

XXII. Országos Tudományos Diákköri Konferencia

Fizika, Földtudományok és Matematika Szekció

Kolozsvár, 2015. április 18–20.

Valószínűségi gráfok fraktáldimenzió függvényeinek számítógépes közelítése

Szerző:

Simon Levente

Babeş- Bolyai Tudományegyetem,

Matematika és Informatika kar,

Számítógépes matematika szak,

mesteri képzés, I. év

Témavezető:

dr. Soós Anna egyetemi docens

Babeş- Bolyai Tudományegyetem,

Matematika és Informatika kar,

Magyar Matematika és Informatika Intézet

A dolgozat egy olyan jellemzőt keres valószínűségi hálózatokra, amely független az egyedi példányoktól. Ezt a feladatot a gráfok fraktáldimenziójának értelmezésén keresztül közelíti meg.

A feladat: az Erdős-Rényi, a Watts-Strogatz és a Barabási-Albert hálózatok fraktáldimenziójának vizsgálata különböző gráfábrázolások és a gráfokat meghatározó paraméterek függvényében.

A dolgozat szimulációi igazolták, hogy a csúcsok körön történő elhelyezése, a pontok véletlen elhelyezése illetve a Fruchterman-Reinhold ábrázolás esetén is nő a fraktáldimenzió a gráf sűrűségének függvényében.

Hangsúlyosabb: mindhárom hálózattípus esetén a fraktáldimenzió értékét az ábrázolás típusa és a hálózatok paraméterei határozzák meg, tehát a fraktáldimenzió értéke nem függ az egyedi példányoktól.

Kulcsszavak: fraktál, doboz-dimenzió, Erdős-Rényi hálózatok, Watts-Strogatz hálózatok, Barabási-Albert hálózatok, gráfábrázolás, Fruchterman-Reinhold algoritmus, szimuláció.

Tartalomjegyzék

1. Motiváció	4
2. Kontextus	5
2.1. Gráfmodellek	5
2.2. Fraktálok	10
2.3. A gráfok fraktáldimenziójának számítógépes közelítése	13
3. Argumentáció	18
3.1. Erdős-Rényi gráfok fraktáldimenziója	18
3.2. Watts-Strogatz gráfok fraktáldimenziója	20
3.3. Barabási-Albert gráfok fraktáldimenziója	23
4. Következtetés	25
5. A felhasznált programok	26
6. Mellékletek	29

1. Motiváció

Ha egy gráfot ábrázolunk a síkban, akkor célunk ezzel legtöbbször a szemléltetés: az ábrától elvárjuk, hogy érzékeltesse a gráf néhány, általunk meghatározott tulajdonságát. Például helyezze egymáshoz közel egy klikk¹ csúcspontjait és válassza el a gráf klikkjeit egymástól.

Ha tekintjük a négy csúcspontból álló teljes súlyozatlan gráfot és azt a síkban szeretnénk ábrázolni, akkor máris szembeütközünk a gráfábrázolás nehézségével. A gráf nem ábrázolható a síkban úgy, hogy megtartsa az élek hosszúságának egyenlőségét, azaz ennek a négy csúcspontból álló gráfnak nem létezik legjobb ábrázolása a síkban.

Magától adódik a kérdés: hogyan jellemezhető egy gráfábrázolás? Ha jellemezhető, akkor összehasonlító-e két ábrázolás?

A dolgozat három gráfábrázolást helyez egymás mellé, összehasonlítja a csúcspontok körön történő elhelyezését, a pontok egyenletes eloszlás szerinti véletlen és az erő alapú - a realitást iterálóan közelítő - Fruchterman-Reingold síkbeli ábrázolásokkal.

Az ábrázolások esetén egyértelműen fontos, hogy a csúcspontok mennyire helyeződnek egymáshoz közel az ábrán. E tulajdonság mérésének szükségessége indokolja a fraktáldimenzió értelmezését az ábrázolt gráfok esetén. A gráfok fraktáldimenziójának értelmezése lehetővé teszi annak mérését, hogy egy adott gráf adott ábrázolása mennyire tölti ki a sík egy tetszőleges részhalmazát.

Az Erdős-Rényi, a Watts-Strogatz illetve a Barabási-Albert hálózatok fraktáldimenzióját a típusokat meghatározó paraméterek illetve ezáltal az gráfsűrűség² függvényében tekinti át a projekt. Az eredmények alapján bármely gráfábrázolás esetén a fraktáldimenzió nő a gráf sűrűségének növekedésével.

¹A klikk a gráfelméletben olyan csúcspontok halmazát jelenti, aminek bármely két eleme között van él.

²Egy gráf élsűrűsége az az arányszám, amely meghatározza, hogy az össze lehetséges él közül, hány létezik az aktuális gráfban.

Hangsúlyosabb, egyben a legfőbb hipotézis, hogy a gráfok fraktáldimenziója nem függ a modellek egyedi példányaitól, hanem csak azok paramétereitől és ábrázolásától. Végül, de nem utolsó sorban, feltételezzük, hogy a gráfsűrűség egy korlátján felül a fraktáldimenzió az ábrázolástól is független, azaz a vizsgált ábrázolások esetén a mért fraktáldimenzió értékek közötti különbség egy adott küszöbérték alatt lesznek.

2. Kontextus

Jelen fejezet a gráfmodellek illetve a fraktdimenzió értelmezéséhez szükséges fogalmakat tartalmazza. Először a gráfelmélet alapfogalmain keresztül ismerteti az Erdős-Rényi, a Watts-Strogatz és a Barabási Albert modelleket, majd azok legfőbb tulajdonságait. A gráfábrázolásokat a fraktál és a fraktáldimenzió fogalmainak értelmezése követi, majd a fraktáldimenzió számítógépes közelítésének bemutatásával zárul a fejezet.

2.1. Gráfmodellek

Legyen $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ a csúcspontok és $E \subseteq V \times V$ az élek halmaza.

A $G = (V, E)$ párt gráfnak, a G rögzített csúcsainak és éleinek halmazát pedig részgráfnak nevezzük. Ha $E = \emptyset$, akkor a gráfot üresnek, $E = V \times V$ esetben pedig teljesnek mondjuk.

Ha az E kétváltozós reláció rendezett párokból áll, akkor irányított gráfról, máskülönben irányítatlanról beszélünk. Az irányítatlan gráfokat kezelhetjük speciális irányított gráfokként is, amelyek esetén megköveteljük, hogy: $\forall (x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E$.

Mivel a fraktál- tulajdonságok elemzése során irányítatlan gráfokkal dolgozunk, ezért a további definíciókat csak irányítatlan gráfok esetén adjuk meg. A dolgozatban ezentúl gráf kifejezés alatt irányítatlan gráfot értünk.

Az x, y csúcspontokat szomszédosnak nevezzük, ha létezik $(x, y) \in E$. Az $(x, x) \in E$

éleket hurokélnek mondjuk. Ha x és y csúcspontok között több él van, akkor azokat párhuzamos éleknek tekintjük. Megjegyezzük, hogy a továbbiakban eltekintünk mind a hurok-, mint a párhuzamos élektől.

Az élekhez mérőszámot rendelhetünk, ez esetben a gráfot súlyozottnak nevezzük. Ez esetben az $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt súlyfüggvénynek, az $x \in Im(f)$ értékeket pedig súlyoknak tekintjük. Ha a súlyok megegyeznek, azaz $|Im(f)| = 1$, akkor a gráf súlyozatlan.

Adott csúcspontra illeszkedő élek számát fokszámnak nevezzük, azaz $d_G(x) = \{(x, y) \in E | x \text{ rögzített, } y \in V\}$. A nulla fokszámu csúcspontot pedig izoláltnak mondjuk. A fokszámeloszlás azt adja meg, hogy a különféle fokszámmal rendelkező csúcsok milyen gyakran fordulnak elő a gráfban.

Az $e_1 = (x_1, x_2), e_2 = (x_2, x_3), \dots, e_n = (x_n, x_{n+1})$ élek sorozatát sétának nevezzük. Ha az $x_1 = x_{n+1}$, akkor a séta zárt, különben nyílt. A séta hossza az őt alkotó élek száma, jelen esetben: n . Ha a séta nem érinti kétszer ugyanazt a csúcst, azaz $x_i \neq x_j, \forall i \neq j, i, j = \{1, 2, \dots, n, n+1\}$, akkor útról beszélhetünk. Legrövidebb út az, amelynek hossza minimális. Két csúcs távolsága a köztük lévő legrövidebb út hossza. Ha nem létezik ilyen út, akkor a távolságot $+\infty$ -nek tekintjük. Egy G gráf átmérője a leghosszabb, sugara pedig a legrövidebb út a gráfban.

Egy gráfot összefüggő, ha bármely két csúcspontja között létezik út. Ha a gráf nem összefüggő a legtöbb csúcspontból álló összefüggő részgráfját a gráf legnagyobb komponensének nevezzük. A komponensek számát azon összefüggő részgráfok száma adja, amelyek egymással nem függnek össze.

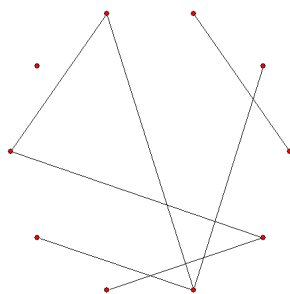
A zárt séta útbeli analógja a kör. Egy n hosszú kör éleinek száma n , kezdő- illetve végpontja megegyezik, de a kezdeti- illetve végállapoton kívül egy csúcspontot legfeljebb egyszer tartalmaz. A 3 hosszúságú köröket háromszögnek nevezzük. A k -klikk egy gráfban azon k darab csúcspont halmaza, amelyek közül bármely kettő szomszédos. Triviális, hogy minden háromszög 3-klikk is egyben és fordíva.

A dolgozat klaszternek nevezi a valamiképpen egymáshoz közelálló csúcsok halmazát, klaszterezettségnek pedig a megjelenő klaszterek arányát az összes lehetségeshez képest. Klaszterezettség alatt ezután a háromszögek arányát értjük az összes lehetséges háromszöghöz képest.

Az Erdős-Rényi gráfmodell két egyenértékű véletlen gráfok előállítására alkalmas hálózatelméleti modell:

- Erdős Pál és Rényi Alfréd magyar matematikusok 1959-ben be $G(n, M)$ modelljüket, amely szerint az összes n darab csúcsponttal és M darab éllel rendelkező gráf közül egyenletes eloszlás szerint választunk egyet.
- Edgar Gilbert szintén 1959-ben bevezetett modelljében az n darab csúcspont között minden él ugyanakkora, egymástól független, p valószínűséggel létezik. A két modell ekvivalenciája bizonyított.

Egyszerű végiggondolás alapján a fokszámeloszlás pedig binomiális eloszlást követ.



1. ábra.

Erdős-Rényi gráf: $n = 10, p = 0.1$

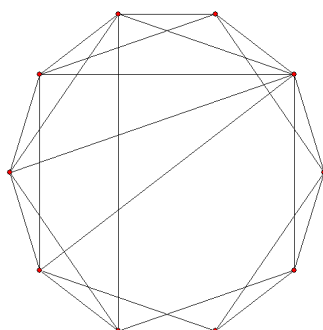
A következő modell szociológiai szempontból finomítja az Erdős-Rényi gráfot. Itt már nem feltételezzük élek létezésének azonos valószínűségét, hanem a csúcspontokat mindig összekötjük a hozzájuk legközelebiekkel. A hálózat többi élét pedig az Erdős-Rényi gráfokhoz hasonlóan egy előre rögzített valószínűséggel húzzuk be úgy, hogy ezek valószínűsége megegyezik és az élek függetlenek egymástól.

Adott G Watts-Strogatz gráf paraméterei a csúcsponatok száma (n), a szomszédok száma (k , amely szimmetrikus esetben kötelezően páros szám) és a rögzített valószínűség (p), amely a többi él létezését meghatározza.

Matematikailag megfogalmazva két, egymástól kissé eltérő változata létezik a modellnek:

- az első változatban: a k szomszéd a valószínűségi élektől függetlenül mindig létezik
- az áthúrozásos modellben pedig: ha a p valószínűség szerint behúznak egy új élet, akkor egy szomszédsági élt (ha még van ilyen) véletlenszerűen eltávolítunk.

Megjegyzés: a dolgozat során a Watts-Strogatz modell alatt a modell első változatát értjük. A használt modell által generált hálózatok fokszámoszlása, az Erdős-Rényi gráfokhoz hasonlóan, is binomiális. Különbség viszont az, hogy a Watts-Strogatz gráfok fokszáma k konstanssal nagyobb lesz.



2. ábra.

Watts-Strogatz gráf: $n = 10$, $k = 4$, $p = 0.1$

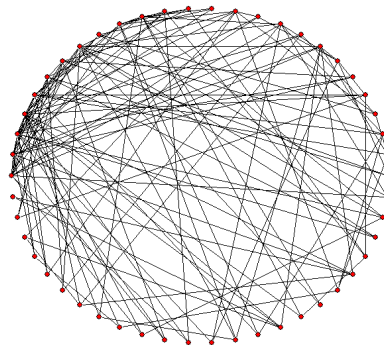
A Watts-Strogatz modell erőssége a klaszterezettségében rejlik. Az Erdős Rényi gráfokkal ellentétben e hálózatok erősen klaszterezettek, például: szimmetrikus ábrázolás és $k = 4$ esetén a 3-klikk klaszterek száma nagyobb vagy egyenlő n -nél.

Az 1998-ban publikált Watts-Strogatz modell nem rendelkezik a valós hálózatokban gyakran előforduló fokszámoszlással, viszont megoldotta a klaszterezettség garantálásának évekig

elhúzódó dilemmáját. A probléma megoldását az Albert Réka és a Barabási Albert-László által bevezetett modell jelenti, amely a exponenciális fokszámeloszlású hálózatok generálására alkalmas.

A Barabási-Albert hálózatok létrehozása során egy irányítatlan gráfot hozunk létre. Kezdetben egy pontosan nem definiált, legalább két csúcspontból álló hálózattól indulunk ki, amelyben minden csúcsponthoz legalább egy él vezet. Majd minden egyes lépésben egy újabb csúcsponthoz hozzá a gráfhoz, amely a régi gráfhoz legfeljebb rögzített számú éllel kapcsolódik hozzá úgy, hogy a kapcsolódás valószínűsége arányos azok pillanatnyi fokszámával.

Tehát a preferenciális kapcsolódás modellben három paramétere van a gráfnak: k a kezdeti gráf csúcspontjainak száma, m az új csúcspontok élszáma és n a csúcspontok száma a generálás végén. Az egyszerűség kedvéért a kezdeti m darab csúcsponthoz egy teljes részgráf.



3. ábra.

Barabási-Albert gráf: $k = 3$, $m = 3$, $n = 50$.

Az ábrán a kezdeti 3-kliktől csúcspontjaink mind-mind nagyon sok éllel rendelkeznek, de a később hozzáadott csúcsok sokkal kevesebbel (a legvégén hozzáadottak általában hárommal).

A Barabási-Albert hálózatok generálása egyszerű. Első lépésben egy vektorba írjuk a kezdeti gráf éleit úgy, hogy a vektor páratlan indexű helyeire az élek egyik csomópontja, a páratlan indexűekre pedig az élek második csomópontja kerül.

Ha a kezdeti gráf egy 3-kliktől, akkor a következőképpen: 1, 2, 1, 3, 2, 3.

Most hozzáadunk egy új csúcspontot a hálózathoz úgy, hogy az legfeljebb m darab éllel rendelkezzen. Generálunk m darab számot az 1 és a vektor aktuális hossza közötti természetes számok közül. Ha a példában az $m = 3$, akkor a 4. csúcs generált száma lehetnek a például következők: 2, 3, 5. Így összekötjük a 4. csúcspontot a vektor 2., 3. és 5. indexén található csúcsponttal, majd az éleket hozzáadjuk a vektorhoz. Például: 1, 2, 1, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 4.

Ezt a lépéssorozatot addig ismételjük, ameddig az összes csúcspont éleit meghatározzuk. Az ábrán ez a csúcspont az 50.-et jelenti.

A gráfmodellek fraktáldimenziójának meghatározásához szükséges a fraktálok alapfogalmainak és a fraktáldimenzió ismertetése, ezeket tartalmazza a következő alfejezet.

2.2. Fraktálok

Benoit Mandelbrot lengyel származású matematikus 1967-es Science cikkében tette fel a következő kérdést: "Milyen hosszú Nagy-Britannia tengerpartja?". A kérdésre, amely később elvezetett a fraktál értelmezéséhez, a válasz az volt, hogy függ a mérőegység megválasztásától. Konkrétabban: minél kisebb a mérőegység, annál nagyobb lesz a tengerpart hossza.



4. ábra.

Forrás: [7]

Az elnevezést a latin *fractus* szóból ered és *töröttet* vagy *törést* jelent. Mandelbrot azokat az alakzatokat nevezte fraktáloknak, amelyek lényegesen szabálytalanabbak, töredezetebbek a

klasszikus geometriában előforduló alakzatoknál.

A fraktálok fogalmáról egyelőre nincs teljes egyetértés a szakirodalomban, a kérdés bizonyos értelemben máig nyitott. Éppen ezért: Mandelbrot és Kenneth Falconer azt javasolták, hogy ne kössük meg a fraktál fogalmát és fogadjuk el, hogy különböző helyzetekben más-más lehet a fogalom határa.

Falconer az alábbi tulajdonságok teljesülése esetén nevez egy halmazt fraktálnak:

- finom struktúrája van
- túl szabálytalan ahhoz, hogy leírható legyen a klasszikus geometriában
- ön-hasonló (esetleg csak közelítőleg vagy statisztikusan)
- egyszerűen definiálható

Jelen dolgozatban a fraktáldimenzió kifejezés mögött a Hausdorff-dimenzió fogalma található. Mivel a dolgozat a gráfok fraktáldimenzióját majd $\mathbb{R}^2$ -ben vizsgálja, ezért a további fogalmakat, tételeket és bizonyításokat az euklideszi térben értelmezi.

Tétel[Bolzano-Weierstrass]: Az $\mathbb{R}^m$ euklideszi tér X részhalmaza akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt. Megjegyzés: a tétel bizonyítása megtalálható a [8]-ban.

■

Adott $X \in \mathbb{R}^m$ illetve $A \subset X$ és $r > 0$ esetén az A r -környezete:

$$A_r = \{y | d(x, y) < r : \forall x \in A\}$$

Legyen $\mathcal{C}(X)$ az X nemüres, kompakt részhalmazainak sokasága. A $\mathcal{C}(X)$ Hausdorff-metrikája a következő:

$$h(A, B) := \inf \{r : A \subseteq B_r \text{ és } B \subseteq A_r\}.$$

Tétel: A Hausdorff-metrika egy metrika a $\mathcal{C}(X)$ -n. Megjegyzés: a tétel bizonyítása megtalálható a [12]-ben. ■

Legyen az F az X egy részhalmaza, ekkor

$$\text{diam}F := \sup\{d(x, y) : x, y \in F\}$$

az F halmaz *átmérőjét* jelöli. Az A halmaz $\{F_1, F_2, \dots\}$ lefedését r -lefedésnek nevezzük, ha $\text{diam}F_i < r$ minden i -re, ahol $i = 1, 2, \dots$. Tetszőleges $r > 0$ és $s > 0$ valós számra legyen

$$\mathcal{H}_r^s(A) := \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}F_i)^s,$$

ahol az infimumot az A halmaz összes r -lefedésére vesszük.

Ha $r_1 > r_2$, akkor $\mathcal{H}_{r_1}^s(A) \leq \mathcal{H}_{r_2}^s(A)$, hiszen A minden r_2 lefedése r_1 lefedés is. Tehát létezik:

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{H}_r^s,$$

A $\mathcal{H}^s(A)$ számot az A halmaz s -dimenzió *Hausdorff-mértékének* nevezzük.

Tétel: Ha valamely $s > 0$ számra $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$, akkor $\mathcal{H}^t(A) = 0$ minden $t > s$ szám esetén. Megjegyzés: a tétel bizonyítása megtalálható a [12]-ben. ■

Tehát, ha $\mathcal{H}^s(A)$ az s paraméternek monoton csökkenő függvénye, azaz $F(s) := \mathcal{H}^s(A)$ függvényre egyértelműen létezik olyan $s_0 \in [0, +\infty]$, hogy ha $t < s_0$, akkor $\mathcal{H}^t(A) = 0$ illetve ha $t > s_0$, akkor $\mathcal{H}^t(A) = +\infty$. Az s_0 számot az A halmaz *Hausdorff-dimenziójának* nevezzük és $\dim_H$ -val jelöljük. Ez a szám lehet nulla, pozitív illetve végtelen is.

A lefedési illetve az induktív dimenziók alapján ismeretes, hogy $\mathbb{R}^n$ -beli alakzatok Hausdorff-dimenziója kisebb vagy egyenlő, mint n . Végül, de nem utolsó sorban a fraktáldimenzió számítógépes közelítéséhez szükséges eszközök következnek. A doboz-dimenzió és a Hausdorff-

dimenzió viszonyának ismertetését a gráfábrázolások megvalósítása követi, a fejezetet pedig a fraktáldimenzió közelítésének bemutatása zárja.

2.3. A gráfok fraktáldimenziójának számítógépes közelítése

A fraktáldimenzió számítógépes közelítésének legjobb és legismertebb eszköze a *doboz-* vagy *box-dimenzió*.

Legyen F az n -dimenziós tér tetszőleges, korlátos részhalmaza. Tekintsük az s oldalhosszúságú n -dimenziós kockákat a térben:

$$[m_1s, (m_1 + 1)s] \times [m_2s, (m_2 + 1)s] \times \dots \times [m_ns, (m_n + 1)s]$$

ahol $m_i \in \mathbb{Z}$ bármely $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Jelölje $N_s(F)$ ezek közül azoknak a kockáknak a számát, amelyeknek van közös pontjuk az F halmazzal. Ekkor

$$\dim_B F := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log N_s(F)}{\log(1/s)}$$

az F halmaz doboz-dimenziója.



5. ábra.

Forrás: Wikipédia

[http : //en.wikipedia.org/wiki/Minkowski – Bouligand_dimension](http://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski-Bouligand_dimension)

Egy doboz-dimenzió egy egyenértékű értelmezése a következő: fedjük le az F halmazt legfeljebb s átmérőjű halmazokkal úgy, hogy a lefedő halmazok száma minimális legyen. A lefedő halmazok számát jelöljük $N'_s(F)$ -fel. Belátható, hogy

$$N_{s\sqrt{n}}(F) \leq N'_s(F),$$

ahol n a vizsgált alakzat térbeli dimenziószáma. Ha $s\sqrt{n} < 1$, akkor könnyen belátható, hogy

$$\frac{\log N_{s\sqrt{n}}(F)}{\log(1/s\sqrt{n})} \leq \frac{\log N'_s(F)}{\log(1/s\sqrt{n})},$$

és ha $s \rightarrow 0$, akkor

$$\dim_B F = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log N'_s(F)}{\log(1/s)}$$

Összegezve: tehát a két értelmezés ekvivalens.

Ha létezik a $\dim_B F$ határérték, akkor $N_s(F)$ egyike a következőknek:

- a legkisebb száma az s sugarú köröknek, amelyek lefedik F -t.
- a legkisebb száma az s átmérőjű kockáknak, amelyek lefedik F -t.
- a száma azon s átmérőjű kockáknak, amelyek metszik az F -t.
- a legkisebb száma az s átmérőjű halmazoknak, amelyek lefedik F -t.
- a legnagyobb száma azon s sugarú diszjunkt köröknek, amelyeknek a középpontja az F -ben van.

Bizonyított, hogy a doboz-dimenzió jól közelíti a Hausdorff-dimenziót, a bizonyítás megtalálható például [12]-ben. ■

A közelítés során egyre csökkentjük a kockák s oldalhosszát és esetenként kiszámoljuk az $N(s)$ -t. Az így kapott $\log(1/s)$ és $\log N(s)$ adatokra legkisebb négyzetek módszerével egy egyenest illesztünk, amelynek tangense az adott fraktál alakzat dimenziójaként értelmezendő.

Amint a bevezető is tartalmazta: a gráfábrázolás nem egyértelműen jól megoldható feladat. Viszont eléggé nagy vagy eléggé sűrű gráfok esetén feltételezhető, hogy a szemléletesség szempontjából ekvivalens lehet több ábrázolási algoritmus is. A MATLAB-ban írt szimulációk három gráfábrázolást fraktáldimenzióját közelítik.

- Első esetben a gráf pontjait egy körön ábrázoljuk, majd az éllistának megfelelően összekötjük ezeket.
- Második esetben a gráf pontjait egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint, helyezzük el a síkban, majd ismét összekötjük a megfelelő csúcspontokat.
- Harmadik esetben a Fruchterman-Reingold algoritmussal ábrázoljuk a gráfokat.

Amíg az első két esetben elvetjük az élhosszúságok arányosságának elvét, addig a harmadik eset éppen ezt próbálja megvalósítani. A körön illetve a véletlenszerűen elhelyezett csúcspontok a gráfábrázolás két végletét adják: amikor egy körön helyezzük el a pontokat, akkor azok geometriai helye determinisztikus; viszont ha egyenletes eloszlás szerint véletlenül, akkor azok semmilyen módon nem függnek egymástól.

Mindhárom ábrázolást MATLAB-ban írt függvények valósítják meg, a Fruchterman-Reingold algoritmus megvalósítása felhasználja Scott D. White implementációját³.

A gráfábrázolásokat a fraktáldimenzióval próbáljuk jellemezni, amelyet a doboz-dimenzió módszerével közelítünk meg. Legfőképpen arra keressük a választ, hogy az Erdős-Rényi, a

³Scott D. White honlapja: [http : //intersci.ss.uci.edu/wiki/index.php/Scott_D._White](http://intersci.ss.uci.edu/wiki/index.php/Scott_D._White), az implementáció: [http : //intersci.ss.uci.edu/wiki/index.php/Intro_to_Matlab](http://intersci.ss.uci.edu/wiki/index.php/Intro_to_Matlab), Letöltés ideje: 2013. 4. 12.

Watts-Strogatz illetve a Barabási-Albert gráfok fraktáldimenziója mennyiben függ(etlen) az egyedektől és mennyiben függ csak a gráfokat meghatározó paraméterektől.

A fraktáldimenzió közelítése során Erdős-Rényi, a Watts-Strogatz illetve a Barabási-Albert gráfokat generálunk a modellek paramétereinek megadásával, majd mindegyik gráf esetén a doboz-dimenzió segítségével közelítjük a Hausdorff-dimenziót.

A dimenzió közelítése során a szimulációk:

- beolvassák egy gráf adatait
- ábrázolják csúcspontokat és az élek függvényében összekötik azokat
- Az i változóval 1-től indulva egészen egy rögzített felső határig: $i \times i$ méretű négyzetrácsot helyeznek a gráf ábrájára. Esetenként megszámlálják, hogy hány kis négyzettel van közös pontja a gráf ezen ábrázolásának.

Így egy függvényt kapunk, amely így összegeezhető: $nr : \{1, 2, \dots, box\} \rightarrow \mathbb{N}$, ahol $nr(i)$ azt jelöli, hogy az $i \times i$ méretű négyzetrács hány kis négyzete metszi az gráf ábráját.

Mivel a négyzetrács felosztásának határa tetszőlegesen állítható, ezért triviális okokból adódik, hogy egy kellően nagy felosztás után a metszett kis négyzetek száma gyakorlatilag konstans lesz. Éppen ezért, a *box_limit* paraméter növelésével egy idő után azt észleljük, hogy a tangens csökkenni kezd.

Ha a gráf vagy annak ábrázolása a valószínűségi, akkor minden vizsgált paraméterkombináció esetén több gráfpéldányt vizsgálunk, ezek dimenzióbecslését az X halmaz esetén $dim_{B,i}(X)$ -vel jelöljük, $i = 1, 2, \dots, n$, ahol n a megvizsgált gráfok száma úgy, hogy azok egyenlő paraméterekkel rendelkeznek.

Az adatokra mindig kiszámoljuk az átlagot és a korrigált tapasztalati szórásnégyzetet, amelyeket $E(X)$ -szel és $D^2(X)$ -vel jelölünk, ahol

$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^n \dim_{B,i}(X)}{n} \text{ illetve } D^2(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\dim_{B,i}(X) - E(X))^2.$$

Ha az X halmaz állandó, akkor elhagyjuk a jelölésekből.

Hogy a gráfok fraktáldimenziót összehasonlíthassuk fontos, hogy a dobozok számát mindig ugyanazon felső határig futtassuk és mindig ugyanazon az X halmazon ábrázoljuk őket. Az értékének azt a legnagyobb értéket érdemes venni, amelyre mindegyik gráf esetében növekvő függvény marad a nr függvény.

Az értékének több esetére is vizsgáltuk a nr függvény monotonitását. Mivel a felosztás növelésével egyre kisebb a különbség a dobozok oldalhosszúsága között, ezért már 20 körüli felosztásnál (amikor az oldalhosszúság kb. $\frac{1}{20}$) megszakad a nr függvény monotontása, viszont ez a megszakadás csak lokális. Azaz a függvény egy-két esetet eltekintve monoton növekvő marad.

A vizsgálatok alapján legtöbbször körülbelül a 150×150 -es felosztásig monoton a nr függvény. Éppen ezért a gráfok fraktáldimenzióinak számítógépes közelítése során a felosztás felső értékét végig 150-nek vesszük.

A technikai megkönnyítés végett az X lehet $[0, 1] \times [0, 1]$, hisz bármely két négyzet alakú részsík között képezhető bijektív leképezés.

A dolgozat következő fejezete a szimulációk eredményeit tartalmazza: különös tekintettel vizsgálja a modellek fraktáldimenziójának a gráfok paramétereitől való függőségét, majd az ábrázolások közötti mért fraktáldimenzió értékek közötti különbségek értelmezésére tér rá.

3. Argumentáció

A dolgozat alfejezetei sorra vizsgálják az Erdős-Rényi, a Watts-Strogatz illetve a Barabási-Albert gráfok fraktáldimenzióit. Először és legfőképpen a fraktáldimenzió gráfpéldányoktól való függetlenségét próbáljuk belátni, majd a gráfmodellek paramétereitől való függőségét nézzük a szimulációk értékeinek. Végül, mindhárom modell esetében megnézzük, hogy mekkora gráfsűrűség esetén csökken a különböző ábrázolások során mért fraktáldimenziók értéke mindig 0.1 alá.

3.1. Erdős-Rényi gráfok fraktáldimenziója

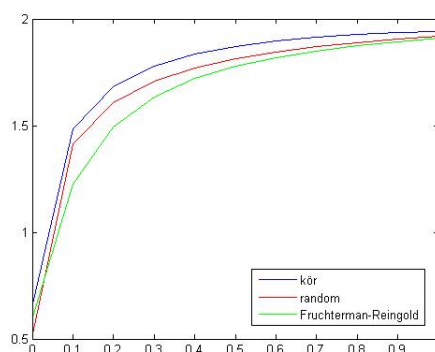
Az Erdős-Rényi hálózatok fraktáldimenzióinak becslésekor a p valószínűséget mindig 0.1-gyel növelve, esetenként ezer-ezer gráfot vizsgálunk meg. A gráfok csúcsszáma állandóan 100.

Tehát az bemeneti paraméterek a következők: $darab = 1000$, $n = 100$, p változó. Minden p esetre megvizsgáltunk az eredményeket, átlagot (E) és korrigált tapasztalati szórásnégyzetet (D^2) számoltunk.

Első esetben egy $r = 0.4$ sugarú körön, második esetben a pontokat véletlenszerűen helyez-
zük el. Harmadik esetben pedig a Fruchterman-Reingold algoritmussal ábrázoljuk a gráfokat.

A szimulációk eredményeit a 2. Függelték első táblázata tartalmazza. Megállapítható, hogy a szórásnégyzet gyakorlatilag nulla, hiszen mindhárom ábrázolás bármely paraméterezése esetén 0.001 alatt van az érték.

Nézzük a fraktáldimezió gráfsűrűségtől, a p valószínűségtől való függését.



6. ábra.

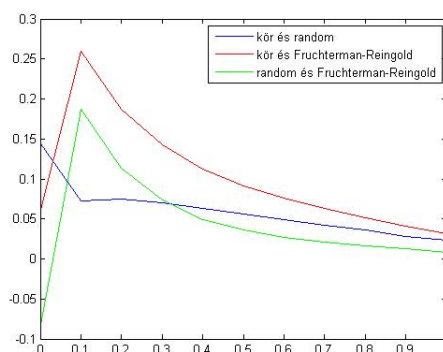
Az Erdős-Rényi gráfok fraktáldimenziójának változása a p függvényében.

A gráfok körön, véletlenszerűen illetve Fruchterman-Reingold algoritmussal ábrázolva.

Egyértelműen megállapítható, hogy a fraktáldimenzió a gráf sűrűségének növelésével egy időben nő. A növekedési függvény pedig nem lineáris. Nyitott kérdés, hogy a p -től való függőség milyen explicit függvénnyel közelíthető ebben az esetben.

Az ábrázolások során három-három különböző fraktáldimenzió értéket mértünk mindegyik vizsgált p valószínűség esetén. Most a különbségfüggvények vizsgálata következik, az adatokat a 2. Függelék második táblázatcsoportja tartalmazza.

Az ábra a csúcspontok körön ábrázolása és a véletlen elhelyezés értékeinek különbségét, a körön ábrázolás és a Fruchterman-Reingold algoritmus általi ábrázolás különbségét és a véletlen elhelyezés és a Fruchterman-Reingold algoritmus közötti eltérését mutatja be.



7. ábra.

Az ábrázolások során mért fraktáldimenzió értékek különbsége, ha a p változik. Az ábrázolások (körön, véletlenszerűen és Fruchterman-Reingold algoritmussal) mindig kettessel párosítva.

Mind a 7. ábra, mind a 2. Függelék 2a. és 2b. táblázatai mutatják, hogy az ábrázolások között különbségtétel a gráf sűrűségének növekedésével egyre kevésbé indokolt. Megállapítható, hogy a csúcspontok véletlenszerű elhelyezése és körön ábrázolása között kisebb a különbség, mint a Fruchterman-Reingold algoritmus eredményei és bármelyik ábrázolás között.

Hangsúlyosabb, hogy $p = 0.5$ sűrűség fölött, a 100 csúcsponttal rendelkező és rögzített p sűrűségű gráfok esetén 0.1 alatti bármely két ábrázolás esetén mért fraktáldimenzió értékek különbsége.

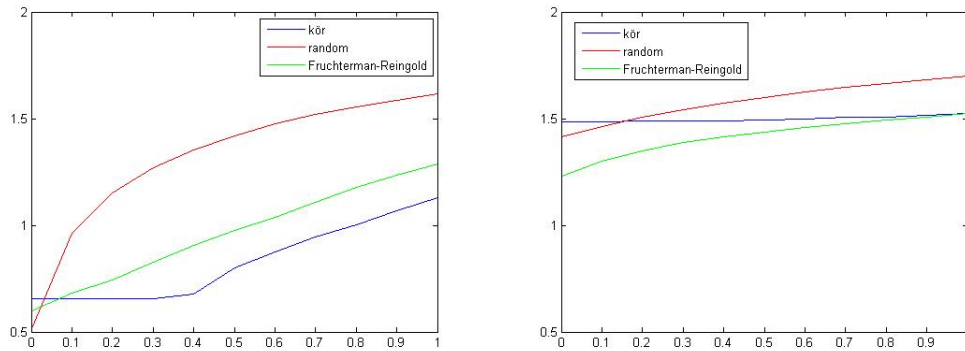
3.2. Watts-Strogatz gráfok fraktáldimenziója

A Watts-Strogatz gráfok fraktáldimenziójának becslése esetén, két paraméter függvényében érdemes vizsgálni a dimenzió értékének változását. A Watts-Strogatz gráfok ismertetőjele, hogy bármely csúcspont össze van kötve a hozzá legközelebbiekkel. Így a paraméterlista egy olyan k értékkel bővül, amely az ismert szomszédok számát jelöli. A körön történő ábrázolás szimetrikussága miatt feltételezhető, hogy a paraméter értéke mindig páros.

A fraktáldimenzió p valószínűségi paramétertől való függőségét azon minimális rögzített k érték esetén érdemes vizsgálni, amely szignifikánsan megváltoztatja a fraktáldimenzió értéket bármely p -re. A fraktáldimenzió k -tól való függőségének vizsgálatát $p = 0$ illetve $p = 0.1$ esetekben a 2. Függelék 3. táblázatcsoportja tartalmazza. Itt is, amennyiben a gráfok és ábrázolásuk nem determinisztikus, kombinációkként ezer-ezer gráfpéldányt vizsgáltunk meg.

A táblázatcsoport alapján kijelenthető, hogy a $p = 0$ és $p = 0.1$ esetekben a k növelésével mért fraktáldimenzió értékek növekedési tendenciái nagyon eltérnek a különböző ábrázolásokra. Most $k = 20$ rögzített paraméter mellett változtatjuk a p valószínűségi paramétert.

Hangsúlyosan vizsgáljuk, hogy a p növelésével mikor csökken bármely két ábrázolás közötti különbség 0.1 alá.

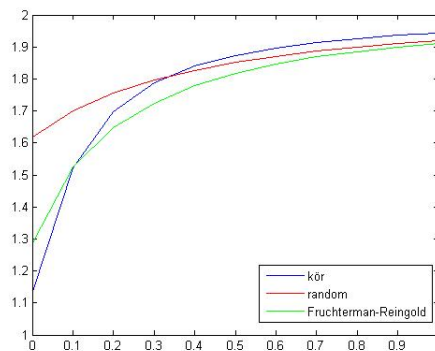


8. ábra.

A Watts-Strogatz gráfok fraktáldimenziójának változása k függvényében, $p = 0$ és $p = 0.1$ esetekben. A gráfok körön, véletlenszerűen illetve Fruchterman-Reingold alg.-sal ábrázolva.

Ha $k = 20$, akkor a gráf sűrűsége mindig nagyobb vagy egyenlő, mint 0.2. Most esetenként 0.1-gyel növeljük a valószínűségi paramétert, így esetenként 0.08-cal emelkedik a gráfsűrűség.

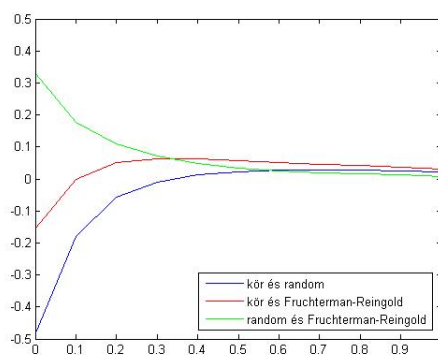
Triviális, hogy a gráfpéldányoktól itt is független a fraktáldimenzió, továbbá: gráfsűrűség növelésével a dimenzió értéke is növekszik. A p függvényében - a három ábrázolás esetén - a Watts-Strogatz gráfok fraktáldimenzió értékeit a 4. táblázat tartalmazza.



9. ábra.

A Watts-Strogatz gráfok fraktáldimenzióinak változása a p függvényében, ha $k = 20$. A gráfok körön, véletlenszerűen illetve Fruchterman-Reingold algoritmussal ábrázolva.

Ha az ábrázolásokat kettessével párosítjuk, ismét vizsgálhatóak lesznek a különbségfüggvények. Akárcsak az Erdős-Rényi gráfok esetében itt is adott a kérdés: mekkora gráfsűrűség felett kisebb a különbség 0.1-nél a különbség a mért dimenzió-értékek között, ha a p rögzített. Az adatokat az 5. táblázatcsoport tartalmazza.



10. ábra.

Az ábrázolások során mért fraktáldimenzió értékek különbsége, ha p változik, $k = 20$. Az ábrázolások (körön, véletlenszerűen és Fruchterman-Reingold algoritmussal) mindig kettessével párosítva.

Ha a p valószínűségi paraméter eléri a 0.3-at, akkor bármely különbségfüggvény kisebb, mint 0.1. Azaz $0.2 + 3 * 0.08 = 0.44$ sűrűségi gráfok esetén már nagyon kicsi bármely két ábrázolás fraktáldimenzió értékeinek különbsége.

Tehát a Watts-Strogatz gráfok esetén is kijelenthető: ha a gráfok sűrűsége nagyobb vagy egyenlő, mint 0.5, akkor a fraktáldimenzió szempontjából ekvivalens a körön ábrázolás, a csúcs-pontok véletlenszerű elhelyezése és a Fruchterman-Reingold algoritmus.

3.3. Barabási-Albert gráfok fraktáldimenziója

A Barabási Albert- gráfok sűrűségét leginkább azon m paraméter határozza meg, amelyik mindig a legújabb csúcspont leendő éleinek számát jelöli. Egyértelmű, hogy ha a kezdeti klikk pontjainak száma nagyon kicsi a végső gráf csúcsainak számához képest, akkor annak mérete nem folyásolja be a fraktáldimenzió értékét.

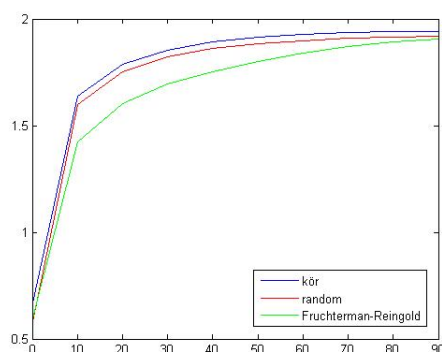
Éppen ezért, a Barabási-Albert gráfok fraktáldimenzió vizsgálata esetén $n = 100$ és $k = 4$ értékek mellett az m vizsgálati értékét mindig 10-zel növeljük. A szimulációk eredményeit a 2. Függelék 6. táblázata tartalmazza.

Az Erdős-Rényi és a Watts-Strogatz gráfokkal ellentétben a fraktáldimenzió értékfüggvényét nem a p valószínűségi paraméter, hanem az aktuálisan hozzáadott csúcs élszámának függvényében vizsgáljuk.

Például, ha $n = 100$, $k = 4$ és $m = 20$, akkor az első 21 csúcspont hozzáadásáig minden élet behúzzunk. Utánna, a 100 ponttal bezáróan, a preferenciális kapcsolódás elve szerint minden új csúcspontból húsz-húsz élet húzzunk a már meglévők felé.

Amíg a csúcspontok véletlen elhelyezése vagy a Fruchterman-Reingold algoritmus esetén a pontok tetszőleges permutálása nem változtat az ábrázoláson, addig a körön elhelyezés esetén számít a pontok sorrendje.

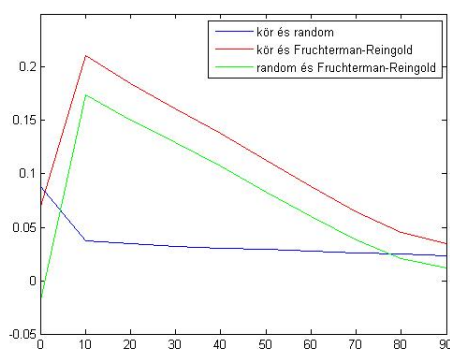
A szimulációk során a Barabási-Albert gráfok pontjait a gráfba csatolásuk sorrendjében egymás után helyezzük el a körön.



11. ábra.

A Barabási-Albert gráfok fraktáldimenzióinak változása az m függvényében, ha $n = 100$ és $k = 4$. A gráfok körön, véletlenszerűen illetve Fruchterman-Reingold algoritmussal ábrázolva.

A 11. ábra alapján: a Barabási-Albert gráfok fraktáldimenziója nő az m értékének emelése esetén. Az ábrázolások során mért fraktáldimenzió értékek különbségét a 7. táblázatcsoporthoz részletezi.



12. ábra.

Az ábrázolások során mért fraktáldimenzió értékek különbsége, ha az m változik. Az ábrázolások (körön, véletlenszerűen és Fruchterman-Reingold algoritmussal) mindig kettessel párosítva.

A 7. táblázatcsoporthoz szerint: a csúcspontok körön elhelyezése és a pontok véletlen ábrázolása között soha nem mutatkozik 0.1-nél nagyobb eltérés rögzített paraméterekkel rendelkező

Barabási-Albert gráfok esetén. A Fruchterman-Reingold algoritmus esetén mért fraktáldimenzió értékek szignifikánsan különbséget mutatnak az két egyszerűbb ábrázolás méréseivel, a különbség először $m = 60$ esetben esik mindig 0.1 alá. Ha $m = 50$, akkor a gráf sűrűsége 0.7 a illetve $m = 60$ esetben, akkor 0.8 feletti.

A fraktáldimenzió értékek különbsége a Fruchterman-Reingold ábrázolás Barabási-Albert gráfok esetén való alkalmazását is alátámasztja, hiszen az algoritmus ez esetben sokkal nagyobb sűrűségű gráfok esetén kerül közel a másik két ábrázoláshoz, mint az Erdős-Rényi vagy a Watts-Strogatz gráfok esetén.

4. Következtetés

A tapasztalati szórásnégyzetek mind az Erdős-Rényi, mind a Watts-Strogatz, mind a Barabási-Albert gráfok esetén igazolták, hogy a fraktáldimenzió független az egyedi példányoktól. A dimenzió növekedése a gráfsűrűség emelése esetén is mindig egyértelmű, emellett a növekedés nonlinearitása sem kétséges.

Ha a gráfsűrűség meghaladja a 0.5-t, akkor az Erdős-Rényi és a Watts-Strogatz gráfok esetén mindegy, hogy a három implementált gráfábrázolás közül melyikkel dolgozunk. Tehát: eléggé sűrű Erdős-Rényi és Watts-Strogatz gráfok esetén nem szükséges különböző fraktáldimenzió függvényekről beszélnünk, hiszen a determinisztikus, az iterálónan közelítő és a véletlenszerű ábrázolás is majdnem ugyanazt az eredményt adja.

A Barabási-Albert gráfok esetén a sűrűség 0.7 értéke után csökken bármely két ábrázolással mért fraktáldimenzió-érték ugyanazon küszöbérték - 0.1 - alá. Kijelenthető: a dolgozat fraktáldimenzió vizsgálatainak szempontjából indokolt a Barabási-Albert gráfok Fruchterman-Reingold algoritmussal való ábrázolása, hisz a mérések szignifikánsan különböznek a másik két ábrázolás értékeitől.

5. A felhasznált programok

Az utolsó rész azt a két programot ismerteti, amelyeket a dolgozat elkészítéséhez felhasználtunk. A szlovén fejlesztésű Pajek egy nagy gráfok elemzésére és megjelenítésére alkalmas, ingyen használható program. Elnevezése szlovénul pókot jelent, így is utalva arra, hogy a program gráfok feldolgozására alkalmas. A gráfok generálását és vizsgálatát MATLAB-ban írt algoritmusok végzik. A MATLAB egy olyan programozási nyelv és környezet egyben, amelyet numerikus számítások elvégzésre fejlesztett a MathWorks. A műveletek alapegységei mindig mátrixok, ezt az elnevezés is érzékelteti, amely: a „matrix laboratory” kifejezés szavainak első szótagaiból áll össze.

Hivatkozások

- [1] Albert, R., and Barabási A. L., 2002, *Statistical mechanics of complex networks*, Review of modern physics, volume 74, pp. 48-85
- [2] Erdős, P., Rényi, A., 1959. *On Random Graphs. I.* Publicationes Mathematicae 6, pp. 290-297.
- [3] Gilbert, E.N., 1959. *Random Graphs*. Annals of Mathematical Statistics 30, pp. 1141-1144.
- [4] Falconner K., 2003. *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications* , New York: John Wiley
- [5] Fruchterman, T. M. J., Reingold, E. M., 1991., *Graph Drawing by Force-Directed Placement*, Software – Practice & Experience (Wiley) 21 (11), pp. 1129–1164.
- [6] Kása, Z., 2009., *Gráfalgoritmusok* [pdf]. Kolozsvár: egyetemi jegyzet
- [7] Mandelbrot, B.B., 1967., *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension*. Science 156, pp. 636-638
- [8] Németh, S., 2009., *Valós analízis*. Kolozsvár: Ábel kiadó
- [9] Simon, L., 2012., *Gráfok fraktáldimenziójának vizsgálata* [pdf]. Kolozsvár: Államvizsgadolgozat.
- [10] Soós, A., 2001., *A valószínűségszámítás elemei*. Kolozsvár: Cluj University Press Printing
- [11] Soós, A., 2002. *Contraction Methods in Fractal Theory*. Kolozsvár: Cluj University Press Printing House
- [12] Soós, A., 2008. *Sztocasztikus folyamatok és fraktálok* [pdf]. Kolozsvár: egyetemi jegyzet
- [13] Szabó, L.I., 1997. *Ismerkedés a fraktálok matematikájával*. Szeged: Polygon könyvtár

- [14] Watts, D.J., Strogatz, S.H., 1998. *Collective dynamics of 'small-world' networks*. Nature 393 (6684), pp. 409–10.
- [15] Pajek. <http://pajek.imfm.si/doku.php?id=pajek>. Frissítés ideje: 2012. 5. 27.
- [16] MATLAB. <http://www.mathworks.com/products/matlab/>. Frissítés ideje: 2012. 6. 18.

6. Mellékletek

1. Függelék

Jelen dolgozat a szerző alapképzésbeli szakdolgozatának bővített változata: amíg a szakdolgozat csak az Erdős-Rényi és a Watts-Strogatz hálózatok determinisztikus és véletlen ábrázolásai során közelíti a fraktáldimenziót, addig a dolgozat a Barabási-Albert hálózatok és a Fruchterman-Reingold algoritmus fraktálelemzését is tartalmazza.

A jelenleg készülő mesterképzésbeli diplomunka - mely megvédésére várhatóan 2014 nyarán kerül sor - túllép jelen dolgozaton: egyrészt tárgyalja a dolgozat eredményeinek társadalmi hálózatokra való alkalmazhatóságát, másrészt a hálózatmodellek fraktálelemzését a Makse és tsai által 2007-ben bevezetett doboz-lefedési algoritmussal is tárgyalja.

A dolgozat tárgya az Erdős-Rényi, a Watts-Strogatz és a Barabási-Albert hálózatok három-három ábrázolásának a fraktáldimenzió eszközével történő elemzése. A fraktáldimenzió a doboz-dimenzió eszközével számítógépes szimulációkkal vizsgálja a dolgozat, paraméterkombinációnként ezer-ezer esetet tekintve át.

A fraktáldimenzió értékeinek számítógépes közelítése az Erdős-Rényi, a Watts-Strogatz és a Barabási-Albert hálózatok determinisztikus, véletlen és Fruchterman-Reingold algoritmussal való ábrázolásai esetében - a dolgozat hangsúlyos eredményeként - a Barabási-Albert hálózatok Fruchterman-Reingold algoritmussal való ábrázolása mellett érvelnek.

2. Függelék

A szerző mesterképzésbeli szakdolgozata jelen dolgozat továbbgondolt változata: amíg jelen dolgozat tárgya az Erdős-Rényi, a Watts-Strogatz és a Barabási-Albert hálózatok három-három ábrázolásának a fraktáldimenzió eszközével történő elemzése, addig a szakdolgozat az ábrázolástechnikáktól független is tárgyalja a hálózatmodellek fraktáldimenzióját.

Mindkét elyesetben szimulációkkal közelítjük a fraktáldimenziót, a szakdolgozat emelett egymás mellé is helyezi a két megközelítést. A tervezett szakdolgozat reflektál az alkalmazhatóságra, eképpen társadalmi hálózatok Fruchterman-Reingold algoritmussal való ábrázolása mellett is érvel.

Mind jelen dolgozat, mind a szakdolgozat témavezetője dr. Soós Anna, a Babeş- Bolyai Tudományegyetem Magyar Matematika és Informatika Intézetének egyetemi docense.

A mesterképzésbeli szakdolgozat munkacíme: *Hálózatmodellek fraktálelemzése.*

Amíg a mesterképzésbeli szakdolgozat első része jelen dolgozat eredményeit tartalmazza, addig a második rész az gráfok éleire értelmezett doboz-lefedéssel közelíti az Erdős-Rényi, a Watts-Strogatz és a Barabási-Albert hálózatok fraktáldimenzió-értékeit.

Végül, de nem utolsó sorban, a bevezetés és az összegzés várhatóan az eredmények használhatóságát emeli ki, eképpen bemutatja három valós társadalmi hálózat (a Mikó Imre Jog- és Közgazdasági Szakkollégium alumni hálózata, a Háromszéki Ifjúsági Tanács önkénteshálója és a háromszéki civil szervezetek partnerségi és tagsági struktúrája) reprezentációt.

3. Függelék

<i>darab</i>	<i>n</i>	<i>p</i>	Kör		Random		Fruch.-Reing.	
			E_1	D^2	E_2	D^2	E_3	D^2
1000	100	0	0.6569	0	0.5117	0	0.5968	0
1000	100	0.1	1.4867	0.0002	1.4144	0.0003	1.2271	0.0006
1000	100	0.2	1.6824	0.0001	1.6079	0.0002	1.4947	0.0004
1000	100	0.3	1.7779	0	1.7079	0.0002	1.6347	0.0003
1000	100	0.4	1.8342	0	1.7710	0.0002	1.7214	0.0003
1000	100	0.5	1.8705	0	1.8148	0.0002	1.7788	0.0003
1000	100	0.6	1.8955	0	1.8461	0.0002	1.8192	0.0003
1000	100	0.7	1.9130	0	1.8710	0.0002	1.8501	0.0003
1000	100	0.8	1.9257	0	1.8900	0.0002	1.8738	0.0003
1000	100	0.9	1.9352	0	1.9067	0.0002	1.8940	0.0003
1000	100	1	1.9423	0	1.9193	0.0002	1.9112	0.0003

1. táblázat.

Az Erdős-Rényi gráfok fraktáldimenziója. Körön, véletlenszerűen illetve Fruchterman-Reingold algoritmussal ábrázolva a gráfokat.

	Kör és random ábrázolások			Kör és Fr.-R. ábrázolások		
p	E_1	E_2	Különbség	E_1	E_3	Különbség
0	0.6965	0.5117	0.1848	0.6965	0.5968	0.0997
0.1	1.4867	1.4144	0.0723	1.4867	1.2271	0.2596
0.2	1.6824	1.6079	0.0745	1.6824	1.4947	0.1877
0.3	1.7779	1.7079	0.0700	1.7779	1.6347	0.1432
0.4	1.8342	1.7710	0.0623	1.8342	1.7214	0.1128
0.5	1.8705	1.8148	0.0557	1.8705	1.7788	0.0917
0.6	1.8955	1.8461	0.0494	1.8955	1.8192	0.0763
0.7	1.9130	1.8710	0.0420	1.9130	1.8501	0.0629
0.8	1.9257	1.8900	0.0357	1.9257	1.8738	0.0519
0.9	1.9352	1.9067	0.0285	1.9352	1.8940	0.0412
1	1.9423	1.9193	0.0230	1.9423	1.9112	0.0311

2a. táblázat.

Az Erdős-Rényi gráfok fraktáldimenzióinak előjeles különbségfüggvényei.

	Random és Fr.-R. ábrázolások		
p	E_2	E_3	Különbség
0	0.5117	0.5968	-0.0851
0.1	1.4144	1.2271	0.1873
0.2	1.6079	1.4947	0.1132
0.3	1.7079	1.6347	0.0732
0.4	1.7710	1.7214	0.0496
0.5	1.8148	1.7788	0.0360
0.6	1.8461	1.8192	0.0269
0.7	1.8710	1.8501	0.0209
0.8	1.8900	1.8738	0.0162
0.9	1.9067	1.8940	0.0127
1	1.9193	1.9112	0.0081

2b. táblázat.

Az Erdős-Rényi gráfok fraktáldimenzióinak előjeles különbségfüggvényei.

		Kör				
		$p = 0$		$p = 0.1$		
n	k	$darab$	E_1	$darab$	E_1	D^2
100	0	1	0.6569	1000	1.4867	0.0002
100	2	1	0.6569	1000	1.4868	0.0002
100	4	1	0.6569	1000	1.4872	0.0002
100	6	1	0.6569	1000	1.4888	0.0002
100	8	1	0.6768	1000	1.4892	0.0002
100	10	1	0.7997	1000	1.4935	0.0002
100	12	1	0.8762	1000	1.4979	0.0002
100	14	1	0.9464	1000	1.5052	0.0002
100	16	1	1.0011	1000	1.5081	0.0002
100	18	1	1.0685	1000	1.5164	0.0002
100	20	1	1.1310	1000	1.5255	0.0002

3a. táblázat.

Körön ábrázolt Watts-Strogatz gráfok fraktáldimenziója: $p = 0$, $p = 0.1$.

k változik 0-tól 20-ig.

<i>darab</i>	<i>n</i>	<i>k</i>	Random			
			$p = 0$		$p = 0.1$	
			E_2	D^2	E_2	D^2
1000	100	0	0.5117	0	1.4144	0.0002
1000	100	2	0.9644	0.0002	1.4640	0.0002
1000	100	4	1.1505	0.0002	1.5046	0.0002
1000	100	6	1.2688	0.0002	1.5411	0.0002
1000	100	8	1.3544	0.0002	1.5720	0.0002
1000	100	10	1.4204	0.0001	1.5995	0.0002
1000	100	12	1.4737	0.0001	1.6241	0.0002
1000	100	14	1.5179	0.0002	1.6454	0.0002
1000	100	16	1.5556	0.0001	1.6654	0.0002
1000	100	18	1.5877	0.0002	1.6835	0.0002
1000	100	20	1.6161	0.0002	1.6999	0.0002

3b. táblázat.

Véletlenszerűen ábrázolt Watts-Strogatz gráfok fraktáldimenziója: $p = 0$, $p = 0.1$.

k változik 0-tól 20-ig.

			Fruchterman-Reingold			
			$p = 0$		$p = 0.1$	
<i>darab</i>	<i>n</i>	<i>k</i>	E_3	D^2	E_3	D^2
1000	100	0	0.5968	0	1.2281	0.0006
1000	100	2	0.6822	0.0003	1.3014	0.0005
1000	100	4	0.7439	0.0004	1.3505	0.0004
1000	100	6	0.8286	0.0004	1.3873	0.0004
1000	100	8	0.9041	0.0001	1.4136	0.0003
1000	100	10	0.9761	0.0002	1.4376	0.0003
1000	100	12	1.0386	0.0002	1.4582	0.0003
1000	100	14	1.1077	0.0002	1.4748	0.0002
1000	100	16	1.1773	0.0001	1.4933	0.0002
1000	100	18	1.2347	0.0001	1.5084	0.0002
1000	100	20	1.2853	0.0001	1.5235	0.0002

3c. táblázat.

Fruchterman-Reingold algoritmussal ábrázolt Watts-Strogatz gráfok fraktáldimenziója: $p = 0$,
 $p = 0.1$. k változik 0-tól 20-ig.

n	k	p	Kör			Random			Fruchterman-Reing.		
			$darab$	E_1	D^2	$darab$	E_2	D^2	$darab$	E_3	D^2
100	20	0	1	1.1310	0	1000	1.6161	0	1000	1.2853	0.0001
100	20	0.1	1000	1.5212	0.0002	1000	1.6999	0.0002	1000	1.5235	0.0002
100	20	0.2	1000	1.6979	0.0001	1000	1.7562	0.0002	1000	1.6474	0.0002
100	20	0.3	1000	1.7866	0.0000	1000	1.7963	0.0002	1000	1.7251	0.0003
100	20	0.4	1000	1.8412	0.0000	1000	1.8267	0.0002	1000	1.7778	0.0003
100	20	0.5	1000	1.8741	0.0000	1000	1.8524	0.0002	1000	1.8178	0.0003
100	20	0.6	1000	1.8971	0.0000	1000	1.8705	0.0002	1000	1.8468	0.0003
100	20	0.7	1000	1.9139	0.0000	1000	1.8872	0.0002	1000	1.8688	0.0003
100	20	0.8	1000	1.9267	0.0000	1000	1.8999	0.0002	1000	1.8847	0.0003
100	20	0.9	1000	1.9358	0.0000	1000	1.9121	0.0002	1000	1.9003	0.0003
100	20	1	1	1.9423	0	1000	1.9213	0.0002	1000	1.9112	0.0003

4. táblázat.

Watts-Strogatz gráfok fraktáldimenziója: p változik, $k = 20$. Körön, véletlenszerűen illetve Fruchterman-Reingold algoritmussal ábrázolva a gráfokat.

	Kör és random ábrázolások			Kör és Fr.-R. ábrázolások		
p	E_1	E_2	Különbség	E_1	E_3	Különbség
0	1.1310	1.6161	-0.4851	1.1310	1.2853	0.1543
0.1	1.5212	1.6999	-0.1787	1.5212	1.5235	0.0023
0.2	1.6979	1.7562	-0.0583	1.6979	1.6474	0.0505
0.3	1.7866	1.7963	-0.0097	1.7866	1.7251	0.0615
0.4	1.8412	1.8267	0.0145	1.8412	1.7778	0.0634
0.5	1.8741	1.8524	0.0217	1.8741	1.8178	0.0563
0.6	1.8971	1.8705	0.0266	1.8971	1.8468	0.0503
0.7	1.9139	1.8872	0.0267	1.9139	1.8688	0.0451
0.8	1.9267	1.8999	0.0268	1.9267	1.8847	0.0420
0.9	1.9367	1.9121	0.0246	1.9367	1.9003	0.0364
1	1.9423	1.9193	0.0230	1.9423	1.9112	0.0311

5a. táblázat.

Az Watts-Strogatz gráfok fraktáldimenzióinak előjeles különbségfüggvényei p szerint, $k = 20$ esetben.

	Random és Fr.-R. ábrázolások		
p	E_2	E_3	Különbség
0	1.6161	1.2853	0.3308
0.1	1.6999	1.5235	0.1764
0.2	1.7562	1.6474	0.1088
0.3	1.7963	1.7251	0.0712
0.4	1.8267	1.7778	0.0489
0.5	1.8524	1.8178	0.0346
0.6	1.8705	1.8468	0.0237
0.7	1.8872	1.8688	0.0184
0.8	1.8999	1.8847	0.0152
0.9	1.9121	1.9003	0.0118
1	1.9193	1.9112	0.0081

5b. táblázat.

Az Watts-Strogatz gráfok fraktáldimenzióinak előjeles különbségfüggvényei p szerint, $k = 20$ esetben.

<i>darab</i>	<i>n</i>	<i>k</i>	<i>m</i>	Kör		Random		Fruch.-Reing.	
				E_1	D^2	E_2	D^2	E_3	D^2
1000	100	4	0	0.6569	0	0.5685	0.0002	0.5884	0
1000	100	4	10	1.6360	0	1.5988	0.0002	1.4247	0.0005
1000	100	4	20	1.7882	0	1.7535	0.0002	1.6035	0.0006
1000	100	4	30	1.8550	0	1.8229	0.0002	1.6936	0.0006
1000	100	4	40	1.8913	0	1.8607	0.0002	1.7530	0.0007
1000	100	4	50	1.9129	0	1.8835	0.0002	1.8002	0.0007
1000	100	4	60	1.9262	0	1.8987	0.0002	1.8384	0.0006
1000	100	4	70	1.9344	0	1.9087	0.0002	1.8702	0.0005
1000	100	4	80	1.9392	0	1.9146	0.0002	1.8936	0.0003
1000	100	4	90	1.9416	0	1.9187	0.0002	1.9071	0.0003

6. táblázat.

A Barabási-Albert gráfok fraktáldimenziója. Körön, véletlenszerűen illetve Fruchterman-Reingold algoritmussal ábrázolva a gráfokat.

			Kör és random ábrázolások			Kör és Fr.-R. ábrázolások		
n	k	m	E_1	E_2	Különbség	E_1	E_3	Különbség
100	4	0	0.6569	0.5685	0.0884	0.6569	0.5884	0.0685
100	4	10	1.6360	1.5988	0.0372	1.6360	1.4247	0.2113
100	4	20	1.7882	1.7535	0.0347	1.7882	1.6035	0.1847
100	4	30	1.8550	1.8229	0.0321	1.8550	1.6936	0.1614
100	4	40	1.8913	1.8607	0.0306	1.8913	1.7530	0.1383
100	4	50	1.9129	1.8835	0.0294	1.9129	1.8002	0.1127
100	4	60	1.9262	1.8987	0.0275	1.9262	1.8384	0.0878
100	4	70	1.9344	1.9087	0.0257	1.9344	1.8702	0.0642
100	4	80	1.9392	1.9146	0.0246	1.9392	1.8936	0.0456
100	4	90	1.9416	1.9187	0.0229	1.9416	1.9071	0.0345

7a. táblázat.

A Barabási-Albert gráfok fraktáldimenzióinak előjeles különbségfüggvényei.

			Random és Fr.-R. ábrázolások		
n	k	m	E_2	E_3	Különbség
100	4	0	0.5685	0.5884	-0.0199
100	4	10	1.5988	1.4247	0.1741
100	4	20	1.7535	1.6035	0.1500
100	4	30	1.8229	1.6936	0.1293
100	4	40	1.8607	1.7530	0.1098
100	4	50	1.8835	1.8002	0.0833
100	4	60	1.8987	1.8384	0.0603
100	4	70	1.9087	1.8702	0.0385
100	4	80	1.9146	1.8936	0.0210
100	4	90	1.9188	1.9071	0.0117

7b. táblázat.

A Barabási-Albert gráfok fraktáldimenzióinak előjeles különbségfüggvényei.