

XXXII. Országos Tudományos Diákköri Konferencia (OTDK)

Fizika, Földtudományok és Matematika Szekció

Kolozsvár, 2015. április 15-18

Krasznoszelszkij típusú tételek lokálisan konvex terek Descartes-szorzatán

Szerző:

Kolumbán József

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Matematika és Informatika kar, matematika szak,
alapképzés, III. év (a 2012-2013-as tanévben)

Témavezető:

dr. András Szilárd Károly, egyetemi docens

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Matematika és Informatika kar, Magyar Matematika és Informatika Intézet

Kivonat

A dolgozat célja Krasznoszelszkij kompressziós-expanziós fixpont tételének általánosítása lokálisan konvex terek Descartes-szorzatán értelmezett nemlineáris rendszerek megoldásának érdekében. A kompressziós-expanziós feltételeket komponensenként adjuk meg, tehát a rendszer komponensei egymástól függetlenül viselkedhetnek különböző módon. Alkalmazásként tárgyaljuk bizonyos alakú $[0, \infty)$ -en értelmezett másodrendű differenciálegyenlet-rendszerek megoldhatóságát, a megoldás lokalizálását, egyértelműségét, valamint multiplicitását.

Kulcsszavak: nemlineáris rendszer, differenciálegyenlet-rendszer, Fréchet tér, fix pont, kúp, pozitív megoldás, komponensenkénti kompresszió-expanzió.

1 Bevezető

Tekintsünk két Fréchet teret, $(E_1, \{\|\cdot\|_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}^*})$, $(E_2, \{\|\cdot\|_n^{(2)}\}_{n \in \mathbb{N}^*})$, valamint a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 \\ f_2(x_1, x_2) = x_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

ahol $f = (f_1, f_2) : E_1 \times E_2 \rightarrow E_1 \times E_2$. Ezen probléma standard megoldási módszere az $E_1 \times E_2$ vektortér ellátása egy megfelelő félnormacsaláddal, mint például $\|(x_1, x_2)\|_n = \|x_1\|_n^{(1)} + \|x_2\|_n^{(2)}$, annak érdekében, hogy egy Fréchet teret kapjunk, amelyben majd alkalmazzuk a már meglevő egy komponensű operátorokra vonatkozó fixponttételek egyikét (lásd [4], [5], [6], vagy [9]). Ez viszont problémákhoz vezet a kompressziós-expanziós fixpont tételek esetén a megoldás lokalizálásában, pontosabban az alsó korlát meghatározásakor. Innen adódik a motiváció ilyen jellegű tételek vektor verziójának kidolgozása iránt, azaz olyan tételeket bizonyítani, amelyek a fent említett skalár értékű félnormacsalád helyett egy vektor értékű félnormacsalád segítségével valósítják meg a kompressziót vagy az expanziót.

Krasznoszelszkij típusú tételek vektor verziói már léteznek normált terek esetén (lásd [10]). Ezeket az eredményeket viszont érdemes kiterjeszteni Fréchet terek esetére, mivel így alkalmazhatóak lennének nemkompakt intervallumon értelmezett differenciál- illetve integrálegyenlet-rendszerek megoldhatóságának tanulmányozására. Például a $C[0, \infty)$ lineáris tér nem normált tér, viszont megfelelő félnormacsaláddal lehet Fréchet tér.

A dolgozat fő eredménye a Frigon értelemben megengedhető operátorok elméletére alapszik (lásd [5], [6]), mely kihasználja a felülről félig folytonos többértékű operátorok bizonyos tulajdonságait. Ennek érdekében előbb ki kell terjesztenünk a fő eredményt [10]-ből többértékű operátorokra. Ennek a bizonyítása a Kakutani-Glicksberg-Fan fixpont tételre (lásd [1]) alapszik.

2 Általános értelmezések és használt eredmények

Értelmezés 1. Legyenek X, Y metrikus terek és $T : D \subset X \rightarrow Y$.

- a) Azt mondjuk, hogy a T operátor kompakt, ha D -nek minden korlátos részhalmazát relatív kompakt halmazba képezi.
- b) Azt mondjuk, hogy a T operátor teljesen folytonos, ha kompakt és folytonos.

Értelmezés 2. Legyenek X, Y topologikus terek és $F : X \rightarrow 2^Y$ egy többértékű függvény (azaz minden $x \in X$ esetén $F(x) \in 2^Y$). Azt mondjuk, hogy F felülről félig folytonos az $x_0 \in X$ pontban, ha minden $G \subset Y$ nyílt halmaz esetén, amelyre $F(x_0) \subset G$, létezik $N(x_0) \subset X$ nyílt környezete x_0 -nak, amelyre $F(x) \subset G$ minden $x \in N(x_0)$ esetén. F felülről félig folytonos X -en, ha felülről félig folytonos X minden pontjában.

Tétel 1 (Kakutani-Glicksberg-Fan). Legyen K nemüres, konvex, kompakt részhalmaza a X Hausdorff lokálisan konvex lineáris topologikus térnek és legyen $F : K \rightarrow 2^K$ felülről félig folytonos, nemüres, konvex, kompakt értékű függvény. Ekkor F -nek létezik fixpontja, azaz létezik $y \in K$, amelyre $y \in F(y)$.

Bizonyítás: Lásd [1], 136-138 oldalak. □

Értelmezés 3. Legyen $(X, |\cdot|)$ normált tér.

- a) Azt mondjuk, hogy $K \subset X$ kúp, ha zárt, konvex, $\lambda K \subset K$ minden $\lambda \geq 0$ esetén, $K \cap (-K) = \{0\}$ és $K \neq \{0\}$.
- b) Adott $K \subset X$ kúp esetén értelmezhető a K szerinti " $\preceq$ " részleges rendezés, a következő módon: $x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in K$.
- c) Értelmezhető a K szerinti szigorú " $\prec$ " részleges rendezés, a következő módon: $x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y, x \neq y$.

- d) Azt mondjuk, hogy az X normája monoton, ha minden $x, y \in K$ esetén $x \preceq y$ -ből következik, hogy $|x| \leq |y|$.
- e) Azt mondjuk, hogy az X normája szigorúan monoton, ha minden $x, y \in K$ esetén $x \prec y$ -ből következik, hogy $|x| < |y|$.

3 Saját fixpont tételek

A fő eredményünk bizonyítása a következő tételre alapszik, amely egy általánosítása Precup ([10]) tételének többértékű operátorok esetére.

Tétel 2. Legyenek $(X_1, |\cdot|_1)$, $(X_2, |\cdot|_2)$ normált terek; $K_1 \subset X_1$, $K_2 \subset X_2$ két kúp, $K = K_1 \times K_2$ a megfelelő szorzatkúp $X_1 \times X_2$ -ben; $\alpha_i, \beta_i > 0$ úgy, hogy $\alpha_i \neq \beta_i$, valamint legyen $r_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, $R_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$, minden $i = 1, 2$ esetén. Legyenek $r = (r_1, r_2)$, $R = (R_1, R_2)$, és értelmezzük:

$$K_{rR} = \{u \in K : u = (u_1, u_2), r_i \leq |u_i|_i \leq R_i, \text{ ahol } i = 1, 2\}.$$

Legyen $N : K_{rR} \rightarrow 2^K$, $N = (N_1, N_2)$ kompakt, felülről félig folytonos többértékű függvény, nemüres, konvex, kompakt értékekkel. Feltételezzük, hogy létezik $h_i \in K_i \setminus \{0\}$, amelyre minden $u \in K_{rR}$, $u = (u_1, u_2)$, illetve minden $i \in \{1, 2\}$ esetén a következő feltételek teljesülnek:

- (i) $v_i \neq \lambda u_i$, minden $v \in N(u)$, $v = (v_1, v_2)$, $|u_i|_i = \alpha_i$ és $\lambda > 1$ esetén;
- (ii) $v_i + \mu h_i \neq u_i$, minden $v \in N(u)$, $v = (v_1, v_2)$, $|u_i|_i = \beta_i$ és $\mu > 0$ esetén.

Ekkor N -nek létezik egy fixpontja K_{rR} -ben.

Bizonyítás: Lásd [2]. □

Rögtön adódik az alábbi következmény:

Következmény 1. Legyenek $(X_1, |\cdot|_1)$, $(X_2, |\cdot|_2)$ normált terek; $K_1 \subset X_1$, $K_2 \subset X_2$ két kúp a " $\prec_1$ " illetve " $\prec_2$ " megfelelő indukált szigorú rendezésekkel, $K = K_1 \times K_2$ a megfelelő szorzatkúp $X_1 \times X_2$ -ben; $\alpha_i, \beta_i > 0$ úgy, hogy $\alpha_i \neq \beta_i$, valamint legyen $r_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, $R_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$, minden $i = 1, 2$ esetén. Legyenek $r = (r_1, r_2)$, $R = (R_1, R_2)$, és értelmezzük:

$$K_{rR} = \{u \in K : u = (u_1, u_2), r_i \leq |u_i|_i \leq R_i, \text{ ahol } i = 1, 2\}.$$

Legyen $N : K_{rR} \rightarrow 2^K$, $N = (N_1, N_2)$ kompakt, felülről félig folytonos többértékű függvény, nemüres, konvex, kompakt értékekkel. Feltételezzük, hogy minden $u \in K_{rR}$, $u = (u_1, u_2)$, illetve minden $i \in \{1, 2\}$ esetén a következő feltételek teljesülnek:

(i') $v_i \not\prec_i u_i$, minden $v \in N(u)$, $v = (v_1, v_2)$, $|u_i|_i = \alpha_i$ esetén;

(ii') $v_i \not\prec_i u_i$, minden $v \in N(u)$, $v = (v_1, v_2)$, $|u_i|_i = \beta_i$ esetén.

Ekkor N -nek létezik egy fixpontja K_{rR} -ben.

A fő eredmény megfogalmazásának érdekében idézzünk fel egy pár értelmezést illetve jelölést [6]-ból.

Legyen $(E, \{\|\cdot\|_n\}_{n \in \mathbb{N}^*})$ egy Fréchet tér, amelynek a félnormacsaldja teljesíti az alábbi feltételt:

$$\|x\|_n \leq \|x\|_{n+1}, \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (*)$$

Minden $r > 0$ és $x \in E$ esetén legyen $B(x, r) = \{y \in E : \|x - y\|_n \leq r, \forall n \in \mathbb{N}^*\}$. E -nek egy X részhalmaza korlátos, ha minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén létezik $r_n > 0$, amelyre $\|x\|_n \leq r_n$ minden $x \in X$ esetén.

Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén értelmezhető az alábbi ekvivalenciareláció E -n:

$$x \sim_n y \Leftrightarrow \|x - y\|_n = 0.$$

Legyen $E_n = E / \sim_n$ és $\mathbb{E}_n$ a metrikus kiteljesítése E_n -nek $\|\cdot\|_n$ szerint (az E_n normáját, amelyet $\|\cdot\|_n$ indukál, valamint ennek az $\mathbb{E}_n$ -re való kiterjesztését is $\|\cdot\|_n$ -nel jelöljük). Vegyük észre, hogy $(\mathbb{E}_n, \|\cdot\|_n)$ Banach tér. Ennek a szerkesztésnek megfelelően értelmezhető egy $\mu_n : E \rightarrow \mathbb{E}_n$ folytonos projekció. Minden $r > 0$ és $x \in \mathbb{E}_n$ esetén legyen $B_n(x, r) = \{y \in \mathbb{E}_n : \|x - y\|_n \leq r\}$.

Minden $X \subset E$ és minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen $X_n = \mu_n(X)$, és jelölje $\overline{X_n}$ illetve ∂X_n az X_n $\mathbb{E}_n$ -beli lezártját valamint határát a $\|\cdot\|_n$ norma szerint.

Hasonlóan, minden $m \geq n$ esetén értelmezhető egy ekvivalenciareláció $\mathbb{E}_m$ -en, amelyet ugyancsak $\sim_n$ -nel jelölünk, és amely meghatároz egy folytonos $\mu_{n,m} : \mathbb{E}_m \rightarrow \mathbb{E}_n$ függvényt, hiszen $\mathbb{E}_m / \sim_n$ tekinthető $\mathbb{E}_n$ részhalmazaként. Valójában E a projektív határértéke $(\mathbb{E}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ -nek.

Idézzünk fel egy fontos lemmát [6]-ból.

Segédttétel 1. *Feltételezzük, hogy a (*) feltétel teljesül, és legyen X zárt részhalmaza E -nek. Ekkor minden $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $z_n \in \overline{X_n}$ sorozat esetén, amelyre $(\mu_{n,m}(z_m))_{m \geq n}$ Cauchy sorozat $\overline{X_n}$ -ben minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, létezik egy $x \in X$, amelyre $(\mu_{n,m}(z_m))_{m \geq n}$ tart $\mu_n(x) \in X_n$ -hez minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.*

Az elkövetkezendőkben bevezetünk a fentiekhez hasonló értelmezéseket és jelöléseket lokálisan konvex terek Descartes-szorzatán.

Legyen $(E_1, \{|| \cdot ||_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}^*})$, $(E_2, \{|| \cdot ||_n^{(2)}\}_{n \in \mathbb{N}^*})$ két Fréchet tér, amelyek teljesítik a (*) feltételt, a megfelelő $\sim_n^1$, $\sim_n^2$ ekvivalenciarelációkkal, $\mathbb{E}_n^1$, $\mathbb{E}_n^2$ Banach terekkel, és $\mu_n^{(1)}$, $\mu_n^{(2)}$ folytonos függvényekkel (ezeket a fentebb említett módon szerkesztjük meg).

Legyen $\tilde{\mu}_n : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{E}_n^1 \times \mathbb{E}_n^2$, $\tilde{\mu}_n(x) = (\mu_n^{(1)}(x_1), \mu_n^{(2)}(x_2))$, minden $x \in E_1 \times E_2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_i \in E_i$, $i = 1, 2$ esetén. Hasonlóan értelmezzük a $\tilde{\mu}_{n,m} : \mathbb{E}_m^1 \times \mathbb{E}_m^2 \rightarrow \mathbb{E}_n^1 \times \mathbb{E}_n^2$ folytonos függvényt, $\tilde{\mu}_{n,m}(x) = (\mu_{n,m}^{(1)}(x_1), \mu_{n,m}^{(2)}(x_2))$, minden $x \in \mathbb{E}_m^1 \times \mathbb{E}_m^2$, $x = (x_1, x_2)$ esetén.

Tekintsük az $X^1 \subset E_1$, $X^2 \subset E_2$ halmazokat. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén értelmezzük az $S_n : X^1 \times X^2 \rightarrow 2^{X^1 \times X^2}$ függvényt úgy, hogy minden $x \in X^1 \times X^2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in X^1$, $x_2 \in X^2$, esetén

$$S_n(x) = \{y \in X^1 \times X^2, y = (y_1, y_2) : y_i \in X^i, x_i \sim_n^i y_i, \forall i \in \{1, 2\}\}.$$

Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen $D(n) \subset \mathbb{E}_n^1 \times \mathbb{E}_n^2$. Értelmezzük:

$$D(\infty) = \{x \in E_1 \times E_2 : \exists N_0 \subset \mathbb{N}^* \text{ végtelen és } z_n \in D(n) \text{ minden } n \in N_0 \text{ esetén, amelyre} \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : \tilde{\mu}_{n,m}(z_m) \rightarrow \tilde{\mu}_n(x) \text{ ha } m \rightarrow \infty \text{ úgy, hogy } m \in N_0 \text{ és } m \geq n\}. \quad (**)$$

Értelmezés 4. *Legyenek $X^1 \subset E_1$ és $X^2 \subset E_2$ zárt halmazok. Azt mondjuk, hogy az $f : X^1 \times X^2 \rightarrow E_1 \times E_2$, $f = (f_1, f_2)$ kompakt operátor megengedhető, ha minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén teljesülnek az alábbi feltételek:*

$$(I) \text{ Az } F_n : X_n^1 \times X_n^2 \rightarrow 2^{\mathbb{E}_n^1 \times \mathbb{E}_n^2},$$

$$F_n(\tilde{\mu}_n(x)) = \overline{co}(\tilde{\mu}_n \circ f \circ S_n(x))$$

többértékű függvénynek létezik egy felülről félig folytonos $\mathbb{F}_n : \overline{X_n^1} \times \overline{X_n^2} \rightarrow 2^{\mathbb{E}_n^1 \times \mathbb{E}_n^2}$ kiterjesztést, amelynek értékei konvexek és kompaktok.

(2) Minden $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ esetén létezik $m \geq n$, amelyre minden $x \in X^1 \times X^2$ esetén

$$\text{diam}_n(f_i(S_m(x))) < \varepsilon_i, \forall i \in \{1, 2\}.$$

Megjegyzés 1. Vegyük észre, hogy ha $Y^1 \subset E_1$ és $Y^2 \subset E_2$ zárt, konvex halmazok és $f : X^1 \times X^2 \rightarrow E_1 \times E_2$, $f = (f_1, f_2)$ megengedhető úgy, hogy $f_i(X^1 \times X^2) \subset Y^i$, minden $i \in \{1, 2\}$ esetén, akkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az $\mathbb{F}_n$ kiterjesztés megválasztható úgy, hogy $\mathbb{F}_n(\overline{X_n^1} \times \overline{X_n^2}) \subset \overline{Y_n^1} \times \overline{Y_n^2}$, mivel $F_n(X_n^1 \times X_n^2) \subset \overline{Y_n^1} \times \overline{Y_n^2}$. Ellenkező esetben az $\overline{Y_n^1} \times \overline{Y_n^2}$ -nel vett metszete is kiterjesztése lenne F_n -nek.

Most ki tudjuk jelenteni a fő eredményünket.

Tétel 3. Legyen $(E_1, \{\|\cdot\|_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}^*})$, $(E_2, \{\|\cdot\|_n^{(2)}\}_{n \in \mathbb{N}^*})$ két Fréchet tér, amelyek teljesítik a (*) feltételt. Továbbá, legyen $K^1 \subset E_1$ és $K^2 \subset E_2$ két kúp, $K = K^1 \times K^2$ a megfelelő szorzatkúp $E_1 \times E_2$ -ben; $\alpha_i, \beta_i > 0$ úgy, hogy $\alpha_i \neq \beta_i$, valamint legyen $r_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, $R_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$, minden $i = 1, 2$ esetén. Legyenek $r = (r_1, r_2)$, $R = (R_1, R_2)$, és értelmezzük minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén:

$$D(n) = (\overline{K_n^1} \cap \overline{B_n(0, R_1)} \setminus \overline{B_n(0, r_1)}) \times (\overline{K_n^2} \cap \overline{B_n(0, R_2)} \setminus \overline{B_n(0, r_2)}).$$

Legyen $f : K \rightarrow K$, $f = (f_1, f_2)$ megengedhető és teljesen folytonos. Feltételezzük, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ és minden $x \in D(n)$, $x = (x_1, x_2)$, $i \in \{1, 2\}$ esetén az alábbi feltételek teljesülnek:

(I) $y_i - x_i \notin \overline{K_n^i} \setminus \{0\}$, minden $y \in \mathbb{F}_n(x)$, $y = (y_1, y_2)$, $\|x_i\|_n^{(i)} = \alpha_i$ esetén;

(II) $x_i - y_i \notin \overline{K_n^i} \setminus \{0\}$, minden $y \in \mathbb{F}_n(x)$, $y = (y_1, y_2)$, $\|x_i\|_n^{(i)} = \beta_i$ esetén;

(ahol $\mathbb{F}_n$ a megengedhető operátor értelmezésében szereplő függvény). Ekkor létezik $x \in K \cap (B(0, R_1) \times B(0, R_2)) \cap D(\infty)$, amelyre $x = f(x)$; ahol $D(\infty)$ a (**) szerint értelmezett; $B(0, r_i)$ és $B(0, R_i)$ a megfelelő gömbök E_i -ben, $i = 1, 2$.

Bizonyítás: Lásd [2]. □

Megjegyzés 2. A fenti tétel igaz $K \cap (\overline{B(0, R_1)} \times \overline{B(0, R_2)})$ -n értelmezett f esetén is, ha

$$\overline{K_n^i} \cap \overline{B_n(0, R_i)} \subset \mu_n^{(i)} \left(\overline{K^i \cap B(0, R_i)} \right),$$

minden $n \in \mathbb{N}^*$ és minden $i \in \{1, 2\}$ esetén. Ebben az esetben az (I) feltétel a megengedhető operátor értelmezésében kicserélhető az alábbi feltételre:

(I') Az $F_n : (K_n^1 \cap B_n(0, R_1)) \times (K_n^2 \cap B_n(0, R_2)) \rightarrow 2^{\mathbb{E}_n^1 \times \mathbb{E}_n^2}$,

$$F_n(\tilde{\mu}_n(x)) = \overline{co}(\tilde{\mu}_n \circ f \circ S_n(x))$$

többsértékű függvény megenged egy felülről félig folytonos

$$\mathbb{F}_n : \left(\overline{K_n^1 \cap B_n(0, R_1)} \right) \times \left(\overline{K_n^2 \cap B_n(0, R_2)} \right) \rightarrow 2^{\mathbb{E}_n^1 \times \mathbb{E}_n^2}$$

kiterjesztést, amely értékei konvexek és kompaktok.

Ez az alábbi alkalmazásoknál fontos.

4 Alkalmazások

Meg szeretnénk vizsgálni az alábbi differenciálegyenlet-rendszer megoldhatóságát.

$$\begin{cases} y_1''(t) - m_1^2 y_1(t) + g_1(t, y_1(t), y_2(t)) = 0, \\ y_2''(t) - m_2^2 y_2(t) + g_2(t, y_1(t), y_2(t)) = 0, \quad t \in [0, \infty), \\ y_1(0) = y_2(0) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Itt $m_1, m_2 \in \mathbb{R}_+^*$, a g_1 és g_2 függvények természetét később határozzuk meg.

Idézzük fel [6]-ból, hogy minden $i \in \{1, 2\}$ esetén az

$$\begin{cases} y_i''(t) - m_i^2 y_i(t) = 0, \quad t \in [0, \infty), \\ y_i(0) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = 0 \end{cases}$$

egyenlet k_i Green függvénye

$$k_i(t, s) = \begin{cases} \frac{e^{-m_i t}}{2m_i} (e^{m_i s} - e^{-m_i s}), & s \leq t, \\ \frac{e^{-m_i s}}{2m_i} (e^{m_i t} - e^{-m_i t}), & s > t. \end{cases}$$

alakban írható fel. Továbbá, minden $a, b \in (0, \infty)$, $a < b$ esetén

$$k_i(t, s) e^{-m_i t} \leq k_i(s, s) e^{-m_i s}, \quad \forall t, s \in [0, \infty); \quad (4.2)$$

$$k_i(t, s) \geq k_{0,i} e^{-m_i s} k_i(s, s), \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall s \in [0, \infty); \quad (4.3)$$

ahol $k_{0,i} = \min\{e^{-m_i b}, e^{m_i a} - e^{-m_i a}\}$.

Tétel 4. *Feltételezzük, hogy minden $i \in \{1, 2\}$ esetén a $g_i : [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ függvény teljesíti az alábbi feltételeket:*

- (1) $g_i(\cdot, y, z)$ mérhető minden $y, z \in [0, \infty)$ esetén;
- (2) $g_i(s, \cdot, z)$ folytonos és növekvő majdnem minden $s \in [0, \infty)$ és minden $z \in [0, \infty)$ esetén;
- (3) $g_i(s, y, \cdot)$ folytonos és növekvő majdnem minden $s \in [0, \infty)$ és minden $y \in [0, \infty)$ esetén;
- (4) minden $r > 0$ esetén létezik $h_{i,r} \in L^1([0, \infty))$ úgy, hogy $g_i(s, y, z) \leq h_{i,r}(s)$ minden $y, z \in [0, r]$ és majdnem minden $s \in [0, \infty)$ esetén, továbbá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-m_i t} \int_0^t e^{m_i s} h_{i,r}(s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{m_i t} \int_t^\infty e^{-m_i s} h_{i,r}(s) ds = 0;$$

- (5) létezik $R > 0$, amelyre

$$e^{-m_i t} \int_0^\infty k_i(t, s) g_i(s, e^{m_1 s} R, e^{m_2 s} R) ds \leq R,$$

minden $t \in [0, \infty)$ esetén;

- (6) rögzített $a, b \in (0, \infty)$, $a < b$ esetén létezik $r \in (0, R)$, amelyre

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [a, b]} e^{-m_1 t} \int_a^b k_1(t, s) g_1(s, k_{0,1} r, 0) ds &\geq r, \\ \sup_{t \in [a, b]} e^{-m_2 t} \int_a^b k_2(t, s) g_2(s, 0, k_{0,2} r) ds &\geq r. \end{aligned}$$

Ekkor (4.1)-nek létezik egy (y_1, y_2) folytonos megoldása, amelyre $\sup_{t \in [0, \infty)} |e^{-m_i t} y_i(t)| \leq R$ és $y_i(t) \geq k_{0,i} r$, minden $t \in [a, b]$ és minden $i \in \{1, 2\}$ esetén.

Bizonyítás: Lásd [2]. □

Vegyük észre, hogy az [6]-beli eredmény $\|(x_1, x_2)\|_n = \|x_1\|_n^{(1)} + \|x_2\|_n^{(2)}$ félnormacsálással való alkalmazása esetén nem tudnánk $[a, b]$ -n alsó korlátot adni y_1 -nek illetve y_2 -nek.

Továbbá, a mi fixpont tételünk megengedi, hogy az $\mathbb{F}_n$ operátor komponensei egymástól függetlenül legyenek kompresszívák vagy expanzívák, tehát a fenti tétel általánosítható, ha az (5) illetve (6) feltételeket az alábbi feltételre cseréljük:

(5') rögzített $a, b \in (0, \infty)$, $a < b$ esetén létezik $\alpha_i, \beta_i > 0$ úgy, hogy $\alpha_i \neq \beta_i$, $r_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, $R_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$, minden $i = 1, 2$ esetén, amelyekre

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \infty)} e^{-m_1 t} \int_0^\infty k_1(t, s) g_1(s, e^{m_1 s} \alpha_1, e^{m_2 s} R_2) ds &\leq \alpha_1, \\ \sup_{t \in [0, \infty)} e^{-m_2 t} \int_0^\infty k_2(t, s) g_2(s, e^{m_1 s} R_1, e^{m_2 s} \alpha_2) ds &\leq \alpha_2, \\ \sup_{t \in [a, b]} e^{-m_1 t} \int_a^b k_1(t, s) g_1(s, k_{0,1} \beta_1, 0) ds &\geq \beta_1, \\ \sup_{t \in [a, b]} e^{-m_2 t} \int_a^b k_2(t, s) g_2(s, 0, k_{0,2} \beta_2) ds &\geq \beta_2. \end{aligned}$$

Ilyen típusú problémákat egyáltalán nem lehet kezelni az [6]-beli eredmény segítségével.

Következmény 2. Feltételezzük, hogy minden $i \in \{1, 2\}$ esetén a $g_i : [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ függvény teljesíti az (1)-(4) és (5') feltételeket. Ekkor (4.1)-nek létezik egy (y_1, y_2) folytonos megoldása, amelyre $\sup_{t \in [0, \infty)} |e^{-m_i t} y_i(t)| \leq R$ és $y_i(t) \geq k_{0,i} r$, minden $t \in [a, b]$ és minden $i \in \{1, 2\}$ esetén.

Az alábbi tétel elégséges feltételt ad arra, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Tétel 5. Feltételezzük, hogy létezik $0 < R_1, R_2 \leq \infty$, amelyre minden $i \in \{1, 2\}$, $t \in [0, \infty)$, $0 < y_1 \leq z_1 < R_1$, $0 < y_2 \leq z_2 < R_2$ esetén $g_i(t, y_1, y_2) \leq g_i(t, z_1, z_2)$, és az alábbi két feltétel közül az egyik fennáll

- minden $i \in \{1, 2\}$, $t \in [0, \infty)$, $0 < y_1 \leq z_1 < R_1$, $0 < y_2 \leq z_2 < R_2$, $y_i < z_i$ esetén $\frac{g_i(t, y_1, y_2)}{y_i} < \frac{g_i(t, z_1, z_2)}{z_i}$;
- minden $i \in \{1, 2\}$, $t \in [0, \infty)$, $0 < y_1 \leq z_1 < R_1$, $0 < y_2 \leq z_2 < R_2$, $y_i < z_i$ esetén $\frac{g_i(t, y_1, y_2)}{y_i} > \frac{g_i(t, z_1, z_2)}{z_i}$.

Ekkor (4.1)-nek legfeljebb egy olyan (y_1, y_2) folytonos megoldása van, amelyre $\sup_{t \in [0, \infty)} |e^{-m_i t} y_i(t)| \leq R_i$, minden $i \in \{1, 2\}$ esetén.

Bizonyítás: Lásd [2].

□

A következő tétel egy multiplicitási eredmény.

Tétel 6. *Feltételezzük, hogy minden $i \in \{1, 2\}$ esetén a $g_i : [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ függvény teljesíti az (1)-(4) feltételeket, és rögzített $a, b \in (0, \infty)$, $a < b$ esetén létezik $N \geq 1$ természetes szám, illetve léteznek az $\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)} > 0$ valós számok úgy, hogy $\alpha_i^{(k)} \neq \beta_i^{(k)}$, valamint $r_i^{(k)} = \min\{\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)}\}$, $R_i^{(k)} = \max\{\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)}\}$, minden $i = 1, 2$ és minden $k = 1, 2, \dots, N$ esetén úgy, hogy*

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \infty)} e^{-m_1 t} \int_0^\infty k_1(t, s) g_1(s, e^{m_1 s} \alpha_1^{(k)}, e^{m_2 s} R_2^{(k)}) ds &\leq \alpha_1^{(k)}, \\ \sup_{t \in [0, \infty)} e^{-m_2 t} \int_0^\infty k_2(t, s) g_2(s, e^{m_1 s} R_1^{(k)}, e^{m_2 s} \alpha_2^{(k)}) ds &\leq \alpha_2^{(k)}, \\ \sup_{t \in [a, b]} e^{-m_1 t} \int_a^b k_1(t, s) g_1(s, k_{0,1} \beta_1^{(k)}, 0) ds &\geq \beta_1^{(k)}, \\ \sup_{t \in [a, b]} e^{-m_2 t} \int_a^b k_2(t, s) g_2(s, 0, k_{0,2} \beta_2^{(k)}) ds &\geq \beta_2^{(k)}. \end{aligned}$$

Továbbá, feltételezzük, hogy

$$e^{m_1 b} R_1^{(k)} < k_{0,1} r_1^{(k+1)} \text{ vagy } e^{m_2 b} R_2^{(k)} < k_{0,2} r_2^{(k+1)}, \quad (4.4)$$

minden $k = 1, 2, \dots, N-1$ esetén. Ekkor (4.1)-nek van legalább N darab különböző $(y_1^{(k)}, y_2^{(k)})$ folytonos megoldása, amelyekre $\sup_{t \in [0, \infty)} |e^{-m_i t} y_i^{(k)}(t)| \leq R_i^{(k)}$ és $y_i^{(k)}(t) \geq k_{0,i} r_i^{(k)}$, minden $t \in [a, b]$, minden $i \in \{1, 2\}$ és minden $k = 1, 2, \dots, N$ esetén.

Bizonyítás: Lásd [2]. □

5 1. Függelék

Első lépésben a témavezetőm kiosztott néhány fontos cikket ([4], [5], [6], [9]), amelyeket el kellett olvassak, ugyanis a kutatás célja a [6]-beli eredmény rendszerekre való kiterjesztése volt.

Amiután ezeket önállóan áttanulmányoztam, közösen megtárgyaltuk a tartalmukat, hogy biztosan letisztázódjon bennem a kép az adott problémáról. Közösen kidolgoztuk, hogy a [6] fő eredménye könnyen általánosítható rendszerekre, ha ugyanazon dolgozat 1.1 Tétele is általánosítható lenne. Innen született az első részfeladat: a [6] 1.1 Tételével ekvivalens tételt gyártani operátoregyenlet-rendszerek (azaz kétkomponensű operátorok) esetén. Közösen megtárgyaltuk, hogy ennek több megközelítése is lehetséges: az eredeti tétel bizonyításának adaptációja az új kontextusba, vagy egy általunk már ismert hasonló eredmény ([10]) általánosítása egyértékű operátorokról halmazértékűekre.

Az elkövetkezendőkben önállóan nekifogtam a probléma megoldásának, először úgy döntve, hogy az első opciót választom. Ez viszont rövid próbálkozások után túl bonyolultnak bizonyult, így áttértem a második opcióra. A [10]-ben szereplő ötletek könnyen általánosíthatóak voltak, csupán kellett keressek egy olyan tételt, amely a Schauder-féle fixpont tétel általánosítása a megfelelő környezetben. Némi keresés után meg is találtam az [1] könyvben a Kakutani-Glicksberg-Fan fixpont tételt.

Ezek után csak figyelmesen ki kellett dolgozzam a részletszámolásokat, és megszületett ezen dolgozat 2. Tétele, majd hasonlóan, általánosítva a [6]-ban levő lépéseket, a fő eredmény és az alkalmazásai másodrendű differenciálegyenlet-rendszerek esetén. A témavezetőmmel közben rendszeresen megbeszéléseket tartottunk a munkám haladásáról, valamint kisebb részletkérdések tisztázásának érdekében.

Szakirodalom

- [1] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan: Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press, Mar 22, 2001
- [2] Sz. András, J. J. Kolumbán: Fixed points of systems of cone-compressing and cone-extending operators in Fréchet spaces with applications to differential equations, publikálás folyamatban
- [3] K. Deimling: Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, 1985
- [4] M. Frigon, D. O'Regan: A Leray-Schauder alternative for Mönch maps on closed subsets of Fréchet spaces, Journal for Analysis and its Applications, Volume 21 (2002), No. 3, 753-760
- [5] M. Frigon: Fixed point results for compact maps on closed subsets of Fréchet spaces and applications to differential and integral equations, Bull. Belg. Math. Soc. 9 (2002), 23-37
- [6] M. Frigon, D. O'Regan: Fixed points of cone-compressing and cone-extending operators in Fréchet spaces, Bull. London Math. Soc. 35 (2003), 672-680
- [7] M. A. Krasnoselskii: Fixed points of cone-compressing and cone-extending operators, Soviet. Math. Dokl. 1 (1960), 1285-1288
- [8] M. A. Krasnoselskii: Positive solutions of operator equations, Noordhoff, Gröningen, 1964
- [9] D. O'Regan, Xu Xian: Fixed point theory in Fréchet spaces for Volterra type operators, Applicable Analysis: An International Journal, 2007, 86:10, 1237-1248
- [10] R. Precup: Componentwise compression-expansion conditions for systems of nonlinear operator equations and applications, Mathematical Models in Engineering, Biology, and Medicine, Proceedings of the International Conference on Boundary Value Problems, 2009
- [11] R. Precup: Existence, localization and multiplicity results for positive radial solutions of semilinear elliptic systems, J. Math. Anal. Appl. 352 (2009), 48-56