

Egy nem megengedett belsőpontos algorithmus új keresési iránnyal

Szerzők:

Mester Ágnes

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, matematika-informatika szak, I. év

Papp Ingrid-Magdolna

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, számítógépes matematika szak,
mesterképzés, I. év

Takács Petra-Renáta

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, matematika szak, II. év

Témavezető:

dr. Darvay Zsolt egyetemi adjunktus,

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Magyar Matematika és Informatika Intézet,
Kolozsvár

Kivonat

A dolgozatban egy új belsőpontos algoritmust vezetünk be, amely lineáris optimalizálási feladatok megoldására alkalmas. Az algoritmus sajátossága abban rejlik, hogy a kezdeti pontokról nem feltételezzük, hogy megengedett megoldásai a primál, illetve duál feladatoknak. Ezért olyan lépéseket határozunk meg, amelyek a megengedettséget is, és az optimalitást is igyekeznek biztosítani. Igazoljuk, hogy az algoritmus polinom időben szolgáltatja a feladat egy adott pontosságú megoldását és bebizonyítjuk, hogy bonyolultsága megegyezik az eddig ismert legjobb nem megengedett algoritmusokéval. A dolgozat újszerűsége a keresési irány megválasztásában, az algoritmus megadásában és a komplexitásra vonatkozó elemzés során használt technikákban mutatkozik meg.

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban a lineáris optimalizálásra vonatkozó belsőpontos algoritmusoknak egy olyan új változatát határozzuk meg, amely nem megengedett pontokból indulva közelíti meg az optimális megoldást. A Karmarkar [4] 1984-ben megjelent publikációja paradigmaváltást jelentett az optimalizálási algoritmusok területén. Ezt követően számos belsőpontos algoritmus jelent meg. Az első nem megengedett módszerekre vonatkozó eredmények Lustig [6] és Tanabe [12] nevéhez fűződnek. Ezeknek az algoritmusoknak a bonyolultságát elsőként Kojima, Meggido, Mizuno [5] és Zhang [16] vizsgálták. Lineáris komplementaritási feladatra Bonnans és Potra [1] definiált egy nem megengedett algoritmust. A lineáris programozás prediktor-korrektor módszereit Potra [8, 9] tanulmányozta. A nem megengedett algoritmusokra vonatkozó eredményekről a Wright [14], Ye [15] és Vanderbei [13] könyvekben olvashatunk.

Egy nemrég megjelent publikációjában Roos [10] egy olyan új algoritmust vezetett be, amely teljes Newton-lépéseket használ, de nem megengedett pontokat érint. Gu és társai [3] továbbfejlesztették Roos algoritmusát. Mansouri, Siyavash és Zangiabadi [7] egy olyan új változatát adták meg Roos algoritmusának, amely szemidefinit optimalizálásra vonatkozik.

A dolgozatban a [2] publikációban ismertetett eljárást alkalmazzuk a Roos algoritmusára annak érdekében, hogy új keresési irányokkal egy új belsőpontos módszert határozzunk meg. A továbbiakban megadjuk a dolgozatban használt jelöléseket. Legyen x és s két n -dimenziós vektor. Ekkor:

- xs a komponensenkénti szorzata az x és s vektoroknak: $xs = [x_1s_1, x_2s_2, \dots, x_ns_n]^T$;
- $\frac{x}{s}$ az x vektor komponensenkénti osztása az s vektorral: $\frac{x}{s} = \left[\frac{x_1}{s_1}, \frac{x_2}{s_2}, \dots, \frac{x_n}{s_n} \right]^T$, ahol $s_i \neq 0, \forall 1 \leq i \leq n$;
- $\sqrt{xs}$ az xs elemeiből komponensenkénti gyökvonással kapott vektor, azaz $\sqrt{xs} = [\sqrt{x_1s_1}, \sqrt{x_2s_2}, \dots, \sqrt{x_ns_n}]^T$;
- e az egyesekből álló n -dimenziós vektor, vagyis $e = [1, \dots, 1]^T$;

- $\text{diag}(x)$ az a diagonálmátrix, melynek főátlóján az x vektor elemei találhatóak, az eredeti sorrendben;
- $\|x\|$ az x vektor euklideszi normája (vagy l_2 normája);
- $\|x\|_\infty$ az x vektor Chebychev normája (l_∞ normája);
- $\|x\|_1$ az x vektor l_1 normája.

2. A lineáris optimalizálási feladat

Tekintsük az alábbi primál feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{P}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rang}(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$ és $c \in \mathbb{R}^n$. A feladat duálisa a következő:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y, \\ & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{aligned} \tag{D}$$

A lineáris optimalizálásra vonatkozó megengedett algoritmusok esetén feltételezzük, hogy a *belső pont feltétel* (BPF) fennáll a primál és a duál feladat esetén is.

1. Feltétel (Belső pont feltétel). Létezik (x^0, y^0, s^0) úgy, hogy:

$$\begin{aligned} Ax^0 &= b, & x^0 &> 0, \\ A^T y^0 + s^0 &= c, & s^0 &> 0. \end{aligned} \tag{BPF}$$

Tudjuk, hogy az önduális beágyazás technikáját felhasználva mindig szerkeszthetünk egy lineáris optimalizálási feladatot úgy, hogy a belső pont feltétel fennálljon. Tehát a belső pont feltétel az általánosság megsértése nélkül feltételezhető. Továbbá, az önduális beágyazásból adódóan, $x^0 = s^0 = e$. Ennek alapján $\mu^0 = \frac{(x^0)^T s^0}{n} = 1$.

A primál-duál feladatpár optimális megoldását a következő rendszerrel jellemezhetjük:

$$\begin{aligned} Ax &= b, & x &\geq 0, \\ A^T y + s &= c, & s &\geq 0, \\ xs &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Az (1) rendszer első két egyenletét *megengedettségi feltételeknek* nevezzük, ezek a megengedettséget biztosítják. A harmadik egyenletet *komplementaritási feltételnek* hívjuk. A primál-duál belsőpontos módszerek általában ezt a komplementaritási feltételt egy paraméteres egyenlettel helyettesítik. Így a következő rendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} Ax &= b, & x &\geq 0, \\ A^T y + s &= c, & s &\geq 0, \\ xs &= \mu e, \end{aligned} \tag{2}$$

ahol $\mu > 0$. Ha a belső pont feltétel fennáll, akkor egy rögzített $\mu > 0$ esetén a (2) rendszernek egyértelmű megoldása van, melyet μ -centrumnak vagy *analitikus-centrumnak* nevezzük (Sonnevend [11]). A $\mu > 0$ paraméterekre kapott μ -centrumok egy folytonos görbét határoznak meg, melyet centrális trajektóriának hívunk. Ha $\mu \rightarrow 0$, akkor a centrális út a feladat optimális megoldásához konvergál. A trajektóriakövető algoritmusok általában a centrális utat használják fel annak érdekében, hogy olyan elmozdulásvektorokat határozzanak meg, melyekkel a centrumhoz tudnak tartani.

3. Primál-duál algoritmus a megengedett esetben

A következőkben a [2] cikkben bevezetett módszert mutatjuk be az elmozdulásvektorok meghatározására. Legyen $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, és tekintsük a $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ folytonosan differenciálható és invertálható függvényt. Ekkor a centrális utat meghatározó (2) egyenletrendszer az alábbi ekvivalens alakban írható:

$$\begin{aligned} Ax &= b, & x &\geq 0, \\ A^T y + s &= c, & s &\geq 0, \\ \varphi\left(\frac{xs}{\mu}\right) &= \varphi(e). \end{aligned} \tag{3}$$

A Newton-módszert alkalmazva a (3) rendszerre, új elmozdulásvektorokat határozzunk meg. Ha $\varphi(t) = \sqrt{t}$, akkor az alábbi rendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} A\Delta x &= 0, \\ A^T \Delta y + \Delta s &= 0, \\ s\Delta x + x\Delta s &= 2(\sqrt{\mu xs} - xs). \end{aligned} \tag{4}$$

A centrális úttól való távolságot a [2]-ben bevezetett

$$\sigma(xs, \mu) = \left\| e - \sqrt{\frac{xs}{\mu}} \right\|$$

menyiséggel mérhetjük.

3.1. Algoritmus. (Primál-duál megengedett algoritmus [2]) Legyen $\epsilon > 0$ a pontossági paraméter, $0 < \theta < 1$ a redukciós paraméter (alapértelmezett értéke $\theta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$) és $0 < \tau < 1$ a centralitási paraméter (alapértelmezett értéke $\tau = \frac{1}{2}$). Feltételezzük, hogy (x^0, y^0, s^0) teljesíti a belső pont feltételt, $\mu^0 = \frac{(x^0)^T s^0}{n}$. Továbbá feltételezzük, hogy $\sigma(x^0 s^0, \mu^0) < \tau$.

begin

$x := x^0; y = y^0; s = s^0;$

$\mu := \mu^0;$

while $x^T s > \epsilon$ **do begin**

$\mu := (1 - \theta)\mu;$

meghatározzuk a $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ elmozdulásvektorokat a (4) összefüggés alapján

$x := x + \Delta x;$

$y := y + \Delta y;$

$s := s + \Delta s;$

end

end.

Az alábbi lemmák a [2] alapján a fenti algoritmus polinomialitását igazolják. Legyenek $x_+ = x + \Delta x$ és $s_+ = s + \Delta s$ egy teljes Newton-lépésből kapott vektorok.

3.1. Lemma. Legyen $\sigma = \sigma(xs, \mu) < 1$. Ekkor $x_+ > 0$ és $s_+ > 0$, vagyis a teljes Newton-lépés szigorúan megengedett. ■

3.2. Lemma. Legyen $\sigma = \sigma(xs, \mu) < 1$. Ekkor

$$\sigma(x_+s_+, \mu) \leq \frac{\sigma^2}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}},$$

tehát a teljes Newton-lépés esetén a kvadratikusan konvergencia fennáll. ■

3.3. Lemma. Legyen $\sigma = \sigma(xs, \mu)$ és feltételezzük, hogy az x_+ és s_+ vektorokat egy teljes Newton-lépést alkalmazva kaptuk meg, azaz $x_+ = x + \Delta x$ és $s_+ = s + \Delta s$. Ekkor

$$(x_+)^T s_+ = \mu(n - \sigma^2),$$

tehát $(x_+)^T s_+ \leq \mu n$. ■

3.4. Lemma. Legyen $\sigma = \sigma(xs, \mu) < 1$ és $\mu_+ = (1 - \theta)\mu$, ahol $0 < \theta < 1$. Ekkor

$$\sigma(x_+s_+, \mu_+) \leq \frac{\theta\sqrt{n} + \sigma^2}{1 - \theta + \sqrt{(1 - \theta)(1 - \sigma^2)}}.$$

Továbbá, ha $\sigma < \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ és $n \geq 4$, akkor $\sigma(x_+s_+, \mu_+) < \frac{1}{2}$. ■

3.5. Lemma. Feltételezzük, hogy az (x^0, s^0) páros szigorúan megengedett, $\mu^0 = \frac{(x^0)^T s^0}{n}$ és $\sigma(x^0 s^0, \mu^0) < \frac{1}{2}$. Legyenek x^k és s^k a k -adik iteráció után kapott vektorok. Ekkor bármely

$$k \geq \left\lceil \frac{1}{\theta} \log \frac{(x^0)^T s^0}{\epsilon} \right\rceil$$

esetén $(x^k)^T s^k \leq \epsilon$. ■

3.6. Lemma. Feltételezzük, hogy $x^0 = s^0 = e$. Akkor a 3.1. algoritmus legtöbb

$$\left\lceil \frac{1}{\theta} \log \frac{n}{\epsilon} \right\rceil$$

belső pontos iterációt hajt végre. ■

3.7. Tétel. Feltételezzük, hogy $x^0 = s^0 = e$. A θ and τ paraméterek alapértelmezett értékeit használva a 3.1. algoritmus legtöbb

$$O\left(\sqrt{n} \log \frac{n}{\epsilon}\right)$$

belsőpontos iterációt hajt végre. A kapott vektorok kielégítik az $x^T s \leq \epsilon$ összefüggést. ■

4. A módosított feladat

A továbbiakban nem feltételezzük, hogy a kezdeti pontok megengedett megoldásai a primál, illetve duál feladatoknak. Az eredeti feladatok helyett tekintsük a Ye [15] és Roos [10] által is tanulmányozott, módosított feladatot:

$$\begin{aligned} \min (c - \nu(c - A^T y^0 - s^0))^T x, \\ Ax = b - \nu(b - Ax^0), \\ x \geq 0, \end{aligned} \tag{P_\nu}$$

és ennek a duálisát:

$$\begin{aligned} \max (b - \nu(b - Ax^0))^T y, \\ A^T y + s = c - \nu(c - A^T y^0 - s^0), \\ s \geq 0. \end{aligned} \tag{D_\nu}$$

A módosított feladatokra vonatkozó centrális utat jellemző rendszer a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned} b - Ax &= \nu(b - Ax^0), & x &\geq 0, \\ c - A^T y - s &= \nu(c - A^T y^0 - s^0), & s &\geq 0, \\ xs &= \mu e. \end{aligned} \tag{5}$$

Tekintsük a 3. pontban bevezetett φ függvényt. Ekkor a centrális utat meghatározó (5) rendszer az alábbi ekvivalens alakban írható:

$$\begin{aligned} b - Ax &= \nu(b - Ax^0), & x &\geq 0, \\ c - A^T y - s &= \nu(c - A^T y^0 - s^0), & s &\geq 0, \\ \varphi\left(\frac{x_i s_i}{\mu}\right) &= \varphi(1), \forall 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \tag{6}$$

Feltételezve, hogy $\varphi(t) = \sqrt{t}$ és x , illetve (y, s) szigorúan megengedett megoldása a (P_ν) és (D_ν) feladatoknak, a (4) lineáris rendszerhez jutunk.

5. Egy új primál-duál algoritmus

Legyen $\nu_+ = (1 - \theta)\nu$, ahol $0 < \theta < 1$. Vezessük be a következő jelöléseket is:

$$r_b^0 = b - Ax^0, \quad r_c^0 = c - A^T y^0 - s^0.$$

Feltételezve, hogy x és (y, s) szigorúan megengedett megoldásai a (P_ν) és (D_ν) feladatoknak, egy olyan $(\Delta^f x, \Delta^f y, \Delta^f s)$ lépést határozunk meg, amelyre a kapott vektorok a (P_{ν_+}) és (D_{ν_+}) feladatoknak megengedett megoldásai lesznek. Így a következő összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned} A\Delta^f x &= \theta\nu r_b^0, \\ A^T \Delta^f y + \Delta^f s &= \theta\nu r_c^0, \\ s\Delta^f x + x\Delta^f s &= 2(\sqrt{\mu xs} - xs). \end{aligned} \tag{7}$$

Bevezetve a következő jelöléseket

$$v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}, \quad d_x = \frac{v\Delta^f x}{x}, \quad d_s = \frac{v\Delta^f s}{s},$$

felírható, hogy

$$\mu v(d_x + d_s) = s\Delta^f x + x\Delta^f s, \tag{8}$$

és

$$d_x d_s = \frac{\Delta^f x \Delta^f s}{\mu}. \tag{9}$$

Ezeknek a jelöléseknek a segítségével felírhatjuk a (7) rendszer skálázott alakját:

$$\begin{aligned} \bar{A}d_x &= \frac{\theta\nu}{\mu} r_b^0, \\ \bar{A}^T \Delta^f y + d_s &= \theta\nu \frac{r_c^0}{s}, \\ d_x + d_s &= p_v, \end{aligned} \tag{10}$$

ahol $p_v = 2(e - v)$ és $\bar{A} = \frac{1}{\mu} A \text{diag} \left(\frac{x}{v} \right)$.

A centrális úttól való távolság mérésére a következő kifejezést használjuk:

$$\sigma(v) = \sigma(xs, \mu) = \frac{\|p_v\|}{2} = \|e - v\|.$$

Legyen $q_v = d_x - d_s$. Ekkor:

$$d_x = \frac{p_v + q_v}{2}, \quad d_s = \frac{p_v - q_v}{2}.$$

Összeszorozva a két egyenlőséget, a következőt kapjuk:

$$\frac{q_v^2}{4} = \frac{p_v^2}{4} - d_x d_s. \quad (11)$$

Ebből pedig következik, hogy:

$$\frac{\|q_v\|^2}{4} = \frac{\|p_v\|^2}{4} - d_x^T d_s. \quad (12)$$

A fentiek alapján az algoritmust az alábbi módon adhatjuk meg.

5.1. Algoritmus. (Primál-duál nem megengedett algoritmus) *Legyen $\epsilon > 0$ a pontossági paraméter és $0 < \theta < 1$ a redukciós paraméter (alapértelmezett érték $\theta = \frac{1}{8n}$). Feltételezzük, hogy adottak az (x^0, y^0, s^0) kezdeti értékek, amelyekre $x^0 > 0, s^0 > 0$ és $x^0 s^0 = \mu^0 e$ (alapértelmezett értékek $x^0 = \zeta e, y^0 = 0, s^0 = \zeta e, \mu^0 = \zeta^2$, ahol $\zeta > 0$).*

begin

$x := x^0; y := y^0; s := s^0; \mu := \mu^0; \nu := 1;$

while $\max(x^T s, \|b - Ax\|, \|c - A^T y - s\|) \geq \epsilon$ **do begin**

$(x, y, s) := (x, y, s) + (\Delta^f x, \Delta^f y, \Delta^f s);$

$\mu := (1 - \theta)\mu;$

$\nu := (1 - \theta)\nu;$

$(x, y, s) := (x, y, s) + (\Delta x, \Delta y, \Delta s);$

end

end.

Az alábbi pontokban az algoritmus bonyolultságát vizsgáljuk.

6. Az algoritmus elemzése

Legyenek $x^f = x + \Delta^f x$ és $s^f = s + \Delta^f s$ a megengedettségi lépés után kapott vektorok. A következő lemmában egy feltételt adunk meg, amely garantálja az x^f, s^f vektorok megengedettségét. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\omega(v) = \frac{1}{2} \sqrt{\|d_x\|^2 + \|d_s\|^2},$$

$$v^f = \sqrt{\frac{x^f s^f}{\mu}}, \quad v^+ = \sqrt{\frac{x^f s^f}{\mu_+}}, \quad \mu_+ = (1 - \theta)\mu,$$

ahol $0 < \theta < 1$.

6.1. Lemma. *Legyen $x > 0$ a (P_ν) és $s > 0$ a (D_ν) feladat megengedett megoldása, valamint $\sigma(v) = \sigma(xs, \mu)$, amelyre fennáll a $\sigma(v)^2 + 2\omega(v)^2 < 1$ összefüggés. Ekkor*

$$x^f > 0 \quad \text{és} \quad s^f > 0, \quad (13)$$

tehát az x^f és s^f szigorúan megengedett megoldásai a (P_{ν_+}) és (D_{ν_+}) feladatoknak.

Bizonyítás: Az x^f és s^f vektorok megadása és a (7) rendszer alapján levonható az a következtetés, hogy elegendő a (13) egyenlőtlenségeket igazolni. Ennek érdekében minden $0 \leq \alpha \leq 1$ értékre tekintsük az $x^f(\alpha) = x + \alpha\Delta^f x$ és $s^f(\alpha) = s + \alpha\Delta^f s$ vektorokat. Ekkor

$$x^f(\alpha)s^f(\alpha) = xs + \alpha(s\Delta^f x + x\Delta^f s) + \alpha^2\Delta^f x\Delta^f s.$$

Felhasználva a (8) és (9) egyenlőségeket, a következőt írhatjuk:

$$\frac{1}{\mu}x^f(\alpha)s^f(\alpha) = v^2 + \alpha v(d_x + d_s) + \alpha^2 d_x d_s. \quad (14)$$

Most alkalmazva a (11) összefüggést, az alábbihoz jutunk:

$$\frac{1}{\mu}x^f(\alpha)s^f(\alpha) = (1 - \alpha)v^2 + \alpha(v^2 + vp_v) + \alpha^2 \left(\frac{p_v^2}{4} - \frac{q_v^2}{4} \right).$$

Továbbá, a $p_v = 2(e - v)$ egyenlőség alapján:

$$v^2 + vp_v = 2v - v^2 = e - (e - v)^2 = e - \frac{p_v^2}{4},$$

tehát

$$\frac{1}{\mu}x^f(\alpha)s^f(\alpha) = (1 - \alpha)v^2 + \alpha \left(e - (1 - \alpha)\frac{p_v^2}{4} - \alpha\frac{q_v^2}{4} \right). \quad (15)$$

Látható, hogy az $x^f(\alpha)s^f(\alpha) > 0$ egyenlőtlenség akkor teljesül, ha

$$\left\| (1 - \alpha)\frac{p_v^2}{4} + \alpha\frac{q_v^2}{4} \right\|_\infty < 1.$$

Ekkor felhasználva a (12) összefüggést, következik, hogy:

$$\left\| (1 - \alpha)\frac{p_v^2}{4} + \alpha\frac{q_v^2}{4} \right\|_\infty \leq (1 - \alpha)\frac{\|p_v^2\|_\infty}{4} + \alpha\frac{\|q_v^2\|_\infty}{4} \leq$$

$$\leq (1 - \alpha) \frac{\|p_v\|^2}{4} + \alpha \frac{\|q_v\|^2}{4} = \sigma(v)^2 - \alpha d_x^T d_s.$$

Emellett

$$-d_x^T d_s \leq |d_x^T d_s| \leq \|d_x\| \|d_s\| \leq \frac{1}{2} (\|d_x\|^2 + \|d_s\|^2) = 2\omega(v)^2. \quad (16)$$

Ezt felhasználva, a következőkhöz jutunk:

$$\sigma(v)^2 - \alpha d_x^T d_s \leq \sigma(v)^2 + 2\omega(v)^2 < 1.$$

Így minden $0 \leq \alpha \leq 1$ értékre teljesül az $x^f(\alpha)s^f(\alpha) > 0$ egyenlőtlenség. Következésképpen, az α paraméter függvényében megadott, $x^f(\alpha)$ és $s^f(\alpha)$ lineáris függvények nem váltanak előjelet a $[0, 1]$ intervallumon. Mivel $x^f(0) = x > 0$ és $s^f(0) = s > 0$ következik, hogy $x^f(1) = x^f > 0$ és $s^f(1) = s^f > 0$. ■

Az alábbi lemmában azt vizsgáljuk, hogy a megengedettségi lépés után kapott vektorok milyen távolságra vannak a módosított feladat centrális útjának a következő pontjától.

6.2. Lemma. *Legyen $x > 0$ a (P_ν) és $s > 0$ a (D_ν) feladat megengedett megoldása, valamint $\sigma(v) = \sigma(xs, \mu)$ úgy, hogy $\sigma(v)^2 + 2\omega(v)^2 < 1$. Ekkor*

$$\sigma(v^+) = \sigma(x^f s^f, \mu_+) \leq \frac{\theta\sqrt{n} + \sigma(v)^2 + 2\omega(v)^2}{1 - \theta + \sqrt{(1 - \theta)(1 - \sigma(v)^2 - 2\omega(v)^2)}}.$$

Bizonyítás: A 6.1. lemma alapján $x^f > 0$ és $s^f > 0$. Felhasználva a $v^2 + vp_v = 2v - v^2$ és a $d_x + d_s = p_v$ egyenlőségeket, a (14) összefüggés átalakítása után a következőhöz jutunk:

$$\frac{1}{\mu} x^f s^f = (1 - \alpha)v^2 + \alpha(2v - v^2) + \alpha^2 d_x d_s. \quad (17)$$

Az $\alpha = 1$ helyettesítést elvégezve a (17) egyenlőségben, a (11) összefüggést is felhasználva következik, hogy

$$\frac{1}{\mu} x^f s^f = (v^f)^2 = 2v - v^2 + d_x d_s = e - (e - v)^2 + d_x d_s = e - \frac{p_v^2}{4} + d_x d_s = e - \frac{q_v^2}{4}.$$

Innen azonnal adódik, hogy

$$e - (v^f)^2 = \frac{q_v^2}{4}. \quad (18)$$

Ekkor:

$$\sigma(v^+) = \left\| e - \sqrt{\frac{x^f s^f}{\mu_+}} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1 - \theta}} \left\| \sqrt{1 - \theta} e - v^f \right\| = \frac{1}{\sqrt{1 - \theta}} \left\| \frac{(1 - \theta)e - (v^f)^2}{\sqrt{1 - \theta} e + v^f} \right\|.$$

Alkalmazva a (18) összefüggést, következik, hogy

$$\sigma(v^+) = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}} \left\| \frac{-\theta e + \frac{q_v^2}{4}}{\sqrt{1-\theta}e + v^f} \right\|$$

és

$$\min(v^f) \geq \sqrt{1 - \frac{\|q_v^2\|_\infty}{4}} \geq \sqrt{1 - \frac{\|q_v^2\|}{4}} \geq \sqrt{1 - \frac{\|q_v\|^2}{4}}.$$

A (12) összefüggésbe behelyettesítve a $\frac{\|p_v\|^2}{4} = \sigma(v)^2$ egyenlőséget, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\|q_v\|^2}{4} = \sigma(v)^2 - d_x^T d_s, \quad (19)$$

és innen

$$\min(v^f) \geq \sqrt{1 - \frac{\|q_v\|^2}{4}} = \sqrt{1 - \sigma(v)^2 + d_x^T d_s}. \quad (20)$$

Felhasználva a (16), (19) és (20) összefüggéseket, következik, hogy:

$$\begin{aligned} \sigma(v^+) &= \frac{1}{\sqrt{1-\theta}} \left\| \frac{-\theta e + \frac{q_v^2}{4}}{\sqrt{1-\theta}e + v^f} \right\| \leq \frac{\left\| -\theta e + \frac{q_v^2}{4} \right\|}{\sqrt{1-\theta}(\sqrt{1-\theta} + \sqrt{1-\sigma(v)^2 + d_x^T d_s})} \leq \\ &\leq \frac{\theta\sqrt{n} + \sigma(v)^2 - d_x^T d_s}{1-\theta + \sqrt{(1-\theta)(1-\sigma(v)^2 + d_x^T d_s)}} \leq \frac{\theta\sqrt{n} + \sigma(v)^2 + 2\omega(v)^2}{1-\theta + \sqrt{(1-\theta)(1-\sigma(v)^2 - 2\omega(v)^2)}}. \end{aligned}$$

Ezzel a lemmát bizonyítottuk. ■

A következő lemmában az $\omega(v)$ -nek egy felső határát adjuk meg. Ehhez vezessük be a Roos [10] cikkben tárgyalt módszerhez hasonlóan a következő jelöléseket:

$$\mathcal{L} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \bar{A}\xi = 0\}$$

az $\bar{A}$ mátrix nulltere és

$$\mathcal{L}^\perp = \{\bar{A}^T y : y \in \mathbb{R}^m\}$$

az $\bar{A}$ mátrix sortere. Észre lehet venni, hogy $\mathcal{L} \perp \mathcal{L}^\perp$ és $\mathcal{L} + \mathcal{L}^\perp = \mathbb{R}^n$, emellett $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^\perp = \{0\}$. A $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \bar{A}\xi = \theta\nu r_b^0\}$ affin tér megegyezik a $d_x + \mathcal{L}$ térrel. Látható, hogy $d_s \in \theta\nu v s^{-1} r_c^0 + \mathcal{L}^\perp$. Mindezekből következik, hogy $d_x + \mathcal{L}$ és $d_s + \mathcal{L}^\perp$ egyértelmű pontban metszik egymást. Ezt a pontot q -val fogjuk jelölni.

6.3. Lemma. *Legyen q a $d_x + \mathcal{L}$ és a $d_s + \mathcal{L}^\perp$ affin terek egyértelmű metszéspontja. Ekkor fennáll a*

$$2\omega(v) \leq \sqrt{\|q\|^2 + (\|q\| + 2\sigma(v))^2}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás: A bizonyítás a Roos [10] cikkben ismertetett változathoz hasonló, de ebben az esetben az $r = p_v = 2(e - v)$ jelölést vezetjük be. Mivel $\mathcal{L} + \mathcal{L}^\perp = \mathbb{R}^n$, létezik egy $q_1, r_1 \in \mathcal{L}$ és egy $q_2, r_2 \in \mathcal{L}^\perp$ úgy, hogy

$$q = q_1 + q_2, \quad r = r_1 + r_2.$$

Másfelől, mivel $d_x - q \in \mathcal{L}$ és $d_s - q \in \mathcal{L}^\perp$, következik, hogy létezik egy olyan $l_1 \in \mathcal{L}$ és egy olyan $l_2 \in \mathcal{L}^\perp$, amelyre

$$d_x = q + l_1, \quad d_s = q + l_2.$$

Mivel $d_x + d_s = r$, következik, hogy $r = 2q + l_1 + l_2$, ebből pedig látható, hogy

$$(2q_1 + l_1) + (2q_2 + l_2) = r_1 + r_2.$$

Mivel az $\mathcal{L} + \mathcal{L}^\perp = \mathbb{R}^n$ felbontás egyértelmű, azt mondhatjuk, hogy

$$l_1 = r_1 - 2q_1, \quad l_2 = r_2 - 2q_2.$$

Következésképpen

$$d_x = q + r_1 - 2q_1 = (r_1 - q_1) + q_2,$$

$$d_s = q + r_2 - 2q_2 = q_1 + (r_2 - q_2).$$

Mivel $\mathcal{L} \perp \mathcal{L}^\perp$, ezért azt állíthatjuk, hogy

$$4\omega(v)^2 = \|d_x\|^2 + \|d_s\|^2 = \|r_1 - q_1\|^2 + \|q_2\|^2 + \|q_1\|^2 + \|r_2 - q_2\|^2 = \|q - r\|^2 + \|q\|^2.$$

Feltételezve, hogy $q \neq 0$, mivel $\|r\| = 2\sigma(v)$, a jobb oldal akkor maximális, ha fennáll az $r = -2\sigma(v)q/\|q\|$ egyenlőség. Ekkor a következő összefüggést kapjuk:

$$4\omega(v)^2 \leq \left\| \left(1 + \frac{2\sigma(v)}{\|q\|} \right) q \right\|^2 + \|q\|^2 = \|q\|^2 + (\|q\| + 2\sigma(v))^2,$$

amely a bizonyítandó egyenlőtlenséget eredményezi, ha $q \neq 0$. Ha $q = 0$, akkor az egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn. ■

A következő lemmában egy felső határt fogunk megszabni a $\|q\|$ -ra. Ehhez először meg kell határozzuk az (x^0, y^0, s^0) kezdeti pontokat. Feltételezzük, hogy $\zeta > 0$ úgy, hogy

$\|\bar{x} + \bar{s}\|_\infty \leq \zeta$, ahol $\bar{x}$ a (P) és $(\bar{y}, \bar{s})$ a (D) feladatok optimális megoldásai. Az algoritmust így az

$$x^0 = s^0 = \zeta e, \quad y^0 = 0, \quad \mu^0 = \zeta^2$$

pontokkal fogjuk kezdeni.

6.4. Lemma. (Roos [10], 4.7. lemma) *Fennáll a*

$$\sqrt{\mu} \|q\| \leq \theta \nu \zeta \sqrt{e^T \left(\frac{x}{s} + \frac{s}{x} \right)}$$

egyenlőtlenség. ■

A továbbiakban az $\frac{x}{s}$ és $\frac{s}{x}$ értékére keresünk felső határt.

6.5. Lemma. *Legyen $\sigma(xs, \mu) < \tau < 1$. Ekkor érvényesek az*

$$(1 - \sqrt{\tau})^2 < \frac{x_i s_i}{\mu} < (1 + \sqrt{\tau})^2, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

egyenlőtlenségek.

Bizonyítás: A $\sigma(v) < \tau < 1$ feltételből következik, hogy

$$\|v - e\| < \tau \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (v_i - 1)^2 < \tau.$$

Emellett

$$(v_i - 1)^2 \leq \sum_{i=1}^n (v_i - 1)^2 < \tau, \quad \forall i = \overline{1, n},$$

tehát

$$|v_i - 1| < \sqrt{\tau} \Rightarrow 1 - \sqrt{\tau} < v_i < 1 + \sqrt{\tau},$$

ezt négyzetre emelve, következik a bizonyítandó összefüggés. ■

6.6. Lemma. *Fennáll az*

$$\sqrt{e^T \left(\frac{x}{s} + \frac{s}{x} \right)} < \frac{1}{\sqrt{\mu} (1 - \sqrt{\tau})} \sqrt{\|x\|^2 + \|s\|^2}$$

összefüggés.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy

$$\frac{x_i}{s_i} + \frac{s_i}{x_i} = \frac{x_i^2 + s_i^2}{x_i s_i}, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

A 6.5. lemmából következik, hogy

$$x_i s_i > \mu (1 - \sqrt{\tau})^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_i s_i} < \frac{1}{\mu (1 - \sqrt{\tau})^2}.$$

Ezt felhasználva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{x_i^2 + s_i^2}{x_i s_i} < \frac{1}{\mu (1 - \sqrt{\tau})^2} (x_i^2 + s_i^2), \quad \forall i = \overline{1, n},$$

tehát az

$$e^T \left(\frac{x}{s} + \frac{s}{x} \right) < \frac{1}{\mu (1 - \sqrt{\tau})^2} (\|x\|^2 + \|s\|^2)$$

összefüggéshez jutunk, aminek mindkét oldalából gyököt vonva, megkapjuk azt, amit bizonyítani akartunk. ■

6.7. Lemma. *Ha x és s szigorúan megengedett megoldása a (P_ν) és (D_ν) feladatoknak és $\sigma(xs, \mu) < \tau$, akkor teljesül a*

$$\sqrt{\|x\|^2 + \|s\|^2} \leq \zeta n (2 + 2\sqrt{\tau} + \tau)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás: A Roos [10] által bevezetett módszerhez hasonlóan járunk el, az általunk meghatározott keresési irány sajátosságait figyelembe véve. Az alapján, ahogy a 6.6. lemmában az $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{s}$ -et és a ζ -t megválasztottuk, a következő rendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= b, & 0 \leq \bar{x} \leq \zeta e, \\ A^T \bar{y} + \bar{s} &= c, & 0 \leq \bar{s} \leq \zeta e, \\ \bar{x}\bar{s} &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Legyen y az a vektor, amelyre x a (P_ν) és (y, s) a (D_ν) feladat megengedett megoldása. Ekkor érvényesek az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} Ax &= b - \nu(b - A\zeta e), & x \geq 0, \\ A^T y + s &= c - \nu(c - \zeta e), & s \geq 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Következik, hogy

$$\begin{aligned} A\bar{x} - Ax &= \nu(A\bar{x} - A\zeta e), & x \geq 0, \\ A^T \bar{y} + \bar{s} - A^T y - s &= \nu(A^T \bar{y} + \bar{s} - \zeta e), & s \geq 0, \end{aligned} \tag{23}$$

amit ha átalakítunk, az

$$\begin{aligned} A(\bar{x} - x - \nu\bar{x} + \nu\zeta e) &= 0, & x &\geq 0, \\ A^T(\bar{y} - y - \nu\bar{y}) &= s - \bar{s} + \nu\bar{s} - \nu\zeta e, & s &\geq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

egyenlőségekhez jutunk. Felhasználva azt, hogy egy mátrix nulltere és sortere egymásra merőlegesek, az

$$(\bar{x} - x - \nu\bar{x} + \nu\zeta e)^T (s - \bar{s} + \nu\bar{s} - \nu\zeta e) = 0$$

összefüggés adódik. Legyen

$$a := (1 - \nu)\bar{x} + \nu\zeta e, \quad d := (1 - \nu)\bar{s} + \nu\zeta e.$$

Ekkor $(a - x)^T(d - s) = 0$, mely a következő összefüggést eredményezi:

$$a^T d + x^T s = a^T s + d^T x.$$

A 6.5. lemma alapján

$$x_i s_i < \mu (1 + \sqrt{\tau})^2 \quad \Rightarrow \quad x^T s < \mu n (1 + \sqrt{\tau})^2.$$

Emellett $\bar{x}^T \bar{s} = 0$, $\bar{x} + \bar{s} \leq \zeta e$ és $\mu = \nu\mu^0 = \nu\zeta^2$. Mindezeket felhasználva, a következőt írhatjuk:

$$\begin{aligned} a^T d + x^T s &= ((1 - \nu)\bar{x} + \nu\zeta e)^T ((1 - \nu)\bar{s} + \nu\zeta e) + x^T s \\ &= \nu(1 - \nu)(\bar{x} + \bar{s})^T \zeta e + \nu^2 \zeta^2 n + x^T s \\ &\leq \nu(1 - \nu)(\zeta e)^T \zeta e + \nu^2 \zeta^2 n + \mu n (1 + \sqrt{\tau})^2 \\ &= \nu(1 - \nu)\zeta^2 n + \nu^2 \zeta^2 n + \mu n (1 + \sqrt{\tau})^2 \\ &= \nu\zeta^2 n + \mu n (1 + \sqrt{\tau})^2 \\ &= \nu\zeta^2 n(2 + 2\sqrt{\tau} + \tau). \end{aligned} \quad (25)$$

Felhasználva azt, hogy $a \geq \nu\zeta e$ és $d \geq \nu\zeta e$, a következőt kapjuk:

$$a^T s + d^T x \geq \nu\zeta e^T (x + s) = \nu\zeta(\|x\|_1 + \|s\|_1). \quad (26)$$

Ekkor

$$\|x\|_1 + \|s\|_1 \leq \frac{a^T s + d^T x}{\nu\zeta} = \frac{a^T d + x^T s}{\nu\zeta} \leq \zeta n(2 + 2\sqrt{\tau} + \tau).$$

Mivel

$$\|x\|^2 + \|s\|^2 \leq (\|x\|_1 + \|s\|_1)^2 \leq \zeta^2 n^2 (2 + 2\sqrt{\tau} + \tau)^2,$$

következik, hogy $\sqrt{\|x\|^2 + \|s\|^2} \leq \zeta n (2 + 2\sqrt{\tau} + \tau)$. ■

A következő lemmában a $\|q\|$ -nak egy olyan felső határát fogjuk megadni, amely τ -tól függ.

6.8. Lemma. *Teljesül a*

$$\|q\| < \theta n \frac{2 + 2\sqrt{\tau} + \tau}{1 - \sqrt{\tau}}$$

összefüggés.

Bizonyítás: A 6.7. és 6.6. lemmák és a $\sqrt{\mu} = \sqrt{\nu}\zeta$ egyenlőség alapján

$$\sqrt{e^T \left(\frac{x}{s} + \frac{s}{x} \right)} < \frac{\zeta n (2 + 2\sqrt{\tau} + \tau)}{\sqrt{\mu}(1 - \sqrt{\tau})} = \frac{n}{\sqrt{\nu}} \frac{(2 + 2\sqrt{\tau} + \tau)}{(1 - \sqrt{\tau})}.$$

A fenti egyenlőtlenség és a 6.4. lemma alapján a következőt írhatjuk:

$$\sqrt{\mu} \|q\| \leq \theta \nu \zeta \sqrt{e^T \left(\frac{x}{s} + \frac{s}{x} \right)} < \frac{\theta n \sqrt{\nu} \zeta (2 + 2\sqrt{\tau} + \tau)}{1 - \sqrt{\tau}}.$$

Felhasználva a $\sqrt{\mu} = \sqrt{\nu}\zeta$ összefüggést, megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. ■

Feltételezve, hogy a μ_+ értéke nem változik, vezessük be az x_+ és s_+ vektorokat, amelyeket egy teljes Newton-lépéssel kapunk az x^f és s^f pontokból. Továbbá, legyen $\sigma^+ = \sigma(x_+ s_+, \mu_+)$. Annak érdekében, hogy igazoljuk, hogy az algoritmus jól definiált, olyan értékeket kell keressünk a θ és τ paraméterekre, amelyekre egy fő iteráció után a $\sigma^+ < \tau$ feltétel fennáll.

7. Az algoritmus polinomialitása

A fenti lemmáknak olyan következményeit vizsgáljuk, amelyekre $\tau = \frac{1}{16}$ és $\theta = \frac{1}{8n}$.

7.1. Következmény. *Ha $\sigma(v) < \frac{1}{16}$ és $\theta = \frac{1}{8n}$, akkor $\omega(v) < \frac{1}{2\sqrt{2}}$.*

Bizonyítás: A 6.3. és a 6.8. lemmák alapján következik, hogy

$$4\omega(v)^2 \leq \|q\|^2 + (\|q\| + 2\sigma(v))^2 < \left(\theta n \frac{2 + 2\sqrt{\tau} + \tau}{1 - \sqrt{\tau}} \right)^2 + \left(\theta n \frac{2 + 2\sqrt{\tau} + \tau}{1 - \sqrt{\tau}} + 2\tau \right)^2.$$

A $\tau = \frac{1}{16}$ és $\theta n = \frac{1}{8}$ behelyettesítést elvégezve, a $4\omega(v)^2 < \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség adódik, amelyből következik, hogy $\omega(v) < \frac{1}{2\sqrt{2}}$. ■

7.2. Következmény. Ha $\sigma(v) < \frac{1}{16}$ és $\theta = \frac{1}{8n}$, akkor x^f és s^f szigorúan megengedettek.

Bizonyítás: Felhasználva a 6.1. lemmát és a 7.1. következményt, a

$$\sigma(v)^2 + 2\omega(v)^2 < \frac{1}{16^2} + \frac{1}{4} < 1$$

egyenlőtlenség adódik, tehát $x^f > 0$ és $s^f > 0$, vagyis az x^f és s^f szigorúan megengedettek lesznek. ■

7.3. Következmény. Egy felső határt tudunk meghatározni a $\sigma(v^+)$ mértékre. Fennáll a $\sigma(v^+) < \frac{1}{4}$ egyenlőtlenség.

Bizonyítás: A 6.2. lemmát felhasználva

$$\sigma(v^+) \leq \frac{\theta\sqrt{n} + \sigma(v)^2 + 2\omega(v)^2}{1 - \theta + \sqrt{(1 - \theta)(1 - \sigma(v)^2 - 2\omega(v)^2)}} \leq \frac{\theta\sqrt{n} + \tau^2 + 2\omega(v)^2}{1 - \theta + \sqrt{(1 - \theta)(1 - \tau^2 - 2\omega(v)^2)}}.$$

A $\tau = \frac{1}{16}$ illetve $\theta = \frac{1}{8n}$ értékeket behelyettesítve és felhasználva, hogy $n \geq 1$, következik a $\sigma(v^+) < \frac{1}{4}$ egyenlőtlenség. ■

Az alábbi következmény a centralitási mértékre vonatkozóan határoz meg egy felső határt egy fő iteráció végén.

7.4. Következmény. Az x_+ és s_+ vektorokra fennáll a $\sigma^+ = \sigma(x_+, s_+, \mu_+) < \frac{1}{16}$ egyenlőtlenség.

Bizonyítás: A (P_ν) és (D_ν) feladatokra az x^f és s^f kezdeti pontok mellett alkalmazzuk a 3.2. lemmát. ■

Nevezzünk ϵ -megoldásnak egy olyan (x, y, s) hármast, amelyre

$$\max(x^T s, \|b - Ax\|, \|c - A^T y - s\|) < \epsilon.$$

7.5. Következmény. Az algoritmus

$$8n \log \frac{\max\{n\zeta^2, \|r_b^0\|, \|r_c^0\|\}}{\epsilon}$$

számú fő iterációt hajt végre.

Bizonyítás: Mivel minden lépésben a μ és ν értékét az $1 - \theta$ szorzóval csökkentjük, a 3.6. lemmához hasonlóan igazolható, hogy az algoritmus

$$\frac{1}{\theta} \frac{\max\{n\zeta^2, \|r_b^0\|, \|r_c^0\|\}}{\epsilon}$$

fő iteráció alatt határoz meg egy ϵ -megoldást. A $\theta = \frac{1}{8n}$ értéket behelyettesítve következik az állítás. ■

Felhasználva, hogy minden fő iteráció két belső iterációból áll, az alábbi tételt kapjuk.

7.6. Tétel. *Ha (P) és (D) megengedettek és $\zeta > 0$ úgy, hogy $\|\bar{x} + \bar{s}\|_\infty \leq \zeta$, ahol $\bar{x}$ a (P) , $(\bar{y}, \bar{s})$ pedig a (D) feladat optimális megoldása, akkor az algoritmus legtöbb*

$$16n \log \frac{\max\{n\zeta^2, \|r_b^0\|, \|r_c^0\|\}}{\epsilon}$$

belső iteráció után határoz meg egy ϵ -megoldást a (P) és (D) feladatra. ■

8. Következtetés

Egy új nem megengedett belsőpontos algoritmust határoztunk meg, amely új keresési irányokat használ fel a centrális út követése céljából. A centralizálási egyenletre a $\varphi(t) = \sqrt{t}$ függvényt alkalmaztuk, és a Newton-módszer segítségével kaptuk meg az új elmozdulásvektorokat. Igazoltuk, hogy az algoritmus polinóm időben talál meg egy ϵ -megoldást. Az elemzés során kimutattuk, hogy egy adott iterációban elegendő egy centralizálási lépést tenni annak érdekében, hogy az algoritmus jól meghatározott legyen.

Hivatkozások

- [1] J.F. Bonnans and F.A. Potra. Infeasible path-following algorithms for linear complementarity problems. *Mathematics of Operations Research*, 22(2):378–407, 1997.
- [2] Zs. Darvay. New interior point algorithms in linear programming. *Advanced Modeling and Optimization*, 5(1):51–92, 2003.

- [3] G. Gu, H. Mansouri, M. Zangiabadi, Y.Q. Bai, and C. Roos. Improved full-Newton step $O(nL)$ infeasible interior-point method for linear optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 145(2):271–288, 2010.
- [4] N.K. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373–395, 1984.
- [5] M. Kojima, N. Megiddo, and S. Mizuno. A primal-dual infeasible-interior-point algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, 61(1-3):263–280, 1993.
- [6] I.J. Lustig. Feasibility issues in a primal-dual interior-point method for linear programming. *Mathematical Programming*, 49(1-3):145–162, 1990.
- [7] H. Mansouri, T. Siyavash, and M. Zangiabadi. A path-following infeasible interior-point algorithm for semidefinite programming. *Iranian Journal of Operations Research*, 3(1):11–30, 2012.
- [8] F. A. Potra. A quadratically convergent predictor-corrector method for solving linear programs from infeasible starting points. *Mathematical Programming*, 67(1-3):383–406, 1994.
- [9] F. A. Potra. An infeasible-interior-point predictor-corrector algorithm for linear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 6(1):19–32, 1996.
- [10] C. Roos. A full-Newton step $O(n)$ infeasible interior-point algorithm for linear optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 16(4):1110–1136, 2006.
- [11] Gy. Sonnevend. An "analytic center" for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming. In A. Prékopa, J. Szelecsán, and B. Strazicky, editors, *System Modelling and Optimization: Proceedings of the 12th IFIP-Conference held in Budapest, Hungary, September 1985*, volume 84 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 866–876. Springer Verlag, Berlin, West-Germany, 1986.

- [12] K. Tanabe. Centered Newton method for linear programming: Interior and 'exterior' point method. In K. Tone, editor, *New Methods for Linear Programming*, volume 3, pages 98–100. 1990. In Japanese.
- [13] R.J. Vanderbei. *Linear Programming: Foundations and Extensions*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.
- [14] S.J. Wright. *Primal-Dual Interior-Point Methods*. SIAM, Philadelphia, USA, 1997.
- [15] Y. Ye. *Interior Point Algorithms, Theory and Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1997.
- [16] Y. Zhang. On the convergence of a class of infeasible interior-point methods for the horizontal linear complementarity problem. *SIAM Journal on Optimization*, 4(1):208–227, 1994.

1. Függelék

A témavezetőnk által meghatározott kutatási cél egy olyan új, nem megengedett belsőpontos algoritmus kidolgozása volt, amely egy sajátos keresési irányra épül. Ugyanakkor az algoritmus elemzése is egy fontos feladat volt, mivel a belsőpontos módszerek esetén lényeges szerepe van a polinomialitás bizonyításának.

A belsőpontos algoritmusokra vonatkozó ismereteink elmélyítése érdekében áttanulmányoztuk a szakirodalmat. Először a lineáris optimalizálásra vonatkozó hagyományos primál-duál algoritmusokat vizsgáltuk. Ezt követően a nem megengedett algoritmusokkal foglalkoztunk, amelyeknek az a sajátosságuk, hogy a kezdeti pontról nem feltételezzük, hogy belső pont.

A belsőpontos módszerek esetén a keresési irányok megválasztásának fontos szerepe van, mivel ez lehetőséget teremt a következő pont meghatározására. Ennek érdekében általában a Newton-módszert alkalmazzuk, majd különböző hosszúságú lépéseket tehetünk meg az adott irányban. A nem megengedett belsőpontos algoritmusok körében elért egyik legújabb eredmény egy olyan módszer megadása, amelyben a lépéshossz mindig 1. Ezt teljes Newton-lépéses algoritmusnak nevezzük. Ez az algoritmus minden iterációban egy megengedettségi lépést és néhány centralizálási lépést tesz meg. Ennek segítségével igyekszünk biztosítani azt, hogy a feladatbeli feltételek által meghatározott poliéder belsőjébe kerüljünk, és ne távolodjunk el a centrális úttól.

Dolgozatunkban egy új teljes Newton-lépéses algoritmust vezettünk be új keresési irányok segítségével. Igazoltuk az algoritmus polinomialitását, és az elemzés során bizonyítottuk, hogy iterációnként elegendő egy megengedettségi és egyetlen centralizálási lépést tenni. A bonyolultság vizsgálata érdekében megfelelően kellett megválasztani a redukciós, illetve a centralitási paramétereket. Ehhez C++ programozási nyelvben írtunk egy számítógépes programot.

Összegezve, sikerült az eredeti kutatási célokat teljesíteni. Ezenkívül meghatároztuk az első olyan teljes Newton-lépéses, nem megengedett belsőpontos algoritmust, amely iterációnként egyetlen centralizálási lépést tesz meg.