sorfejtéséből keletkezett. A további számolások során ezt az exponenciális alakot kell használni, mivel az $e^{-i\hat{Q}} \approx 1 - i\hat{Q}$ közelítésben a szabad $\hat{Q}$ fázis divergens járulékokat adna az $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ részecskeszám momentumaihoz.

A fentiek szerint a téroperátor Fourier-transzformáltjára a következő formula írható fel:

$$\hat{a}(\mathbf{k}) \approx \tilde{\psi}_0(\mathbf{k})e^{-i\hat{Q}} + \sum_s [\tilde{u}_s(\mathbf{k}) \hat{b}_s + \tilde{v}_s^*(-\mathbf{k}) \hat{b}_s^\dagger].$$

A (3.13) egyenletbe behelyettesítve megkapjuk az $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ operátort:

$$\begin{aligned} \hat{n}_{\mathbf{k}} = & \sum_{s,s'} \left[\left(\xi_{\mathbf{k}}^{(1)} \right)_{ss'} \hat{b}_s \hat{b}_{s'} + \left(\xi_{\mathbf{k}}^{(1)} \right)_{ss'}^* \hat{b}_s^\dagger \hat{b}_{s'}^\dagger + \left(\xi_{\mathbf{k}}^{(2)} \right)_{ss'} \left(\hat{b}_s \hat{b}_{s'}^\dagger + \hat{b}_{s'}^\dagger \hat{b}_s \right) \right] \\ & + 2 \sum_s \left[\left(\left(\chi_{\mathbf{k}}^{(1)} \right)_s e^{i\hat{Q}} + \left(\chi_{\mathbf{k}}^{(2)} \right)_s^* e^{-i\hat{Q}} \right) \hat{b}_s + \left(\left(\chi_{\mathbf{k}}^{(1)} \right)_s^* e^{-i\hat{Q}} + \left(\chi_{\mathbf{k}}^{(2)} \right)_s e^{i\hat{Q}} \right) \hat{b}_s^\dagger \right] + \sigma_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

A (3.16) egyenletben szereplő együtthatókat az alábbi formában fejezhetjük ki a $\tilde{\psi}_0$, $\tilde{u}_s$ és $\tilde{v}_s$

függvényekkel:

$$\begin{aligned}
(\xi_{\mathbf{k}}^{(1)})_{ss'} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}' \in V_{\mathbf{k}}} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} (\tilde{u}_s(\mathbf{k}') \tilde{v}_{s'}(-\mathbf{k}') + \tilde{u}_{s'}(\mathbf{k}') \tilde{v}_s(-\mathbf{k}')) , \\
(\xi_{\mathbf{k}}^{(2)})_{ss'} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}' \in V_{\mathbf{k}}} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} (\tilde{u}_s(\mathbf{k}') \tilde{u}_{s'}^*(\mathbf{k}') + \tilde{v}_s(-\mathbf{k}') \tilde{v}_{s'}^*(-\mathbf{k}')) , \\
(\chi_{\mathbf{k}}^{(1)})_s &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}' \in V_{\mathbf{k}}} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}_0^*(\mathbf{k}') \tilde{u}_s(\mathbf{k}'), \\
(\chi_{\mathbf{k}}^{(2)})_s &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}' \in V_{\mathbf{k}}} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}_0^*(\mathbf{k}') \tilde{v}_s^*(-\mathbf{k}'), \\
\sigma_{\mathbf{k}} &= \int_{\mathbf{k}' \in V_{\mathbf{k}}} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \left(|\tilde{\psi}_0(\mathbf{k}')|^2 - \frac{1}{2} \sum_s \left[|\tilde{u}_s(\mathbf{k}')|^2 - |\tilde{v}_s(-\mathbf{k}')|^2 \right] \right). \quad (3.17)
\end{aligned}$$

A kapott eredmények egyszerűbb alakra hozásához vezessük be a következő jelöléseket:

$$\hat{B} \equiv \left(\{\hat{b}_s\}; \{\hat{b}_s^\dagger\} \right)^T$$

a keltő- és eltüntető operátorokat tartalmazó oszlopvektor,

$$\xi_{\mathbf{k}} \equiv \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{k}}^{(1)} & \xi_{\mathbf{k}}^{(2)} \\ (\xi_{\mathbf{k}}^{(2)})^T & (\xi_{\mathbf{k}}^{(1)})^* \end{pmatrix}, \quad \chi_{\mathbf{k}} \equiv \begin{pmatrix} \chi_{\mathbf{k}}^{(1)} \\ \chi_{\mathbf{k}}^{(2)} \end{pmatrix}$$

a (3.17) egyenletben megadott paraméterekkel felírt mátrix és oszlopvektor, továbbá

$$i\Sigma^y \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{illetve } \Sigma^x \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$\xi_{\mathbf{k}}$ -val megegyező dimenziójú mátrixok, ahol I az egységmátrix és $(\Sigma^y)_{jj'} = -i [\hat{B}_j, \hat{B}_{j'}]$. Ezeket a (3.16) összefüggésbe behelyettesítve az $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ operátort az alábbi formába írhatjuk:

$$\hat{n}_{\mathbf{k}} = \hat{B}^T \xi_{\mathbf{k}} \hat{B} + 2e^{i\hat{Q}} \chi_{\mathbf{k}}^T \hat{B} + 2e^{-i\hat{Q}} (\chi_{\mathbf{k}}^*)^T \Sigma^x \hat{B} + \sigma_{\mathbf{k}}.$$

A (3.14) karakterisztikus függvény kiszámításához az $e^{iu\hat{n}_{\mathbf{k}}}$ operátort normálrendezett alakra kell hozni. Mivel $\hat{Q}$ kommutál $\hat{B}$ minden elemével, a számolás során skalárként kezelhető. Igazolható az alábbi összefüggés [16, 17]:

$$\begin{aligned}
e^{iu\hat{n}_{\mathbf{k}}} &= e^{iu\sigma_{\mathbf{k}}} \det \left(\frac{\sinh(\Sigma^y \xi_{\mathbf{k}} u)}{\Sigma^y \xi_{\mathbf{k}} u} \right)^{-1/2} \sqrt{\det T_{\mathbf{k}}(u)} \\
&\cdot \exp \left(iu \left(e^{i\hat{Q}} \chi_{\mathbf{k}} + e^{-i\hat{Q}} \Sigma^x \chi_{\mathbf{k}}^* \right)^T (T_{\mathbf{k}}(u) - I) \xi_{\mathbf{k}}^{-1} \left(e^{i\hat{Q}} \chi_{\mathbf{k}} + e^{-i\hat{Q}} \Sigma^x \chi_{\mathbf{k}}^* \right) \right) \\
&\cdot \left\{ \exp \left(iu \hat{B}^T \xi_{\mathbf{k}} T_{\mathbf{k}}(u) \hat{B} + 2iu \left(e^{i\hat{Q}} \chi_{\mathbf{k}} + e^{-i\hat{Q}} \Sigma^x \chi_{\mathbf{k}}^* \right)^T T_{\mathbf{k}}(u) \hat{B} \right) \right\}_N,
\end{aligned}$$

ahol

$$T_{\mathbf{k}}(u) = \frac{\sinh(\Sigma^y \xi_{\mathbf{k}} u)}{\Sigma^y \xi_{\mathbf{k}} u} (\cosh(\Sigma^y \xi_{\mathbf{k}} u) - i \Sigma^x \Sigma^y \sinh(\Sigma^y \xi_{\mathbf{k}} u))^{-1},$$

$\{ \}_N$ pedig a normálrendezést jelöli. Mivel a rendszer alapállapotára $\hat{b}_s|0\rangle = 0$ teljesül, a $T = 0$ hőmérséklethez tartozó karakterisztikus függvényben a normálrendezett exponenciális függvény várható értéke 1. Így a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} G(u) = & e^{iu\sigma_{\mathbf{k}}} \det \left(\frac{\sinh(\Sigma^y \xi_{\mathbf{k}} u)}{\Sigma^y \xi_{\mathbf{k}} u} \right)^{-1/2} \sqrt{\det T_{\mathbf{k}}(u)} \\ & \cdot \exp \left(iu \left[\chi_{\mathbf{k}}^T (T_{\mathbf{k}}(u) - I) \xi_{\mathbf{k}}^{-1} \Sigma^x \chi_{\mathbf{k}}^* + (\chi_{\mathbf{k}}^*)^T \Sigma^x (T_{\mathbf{k}}(u) - I) \xi_{\mathbf{k}}^{-1} \chi_{\mathbf{k}} \right] \right) \\ & \cdot \langle 0 | \exp \left(iu \left[e^{2i\hat{Q}} \chi_{\mathbf{k}}^T (T_{\mathbf{k}}(u) - I) \xi_{\mathbf{k}}^{-1} \chi_{\mathbf{k}} + e^{-2i\hat{Q}} (\chi_{\mathbf{k}}^*)^T \Sigma^x (T_{\mathbf{k}}(u) - I) \xi_{\mathbf{k}}^{-1} \Sigma^x \chi_{\mathbf{k}}^* \right] \right) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A (3.18) formulában már csak a $\hat{Q}$ operátor várható értéke szerepel, minden más tag skalármenyiség. Kihaszználhatjuk, hogy a $\hat{Q}$ szabad fázisra:

$$\langle 0 | e^{-ij\hat{Q}} | 0 \rangle = 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Ez alapján a (3.18) karakterisztikus függvényre az alábbi eredmény adódik:

$$\begin{aligned} G(u) = & e^{iu\sigma_{\mathbf{k}}} \det \left(\frac{\sinh(\Sigma^y \xi_{\mathbf{k}} u)}{\Sigma^y \xi_{\mathbf{k}} u} \right)^{-1/2} \sqrt{\det T_{\mathbf{k}}(u)} \\ & \cdot \exp \left(iu \left[\chi_{\mathbf{k}}^T (T_{\mathbf{k}}(u) - I) \xi_{\mathbf{k}}^{-1} \Sigma^x \chi_{\mathbf{k}}^* + (\chi_{\mathbf{k}}^*)^T \Sigma^x (T_{\mathbf{k}}(u) - I) \xi_{\mathbf{k}}^{-1} \chi_{\mathbf{k}} \right] \right) \\ & \cdot I_0 \left(2iu \sqrt{\left(\chi_{\mathbf{k}}^T (T_{\mathbf{k}}(u) - I) \xi_{\mathbf{k}}^{-1} \chi_{\mathbf{k}} \right) \left((\chi_{\mathbf{k}}^*)^T \Sigma^x (T_{\mathbf{k}}(u) - I) \xi_{\mathbf{k}}^{-1} \Sigma^x \chi_{\mathbf{k}}^* \right)} \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

ahol I_0 a nulladrendű módosított Bessel-függvény.

A (3.19) egyenlettel megadott karakterisztikus függvény minden információt tartalmaz az $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ részecskeszám eloszlásáról. A $G(u)$ -ra kapott formulát u szerint sorbafejtve megkapjuk az eloszlás momentumait:

$$G(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iu)^j}{j!} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}}^j \rangle.$$

Hasonlóan az $\ln G(u)$ függvény Taylor-sora a részecskeszám kumulánsait adja meg:

$$\ln G(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(iu)^j}{j!} \kappa_j,$$

ahol κ_j a j -edik kumuláns. A kumulánsok az eloszlás momentumaival is kifejezhetők, speciálisan κ_1 a várható értékkel, κ_2 pedig a szórásnégyzettel egyezik meg.

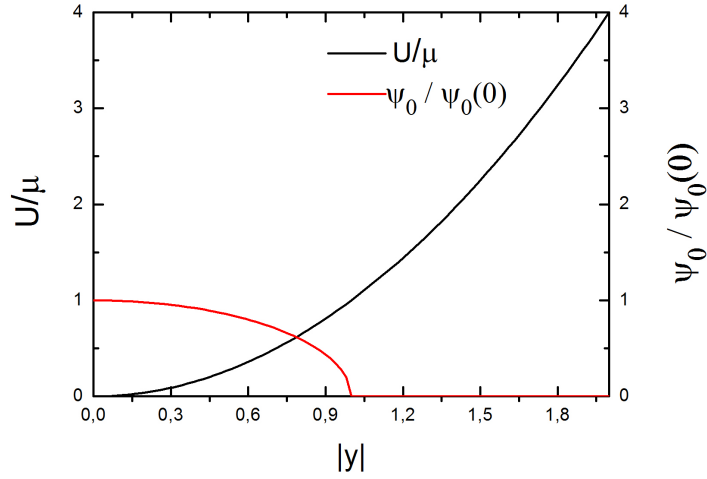
A (3.19) általános esetben érvényes formula levezetése után most visszatérünk a harmonikus csapdázott rendszerre vonatkozó számításokhoz. Ahogy már említettük, a kondenzátum hullámfüggvényére a Thomas-Fermi közelítést alkalmazva közelítő formulát adunk az $\mathcal{L}_{GP}$ Bogoljubov-operátor sajátfüggvényeire. Ekkor a (3.17) és (3.19) egyenletek alapján a karakterisztikus függvény meghatározható.

Gömbsszimmetrikus harmonikus csapda esetén a csapdázó potenciál:

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{x}^2, \quad (3.20)$$

ahol az ω körfrekvencia tipikus értéke ~ 30 Hz [18]. A Thomas-Fermi közelítés akkor érvényes, ha teljesül a következő feltétel [19]:

$$\zeta = \frac{\omega}{2\mu} \ll 1, \quad (3.21)$$



3.6. ábra. A rendszer csapdázására használt U/μ átskálázott harmonikus potenciál, illetve a kondenzátum hullámfüggvényére Thomas-Fermi közelítéssel kapott ψ_0 függvény a $\psi_0(0)$ maximális értékkel normálva az $|\mathbf{y}|$ radiális koordináta függvényében. A külső harmonikus csapda, illetve a $\rho_0 = |\psi_0|^2$ sűrűségű kondenzátummal való kölcsönhatás együtt alakítja ki az effektív potenciált, amiben a részecskék mozognak.

azaz a μ kémiai potenciál sokkal nagyobb az oszcillátornívók távolságánál, így ezek az energiaszintek kvázi-kontinuumot alkotnak. Látni fogjuk, hogy ekkor a (2.5) Gross-Pitaevski egyenletben a kinetikus energia tag elhanyagolható, és a ψ_0 hullámfüggvényre alkalmazható a lokális sűrűség közelítés. Hasonlóan az $(u_s(\mathbf{x}), v_s(\mathbf{x}))$ sajátfüggvényekre vonatkozó differenciálegyenleteket is egyszerűsíthetjük majd.

Vezessük be az alábbi dimenziótlan paramétereket:

$$E_s \equiv \frac{\varepsilon_s}{\omega}, \quad l_c \equiv \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}}, \quad y_i \equiv \frac{x_i}{l_c},$$

ahol l_c a kondenzátum tipikus kiterjedése. A Gross-Pitaevski egyenlet az új változókban a következő alakba írható:

$$\left(-\zeta^2 \nabla^2 + \mathbf{y}^2 - 1 + \frac{g|\psi_0|^2}{\mu} \right) \psi_0 = 0.$$

A $\zeta \ll 1$ feltétel szerint a kinetikus energia járuléka elhanyagolható, így a következő közelítő megoldást kapjuk:

$$\psi_0(\mathbf{y}) \approx \sqrt{\frac{\mu}{g}} (1 - \mathbf{y}^2), \quad |\mathbf{y}| \leq 1, \quad (3.22)$$

az $|\mathbf{y}| \leq 1$ tartományon kívül pedig $\psi_0(\mathbf{y}) \approx 0$. A ψ_0 hullámfüggvényre kapott (3.22) Thomas-Fermi-közelítés és a (3.20) csapdázó potenciál a 3.6 ábrán látható az $|\mathbf{y}|$ radiális koordináta függvényében.

Az $(u_s(\mathbf{x}), v_s(\mathbf{x}))$ függvényeket meghatározó sajátértékegyenlet helyett célszerű áttérni az $f_s^\pm(\mathbf{x}) = u_s(\mathbf{x}) \pm v_s(\mathbf{x})$ függvényekre vonatkozó differenciálegyenletekre. A (3.21) feltételt

kihasználva ezekre közelítő megoldás adható [19]. Az alábbiakban vázlatosan összefoglaljuk a számolás főbb lépéseit.

Dimenziótlan változóiban:

$$\begin{aligned} 2E_s \zeta f_s^+ &= \left(-\zeta^2 \nabla^2 + \mathbf{y}^2 - 1 + \frac{g|\psi_0|^2}{\mu} \right) f_s^-, \\ 2E_s \zeta f_s^- &= \left(-\zeta^2 \nabla^2 + \mathbf{y}^2 - 1 + \frac{3g|\psi_0|^2}{\mu} \right) f_s^+. \end{aligned}$$

A $\zeta \ll 1$ feltétel miatt az f_s^+ -ra, illetve f_s^- -ra adódó differenciálegyenletek bizonyos tagjai elhanyagolhatók. A ψ_0 -ra kapott (3.22) közelítést is felhasználva az alábbi eredmény adódik:

$$f_s^\pm(\mathbf{y}) = C_s^\pm (1 - \mathbf{y}^2)^{\mp 1/2} W_s(\mathbf{y}).$$

Itt C_s^+ és C_s^- konstansok, a $W_s(\mathbf{y})$ függvény pedig a következő, $|\mathbf{y}| \leq 1$ intervallumon érvényes differenciálegyenlet megoldása:

$$(1 - \mathbf{y}^2) \nabla^2 W_s - 2 \sum_{i=1}^3 y_i \frac{\partial W}{\partial y_i} + 2E_s^2 W = 0. \quad (3.23)$$

A $C_s^\pm$ együtthatók között a következő egyenlet teremt kapcsolatot:

$$C_s^+ = \zeta E_s C_s^-,$$

ennek ismeretében értékük a (2.8) normálási feltételből meghatározható.

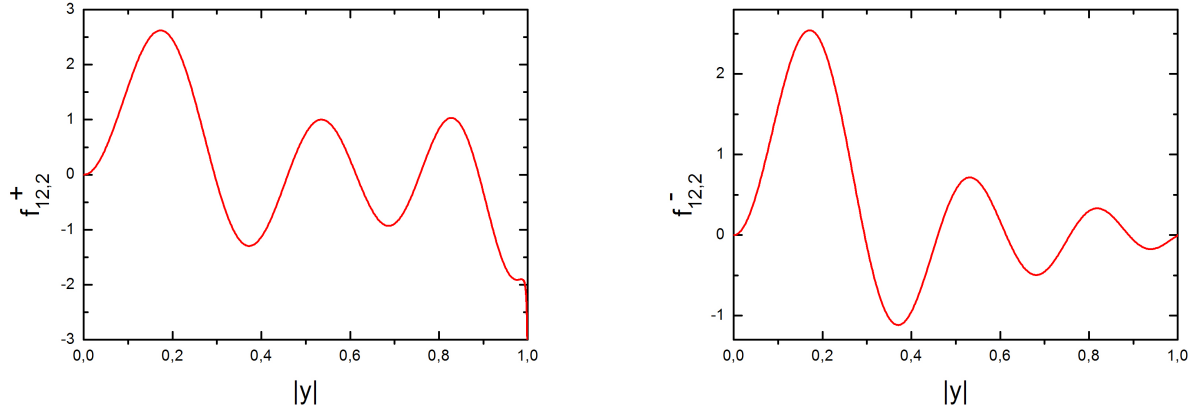
A $W_s(\mathbf{y})$ függvényt kifejtethetjük az $Y_l^m(\theta, \varphi)$ gömbfüggvények szerint, így a (3.23) differenciálegyenlet megoldásait az n, m, l egész számokkal indexelhetjük. Az $(y = |\mathbf{y}|, \theta, \varphi)$ polárkoordinátákban felírva a megfelelően normált $f_{nlm}^\pm$ függvények és a hozzájuk tartozó sajátértékek [19]:

$$\begin{aligned} E_{nl} &= \sqrt{2n^2 + 2nl + 3n + l}, \\ f_{nlm}^\pm(y, \theta, \varphi) &= \left(\frac{4n + 2l + 3}{l_c^3} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - y^2}{E_{nl} \zeta} \right)^{\mp 1/2} y^l P_n^{(l+1/2, 0)}(1 - 2y^2) Y_l^m(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (3.24)$$

ahol $P_n^{(l+1/2, 0)}(x)$ n -edfokú Jacobi-polinom, és a megoldások az $y \leq 1$ tartományon érvényesek.

Szemléltetésként a 3.7 ábra mutatja az $f_{nlm}^\pm$ függvények $f_{nl}^\pm(|\mathbf{y}|)$ radiális részét az $n = 12$, $l = 2$ speciális esetben. Ahogy a (3.24) egyenletből is látható, az $f_{nl}^+(|\mathbf{y}|)$ függvény a kondenzátum szélén, $|\mathbf{y}| = 1$ -nél divergens. Ebben a tartományban a (3.22) Thomas-Fermi-közelítés már nem írja le megfelelően a kondenzátum sűrűségprofilját (a $\psi_0(\mathbf{y})$ hullámfüggvény nem tűnhet el olyan élesen a csapda szélén, mint ahogy azt a 3.6 ábrán láthatjuk), a $W(\mathbf{y})$ -ra felírt (3.23) közelítő differenciálegyenlet is érvényét veszti.

A karakterisztikus függvényre kapott (3.19) egyenlet alkalmazásához szükség van a ψ_0 hullámfüggvény és az $f_{nlm}^\pm$ függvények Fourier-transzformáltjának kiszámítására. Az alábbiakban az ehhez szükséges formulákat írjuk fel.



3.7. ábra. A (3.23) differenciálegyenlet alapján kapott, $n = 12$, $l = 2$ értékekkel és tetszőleges $-l \leq m \leq l$ egész számmal indexelt $f_{12,2,m}^+(\mathbf{y})$ és $f_{12,2,m}^-(\mathbf{y})$ függvények $f_{12,2}^+(|\mathbf{y}|)$, illetve $f_{12,2}^-(|\mathbf{y}|)$ radiális része az $|\mathbf{y}|$ polárkoordináta függvényében. A $C_{12,2,m}^\pm$ normálási tényezőket a (3.24) egyenletben szereplő érték helyett 1-nek választottuk.

Az $(y = |\mathbf{x}|/l_c, \theta, \varphi)$ polárkoordinátákra áttérve, a $K = |\mathbf{k}|l_c$ jelölést bevezetve a (3.22) lokális sűrűség közelítésből a következő eredmény adódik a kondenzátum hullámfüggvényének $\tilde{\psi}_0$ Fourier-transzformáltjára:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_0(\mathbf{k}) &= \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \psi_0(\mathbf{x}) = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{g}} l_c^3 \int_0^1 dy y^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-iKy \cos \theta} \sqrt{1-y^2} \\ &= 2\pi^2 l_c^3 \sqrt{\frac{\mu}{g}} \frac{J_2(K)}{K^2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Itt $J_2(x)$ a második Bessel-függvény és a (3.22) egyenlet szerint $\sqrt{\mu/g} = \sqrt{\rho(0)}$, ahol $\rho(0)$ a kondenzátum sűrűsége a csapda közepén.

Az $f_{nlm}^\pm$ függvények Fourier-transzformálásához felhasználjuk a következő azonosságot:

$$e^{-iKy \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(Ky) P_l(\cos \theta),$$

ahol $j_l(x)$ gömbi Bessel-függvény, $P_l(x)$ pedig Legendre-polinom. A (3.24) egyenlettel megadott megoldás az $y = |\mathbf{x}|/l \leq 1$ intervallum érvényes, így polárkoordinátákban felírva az alábbi integrálást kell elvégezni:

$$\sum_{l'=0}^{\infty} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi P_{l'}(\cos \theta) Y_l^m(\theta, \varphi) \int_0^1 dy y^2 j_{l'}(Ky) (1-y^2)^{\mp 1/2} y^l P_n^{(l+1/2, 0)}(1-2y^2).$$

Az integrál szögfüggő részét könnyen kiszámíthatjuk:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l'=0}^{\infty} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi P_{l'}(\cos \theta) Y_l^m(\theta, \varphi) = \\
& = 2\pi \delta_{m,0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sum_{l'=0}^{\infty} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) = \\
& = 2\pi \delta_{m,0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{2}{2l+1} = \delta_{m,0} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}},
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk az $Y_l^0(\theta, \varphi) = \sqrt{(2l+1)/4\pi} P_l(\cos \theta)$ összefüggést és a Legendre-polinomok ortogonalitását. A (3.24) egyenletben szereplő normálási tényezőt is figyelembe véve az $f_{nlm}^{\pm}$ függvények Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{nlm}^{\pm}(\mathbf{k}) &= l_c^3 \int d^3y e^{-il_c \mathbf{k} \mathbf{y}} f_{nlm}^{\pm}(\mathbf{y}) = \\
& \delta_{m,0} i^l \sqrt{4\pi l_c^3 (2l+1)(4n+2l+3)} (E_{nl}\zeta)^{\pm 1/2} \int_0^1 dy y^{l+2} (1-y^2)^{\mp 1/2} P_n^{(l+1/2,0)}(1-2y^2) j_l(Ky).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Az ebben megjelenő radiális integrál konvergens, adott n és l értékekre elvégezhető.

A (3.26) egyenlet alapján az $\mathcal{L}_{GP}$ operátor sajátfüggvényeinek Fourier-transzformáltja is felírható:

$$\tilde{u}_{nl0}(\mathbf{k}) = \tilde{f}_{nl0}^+(\mathbf{k}) + \tilde{f}_{nl0}^-(\mathbf{k}), \quad \tilde{v}_{nl0}(\mathbf{k}) = \tilde{f}_{nl0}^+(\mathbf{k}) - \tilde{f}_{nl0}^-(\mathbf{k}).$$

A (3.17) és (3.19) egyenletekbe behelyettesítve a (3.25) és (3.26) eredményeket, meghatározhatjuk az $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ részecskeszám karakterisztikus függvényét.

A (3.17) és (3.19) összefüggésekkel általános formulát adtunk a $\mathbf{k}$ módushoz tartozó $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ részecskeszám karakterisztikus függvényére. Ezzel a teljes eloszlás meghatározását az $\mathcal{L}_{GP}$ Bogoljubov-operátor sajátértékegyenletének megoldására vezettük vissza.

4. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban egy három dimenziós kölcsönható Bose-rendszer viselkedését tanulmányoztuk a csapdázó potenciál kikapcsolása után. A különböző $\mathbf{k}$ momentummal kilépő részecskék $n_{\mathbf{k}}$ számának várható értéke, illetve a közöttük fellépő korrelációk kísérletileg is vizsgálható, a rendszer kezdeti állapotára jellemző mennyiségek, melyek fázisátalakulások detektálására is felhasználhatók [1, 2, 3]. Az előző fejezetekben az $\{n_{\mathbf{k}}\}$ részecskeszámok teljes eloszlásfüggvényét vizsgáltuk meg két speciális esetben: egy homogén, csapdázó potenciál nélküli, illetve egy harmonikus potenciállal összetartott rendszerre.

Megmutattuk, hogy homogén rendszerben, alapállapotból indított kvencsre $\mathbf{k}' \neq \pm\mathbf{k}$ esetén az $n_{\mathbf{k}}$ és $n_{\mathbf{k}'}$ részecskeszámok független valószínűségi változók, $n_{\mathbf{k}}$ és $n_{-\mathbf{k}}$ között viszont teljes a korreláció, azaz $\langle (n_{\mathbf{k}} - n_{-\mathbf{k}})^j \rangle = 0 \ \forall j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ -ra. Eredményünk szerint az $n_{\mathbf{k}}$ részecskeszámok közötti összes korreláció leírható egy β_k módustól függő effektív inverz hőmérsékletű sűrűségmátrixszal. A kirepülő részecskék eloszlása ebben az esetben tehát egy általánosított Gibbs-sokasággal adható meg. Megvizsgáltuk az $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle$ várható érték és a β_k effektív inverz hőmérséklet $k = |\mathbf{k}|$ -függését. Mások eredményeivel összhangban azt kaptuk, hogy $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle$ kis k értékekre $1/k$ -val arányos, rövid hullámhosszakra pedig $1/k^4$ szerint cseng le. A β_k paraméter asszimptotikus viselkedése kis hullámszámok esetén $\beta_k \sim 1/k$, nagy k -ra a pedig $\beta_k \sim \log k/k^2$.

Ezután rátértünk a harmonikusan csapdázott rendszer vizsgálatára. Általános, tetszőleges csapdázó potenciál esetén érvényes formulát vezettünk le egy adott $V_{\mathbf{k}}$ momentumtartományba eső $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ részecskeszám $G(u)$ karakterisztikus függvényére, így $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ teljes eloszlásának meghatározásához csak az $\mathcal{L}_{GP}$ Bogoljubov-operátor sajátértékegyenletének megoldására van szükség. A további számításokat gömbszimmetrikus harmonikus potenciállal csapdázott bozonokra végeztük el. Feltételeztük, hogy a rendszer paraméterei a Thomas-Fermi tartományba esnek. Ilyenkor a kondenzátum sűrűségprofiljára alkalmazható a lokális sűrűség közelítés, és a Bogoljubov-operátor sajátfüggvényeire közelítő megoldás adható [19]. Ezeket az eredményeket felhasználva az $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ részecskeszám karakterisztikus függvénye a $G(u)$ -ra felírt általános formulából meghatározható.

A további célok közé tartozik a harmonikusan csapdázott rendszerre levezetett karakterisztikus függvény numerikus vizsgálata. Érdekes kérdés, hogy a csapdázó potenciál okoz-e a homogén esethez képest további termalizációt a különböző $\mathbf{k}$ módusok között, illetve hogy a homogén rendszerben az $n_{\mathbf{k}}$ és $n_{-\mathbf{k}}$ részecskeszámok között fennálló erős korreláció harmonikus bezáró potenciál mellett is fennmarad-e. Azt várjuk, hogy az eltolási invariancia sérülése miatt a $\mathbf{k}$ és $-\mathbf{k}$ momentummal kilépő részecskék száma ekkor nem fog megegyezni,

de a két módus továbbra is erősen korrelált marad. Ezenfelül az itt végzett számolásokhoz teljesen hasonlóan alacsonyabb dimenziós Bose-rendszerek is tanulmányozhatók. Ilyen rendszereket kísérletileg erősen anizotróp csapdázó potenciállal lehet létrehozni. Érdekességük, hogy az erős fázisfluktuációk következtében a koherenciahossz alacsony hőmérsékleten is véges marad, ún. kvázi-kondenzátum alakul ki. A dolgozatban alkalmazott módszerekkel a csapda kikapcsolása után kirepülő részecskék eloszlása kvázi-kétdimenziós rendszerekben is tanulmányozható.

Függelék

A dolgozat célkitűzése egy kölcsönható három dimenziós Bose-rendszer kvencs utáni kinetikus energia eloszlásának analitikus vizsgálata volt. Ennek érdekében meghatároztuk az eloszlást jellemző karakterisztikus függvényt $T = 0$ hőmérsékleten. A téma az utóbbi időszak aktív kutatási területéhez, a kölcsönható kvantumrendszerek hirtelen bekapcsolási jelenségek során fellépő viselkedéséhez kötődik. Ultrahideg atomi rendszerekben ma már lehetséges a kölcsönhatást külső mágneses tér illetve optikai rácsok segítségével időben kontrollálni, és így erősen kölcsönható rendszerek nem-egyensúlyi dinamikáját tanulmányozni. Az atomokat csapdázó potenciál kikapcsolása után kitáguló atomfelhőn végzett repülési idő kísérletek információt szolgáltatnak a különböző $\mathbf{k}$ momentummal kilépő részecskék számának eloszlásáról. A mért korrelációs függvények alapján következtetni lehet a kiindulási rendszer állapotára. A kinetikus energia eloszlásának ismeretében ezek a korrelációk is tanulmányozhatók.

A csapdázott bozonok leírásánál egy klasszikus Lagrange-sűrűségből indultunk ki, ebből kanonikus kvantálással kaptuk meg a rendszer Hamilton-operátorát. A kialakuló kondenzátum sűrűségprofilját a Gross-Pitaevski egyenlet írta le. A fluktuációkban másodrendű sorfejtést végezve egzaktul diagonalizálható kvadratikus Bogoljubov Hamilton-operátorhoz jutottunk, majd a kinetikus energiát kifejeztük a Bogoljubov-operátor normálmódusaihoz tartozó keltő és eltüntető operátorokkal. A bozonikus léptető operátorokban kvadratikus exponenciális kifejezésekre vonatkozó normálrendezési formulák alapján meghatároztuk az eloszlás karakterisztikus függvényét $T = 0$ hőmérsékleten.

A számításokat először homogén rendszerre végeztük el. Ebben az esetben a Bogoljubov-operátor sajátfüggvényei egzaktul megadhatók, az imént leírt módszerrel a kinetikus energia karakterisztikus függvénye kiszámítható. Eredményeink szerint az eloszlás egy általánosított Gibbs-sokasággal írható le, melyben a $\mathbf{k}$ illetve $-\mathbf{k}$ impulzussal kirepülő részecskék száma erősen korrelált. Kísérletileg jobban megvalósítható esetként külső harmonikus potenciállal csapdázott atomokra is meghatároztuk az adott $\mathbf{k}$ momentummal kilépő részecskék $n_{\mathbf{k}}$ számának karakterisztikus függvényét. A kondenzátum sűrűségprofiljára az ún. Thomas-Fermi-közelítést alkalmaztuk, így az irodalomban már ismert módszerekkel közelítő megoldást adhattunk a Bogoljubov-sajátfüggvényekre [19]. A fentebb ismertetett eljárással kapott karakterisztikus függvény minden információt tartalmaz az eloszlásról, ismeretében az $n_{\mathbf{k}}$ részecskeszám momentumai, továbbá a különböző momentummal kilépő részecskék közötti korrelációk is meghatározhatók. Ezeknek részletes tanulmányozása a további feladatok közé tartozik.

Köszönetnyilvánítás

Ez úton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Zaránd Gergelynek munkám irányításáért, a kérdéseimre adott alapos válaszaiért és a dolgozattal kapcsolatos észrevételeiért, továbbá BSc témavezetőmnek, Dóra Balázsnak a konzultációkért és a szakirodalom felkutatásában nyújtott segítségéért.

Irodalomjegyzék

- [1] E. Altman, E. Demler, M. D. Lukin, *Phys. Rev. A* **70**, 013603 (2004)
- [2] S. Fölling et al., *Nature* **434**, 481 (2005)
- [3] I. B. Spielman et al., *Phys. Rev. Lett.* **98**, 080404 (2007)
- [4] S. Richard et al., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010405 (2003)
- [5] K. B. Davis et al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995)
- [6] B. Paredes et al., *Nature* **429**, 277 (2004)
- [7] A. Lenard, *J. Math. Phys.* **5**, 930 (1964)
- [8] E. P. Gross, *Nuovo Cimento, Suppl.* **20**, 454 (1961)
- [9] L. P. Pitaevski, *Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961)
- [10] N. N. Bogoliubov, *J. Phys. (Moscow)* **11**, 23 (1947)
- [11] Y. Castin, R. Dum, *Phys. Rev. A* **57**, 3008 (1998)
- [12] C. Mora, Y. Castin, *Phys. Rev. A* **67**, 053615 (2003)
- [13] D. R. Truax, *Phys. Rev. D* **31**, 1988 (1985)
- [14] A. Polkovnikov, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 863 (2011)
- [15] M. Schwarz, *Phys. Rev. B* **15**, 1399 (1977)
- [16] F. A. Berezin et al., *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York 1966
- [17] G. P. Agrawal, C. L. Mehta, *J. Math. Phys.* **18**, 408 (1977)
- [18] I. Bloch et al., *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008)
- [19] P. Öhberg et al., *Phys. Rev. A* **56**, R3346 (1997)