

Rádiófrekvenciás problémák vizsgálata végeelem-módszer segítségével

Írta:

Friedl Gergely

Villamosmérnök MSc hallgató

Konzulens:

Prof. Dr. habil. Kuczmann Miklós

Tanszékvezető egyetemi tanár

Széchenyi István Egyetem
Elektromágneses Terek Laboratórium
2013

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. A dolgozat célja	1
1.2. Köszönetnyilvánítás	3
2. Elméleti áttekintés	4
2.1. Végeselem-módszer	4
2.1.1. Modell specifikációja	5
2.1.2. Előfeldolgozás	6
2.1.3. Megoldás	9
2.2. Elektromágneses terek	10
2.2.1. Maxwell-egyenletek általános alakjai	10
2.2.2. A frekvenciatartománybeli hullámeqyenlet	13
2.2.3. Az időtartománybeli hullámeqyenlet	16
3. Térszimuláció végeselem-módszerrel	18
3.1. Frekvenciatartománybeli analízis	18
3.1.1. Gyenge alak	18
3.1.2. 1D problémák a frekvenciatartományban	21
3.1.2.1. Végtelen féltér probléma	21
3.1.2.2. Levegőtől eltérő közeg hatása	24
3.1.3. 2D problémák a frekvenciatartományban	26
3.1.3.1. Csőtápvonal	26
3.1.3.2. Parabola antenna	28
3.2. Időtartománybeli analízis	30
3.2.1. Gyenge alak	30
3.2.2. 1D problémák az időtartományban	32
3.2.2.1. Végtelen féltér probléma	32
3.2.2.2. Levegőtől eltérő közegek hatása	35
3.2.3. 2D problémák az időtartományban	36
3.2.3.1. Csőtápvonal írisszel	37

3.2.3.2. Négyszögletes rezonátor	38
4. Konklúzió, jövőbeli tervek	43

1. fejezet

Bevezetés

1.1. A dolgozat célja

Az elmúlt évtizedek folyamán a mobil távközlés rohamos fejlődése és a vezeték nélküli rendszerek elterjedése miatt az antennarendszerek tervezése kiemelt fontosságúvá vált. A tervezés folyamán fontos szempontok a kívánt iránykarakterisztika és antennanyereség elérése, bemeneti impedancia számítása, a mobil eszközök elektromágneses kompatibilitása egymással és önmagukkal. Ezen igények kielégítésére szükséges a tervezendő eszközöket, azok anyagparamétereit optimalizálni. A tervezési folyamat és az optimalizáció sok esetben numerikus módszerekkel, mint például végeselem-módszerrel történik. A tervezési folyamat segítségére több végeselem-módszert használó szoftver is forgalomban van, ezek például a `Comsol Multiphysics` [1], `Maxwell 3D` [2], vagy a `CST` [3] nevezetű programok. Egyszerű problémák szimulációjára kevesebb idő is elégséges, viszont bonyolultabb rendszerek pontos tervezéséhez a számítások sokszor napokat is igénybe vehetnek egy asztali számítógépen. Érdemes tehát a módszer kutatása a számítási idő csökkentése érdekében.

A dolgozatom témája a rádiófrekvenciás problémák végeselem-módszerrel történő szimulációja. Bemutatásra kerül röviden a végeselem-módszer elméleti háttere és a végeselemes szimuláció lépései. Bemutatom a rádiófrekvenciás elektromágneses teret leíró egyenleteket, illetve a végeselem-módszerrel történő tervezés esetén szükséges idő- és frekvenciatartománybeli gyenge alakok leve-

zetését. A szükséges elméleti háttér tárgyalása után az egyenletek validálása következik az általam megvalósított programkódok segítségével, egy- illetve kétdimenziós problémákon, `Matlab` [4] környezetben. Dolgozatomban szót ejtek az idő- illetve frekvenciatartománybeli analízis előnyeiről és hátrányairól, alkalmazhatóságukról. Munkám célja ezzel a végeselemes analízis menetének megismerése rádiófrekvenciás problémákra történő alkalmazás esetén. Ezen ismeretek segítségével a számítási idő, illetve számítási igény csökkentésére a későbbiekben a módszer C-függvények segítségével is megvalósításra kerül.

1.2. Köszönetnyilvánítás

A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú “*Nemzeti Kiválóság Program - Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program*” című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

2. fejezet

Elméleti áttekintés

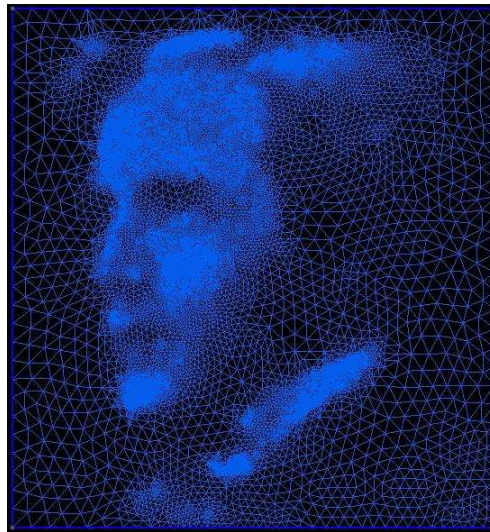
Ebben a fejezetben egy rövid összefoglalás található a végelelem-módszerről, annak lépéseiről. Röviden bemutatásra kerül az egyes lépések gyakorlatban történő alkalmazásához szükséges matematikai háttér. Levezetésre kerülnek a Maxwell-egyenletekből a rádiófrekvenciás elektromágneses teret leíró, végelelemes analízishez illeszthető hullámegyenletek idő- illetve frekvenciatartománybeli alakja.

2.1. Végelelem-módszer

A végelelem-módszer [5–9] egy népszerű numerikus módszer parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására. A módszer lehetővé teszi az analitikusan nem megoldható problémák közelítő számítását is. Maga a végelelem kifejezés annyit jelent, hogy a módszer alkalmazásához a problémátér véges számú elemre bontása, diszkretizálása szükséges (lásd 2.1. ábra), majd ezután az elemekre külön kell felírni az adott problémára érvényes egyenleteket.

A módszer a számítások során a véges elemszám miatt hibákat fog okozni, ám ezeket a hibákat az egész térfogaton elteríti, átlagolja. A hibák csökkentésére több lehetőség is van, bár ezek mind megnövelik a számítások idejét. Ezek a módszerek vagy az elemszám növelésével, vagy az elemekre felírható függvények rendjének növelésével, vagy mindkettővel járnak.

A végelelemes tervezés menete 4 főbb részre bontható:



2.1. ábra: James Clerk Maxwell arcképe rácsokra bontva

1. *Modell specifikációja*: a probléma geometriája és a problémára érvényes összefüggések meghatározása;
2. *Előfeldolgozás*: a geometria diszkretizálása;
3. *Számítás*: a problémára érvényes egyenletek alapján az elemegyenletek felírása, asszemblálás;
4. *Utőfeldolgozás*: az eredmény ábrázolása, kiértékelése.

A fenti lépések a későbbiekben példák útján is bemutatásra kerülnek, ebben a fejezetben csak általánosan történik a tárgyalásuk.

2.1.1. Modell specifikációja

A modell specifikációja jelenti egyrészt a helyes geometria megalkotását CAD (Computer Aided Design) rendszerben. A módszer ezen lépéséhez tartozik még a problémára érvényes egyenletek megválasztása, egyszerűsítése, peremfeltételek felírása.

A modell megalkotásánál nem szükséges a végletekig tökéletes részletességre ügyelni, mivel az a számítási kapacitás nagy mértékű, felesleges növelését jelentené. A geometria modelljét érdemes leegyszerűsíteni olyan mértékben, hogy a végeselemes rács megalkotása folyamán lehető legkevesebb elem jöjjön

létre, ezáltal kevesebb ismeretlennel kell számolni a szimuláció során. Ilyen egyszerűsítéssel lehet élni például, ha a problémátérhez képest elhanyagolható vastagságú árammal átjárt vezető tartozik a geometriához. Ekkor a vezetőket, és az abban folyó áramot a szimuláció során helyettesíteni lehet egy felületi árammal, vonalszerű árammal, vagy legegyszerűbb esetben a szimuláció síkjára merőleges vonalszerű árammal. Szimmetrikus geometria esetén további egyszerűsítésekkel lehet élni. A teljes tér geometriájával történő számítás, és a szimmetriasík mentén felezett geometriával történő számítás ekvivalens eredményt ad, viszont a második esetben hozzávetőlegesen fele annyi ismeretlennel lehet számolni.

A problémát leíró egyenlet egy kifejezés, amely önmagában nem illeszthető a végeselem-módszerhez. A számításokhoz szükség van az egyenletrendszer súlyozására, és integrálására a teljes térfogaton. Az így előállt egyenletrendszer átalakításai segítségével lehet bevezetni a numerikus technikához már illeszthető gyenge alakot, erről a példák megoldásánál bővebben lesz szó.

2.1.2. Előfeldolgozás

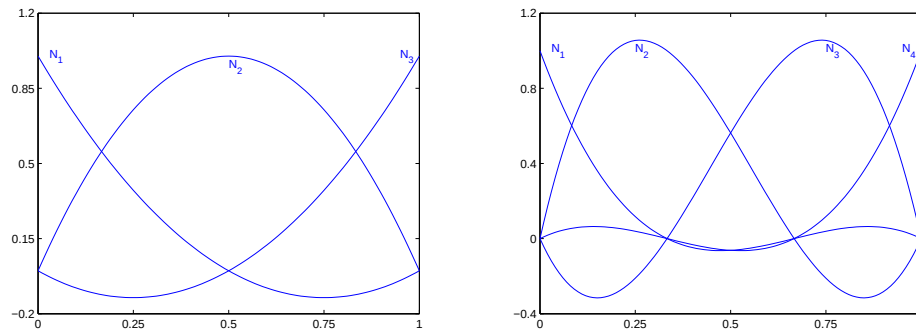
Egy probléma megoldásához első körben meg kell határozni a problémateret, valamint magát a problémát leíró egyenleteket. Az ismert problémátérnek a modelljét meg kell valósítani valamilyen CAD szoftver segítségével, majd a geometriát elemekre kell bontani, diszkretizálni kell. Egydimenziós probléma esetén a diszkretizálás a geometria szakaszokra bontását jelenti, kétdimenziós geometria diszkretizálása a geometria kisméretű háromszögekre illetve négyszögekre bontásával történik. A diszkrét elemekre formafüggvények írhatók fel. Rádiófrekvenciás tartományban történő szimuláció esetén fontos, hogy az elemméret összemérhető legyen a szimuláció során alkalmazott gerjesztés hullámhosszával. Ökölszabály, hogy elsőrendű formafüggvények alkalmazása esetén kielégítő választás az elemek maximális méretére a hullámhossz egytizede.

Dolgozatomban a problémákat úgy választottam meg, hogy azok csomóponti formafüggvényekkel megoldhatók legyenek. Minden formafüggvény ér-

telmezve van az egész problématerén, de egy formafüggvény csak egy csomópont-hoz tartozik, illetve csak azon az elem-en vesz fel nullától különböző értéket, amely tartalmazza a csomópontot. A formafüggvények további két fontos tulajdonsága, hogy az i -edik csomópont-ra az i -edik formafüggvény értéke azo-nosan 1, viszont minden más csomópont-on 0. Az egydimenziós formafüggvé-nyek [5, 8, 9] felírhatók

$$N_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^m \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (2.1)$$

összefüggés segítségével, ahol N maga a formafüggvény, x a változó az elem-entén, m az egy elem-en belüli csomópontok száma (ez egydimenziós esetben a formafüggvényt leíró polinom fokszáma + 1), x_i illetve x_j pedig a csomópont-ok koordinátáit jelenti. Példaként, az egy elem-re felírható másodfokú illetve harmadfokú formafüggvények a 2.2. ábrán láthatóak. Kétdimenziós problé-



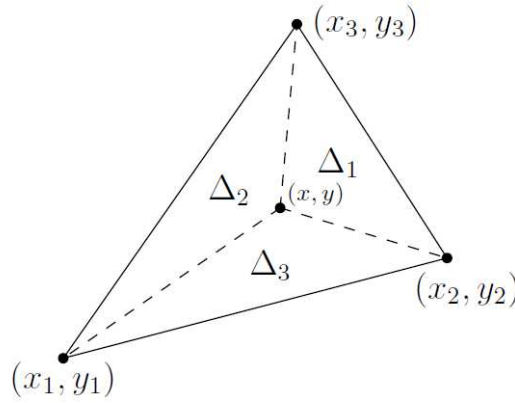
2.2. ábra: Másod- illetve harmadfokú formafüggvények egy elem-en [10]

mák esetén a formafüggvények általános alakja jóval bonyolultabb formulával írható le, dolgozatomban viszont csak elsőrendű formafüggvényeket használtam kizárólag háromszög elem felett, azoknak a leírása lényegesen egyszerűbb. Az elemekre felírandó formafüggvények száma függ az alkalmazott polinom fokszámától. A lineáris formafüggvények bevezetéséhez a baricentrikus koordinátarendszer ismerete szükséges (lásd 2.3. ábra). Egy háromszög csúcsainak koordinátái ismeretében a háromszög területe számítható mátrix determináns

segítségével:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

ahol (x_1, y_1) , (x_2, y_2) és (x_3, y_3) a háromszög csúcsainak koordinátái az óramutató járásával ellenkező irányba felvéve. A háromszög belsejében felvett tetszőleges pont koordinátáinak függvényében, a háromszög csúcsaival három részháromszöget alkotva, három különböző területfüggvény definiálható. Ezek:



2.3. ábra: Baricentrikus koordináták ábrázolása [5]

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

ahol (x, y) a háromszög belsejében egy tetszőleges pont koordinátái. A részháromszög és a teljes háromszög területének aránya rendre:

$$L_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (2.4)$$

és ez egyben nem más, mint az elsőfokú formafüggvényt [5, 8] leíró egyenlet:

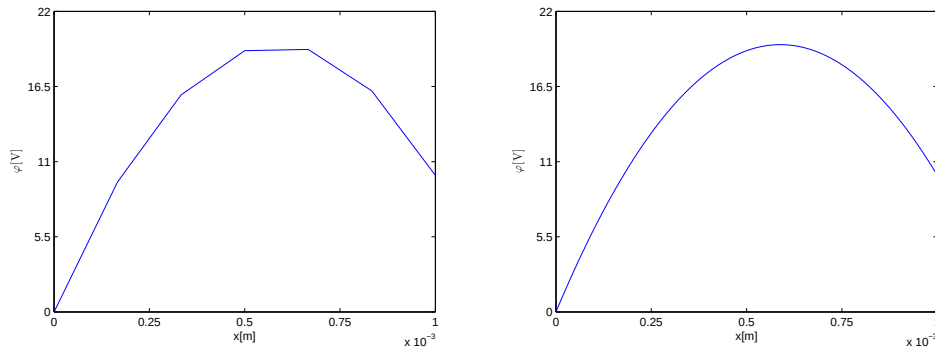
$$N_i = L_i. \quad (2.5)$$

Amennyiben megtörténtek a számítások, és ismertek a számítani kívánt ismeretlen értékei a csomópontokban, a formafüggvények segítségével az elemen belül tetszőleges pontban meghatározható [5, 7, 8] az ismeretlen értéke interpoláció segítségével. Az interpoláció

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^m \Phi_i N_i(x, y) \quad (2.6)$$

összefüggés alapján történik, ahol az index nélküli Φ jelöli az ismeretlen értéket, n pedig az elemre felírt formafüggvények számát jelöli.

A formafüggvények fokszáma közti különbséget az interpolált eredményen egy példán keresztül mutatom be. A példa egy egydimenziós probléma, egy síkkondenzátor (lásd 2.4. ábra). A kondenzátor két fegyverzetének távolsága 1mm, az egyik földpotenciálon van, a másik pedig 10V feszültségre van kapcsolva. A két fegyverzet között $0,001 \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$ töltéssűrűséget állítottam be.



2.4. ábra: A szimulált potenciál értéke a két fegyverzet között első-(bal) illetve harmadfokú(jobb) formafüggvények alkalmazása esetén

2.1.3. Megoldás

A geometria az előfeldolgozás után véges számú diszkrét elemből áll. A megoldás során a problémára felírt gyenge alakot kell minden elemre felírni. Az elemekre felírt egyenletrendszer együtthatóit a probléma jellegétől függően egy vagy több mátrixba kell asszemblálni. Asszemblálás során az együttható mátrix legtöbb eleme zérus. Az ilyen mátrixokat ritka mátrixnak nevezzük. A

végeselemes szimulációk során felírt egyenletrendszer általánosan

$$\underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{b} \quad (2.7)$$

alakban írható fel, ahol $\underline{\underline{K}}$ az együtthatókat tartalmazó mátrix, $\underline{u}$ az ismeretlen vektor, $\underline{b}$ pedig a gerjesztést, illetve a peremfeltételeket tartalmazó vektor. Ez az általánosított egyenlet bonyolultabb problémák esetén, mint amilyen a dolgozatomban is található, több részből építhető csak fel. Az általános feladat megoldása tehát:

$$\underline{u} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{b}. \quad (2.8)$$

Ez a lépés kritikus a szimuláció során, általában ez a leginkább időigényes lépés. Sok ismeretlen esetén az inverzmátrix kiszámítása asztali számítógépen akár órákat is igénybe vehet.

2.2. Elektromágneses terek

Az elektromágneses tereket leíró összefüggő egyenletrendszert *James Clerk Maxwell* [11, 12] először az 1865-ben megjelent *A dynamical theory of the electromagnetic field* című művében közölte. Ezek az egyenletek ma Maxwell-egyenletek (2.9-2.12) néven közismertek. Az összefüggéseket leíró egyenletek már korábban is léteztek *Ampère*, *Faraday*, és *Gauss* munkásságának köszönhetően, de *Maxwell* volt az, aki észrevette, hogy ezek a törvények nem függetlenek egymástól, és megalkotta a térjellemzőket leíró összefüggő egyenletrendszert.

2.2.1. Maxwell-egyenletek általános alakjai

Az egyenleteknek létezik mind integrális, mind differenciális alakja [13–16]. A két alak között fizikai különbség nincs, viszont a differenciális alak végeselem-módszerhez történő illesztése sokkal kényelmesebb. A *Maxwell*-egyenletek in-

tegrális alakja az alábbiak szerint alakul:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}, \quad (2.9)$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (2.10)$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (2.11)$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV, \quad (2.12)$$

ahol $\vec{H} \left[\frac{A}{m} \right]$ a mágneses térerősség, $\vec{J} \left[\frac{A}{m^2} \right]$ az áramsűrűség, $\vec{D} \left[\frac{C}{m^2} \right]$ az elektromos eltolás, $\vec{E} \left[\frac{V}{m} \right]$ az elektromos térerősség, $\vec{B} \left[\frac{Vs}{m^2} \right]$ a mágneses indukció, $\rho \left[\frac{C}{m^3} \right]$ pedig a töltéssűrűség. Az integrálási változók $\vec{l}$, $\vec{A}$, V rendre a vonal, felület és térfogat szerint integrált jelentik. A (2.9) összefüggés az *Ampère*-féle gerjesztési törvény, a (2.10) összefüggés a *Faraday*-féle indukciós törvény, a (2.11) összefüggés a mágneses *Gauss*-törvény, a (2.12) összefüggés pedig az elektrosztatika *Gauss*-törvénye.

Az egyes közegek elektromos és mágneses tulajdonsággal bírnak, ezen tulajdonságok alapján felírhatók az úgynevezett konstitúciós relációk. Ezek lineáris izotróp közegben az alábbi alakban írhatók le:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad (2.13)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}, \quad (2.14)$$

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{E}_b \right), \quad (2.15)$$

ahol a vákuum permeabilitása $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{H}{m} \right]$, μ_r a közegre jellemző relatív permeabilitás, a vákuum permittivitása $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \left[\frac{F}{m} \right]$, ϵ_r a közegre jellemző relatív permittivitás, σ a közeg vezetőképessége, $\vec{E}_b$ pedig az úgynevezett beiktatott térerősség.

A *Maxwell*-egyenletek integrális alakjából levezethető a differenciális alak. Ehhez a (2.9) és (2.10) egyenletek bal oldalára a *Stokes*-tételt (2.16), a (2.11) és

(2.12) egyenletek bal oldalára pedig a *Gauss-Ostrogradszkij*-tételt(2.17) kell először alkalmazni. A fenti tételek:

$$\oint_l \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_A \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{A}, \quad (2.16)$$

illetve:

$$\oint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV, \quad (2.17)$$

ahol $\vec{v}$ tetszőleges vektor-vektor függvény lehet, ∇ pedig az úgynevezett nabla-operátor, vagy nabla-vektor, jelentése $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. A nabla-operátor alkalmazása egy skalárfüggvényre a skalárfüggvény gradiensét, a nabla-operátor és egy vektortér skaláris szorzata a vektortér divergenciáját, a nabla-operátor és a vektortér vektoriális szorzata a vektortér rotációját eredményezi. A tételek alkalmazása után az egyenletek mindkét oldalán ugyanazon változó szerinti integrálok lesznek, ezen integrálok elhagyhatók. A *Maxwell*-egyenletek differenciális alakja tehát:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.20)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (2.21)$$

Rádiófrekvenciás problémák esetén fontos a frekvenciatartománybeli és az időtartománybeli viselkedés külön vizsgálata. A *Maxwell*-egyenletek frekvenciatartománybeli alakja felírható az időtartománybeli alak alapján, az idő szerinti differenciálás $j\omega$ -val történő helyettesítésével, ahol j a képzetes egység, ω pedig a körfrekvencia.

Az egyenletrendszert szükséges kiegészíteni a közegethatárokon történő visel-

kedéssel, a peremfeltételekkel. Ezek a feltételeket a közeghatárokon az alábbi

$$\vec{H} \times \vec{n} = \vec{K}, \quad (2.22)$$

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0, \quad (2.23)$$

$$\vec{E} \times \vec{n} = 0, \quad (2.24)$$

$$\vec{D} \cdot \vec{n} = \vartheta, \quad (2.25)$$

összefüggések írják le, ahol $\vec{n}$ a közeghatár felületének normálvektora, $\vec{K} \left[\frac{A}{m} \right]$ a felületi áramsűrűség, $\vartheta \left[\frac{C}{m^2} \right]$ pedig a felületi töltéssűrűség. Ez annyit jelent, hogy amennyiben nem folyik a felületen áram, illetve nincs a felületen töltés, a közeghatárokon mágneses és az elektromos térerősség tangenciális (érintő irányú) komponense folytonos, míg a mágneses indukció és az elektromos eltolás normális (felületre merőleges) irányú komponense folytonos.

Elektrosztatika illetve magnetosztatika problémák esetén az első illetve második *Maxwell*-egyenletben található időszerinti deriváltaknak nincs jelentőségük. Alacsonyfrekvenciás problémák esetén a (2.18) egyenletben található derivált tag továbbra is elhanyagolható, míg a (2.19) egyenletben található tag az örvényáramokért lesz felelős. A frekvencia növelésével egyre nagyobb szerephez jut az első egyenletben található $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ tag, az úgynevezett eltolási áramsűrűség. Ezen okokból teljesen más egyenletre lehet jutni alacsony és nagyfrekvenciás problémák esetén.

2.2.2. A frekvenciatartománybeli hullámeqyenlet

A rádiófrekvenciás problémák vázlatát mutatja a 2.5. ábra. Az első (2.18) illetve második (2.19) *Maxwell*-egyenlet differenciális alakja frekvenciatartományban [6, 17] az alábbiak szerint alakul:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}, \quad (2.26)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}. \quad (2.27)$$

A fenti egyenletekbe behelyettesítve a konstitúciós relációkat ((2.13) és (2.14)):

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E}, \quad (2.28)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}, \quad (2.29)$$

ahol $\mu = \mu_0\mu_r$, illetve $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$. A (2.29) összefüggésből kifejezve $\vec{H}$ -t, majd behelyettesítve (2.28) egyenletbe

$$\nabla \times \left(-\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \vec{E} \right) = \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E} \quad (2.30)$$

kifejezésre lehet jutni. A kifejezést átalakítva, és $\vec{E}$ -re rendezve a

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = -jk_0 Z_0 \vec{J}, \quad (2.31)$$

összefüggés kapható, ahol

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (2.32)$$

a szabadtéri hullámszám, illetve

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \quad (2.33)$$

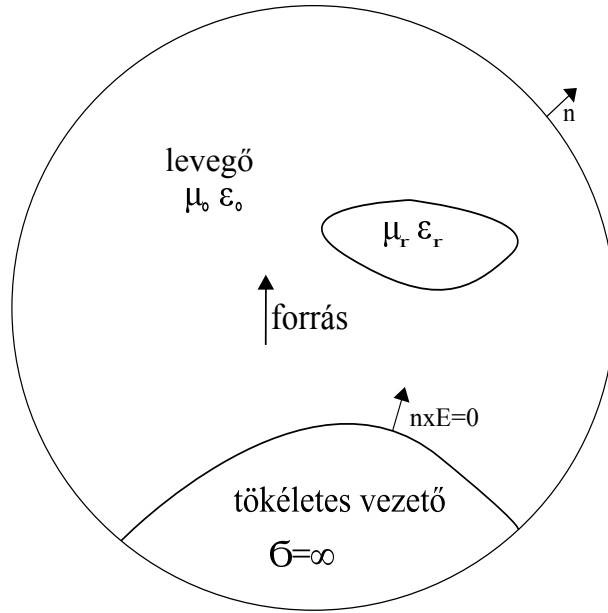
a vákuum hullámimpedanciája. A (2.31) összefüggés az elektromos hullám-egyenlet.

Az elektromos térerősség tökéletes vezetőnek tekinthető felületen

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad (2.34)$$

peremfeltételt kell kielégítenie. Ezen felül az elektromos tér forrásától végtelen távolságra, $\vec{E}$ -nek ki kell elégítenie az úgynevezett *Sommerfeld*-féle sugárzási feltételt [6], amelyet az alábbi

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\nabla \times \vec{E} + jk_0 \vec{n} \times \vec{E} \right] = 0 \quad (2.35)$$



2.5. ábra: Rádiófrekvenciás problémák általánosítva

összefüggés írja le. Itt r az elektromos tér forrásától számított távolság, $\vec{n}$ pedig a végtelen távolinak tekintett peremen a kifelé mutató normálvektor. Mivel végeselem-módszert használva a számítani kívánt problématér nem lehet végtelen nagy, a feladatot véges térben kell elhelyezni. Ekkor a feladat külső peremét ideális átaresztő/elnyelő peremnek kell megválasztani, hogy a szimulált elektromos tér ezen tovább haladhasson torzítás és reflexió nélkül. Ezt azonban gyakorlatban megvalósítani lehetetlen, helyett egy közelítéssel [6] kell élni:

$$\vec{n} \times \nabla \times \vec{E} + jk_0 \vec{n} \times \vec{n} \times E \approx 0, \quad (2.36)$$

mely összefüggés teljesen analóg a *Sommerfeld* sugárzási feltétellel (2.35), csak itt $\vec{n}$ a számítani kívánt geometria külső peremének kifelé mutató normálvektora.

A frekvenciatartománybeli analízis során a frekvenciát, mint bemeneti paraméteret használva kell kiszámítani az elektromos teret. Az eredmény viszont csak egy adott frekvencián érvényes, a legtöbb antennaanalízis során érdekes az antenna karakterisztikája szélesebb frekvenciatartományban. Ez igen időigényes lehet keskeny- és szélessávú antennák esetén is.

2.2.3. Az időtartománybeli hullámegyenlet

Időtartománybeli analízis során [6, 17] az első kettő *Maxwell*-egyenlet

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.37)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (2.38)$$

alakban írható fel, ahol σ az elektromos vezetőképességet jelöli. A (2.38) egyenlet rotációja:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H}. \quad (2.39)$$

A fenti összefüggésben $\nabla \times \vec{H}$ helyére (2.37)-t behelyettesítve

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{J} + \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (2.40)$$

alakra lehet jutni, amelyben felbontva a zárójelet és átrendezve, megkapható a hullámegyenlet időtartománybeli alakja:

$$\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) = -\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}. \quad (2.41)$$

Tökéletes vezető felületén az elektromos térerősségre érvényes peremfeltétel megegyezik az előző fejezetben közölt (2.34) összefüggéssel, illetve a (2.36) összefüggés időtartományban [6] módosul

$$\vec{n} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{E} \right) + Y_0 \vec{n} \times \left(\vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \approx 0 \quad (2.42)$$

alakra, ahol Y_0 a vákuum hullámadmittanciája.

Az időtartománybeli analízis során a szimuláció bemenete egy előre definiált jelalak. Ebből következik, hogy a frekvenciatartománnyal ellentétben, egy szimuláció során tetszőleges spektrumú bemeneti jel által gerjesztett teret ki lehet számítani, illetve tranziens viselkedést csak időtartományban lehet kimu-

tatni. A módszer hátulütője, hogy egy szimulációt rengeteg időlépésben kell kiszámítani, kiértékelhető eredményig ez a folyamat hosszadalmas lehet.

3. fejezet

Térszimuláció végeselem-módszerrel

Ebben a fejezetben bemutatom az idő- és frekvenciatartománybeli végeselemes szimuláció lépéseit részletesen, annak megvalósítását egy- illetve kétdimenziós problémák esetén. Az alfejezetek a problémára érvényes egyenletek gyenge alakjának levezetésével kezdődnek, majd az alkalmazásuk tárgyalásával folytatódnak. Az alkalmazások során a szimulációk validálása, amennyiben lehetséges, ismert képletek alapján kiszámítható értékekkel történő összehasonlítással történik. Minden végeselemhálót `Gmsh` [18] szoftver segítségével készítettem el, és minden szimulációt `Matlab` [4, 19] környezetben valósítottam meg.

3.1. Frekvenciatartománybeli analízis

Frekvenciatartománybeli analízis során a bemeneteti paraméter a körfrekvencia, a megoldás pedig minden egyes csomópontban az elektromos térerősség komplex csúcsértéke. A kiszámított komplex csúcsértékből visszaszámítható egy, már tranziensektől mentes időtartománybeli kép.

3.1.1. Gyenge alak

A frekvenciatartománybeli hullámgörbe a (2.31) összefüggés. megszorozva a hullámgörbét egy alkalmas $\vec{T}$ tesztfüggvénnyel, és integrálva a teljes tar-

ományon [5–8]:

$$-\int_V \vec{T} \cdot \left(\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \times \vec{E} \right) dV + \int_V \vec{T} \cdot k_0^2 \epsilon_r \vec{E} dV = \int_V \vec{T} \cdot j\omega\mu_0 \vec{J} dV. \quad (3.1)$$

A fenti egyenlet első integrálja kétszeres deriváltat tartalmaz, a megoldása meglehetősen nehéz és hosszadalmas. Vektoralgebrai azonosságok alkalmazása segítségével azonban a (3.1) egyenlet egyszerűbb alakra hozható. Ismeretes, hogy:

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}, \quad (3.2)$$

ahol $\vec{A}$ illetve $\vec{B}$ tetszőleges vektor értékű függvények. A (3.2) összefüggésben $\vec{A} = \vec{T}$ és $\vec{B} = \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E}$ helyettesítéssel élve:

$$\vec{T} \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) = (\nabla \times \vec{T}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot \left[\vec{T} \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) \right]. \quad (3.3)$$

Visszahelyettesítve (3.1) első integráljába, az integrál felírható

$$\begin{aligned} \int_V \vec{T} \cdot \left(\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \times \vec{E} \right) dV &= \int_V \nabla \cdot \left[\vec{T} \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) \right] dV \\ &- \int_V (\nabla \times \vec{T}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) dV \end{aligned} \quad (3.4)$$

alakban. Itt látható, hogy a jobb oldal első tagjában egy függvény divergenciájának térfogat szerinti integrálja található, ez átalakítható a (2.17) *Gauss-Osztrogradszkij*-tétel segítségével. Az átalakítás után a jobb oldal első tagja:

$$\int_V \nabla \cdot \left[\vec{T} \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) \right] dV = \oint_A \vec{n} \cdot \left[\vec{T} \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) \right] d\vec{A}. \quad (3.5)$$

A fenti átalakításokat felhasználva, illetve alkalmazva a (2.36) peremfeltételt, az eredeti egyenlet:

$$\begin{aligned} & \int_V (\nabla \times \vec{T}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) dV - \int_V \vec{T} \cdot k_0^2 \epsilon_r \vec{E} dV \\ & - \oint_{A_{tv}} (\vec{n} \times \vec{T}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) dA + jk_0 \oint_A (\vec{n} \times \vec{T}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) dA \\ & = \int_V \vec{T} \cdot jk_0 Z_0 \vec{J} dV, \end{aligned} \quad (3.6)$$

ahol a harmadik integrálban a tv index a tökéletes vezető felületét jelenti. A (3.6) egyenlet a frekvenciatartománybeli analízis gyenge alakja.

A végeselemes analízis végrehajtásához fel kell írni a gyenge alak alapján mátrixos alakban [6] az egyenletrendszer. Ez a frekvenciatartománybeli analízis során (2.7) egyenlet alakjában felírva:

$$\sum_{j=1}^m K_{i,j} E_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.7)$$

ahol m a csomópontok száma,

$$\begin{aligned} K_{ij} = & \int_V \left[(\nabla \times \vec{T}_i) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{T}_j) - k_0^2 \vec{T}_i \cdot \epsilon_r \vec{T}_j \right] dV \\ & + jk_0 \oint_A (\vec{n} \times \vec{T}_i) \cdot (\vec{n} \times \vec{T}_j) dA, \end{aligned} \quad (3.8)$$

illetve

$$b_i = \int_V \vec{T}_i \cdot jk_0 Z_0 \vec{J} dV. \quad (3.9)$$

Az egyenletrendszer együtthatóinak megállapítása után az eredmény (2.8) alapján már egyértelműen számítható. A (3.8) összefüggésben a felületi körintegrált értelemszerűen csak a tökéletesen áteresztő felületre kell felírni. Ez a legtöbb szimuláció során levegőben található, amennyiben mégsem, az adott közegre érvényes hullámszámmal kell számolni, ami:

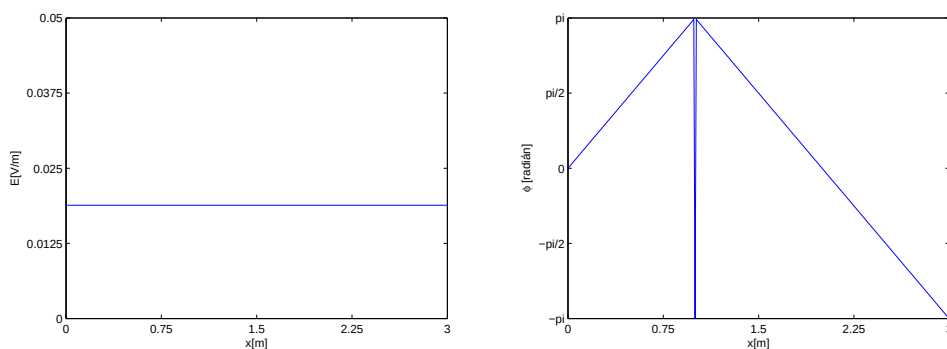
$$k = k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r}. \quad (3.10)$$

3.1.2. 1D problémák a frekvenciatartományban

3.1.2.1. Végtelen féltér probléma

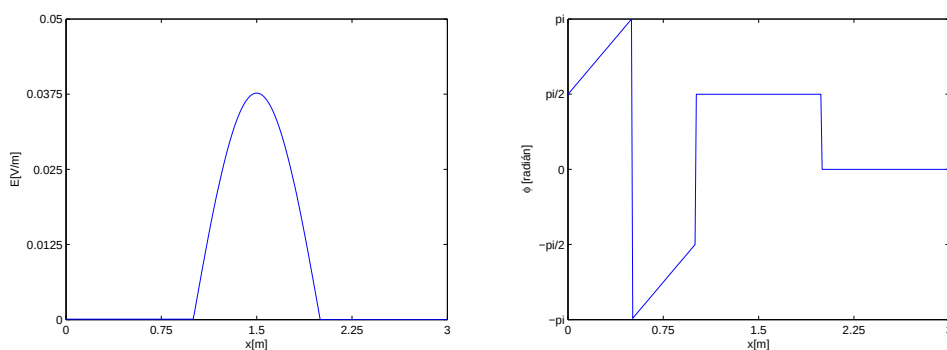
Az első bemutatott feladat az úgynevezett végtelen féltér probléma. Ez annyit jelent, hogy a teret úgymond félbevágja egy tökéletes vezető felület. Tökéletes vezetőben elektromos térerősség nincs, és nem is halad át rajta. A tökéletes vezető a teljes hullámot ellentétes fázisban reflektálja. Mivel a tökéletes vezető felület ellentétes fázisban reflektálja az elektromágneses hullámokat, ezért ha fél hullámhossz egész számú többszöröse a távolság a vezető és a sugárzó között, a sugárzó túloldalára a haladó és a reflektált hullám ellentétes fázisban érkezik, teljes kioltás tapasztalható. Amennyiben a sugárzó és a tökéletes vezető közötti távolság a hullámhossz negyede plusz a hullámhossz felének egész számú többszöröse, teljes erősítés várható. A sugárzó és a tökéletes vezető felület között a teljes reflexió miatt állóhullámok alakulnak ki.

A szimulációban használt geometria, egydimenziós probléma lévén, egy egyenes vonal. A vonal hossza 3 méter, 1 méternél található egy 1cm szélességű antenna, bal oldalon a 0 pontban tökéletes elnyelő felület, 2 méternél pedig a tökéletes vezető található. Az első szimuláció $f = 150\text{MHz}$ -es frekvenciájú jel mellett történt, melynek hullámhossza $\lambda = 2\text{m}$. A hullámhossz a sugárzó és a tökéletes vezető felület távolságának kétszerese, ezért kioltás várható. Az eredmény minden csomópontban egy komplex szám, az elektromos térerősség abszolútértékét és fázisát külön ábrán mutatom be. Referenciaképpen a 3.1. ábrán látható a szimuláció eredménye a tökéletes vezető felület nélkül.



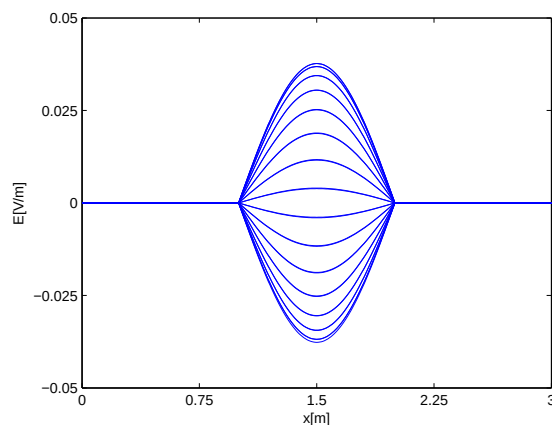
3.1. ábra: A szimuláció eredménye tökéletes vezető perem nélkül

Látható, hogy az elektromos térerősség abszolútértéke konstans, a fázisa pedig lineárisan változik az antennától való távolság függvényében, tehát haladó hullám alakult ki. Érdekesség, hogy egydimenzióban nincs szabadtéri csillapítás, mivel a hullám nem tud szétterülni minden irányba. A 3.2. ábrán látható a szimuláció eredménye tökéletesen vezető felülettel.

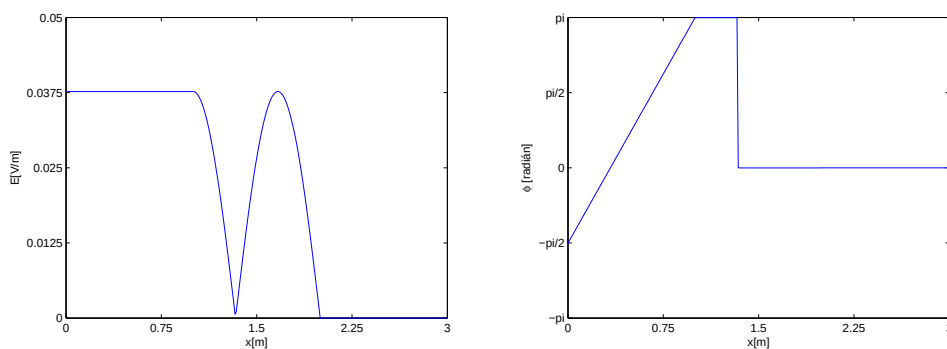


3.2. ábra: Az elektromos térerősség abszolútértéke és fázisa 150MHz frekvencián

A bal oldali ábrán látható, hogy az antennától balra az elektromos térerősség értéke közel 0. A nem 0 érték annak köszönhető, hogy az antenna nem végtelenül vékony. A jobb oldali ábrán látható az elektromos térerősség fázisa. Az antenna és a tökéletes vezető felület között a fázis értéke állandó. Ez annyit jelent, hogy azon a tartományon állóhullám alakult ki. A kialakult állóhullámot ábrázolja a 3.3 ábra. Az ábra az eredmény időtartománybeli képét mutatja, egy teljes periódus több időlépését egyetlen képen.

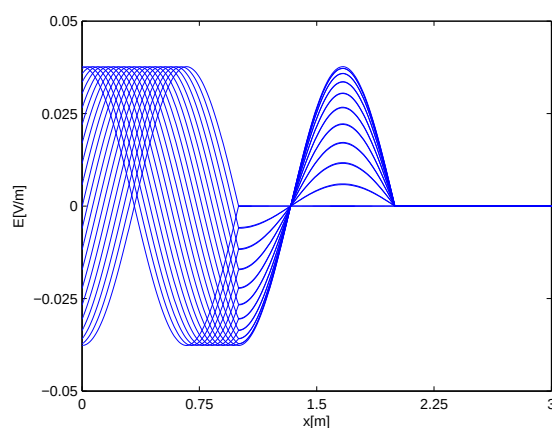


3.3. ábra: Kialakult állóhullám



3.4. ábra: Az elektromos térerősség abszolútértéke és fázisa $225MHz$ frekvencián

Ha a problémát $f = 225MHz$ frekvencián vizsgáljuk, az eredmény teljesen eltér a fentiektől. A $225MHz$ frekvenciájú elektromágneses hullám szabadtéri hullámhossza $\lambda = \frac{4}{3}m$. Az antenna síkjában reflektált hullám a haladóval azonos fázisban találkozik, tehát összeadódnak. A szimuláció eredményét mutatja a 3.4. ábra. Látható, hogy az antennától balra most nem nullához közeli érték az eredmény, tehát valóban nem ellentétes fázisban érkezett a haladó illetve a reflektált hullám erre a tartományra. Összehasonlítva az eredményt a 3.1. ábrán láthatóval, az elnyelő perem felé haladó hullám abszolútértéke most pontosan a kétszerese. A fázist mutató ábrán jól látható az állóhullám és a haladóhullám helye a térben. A hullám terjedése fél periódusidő alatt a 3.5. ábrán látható.



3.5. ábra: A hullám terjedésének illusztrációja

3.1.2.2. Levegőtől eltérő közeg hatása

Az elektromágneses hullámok különböző permittivitással és permeabilitással rendelkező anyagokban más sebességgel terjednek, a hullámhosszuk változik. Ha λ_0 jelöli a hullámhosszt vákuumban, akkor a hullámhossz a közegben:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}. \quad (3.11)$$

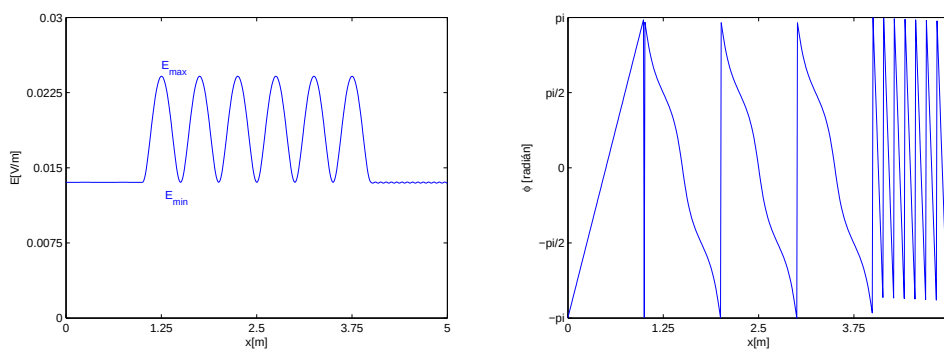
Amennyiben μ_r és ϵ_r hányadosa nem egyezik meg egymást határoló közegekben, akkor a közeghatáron az elektromágneses hullám reflexiót szenved. Ha a közeghatárra merőlegesen haladó hullám Z_{0_1} hullámimpedanciájú közegből a Z_{0_2} hullámimpedanciájú közegbe tart, a reflexió értéke

$$\Gamma = \frac{Z_{0_2} - Z_{0_1}}{Z_{0_2} + Z_{0_1}} \quad (3.12)$$

képlet alapján számolható. A szimuláció eredményéből viszont sokkal egyszerűbb az állóhullámarány megállapítása. Ez a kialakult állóhullámon a maximális és a minimális térerősség hányadosa, de számítható a reflexiótényező ismeretében is:

$$r = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}. \quad (3.13)$$

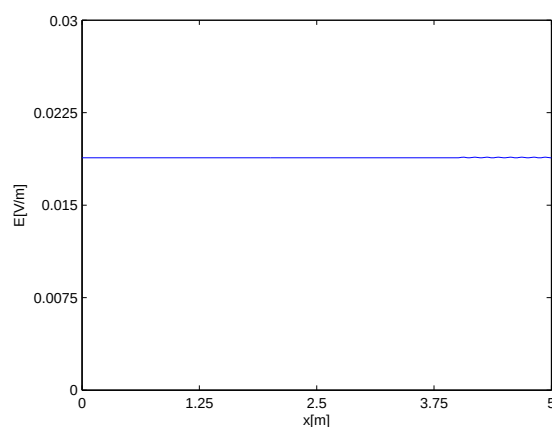
A geometria most 5 méter hosszú, a bal perem tökéletesen áteresztő/elnyelő perem, 1 méternél található egy sugárzó a levegőben, 4 métertől 5 méterig pedig egy levegőtől eltérő paraméterekkel rendelkező közeg található. A geometria végén most egy levegőtől eltérő közegben van a tökéletes elnyelő felület. A gerjesztés frekvenciája most $f = 300\text{MHz}$ lesz az egyszerű számítások érdekében. A közeg relatív permittivitása $\epsilon_r = 13$, relatív permeabilitása $\mu_r = 4$. Levegőben 300MHz frekvenciájú jel hullámhossza 1m. A közegben (3.11) alapján a hullámhossz $\lambda = \frac{1}{\sqrt{52}} \approx 0,138\text{m}$, a reflexiótényező pedig (3.12) alapján $\Gamma = \frac{\sqrt{\frac{4}{13}}120\pi - 120\pi}{\sqrt{\frac{4}{13}}120\pi + 120\pi} \approx -0.286$. A szimuláció eredményét mutatja a 3.6. ábra. A szimuláció eredményének abszolútértékéről lehet leolvasni a szimulációban létrejövő reflexió mértékét. A 3.6. ábrán látható a maximális és minimá-



3.6. ábra: A szimuláció eredményének abszolútértéke és fázisa

lis térerősség helye. A szimuláció alapján $E_{max} = 0,0242 \frac{V}{m}$, illetve $E_{min} = 0,0134 \frac{V}{m}$. E két értékből számítható (3.13) alapján az állóhullámarány értéke, ami $r = 1.806$, ebből pedig visszaszámolható a reflexiótényező abszolútértéke, ami $|\Gamma| = 0,286$. Ez az érték tökéletesen megegyezik a korábbi számításokkal. A jobb oldalon található közegben a hullámhossz értékét a fázisábráról lehet könnyedén leolvasni. Az ábrán a függőleges vonalak természetesen nem ugrások a fázisban, csak körbeér a fázisvektor, tehát a függőleges vonalak távolságával könnyedén kiszámítható a hullámhossz. Levegőben ez az érték természetesen 1m, a jobb oldali közegben pedig 0,14m, ami a számított értéknek kielégítő közelítése.

Amennyiben a közegben $\mu_r = \epsilon_r$, a hullámimpedanciája megegyezik a levegőével, így nincs reflexió. Ez látható a 3.7. ábrán.



3.7. ábra: Azonos hullámimpedanciájú közegek határán nincs reflexió

3.1.3. 2D problémák a frekvenciatartományban

Kétdimenziós szimulációk esetén a reflexió és a megváltozott hullámhossz csak egyszerűbb problémák esetén határozható meg egyszerűen. Ezen okból olyan problémák szerepelnek ebben az alfejezetben, melynek létezik analitikus megoldása, vagy jól ismert a viselkedése.

3.1.3.1. Csőtápvonal

A csőtápvonalak a mikrohullámú technika alapvető építőelemei. A cső anyaga elektromosan jó vezetőképességgel rendelkezik, ezáltal az elektromágneses tér nem hatol át rajta, hanem a tápvonalon belül terjed. A csőtápvonalon belül a dielektrikum, amiben terjed a hullám, a legtöbb esetben levegő. Közismert, hogy a csőtápvonalon belül az elektromágneses tér hullámhossza nem egyezik meg a szabadtéri hullámhosszal [20, 21]. Levegő dielektrikumában ez a megváltozott hullámhossz a

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_h^2}}} \quad (3.14)$$

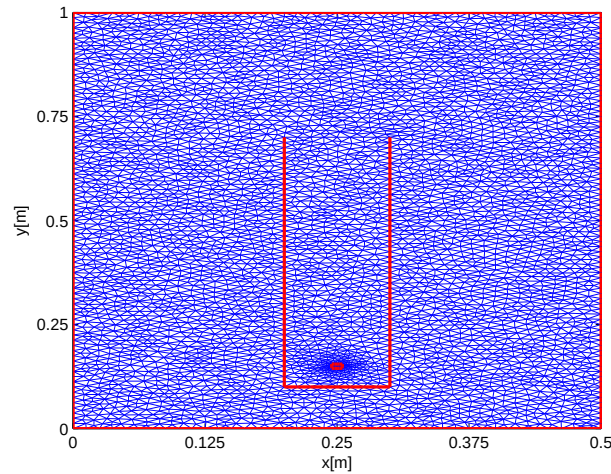
képlet alapján számítható, ahol λ_0 a szabadtéri hullámhossz, λ_h pedig a csőtápvonal határhullámhossza, melynél nagyobb hullámhosszú jel tisztán képzetes permittivitású dielektrikummal találkozik, nagy csillapítást szenved. A határhullámhossz számítása a

$$\lambda_h = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (3.15)$$

összefüggés alapján lehetséges, ahol m és n a csőtápvonalban terjedő hullám módusát jelölik, a és b pedig a téglalap keresztmetszetű csőtápvonal oldalainak hossza.

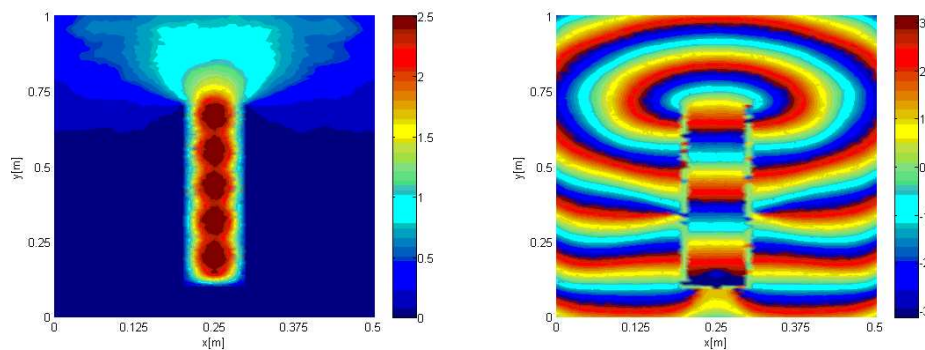
A szimuláció alapját képező probléma geometriája és az alkalmazott véges-elemháló a 3.8. ábrán látható. A nyitott végű csőtápvonal szélessége $a = 0,1\text{m}$, mivel kétdimenziós modellről van szó, a síkra merőlegesen nem alakul ki mó-

dus, így a TE_{10} módushoz a határhullámhossz (3.15) alapján $\lambda_h = 0,2\text{m}$. Ez minimálisan $f = 1,5\text{GHz}$ frekvenciát jelent. A tápvonal fala a szimuláció során



3.8. ábra: A szimulálandó csőtápvonal modellje

tökéletes vezető anyag, ezért a geometriája kiterjedés nélküli, mivel a tökéletes vezetőben elektromos tér nincs, számítása felesleges. A tápvonal betáplálása a modell síkjára merőleges, így az áram is a síkra merőlegesen folyik, ezért az elektromos térerősségnek is csak a síkra merőleges komponense lehet. Ezen oknál fogva a szimuláció során elegendő csomóponti elemek alkalmazása. A gerjesztés frekvenciája a szimuláció során $f = 2\text{GHz}$. Ezen a frekvencián a csőhullámhossz (3.14) alapján $\lambda \approx 0,227\text{m}$. A szimuláció eredményét mutatja a 3.9. ábra. A csőtápvonalban mérhető hullámhossz a fázisábráról könnyen



3.9. ábra: A csőtápvonal szimuláció eredményének abszolútértéke és fázisa

leolvasható a színskála hirtelen változásainál, ugyanis ott ér körbe a fázisvektor, tehát két ugrás távolsága a csőben mérhető hullámhossz, ami most

$\lambda \approx 0,228\text{m}$. A számított és a szimulált érték közötti eltérés nagyságrendjébe esik a szimuláció során alkalmazott átlagos elemméret, tehát a szimuláció eredménye bőven hibahatáron belül található. A fázisábráról az is leolvasható, hogy a nyitott végű csőtápvonal visszirányba is sugároz, bár a visszasugárzott elektromos térerősség értéke meglehetősen kicsi.

3.1.3.2. Parabola antenna

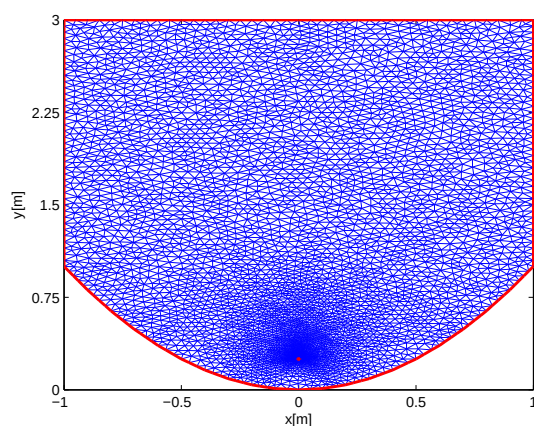
A parabola antennák az egyik legelterjedtebb eszközök a vezeték nélküli pont-pont kapcsolatok körében. A parabola antennák rendelkeznek az egyik legnagyobb antennanyereséggel, így ezek biztosítják az egyik legkisebb nyalábszélességet. A műholdas távközlés parabola antennák nélkül elképzelhetetlen lenne. A parabola antenna tányérjának mérete nagyobb kell legyen, mint az alkalmazott hullámhossz, ezáltal a sugárzó parabola antenna tengelyére merőleges síkban közelítőleg síkhullámok alakulnak ki.

Descartes-féle koordinátarendszerben, az y tengellyel megegyező tengelyű parabola egyenlete:

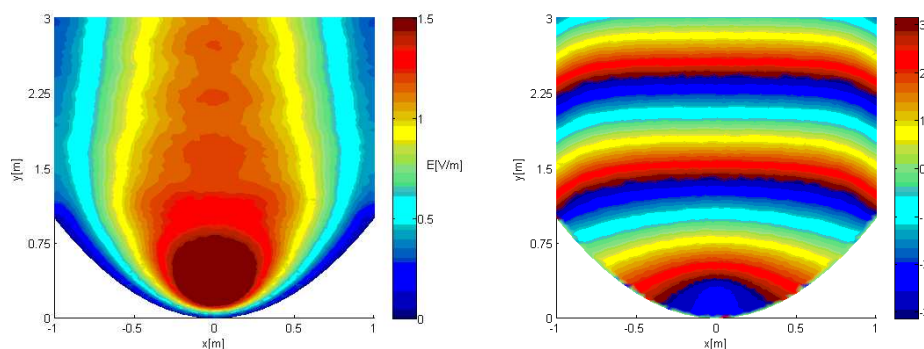
$$y = \frac{x^2}{4p}, \tag{3.16}$$

ahol p a parabola csúcsa és fókuszpontja közötti távolság. Parabola antennák fejegysége a fókuszpontban található, így a parabola tengelyének bármely síkjába a tányérról reflektált elektromágneses hullám ugyanolyan fázisban érkezik meg. A szimulációhoz használt geometria látható a 3.10. ábrán.

A fókuszpont, így a fejegység távolsága a parabola csúcsától $0,25\text{m}$. A gerjesztés frekvenciája a szimuláció során 300MHz , melynek hullámhossza ugyan nem sokkal kisebb, mint a modellben szereplő parabola mérete, de az antenna geometriájának hatásának szemléltetésére alkalmas. A parabola antenna a szimulációban tökéletes vezető felületként lett megvalósítva a teljes reflexió érdekében. A gyakorlatban ez hasonlóan történik, a parabola antenna tányérja elektromosan kitűnően vezető anyagból készül. A szimuláció eredménye látható a 3.11. ábrán. Az eredmény abszolútértékén látható, hogy az



3.10. ábra: A parabola antenna modellje



3.11. ábra: A parabola antenna szimulációjának abszolútértéke és fázisa

elektromomágneses tér döntő része a parabola tengelyének irányába terjed, míg a fázisábrán látható, hogy a tengelyre merőleges síkban közel állandó a jel fázisa, tehát közelítőleg síkhullám indul a parabola antennáról. Szimuláció segítségével meghatározható az antenna iránykarakterisztikája. Ehhez a peremen szükséges az elektromos térerősség komplex csúcsértékének meghatározása, mely alapján közeltér-távoltér transzformáció segítségével tetszőleges távolságra meghatározható az antenna iránykarakterisztikája.

A frekvenciatartománybeli analízis nagy előnye, hogy egyetlen frekvencia, vagy keskeny frekvenciasáv vizsgálata kifejezetten gyors, tranziensektől mentes eredményt ad. A komplex csúcsértékként megkapott eredmény könnyen időtartománybeli alakra hozható. Ideális állóhullámok, hullámmintázatok meghatározására, alkalmazható antennák iránykarakterisztikájának közelítő számítására, szűrők átmeneti karakterisztikájának meghatározására. Alkalmat-

lan viszont tranziensek vizsgálatára, impulzusszerű, folytonos spektrumú jelek által keltett elektromos tér vizsgálatára.

3.2. Időtartománybeli analízis

Időtartománybeli analízis során a bemeneti paraméter egy tetszőleges jel időtartománybeli alakja, a megoldás pedig minden egyes időlépésben az elektromos térerősség értéke minden egyes csomópontban. Az elektromos tér tranziens viselkedését lehet így megvizsgálni tetszőleges spektrumú jel esetén.

3.2.1. Gyenge alak

A (2.41) összefüggés az időtartománybeli hullámegyenlet. Megszorozva a hullámegyenletet egy alkalmas $\vec{T}$ tesztfüggvénnyel, integrálva a teljes tartományon:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{T} \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) dV + \int_V \vec{T} \cdot \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} dV + \int_V \vec{T} \cdot \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV \\ = - \int_V \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Az első integrál itt is második deriváltakat tartalmaz. A második deriváltak kiküszöbölése a frekvenciatartománybeli gyenge alak levezetésekor tárgyalttal teljesen analóg. A (3.17) egyenlet első integráljára felírva (3.2) összefüggést $\vec{A} = \vec{T}$ és $\vec{B} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E}$ helyettesítéssel, illetve alkalmazva a (2.42) közelítést, az időtartománybeli analízis gyenge alakja:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \times \vec{T}) \cdot \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{E}) dV + \int_V \vec{T} \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} dV + \int_V \vec{T} \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV \\ + Y_0 \oint_A (\vec{n} \times \vec{T}) \cdot \left(\vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dA = - \int_V \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ebben az egyenletben az ismeretlen elektromos térerősség első és második deriváltja is szerepel, így ez egy másodfokú inhomogén differenciálegyenlet-rendszer. Külön problémát okoz, hogy az egyenlet jobb oldalán a gerjesztésnek

is az idő szerinti deriváltja szerepel. Az együtthatókat szétválasztva, a (3.18) egyenlet mátrixos alakban felírva [6] :

$$\underline{\underline{Q}} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} + \underline{\underline{R}} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \underline{\underline{S}} \underline{E} = \underline{f}, \quad (3.19)$$

ahol

$$Q_{i,j} = \int_V \vec{T}_i \cdot \epsilon \vec{T}_j \, dV, \quad (3.20)$$

$$R_{i,j} = \int_V \vec{T}_i \cdot \sigma \vec{T}_j \, dV + Y_0 \oint_A (\vec{n} \times \vec{T}_i) \cdot (\vec{n} \times \vec{T}_j) \, dA, \quad (3.21)$$

$$S_{i,j} = \int_V (\nabla \times \vec{T}_i) \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{T}_j) \, dV, \quad (3.22)$$

illetve

$$f_i = - \int_V \vec{T}_i \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \, dV. \quad (3.23)$$

Ennek megoldása numerikusan sem az előrelépő *Euler*-módszerrel sem az úgynevezett *Crank-Nicolson*-módszerrel nem célravezető, mivel ezen módszerek csak elsőrendű differenciál-egyenletek megoldására vannak kifejlesztve.

Másodrendű inhomogén differenciálegyenletek közelítő megoldása számítható az úgynevezett *Newmark- β* [22] módszer segítségével. Jelöljön egy időtől függő függvény $u(t)$. A módszer lényege, hogy a centrális differencia módszerét alkalmazza az első illetve a második deriváltakra. A centrális differencia séma az előrelépő és a hátralépő módszer számtani közepe. A *Newmark- β* módszer alapján $u(t)$ első és második idő szerinti deriváltjainak közelítő értéke:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} \approx \frac{u(t)^{n+1} - u(t)^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} \approx \frac{u(t)^{n+1} - 2u(t)^n + u(t)^{n-1}}{\Delta t^2}, \quad (3.25)$$

ahol n index jelöli azt az időpillanatot, amikor $u(t) = u(n\Delta t)$. A számításokhoz

még szükség van a differenciálatlan mennyiségek súlyozott átlagára:

$$u \approx \beta u^{n+1} + (1 - 2\beta)u^n + \beta u^{n-1}, \quad (3.26)$$

ahol β egy paraméter 0 és 1 közötti értékkel. Behelyettesítve u helyére E illetve J függvényét, és visszahelyettesítve (3.24)-(3.26) összefüggéseket (3.19) kifejezésbe:

$$\begin{aligned} & \left(\underline{Q} \frac{1}{\Delta t^2} + \underline{R} \frac{1}{2\Delta t} + \beta \underline{S} \right) \underline{E}^{n+1} - \left(\frac{2}{\Delta t^2} \underline{Q} - (1 - 2\beta) \underline{S} \right) \underline{E}^n \\ & + \left(\underline{Q} \frac{1}{\Delta t^2} - \underline{R} \frac{1}{2\Delta t} + \beta \underline{S} \right) \underline{E}^{n-1} = \beta \underline{f}^{n+1} + (1 - 2\beta) \underline{f}^n + \beta \underline{f}^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ez (2.7) összefüggés által ismertetett formában felírva:

$$\begin{aligned} & \left(\underline{Q} \frac{1}{\Delta t^2} + \underline{R} \frac{1}{2\Delta t} + \beta \underline{S} \right) \underline{E}^{n+1} = \left(\frac{2}{\Delta t^2} \underline{Q} - (1 - 2\beta) \underline{S} \right) \underline{E}^n \\ & - \left(\underline{Q} \frac{1}{\Delta t^2} - \underline{R} \frac{1}{2\Delta t} + \beta \underline{S} \right) \underline{E}^{n-1} + \beta \underline{f}^{n+1} + (1 - 2\beta) \underline{f}^n + \beta \underline{f}^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Stabil eredményt lehet kapni β értékének jó megválasztásával. Megmutatható, ha $\beta \geq \frac{1}{4}$ akkor a differenciálegyenlet feltétel nélkül stabil, így én számításaim során ezzel a β értékkel dolgoztam.

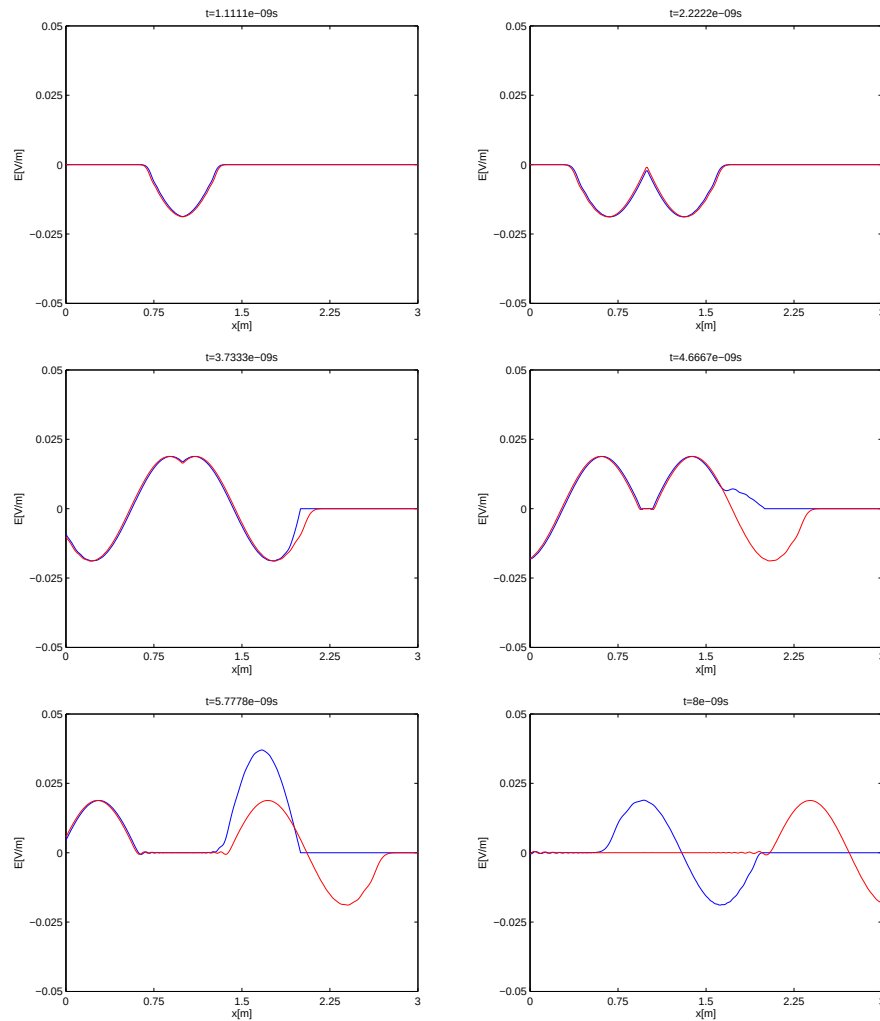
3.2.2. 1D problémák az időtartományban

3.2.2.1. Végtelen féltér probléma

A bemutatandó végtelen féltér probléma tökéletesen megegyezik a korábban ismertetettel, csak a vizsgálat most időtartományban történik. A geometria ugyanaz, mint a frekvenciatartománybeli analízis során, 3 méteres térrész legelső pontja egy tökéletesen elnyelő felület, 1 méternél egy sugárzó, 2 méternél pedig egy tökéletesen vezető felület található.

Az első szimuláció során a tökéletes vezető nélküli esetet vetem össze a végtelen féltér esetével. Egy periódusnyi 225MHz frekvenciájú jel hatása kerül bemutatásra a jobb átláthatóság érdekében. Mivel időtartománybeli analízis

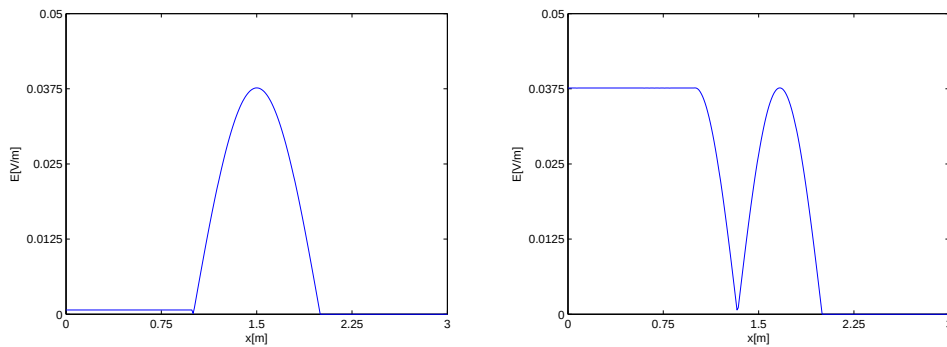
esetén az eredmény az elektromos térerősség időtartománybeli alakja, ezt dolgozatban ábrázolni nehéz, az ábrákat több időlépés eredményeiből készítettem el. A szimuláció eredményét mutatja a 3.12. ábra. Itt a kék görbe mutatja azt az esetet, amikor a problémátér tartalmazza a tökéletes vezető peremet. Látható, hogy a vezető falról a hullám ellentétes fázisban verődik vissza.



3.12. ábra: A szabadtér és a végtelen féltér összehasonlítása

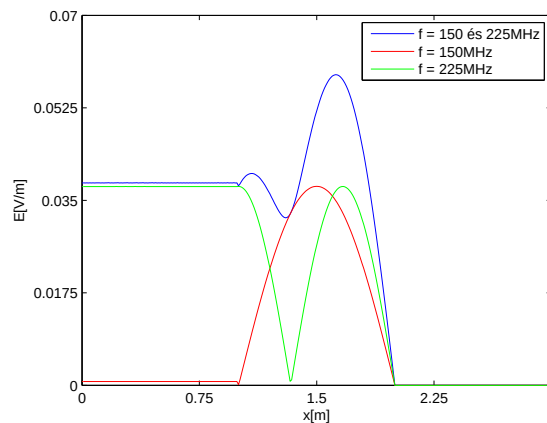
A következő példákban 150 illetve 225MHz frekvenciájú jellel történő szimulációk következnek. A frekvenciatartománybeli szimulációk során bemutatásra került, hogy ezen geometrián 150MHz frekvencia esetén a sugárzótól balra teljes kioltás, míg 225MHz frekvencia esetén teljes erősítés következik be. A frekvenciatartománybeli eredménnyel való összehasonlítás végett a szimuláció utolsó periódusában a végeselemháló csomópontjaiban a maximális értékeket

ábrázolom (lásd 3.13. ábra). Ez a maximális érték matematikailag nem jelent mást, mint a komplex csúcserő abszolútértékét. Szemmel láthatóan az eredmény tökéletesen megegyezik a 3.2. és a 3.4. ábrákon szereplőkkel, tehát az idő- és a frekvenciatartománybeli szimuláció eredménye azonos bemeneti paraméterek mellett, ahogy az várható volt, teljes mértékben megegyezett. Időtartománybeli analízis során viszont lehetőség van tetszőleges spektrumú jellel számolni. A következő szimuláció során egy 150MHz és egy 225MHz



3.13. ábra: Az elektromos térerősség maximuma egy periódus alatt 150MHz és 225MHz frekvencián

frekvenciájú jel összege a gerjesztés. A jel spektrumában szereplő frekvencia-komponensek viselkedése már látható volt. Az eredmény a 3.14. ábrán látható. Ahogy az várható volt, az összetett jellel történő szimuláció eredménye, a kom-

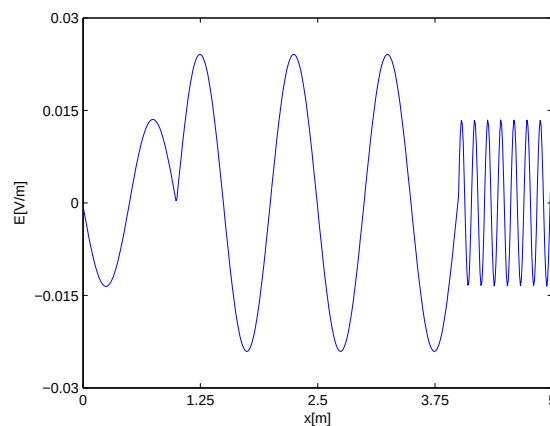


3.14. ábra: Az összetett jel összehasonlítása a komponenseivel

ponensekkel történő szimuláció eredményének a szuperpozíciója.

3.2.2.2. Levegőtől eltérő közegek hatása

Ahogy az már feljebb látható volt, eltérő tulajdonságú közegekben eltérő lehet az jel hullámhossza, illetve eltérő közegek határán az elektromágneses térben reflexió léphet fel, erre egy példa egydimenzióban már bemutatásra került. A következő probléma geometriája és bemeneti paramétereinek értékei tökéletesen megegyeznek a frekvenciatartománybeli analízis során alkalmazottakkal. A geometria egy 5m hosszú vonal, a baloldali perem tökéletesen áteresztő perem, 1m-nél található a forrás, 4m-től jobbra pedig egy $\mu_r = 4$ illetve $\epsilon_r = 13$ tulajdonsággal rendelkező közeg. A hullámhossz változását adott paraméterekkel rendelkező közegben a (3.11) összefüggés írja le. Jelen esetben a jobb oldali közegben, 300MHz frekvenciájú jel esetén $\lambda \approx 0,138\text{m}$. Mivel időtartománybeli analízis eredménye egy valós szám, nem egy periodikus jel komplex csúcsértéke, ezért nem lehet a fázisára alapján egyszerűen számítani. Ehelyett az eredményt egy időlépésben kell megvizsgálni, lehetőleg akkor, amikor már több hullámhossznyira behatolt az elektromágneses hullám a közegbe, hogy leolvasható legyen az ábráról a hullámhossz a közegben. Egy időlépést ábrázol a 3.15. ábra.

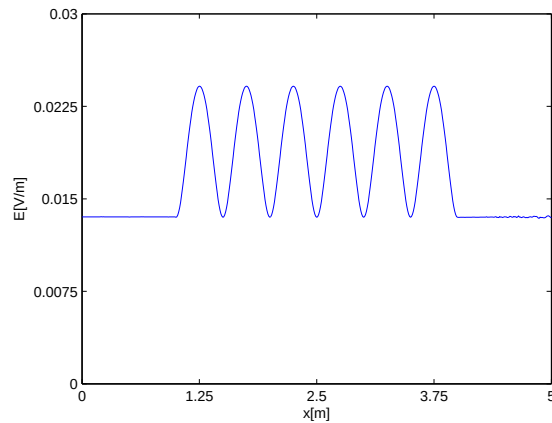


3.15. ábra: Szimuláció eredménye egy időpillanatban

Az ábráról leolvasható hullámhossz értéke $\lambda = 0,139\text{m}$. Ez az érték jó közelítéssel megegyezik a számított, illetve a frekvenciatartománybeli szimuláció során szimulált értékkel.

A reflexió szimulációja az összehasonlítás végett ugyanezen a geometrián

történik. A (3.12) képlet alapján számított reflexió értéke erre a problémára $\Gamma \approx -0,286$. Frekvenciatartománybeli szimuláció során az eredmény abszolútértékéről leolvasható volt az antenna és a közeg között az elektromos térerősség maximuma és minimuma, melyből számítható volt az állóhullámarány. Ugyanez az ábra előállítható egy periódusnyi időtartománybeli szimuláció csomópontonkénti maximumával. Azonban ez a módszer csak akkor adja vissza a frekvenciatartománybeli eredményt, ha állandósult a jelalak, az átmeneti jelenségek lecsengtek, tehát újabb reflexiók már nem változtatják a periódusonkénti viselkedést. A csomópontonkénti maximumot mutatja a 3.16. ábra. Az antenna és a közeg között $E_{min} = 0,0134 \frac{V}{m}$ illetve $E_{max} = 0,0241 \frac{V}{m}$, tehát az állóhullámarány $r = 1,798$. Az állóhullámarány értékéből visszszámolva, a reflexiós tényező abszolútértéke $|\Gamma| = 0,285$, ez közel megegyezik a számított értékkel, illetve a frekvenciatartománybeli szimuláció eredményével.



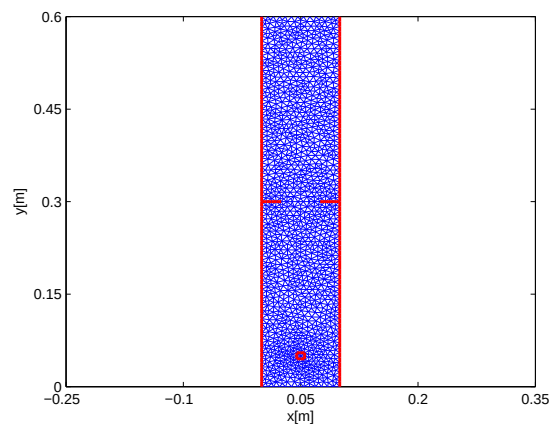
3.16. ábra: Egy periódusnyi hullám maximuma

3.2.3. 2D problémák az időtartományban

Az egydimenziós problémák idő- és frekvenciatartománybeli vizsgálatánál kiderült, hogy azonos feltételek mellett azonos eredményre lehet jutni. Azonban vannak olyan problémák, melyek csak részlegesen, és vannak olyanok, melyek egyáltalán nem oldhatók meg a frekvenciatartománybeli analízissel. Ezek a problémák főképp többfrekvenciás problémák, illetve tranziens jelenségek.

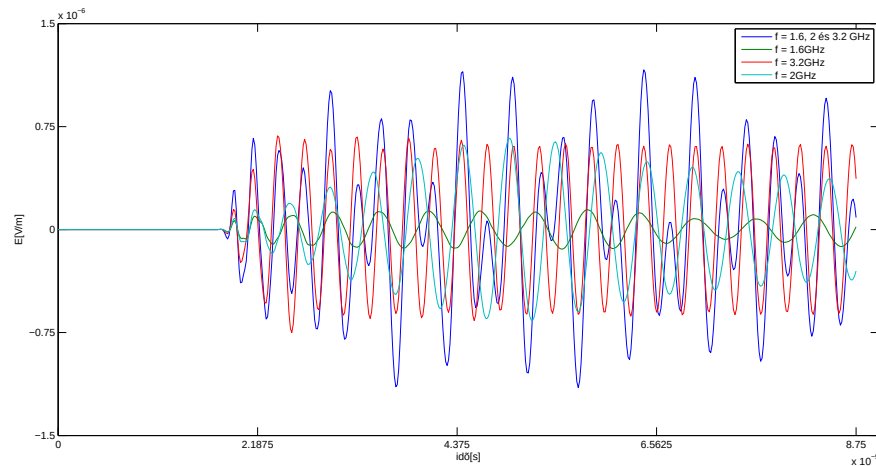
3.2.3.1. Csőtápvonal írisszel

A négyszögletes csőtápvonalakban az írisz egy keskeny rés a tápvonalon belül, ez a rés felüláteresztő szűrőként viselkedik. Frekvenciatartománybeli analízissel csak egyes frekvenciákon történő viselkedést lehetne megállapítani, nagy frekvenciatartományon eredményre jutni kielégítő részletességgel hosszadalmas szimulációt eredményezne. Időtartományban tetszőleges amplitúdó- és fázis-spektrumú jel mellett egyetlen szimuláció elegendő, viszont sokszor rengeteg időlépés szükséges. A szimuláció geometriája látható a 3.17. ábrán. A táp-



3.17. ábra: Írisszel rendelkező csőtápvonal geometriája

vonal szélessége 10cm, így (3.15) alapján a tápvonal alsó határfrekvenciája $f = 1,5\text{GHz}$. Az írisz szélessége 5cm. A tápvonal fala és az íriszt körülzáró felület tökéletes vezető felületként lett beállítva a szimuláció során, míg a tápvonal eleje és vége tökéletesen áteresztő felület. A szimuláció során olyan gerjesztést állítottam be, melynek spektruma többfrekvenciás. A gerjesztés egy 1,6GHz, egy 2GHz, és egy 3,2GHz frekvenciájú jel szuperpozíciója. Az írisznek köszönhetően a tápvonal végén várhatóan a 3,2GHz-es frekvenciakomponens fog dominálni. A szimulációt végrehajtottam az összetett jellel, illetve az összetevő komponensekkel külön az eredmény könnyebb átláthatóságáért. A szimulációk eredményeinek összehasonlítása látható a 3.18. ábrán. A különböző frekvenciakomponensek által létrejövő térerősségek összege megegyezik azzal az értékkel, ami az összetett jellel történő szimuláció eredménye, ezért ezt külön ábrán nem szemléltetem. Az ábrán látható, hogy a szimuláció alap-



3.18. ábra: Az összetett jel, és annak komponensei a csőtápvonal végén

ján az 1,6GHz frekvenciájú komponens nagy mértékű csillapítást szenved a csőtápvonal végéig, a 3,2GHz frekvenciájú komponens egy idő után közel állandó amplitúdóval, és a legkevesebb csillapítással ér a tápvonal végére, míg a 2GHz frekvenciájú jel a kettő közötti csillapítást szenved. Mindhárom komponens váltakozó amplitúdóval ér a tápvonal végére. Ez az ingadozás tápvonalon belüli reflexióknak köszönhető, mely egy transziens folyamat, ez frekvenciatartománybeli analízissel nem kimutatható.

3.2.3.2. Négyszögletes rezonátor

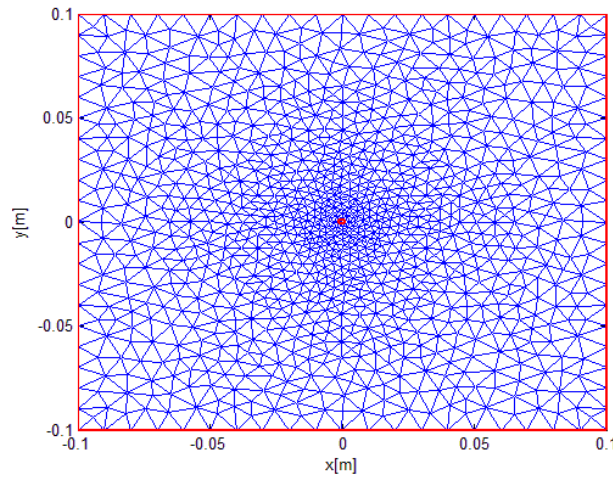
Az üregrezonátor egy rádiófrekvenciás rezonátor, egy jól vezető anyaggal körülrzárt légüres, vagy dielektrikummal kitöltött tér. Sokszor oszcillátorként és szűrőként alkalmazzák, de üregrezonátornak tekinthető például a mikrohullámú sütő. A rezonátorba bebocsátott jelnek bizonyos frekvenciakomponensei felé nagyobb, bizonyos frekvenciakomponensei felé pedig kisebb jósági tényezőt mutat. Ezt általában csak a rezonanciafrekvenciákra szokták számolni. A jósági tényező, másnéven körjóság az a szám, amely megmutatja, hogy a rezonanciafrekvenciákon a jel hány periódus alatt csökken e-ad részére. A négyszögletes tápvonal rezonanciafrekvenciája [17,20,21] az alábbi összefüggés

alapján számítható:

$$f_{mnl} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2}, \quad (3.29)$$

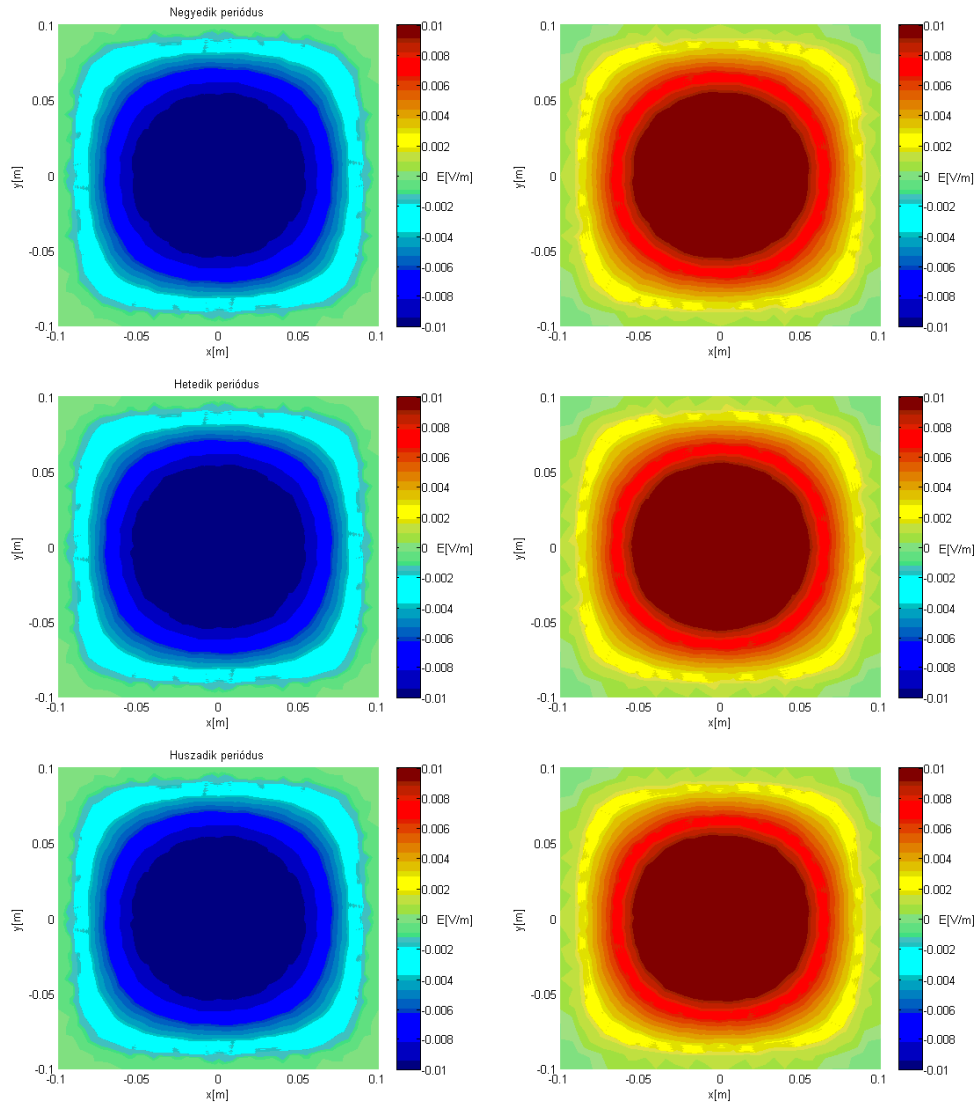
ahol m , n és l a rezonátorban kialakuló módusokat jelöli, c a fénysebesség, a , b és d rendre a négyszögletes rezonátor szélességét, magasságát, és hosszát jelölik.

Az első szimuláció egy tökéletes vezető fallal rendelkező üregrezonátor viselkedése. Az alkalmazott végeselemháló a 3.19. ábrán látható. A szimulálandó



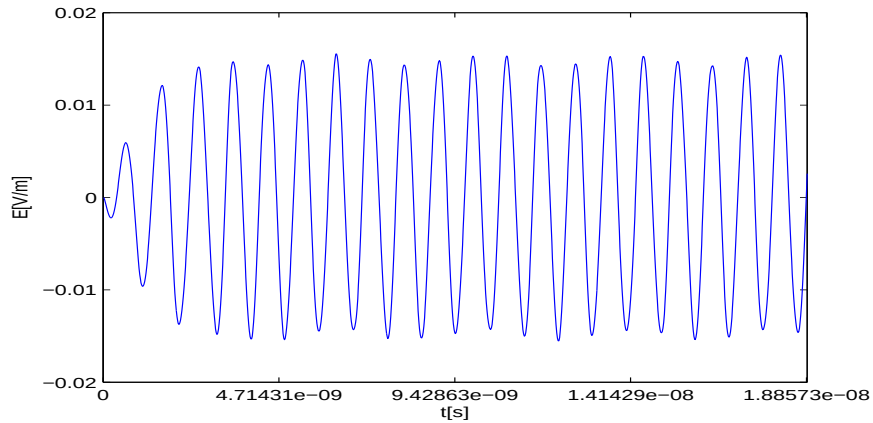
3.19. ábra: Az üregrezonátor modellje

elrendezés egy TE_{101} módusú rezonátor, mivel kétdimenzióban nem lehet a síkra merőleges kiterjedése a geometriának. A (3.29) összefüggés alapján a rendszer rezonanciafrekvenciája $f = 1,606\text{GHz}$. A rendszerre adott jelnek a frekvenciája a rezonanciafrekvencia, az amplitúdója egy periódus ideig lineárisan növekvő, egy periódus ideig konstans, egy periódus ideig pedig lineárisan csökkenő. Az amplitúdó ilyen mértékű szabályozása az időtartománybeli analízis stabilitása miatt szükséges. A rendszer viselkedésének vizsgálata későbbi, már gerjesztés nélküli állapotban történik. A szimuláció eredménye több periódusban a 3.20. ábrán látható. Az eredmény nem meglepő, a rezonátor fala tökéletesen vezető anyag, így a jósági tényező végtelen, tehát nem csillapodik az üregben az elektromos térerősség, végtelen sokáig rezeg a rendszer. Az



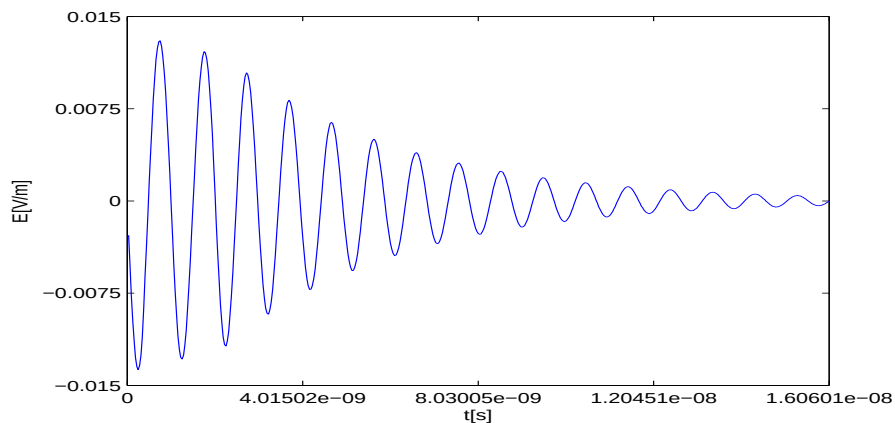
3.20. ábra: A rezonátorban a jel kialakuló térerősségek minimuma és maximuma

eredmény időtartományban jobban érzékelhető, ha csak egyetlen tetszőleges pontban látható az elektromos térerősség (lásd 3.21. ábra). Mint az írsszel rendelkező csőtápvonal esetében is, itt is látható, hogy a térerősség értéke nem egyenletes az idő múlásával, ez az egyenletlenség többek között annak köszönhető, hogy a gerjesztés mérete nem végtelenül kicsi, nem pontszerű, így a rezonátoron belül az egyes csomópontokba a gerjesztésen található diszkrét elemekről megindult hullámok kis fáziskülönbséggel érkehetnek. Amennyiben az üregrezonátor fala nem tökéletes vezető, a jósági tényező már nem végtelen, az üregből a teljesítmény eldisszipál. A következő szimuláció egy kifejezetten rossz



3.21. ábra: Az elektromos térerősség alakulása időben, egy tetszőleges pontban

üregrezonátort fog bemutatni a gyors disszipáció érdekében. A 3.19. ábrán bemutatott geometriát most körülveszi egy 1cm vastag réteg, melynek relatív permittivitása és permeabilitása $\mu_r = \epsilon_r = 2$, vezetőképessége pedig $\sigma = 10$. A jósági tényező definíciójából kiindulva, fenti ábráról közelítőleg leolvasható a jósági tényező értéke egészen kerekítve, mely a jelen geometria és anyagparaméterek mellett $Q \approx 6$. Természetesen ez egy kifejezetten rossz jósági tényező egy üregrezonátornak, a szimuláció célja a jósági tényező meghatározási lehetőségének bemutatása volt. Frekvenciatartománybeli analízis segítségével a jósági tényező meghatározása nem lehetséges. Időtartománybeli analízis



3.22. ábra: Az elektromos térerősség alakulása időben, egy tetszőleges pontban

kiválóan alkalmas átmeneti folyamatok, tranziensek vizsgálatára, tetszőleges

időtartománybeli alakkal rendelkező jel melletti szimulációra. Könnyen elvégezhető impulzusszerű, folytonos spektrummal rendelkező jelek által keltett terek vizsgálata, elektromágneses kompatibilitás vizsgálata. Hátránya, hogy kiértékelhető eredményhez megfelelő mennyiségű időlépés szükséges, így egy probléma teljes értékű megoldása meglehetősen hosszadalmas lehet.

4. fejezet

Konklúzió, jövőbeli tervek

A dolgozatom témája a rádiófrekvenciás problémák vizsgálata volt végeselem-módszer segítségével. Bemutatásra került röviden a végeselem-módszer, annak lépései. Levezetésre került az elektromágneses teret leíró *Maxwell*-egyenletből származtatható, a rádiófrekvenciás viselkedést leíró hullámgyenletek idő- és frekvenciatartománybeli alakja. A végeselem-módszerhez szükséges gyenge alakok levezetése, és az alkalmazási módjuk tárgyalása után a módszer validálása következett. Egyszerűbb egy- illetve kétdimenziós problémák szimulációja történt meg, ahol lehetett szakirodalmakból jól ismert összefüggések által kapott eredményekkel való összehasonlítás is megtörtént. A szimulációk eredményei jól illeszkednek a valósághoz. Minden probléma esetén a gerjesztés áramának iránya a szimuláció síkjára merőleges, ezért minden esetben elegendő volt csomóponti formafüggvények alkalmazása. A szimulációkhoz szükséges végeselemhálót *Gmsh* szoftver segítségével állítottam elő, a végeselem-módszer lépéseit *Matlab* környezetben valósítottam meg. Fény derült az idő- és frekvenciatartománybeli analízisek előnyeire és hátrányaira, az alkalmazhatóságuk területeire, melyeket későbbi munkám során is figyelembe veszek.

A számítási idő csökkentése végett a következő időszak célkitűzése a módszer implementálása *Petsc* környezetben. A jövőben szeretném megvalósítani a szimuláció síkjában folyó áram által indított tér számítását is, melyhez elemi formafüggvények alkalmazása szükséges. Távlabbi terv a szimulációk kiterjesztése háromdimenzióra, illetve a szimulációk validálása mérés útján.

Irodalomjegyzék

- [1] Comsol Multiphysics, <http://www.comsol.com>, (*utolsó látogatás: 2013.10.31.*).
- [2] Maxwell 3D, <http://www.ansys.com>, (*utolsó látogatás: 2013.10.31.*).
- [3] CST, <https://www.cst.com>, (*utolsó látogatás: 2013.10.31.*).
- [4] Matlab, www.mathworks.com, (*utolsó látogatás: 2013.10.31.*).
- [5] Kuczmán M. Iványi A., *The Finite Element Method in Magnetics*. Budapest: Academic Press, 2008.
- [6] J. Jin. *Finite Element Analysis of Antennas and Arrays*. John Wiley and Sons, New York, 2009.
- [7] J. Jin. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley and Sons, New York, 2002.
- [8] Iványi A. *Folytonos és diszkrét szimulációk az elektrodinamikában*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2003.
- [9] J. P. A. Bastos, N. Sadowski. *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*. Marcel Dekker, New York, 2003.
- [10] Friedl G. *Mágneses indukció szimulációja végelem-módszer segítségével*. Universitas, Győr, 2013.
- [11] J. C. Maxwell. *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. Philosophical Transactions of the Royal Society, London, 1865.

- [12] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Macmillen and Co, London, 1873.
- [13] Simonyi K., Zombory L. *Elméleti villamosságatan*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000.
- [14] Simonyi K. *Villamosságatan*, Akadémiai Könyvkiadó, Budapest, 1964.
- [15] Fodor Gy. *Elektromágneses terek*. Műegyetemi Kiadó, 1996.
- [16] Standeisky I. *Elektrodinamika*. Universitas, Győr, 2006.
- [17] D. M. Pozar. *Microwave Engineering*. John Wiley and Sons, New York, 2012.
- [18] Gmsh, <http://geuz.org/gmsh/>, (utolsó látogatás: 2013.10.31.).
- [19] Stoyan G. *Matlab - frissített kiadás*. TypoTex Kiadó, 2005.
- [20] Kolos T. *Mikrohullámú technika 1*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- [21] Istvánffy E. *Tápvonalak, antennák, hullámterjedés*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
- [22] Newmark, N. M. *A method of computation for structural dynamics*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1959.