

OTDK-DOLGOZAT

2015

**PORTFÓLIÓK MODELLEZÉSE ÉS KOCKÁZATI
ÖSSZEHASONLÍTÁSA KOPULÁK SEGÍTSÉGÉVEL**

**PORTFOLIO MODELLING AND RISK COMPARISON USING
COPULAS**

Kézirat lezárva: 2013. november 19.

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS.....	1
2. ELMÉLETI ALAPOK	6
2.1. MARKOWITZ PORTFÓLIÓ ELMÉLETE	6
2.1.1. A portfólió választási feladat.....	8
2.1.2. A Pareto-optimális portfólió.....	10
2.1.3. A hasznosság (utilitás) fogalma	12
2.1.4. Portfólió diverzifikálása	12
2.1.5. Egy értékpapír kockázatának hatása a portfólióra (Béta mutató)	15
2.2. KOCKÁZATI MÉRTÉKEK	16
2.2.1. A szórás	17
2.2.2. Az átlagos abszolút eltérés	17
2.2.3. Szemivariancia	17
2.2.4. Value at Risk (VaR)	18
2.2.5. Conditional Value at Risk (CVaR).....	20
2.2.6. Expected Shortfall	21
2.3. PORTFÓLIÓ ELOSZLÁSÁNAK MODELLEZÉSE NEM NORMÁLIS ESETBEN	23
2.3.1. Hatványfüggvény eloszlás.....	23
2.3.2. Mandelbrot fraktálok.....	23
2.3.3. Aszimmetrikus eloszlások, vastag farkú eloszlások	24
3. KOPULÁK	26
3.1. AZ ELŐZMÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA, A KOPULA ALKALMAZÁSÁNAK FELVETÉSE	26
3.2. A KOPULA DEFINÍCIÓJA ÉS NÉHÁNY FONTOS KOPULA	28
3.2.1. A minimum, a maximum és a függetlenségi kopulák	29
3.2.2. Alsó és felső extremitásokban való összefüggések jellemzése	31
3.2.3. Gauss és t kopula.....	32

3.2.4. Arkhimédészi kopulák.....	33
3.3. OLYAN KÉT DIMENZIÓS ELOSZLÁS SZIMULÁCIÓJA, AMELY BEMUTAT KÜLÖNBÖZŐ ÖSSZEFÜGGÉSI STRUKTÚRÁKAT UGYANOLYAN KORRELÁCIÓ MELLETT	35
3.4. ÖSSZEFOGLALÁS	38
4. „GOODNESS OF FIT” – ILLESZKEDÉS JÓSÁGÁNAK TESZTELÉSÉRE ALKALMAZHATÓ MÓDSZEREK KOPULÁK ESETÉBEN.....	39
5. HOGYAN KERÜLT A GAUSS KOPULA A PÉNZÜGYI ELEMZŐK ASZTALÁRA? ...	43
6. SZIMULÁCIÓ GUMBEL ILLETVE GAUSS KOPULA SEGÍTSÉGÉVEL	46
7. SZÁMÍTÓGÉPES MODELLEZÉSI LEHETŐSÉGEK.....	51
7.1. AZ R CSOMAG S4-STYLE OSZTÁLYAI.....	52
7.2. A COPULA OSZTÁLY MÓDSZEREI.....	54
7.3. HOGYAN ILLESSZÜNK KOPULÁT AZ ADATAINKRA?.....	58
7.4. MEGOLDÁSRA VÁRÓ NUMERIKUS PROBLÉMÁK A CSOMAGBAN.....	59
7.5. ÖSSZEGZÉS, ÉS TOVÁBBI FEJLESZTÉSI LEHETŐSÉGEK BEMUTATÁSA	60
8. NÉHÁNY ZÁRÓ GONDOLAT A KOPULÁK GYAKORLATI ALKALMAZÁSÁRÓL	63
IRODALOMJEGYZÉK.....	65

TÁBLÁZAT-ÉS ÁBRAJEGYZÉK

1. táblázat: VaR és Expected Shortfall Gumbel összefüggés esetén, 0,05 alfaértéken.....	48
2. táblázat: VaR és Expected Shortfall normális összefüggés esetén, 0,05 alfaértéken	48
3. táblázat: VaR és Expected Shortfall Gumbel összefüggés esetén, 0,01 alfaértéken	48
4. táblázat: VaR és Expected Shortfall normális összefüggés esetén, 0,01 alfaértéken	48
5. táblázat: VaR és Expected Shortfall Gumbel és normális összefüggés esetén, 0,001 alfaértéken	49
6. táblázat: VaR és Expected Shortfall Gumbel és normális összefüggés esetén, 0,0005 alfaértéken	49
1. ábra: A tőkemegfelelés három pillére	1
2. ábra: Lehetséges portfóliók halmaza	11
3. ábra: Diverzifikáció hatása a portfólió kockázatára.....	13
4. ábra: VaR folytonos sűrűségfüggvény mellett.....	18
5. ábra: VaR diszkrét sűrűségfüggvény mellett	19
6. ábra: Expected Shortfall folytonos eloszlásokra	21
7. ábra: Expected Shortfall diszkrét eloszlásokra	22
8. ábra: Értékpapírok jellegzetes hozameloszlása.....	24
9. ábra: Minimum kopula.....	29
10. ábra: Maximum kopula	30
11. ábra: Függetlenségi kopula	30
12. ábra: Kontúr diagram: A minimum, a maximum és a függetlenségi kopula szintvonalai.....	31
13. ábra: Normális függőség	36
14. ábra: Clayton függőség	36
15. ábra: Gauss kopula.....	36
16. ábra: Clayton kopula	36
17. ábra: Normális függőség	37
18. ábra: Gumbel függőség.....	37
19. ábra: Gauss kopula.....	38
20. ábra: Gumbel kopula.....	38
21. ábra: Véletlen számok szórásponthai háromdimenziós normál kopula és t-kopula esetében	57
22. ábra: A háromdimenziós Clayton, Frank és Gumbel kopula kontúrvonalai.....	57

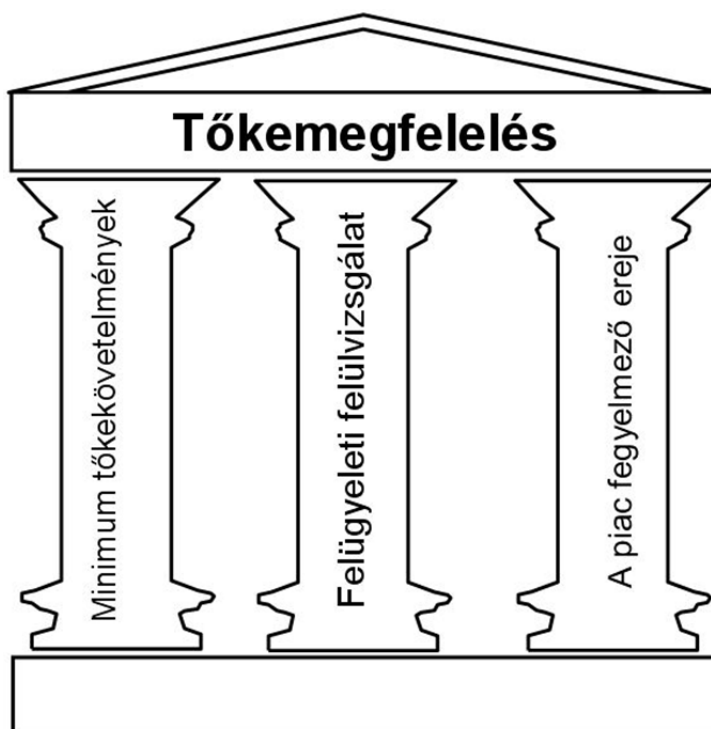
1. BEVEZETÉS

A problémafelvetés rövid összefoglalása

Magyarországon 2008. január 1-jén lépett életbe a Bázeli II egyezmény, melynek célja, hogy nagyobb átláthatóságot és stabilitást biztosítson a gazdaságban. Az egyezmény általános érvényű célja, hogy jelentős hatást fejtessen ki a helyi gazdasági rendszerekre.

Bázeli II szabályozás

Az új szabályozás szakít azzal a megközelítéssel, hogy a hitelintézetek tőkéjének elégséges voltát minden intézményre azonos mércével lehet mérni. Ehelyett olyan összetett szabályrendszert alakítottak ki, amelyik az intézményeket a fejlettebb kockázatkezelésre, a kockázati tudatosság erősítésére ösztönzi. Ezt egy három pilléres elvben fejezték ki.



1. ábra: A tőkemegfelelés három pillére

Forrás: advisesoft.com

Azaz:

1. A minimális szabályozási tőkeszükséglet és az annak meghatározásához választható módszerek együttese.

Az első pillér a szabályozói/felügyeleti minimum tőkekövetelmény rendszerének javítását célozta, melynek számítása során három meghatározó kockázatot vesznek figyelembe, mellyel a bankoknak számolniuk kell. Ezek a **hitel kockázat**, a **működési kockázat**, és a **piaci kockázat**. Egyéb kockázatok ebben a szakaszban nem számszerűsíthetők. A piac kockázat számszerűsítésére a kockáztatott értéket (Value at Risk – VaR) ajánlották.

E felfogás szerint a piaci kockázat egyenlő a várható veszteség nagyságával, mely a piaci árak alakulásának következménye.

A piaci kockázat meghatározói a:

Részvénypiaci kockázat, a kockázat, amelyet a részvény vagy a részvényindex árának és változása és volatilitása hordoz magában (például: Euro Soxx 50, BUX-index stb.).

Kamatkockázat, a kockázat, amelyet a kamatláb és a kamatláb volatilitása hordoz magában. (például Libor, Euribor stb.).

Devizakockázat, a kockázat, amelyet a devizaárfolyamok változása és volatilitása hordoz magában (például EUR/USD, EUR/GBP stb.).

Árukockázat, az árutőzsdére bevezetett szabványosított termékek (például nemesfémek, kukorica, nyersolaj) árának változása és volatilitása hordoz magában.

2. A tőke megfelelés belső mérése, valamint felügyeleti értékelése és felülvizsgálata
3. A tőke megfeleléssel kapcsolatos információk nyilvánosságra hozatalának követelménye: minimális információszolgáltatás a piac részére

A pénzügyi krízis bekövetkezése után fő bűnösneként kikiáltották a matematikai modelleket, amelyek nem tudták előre jelezni a válságot. A kopula függvények komoly támadási felületet képeztek, mivel olyan modellezési eszközöknek tartották, amik a világkrízishez vezettek. E mögött a vád mögött véleményem szerint azok az elemzők, modellezők állnak, aki megfelelő körültekintés nélkül alkalmazták ezeket.

Továbbá a Basel II egyezmény is szabad kezet adott, azzal hogy annak ellenére, hogy a kockázat számszerűsítésére a Value at Risk-et ajánlották, azt hogy ezt milyen együttes eloszlások, illetve milyen modellek felhasználásából nyerjék ki, azt a pénzügyi intézményekre bízták.

Az alábbi idézettel is a matematikai modellek védelmére kelek, melyből kiderül, hogy nem a modelleket kell hibáztatni, hanem azokat a befolyásos embereket, akik ezeket fenntartások nélkül alkalmazták.

„Egyre inkább úgy tűnik, hogy a 2008-as pénzügyi válság nem csupán a véletlenek szerencsétlen összejátszásának volt köszönhető. Az Egyesült Államok tőzsdefelügyelete által a JP Morgan ellen indított vizsgálat során a bank 154 millió dollárt fizetett a nyomozás leállítása érdekében, írja a Wall Street Journal.

Akárcsak korábban a Goldman Sachs, a JP Morgan is olyan értékpapírokat állított elő a jelzálogok értékpapírrá alakítása során, melynek kockázatait nem közölték a befektetőkkel, sőt azt agresszíven reklámozták, miközben annak az esésére játszottak.” (Kosztolányi, 2011)

Ezek mind rámutatnak a helyes kockázatelemző módszerek fontosságára, arra, hogy megfelelően számolni kell a ritka eseményekkel is. Ennek apropójaként dolgozatom a kockázatelemzés lehetőségeinek tanulmányozásáról szól, és ezen belül speciálisan a kopulák alkalmazásáról.

A dolgozat felépítése

Dolgozatomban szeretnék rámutatni a kopulák hasznosságára a kockázat elemzésben, szem előtt tartva az alkalmazhatósági korlátokat is, illetve kitekintést adni kopulákra épülő további lehetőségekről.

A dolgozat fejezeteiben az alábbiakról esik szó.

A dolgozat második fejezetében a kockázatelemzéssel kapcsolatban napvilágot látott szakirodalom legjelentősebb elméleteit mutatjuk be. Hanry Markowitz Portfólió elméletétől kiindulva szó esik a kockázat és a hozam kapcsolatáról, illetve a befektetések diverzifikálásával történő kockázatsökkentés lehetőségéről.

A második fejezet következő részében a kockázat mérésére alkalmazott mutatók felsorolása és elemzése következik az egyes eszközök gyakorlati alkalmazása során felmerülő előnyök és hátrányok szempontjából, valamint megvizsgáljuk, hogy a négy koherencia axiómát alapul véve melyek tekinthetők koherens kockázati mértéknek.

A második fejezet zárásaként néhány módszer szerepel, melyek a portfólió eloszlásának modellezésére alkalmazhatók nem normális esetben, mintegy felvezetésként a kopulákkal való modellezés témakörére.

A harmadik fejezet elején a kopulákkal kapcsolatos fogalmi kérdések kerülnek tisztázásra. Ebben a részben tisztázzuk a kopula fogalmát és bemutatjuk az egyes kopulafajtákat.

A fogalmi keretek tisztázását követő részben olyan két dimenziós eloszlásokat szimuláltunk, amelyek bemutatnak különböző összefüggési struktúrákat ugyanolyan korreláció mellett. Itt kerülnek összehasonlításra az eloszlások normális és nem normális esetben. Ábrákkal kíséreljük meg szemléletesen ábrázolni Gauss a Gumbel és a Clayton kopula segítségével modellezett összefüggések közötti különbségeket.

A negyedik fejezetben néhány módszerről lesz szó, amely a kopulák illeszkedés jóságának tesztelésére alkalmas.

Az ötödik fejezetben röviden bemutatjuk, hogyan került a Gauss kopula a kockázatelemzők asztalára, és hirtelen jött nagy sikere után hogyan lett egyszeriben a 2008-as gazdasági világválság „okozója”.

A dolgozatban bemutatjuk, hogyan különböznek egy szimulált portfólió extrém értékei, ha különböző kopulákból generáljuk az összefüggés rendszert, miközben a peremeloszlások azonosak és a korrelációs együttható is azonos. A hatodik fejezetben egy $n = 10\,000$

elemszámú mintán végezzük el a szimulációt Gauss kopula és Gumbel kopula segítségével különböző erősségű korrelációs együtthatók esetén. A szimuláció eredménye nem teljesen az volt, amire vártunk, és felvetett egy előzőleg számításba nem vett szempontot.

A hetedik fejezetben bemutatjuk az R programcsomagot, amely egy mindenki számára ingyenesen használható, a kopulákkal való modellezést támogató szoftver. Az R csomag **copula** moduljának funkcióival lehetőség van a sűrűség és az eloszlás értékelésére, véletlenszám-generálásra, grafikus ábrázolásra és kopula alapú modellek illesztésére.

Zárásként összegzésre kerülnek a dolgozat eredményei, és a kopulákkal történő modellezés lehetőségei, és korlátai. Bár e fejezet a dolgozat utolsó része, de egyben a legfontosabb következtetéseket tartalmazza, amit figyelembe kell venni minden esetben, amikor kopulák gyakorlatban történő alkalmazásuk mellett döntünk.

2. ELMÉLETI ALAPOK

2.1. MARKOWITZ PORTFÓLIÓ ELMÉLETE

A pénzügyi kockázat elméletének alapját Harry Markowitz dolgozta ki 1952-ben publikált portfólió elméletében, melyért 1990-ben közgazdasági Nobel-díjat kapott. Az elmélet lényege, hogy a befektetők racionálisak és a legkisebb kockázat mellett a legnagyobb hozamot kívánják elérni, és ennek megfelelően választanak a lehetséges befektetési változatokból. A befektetés jövőbeli értékét valószínűségi változónak tekinti (melyet bizonytalan piaci tényezők befolyásolnak). A jövőbeli hozamot a várható étékkel számszerűsítik a kockázatot pedig a szórással. Tehát két célfüggvény optimalizálását kell egyidejűleg végezni. A várható hozam maximalizálása és a kockázat, vagyis a szórás minimalizálása. Nyilván sok esetben az egyik szempont szerinti javítás, a másik szempont szerinti romlást vonja maga után.

A portfólió modell alapján a befektető a kockázatot úgy csökkentheti leghatékonyabban, ha befektetését diverzifikálja, azaz a rendelkezésére álló tőkét nem egy, hanem többféle értékpapírba fekteti. Ebből ered a portfólió szó, amely nem más, mint az értékpapírok és pénzeszközök kombinációja, melyből a befektetés áll. Az elmélet szerint ugyanis annak a valószínűsége, hogy több különböző értékpapír árfolyama egyszerre zuhanjon kisebb, mint annak, ha kizárólag egy adott értékpapírba fektetünk.

A Markowitz modell a következő feltevéseken alapul.

1. **A befektetők racionálisak**, vagyis egy befektető adott időtávon a legkisebb kockázat mellett a legnagyobb hasznot kívánja realizálni.

A feltevés a valóságban nem feltétlenül érvényesül, például hosszabb távú befektetéseknél nem okoz problémát, ha az időszak elején esetleg gyenge eredményeket produkál az értékpapír, illetve a spekulatív szándékú befektető vásárolhat olyan értékpapírokat, melyek értékének esésére számít.

2. **A befektetők árelfogadók**, vagyis a piaci árat a befektetők adottnak értelmezik, amire nincsenek ráhatással.

Ez a feltevés akkor igaz, ha a befektetőnek a forgalomban lévőhöz képest kis értékű a befektetése, illetve ha likvid¹ piacról van szó, ahol gyorsan és alacsony költségek mellett értékesíthetők az értékpapírok. Jelentős piaci erővel rendelkező nagybefektetők esetében (mint például Soros György) ugyanakkor jellemző, hogy ügyleteikkel hatással vannak saját portfóliójuk értékére, és a piaci árfolyamra, amely a kockázat-értékelését jelentősen befolyásolja.

3. **Az értékpapírok tetszőlegesen oszthatók**, vagyis nem csak egész számú részvényt vehetünk.

A valóságban nem teljesül. Azonban nagyszámú értékpapír esetén a becslést nem torzítja.

4. **A shortolás nincs korlátozva.** Klasszikus esetben egy befektető azért vásárol értékpapírokat a piacon, hogy azokat később egy magasabb áron értékesíthesse, és ezzel árfolyamnyereséget érjen el. A shortolás ennek éppen az ellenkezője, árfolyam esésére spekuláló határidős ügylet. A lényege, hogy a befektető eladja az értékpapírjait (meztelen shortolás esetén nem saját értékpapírjait), és arra számít, hogy az értékpapír ára esni fog, és később alacsonyabb áron vásárol vissza ugyan ezekből az értékpapírokból. A kettő közötti árfolyamkülönbség lesz a nyeresége. A modell alapfeltevése, hogy a befektető szabadon választhat a lehetséges portfóliók közül, azaz nem vonatkoznak az ilyen típusú ügyletekre sem korlátozások.

Alapvetően a shortolás is teljesen normális és nem káros ügylet, azonban lehetőséget teremt a piaci manipulációra, illetve más káros hatásai is lehetnek (a valós üzleti teljesítményektől elszakadó piaci folyamatok, és öngerjesztő árcsökkenés) amely káros lehet a nemzetgazdaságok számára, a valóságban ezért ez az ügylettípus a legtöbb nemzet értékpapír piacán különféle korlátozások alá esik.

5. **Nincsenek tranzakciós költségek**, vagyis az értékpapír adás-vétele során a vételi árhoz kötődő díjak, például értékpapír-számlavezetési díj, vagy a vételi jutalék elhanyagolható mértékű.

¹ „Egy értékpapír piacát akkor nevezzük likvidnek, ha elegendő vevő és eladó van jelen a piacon ahhoz, hogy az értékpapírt az aktuális árfolyamon bármikor meg lehessen venni és el lehessen adni. A likviditás nem magától értetődő dolog, egyes részvények pl. likvidebbek, mint mások, illetve bizonyos időszakokban, pl. válság idején az általában likvid piacok is beszűkülhetnek. A likviditás hiánya kockázatonövelő tényező, hiszen csökkenti az árfolyamadatok információtartalmát, és megnehezíti az értékpapírok adásvételét is magába foglaló kockázatkezelést.” Forrás: Varga-Haszonits István: Kockázati Mértékek Instabilitása

Ez utóbbi a valóságban elsősorban a nagybefektetőknel tekinthető jó közelítésnek, akik ritkán változtatják portfóliójuk összetételét.

6. **Az árfolyamváltozások normális eloszlásúak**, vagyis szimmetrikus valószínűségi változóval jellemezhetők, melynél az átlagos érték egybeesik a közepes értékkel (mediánnal és a módusszal), és annak a valószínűsége, hogy kisebb vagy nagyobb értékeket vesz fel, ugyan olyan mértékben csökkenő. A normális eloszlású jelenségekre jellemző továbbá, hogy egy értelműen definiálhatók a várható érték és a szórás segítségével.

Az árfolyamváltozások normális eloszlásának feltételezése erősen leegyszerűsítő tulajdonság, ami főleg annak köszönhető, hogy így a modellezés leegyszerűsödik, az optimalizálási feladatok megoldhatóvá válnak. A valóságban a kockázatok például nem szimmetrikusak, az együttes eloszlás ferde, ezért a szórás, ami egy átlagra szimmetrikus mutató nem írja le megfelelően a kockázatot.

7. **A befektetések kockázatát a hozam szórásával mérjük**, vagyis a kockázat a modell szerint nem más, mint a befektetési hozam értékének a várható érték körüli ingadozása.

Mivel azonban az együttes eloszlás általában nem tekinthető normálisnak, de még szimmetrikusnak sem érdemes más kockázati mértékeket számításba venni.

2.1.1. A portfólió választási feladat

Tegyük fel, hogy az értékpapír-piacon N darab különböző fajta értékpapír érhető el. Legyen $S_i(t)$ az i értékpapír árfolyama adott időpontban, és a piacon fellelhető értékpapírok árfolyamát ebben az időpontban írja le $S(t)$ vektor. Egy befektető portfólióját, azaz az általa birtokolt értékpapírok összességét meghatározhatjuk egy N -elemű w valós vektorral, ahol w vektor i -edik eleme, w_i megmutatja, hogy a portfólió hány egységet tartalmaz az adott értékpapírból. A portfólió adott időpontbeli értékét kifejezhetjük az alábbi képlettel:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^N w_i S_i(t),$$

Legyen $X_i(t)$ az i -edik értékpapír árfolyamának megváltozása Δt időtávon, azaz $X_i(t) = S_i(t + \Delta t) - S_i(t)$. A portfólió értéke pedig ennek megfelelően az alábbiak szerint változik:

$$X(t) = Y(t + \Delta t) - Y(t) = \sum_{i=1}^N w_i X_i(t).$$

A Markowitz modell alapján feltesszük, hogy az $X_i(t)$ árfolyam változások stacionáriusak (olyan sztochasztikus folyamat, melynél az eloszlásfüggvények azonosak maradnak a vizsgálati időpontok tetszőleges értékű időeltolódása esetén), továbbá a várható érték független lesz az időtől, a stacionárius folyamat korrelációs függvénye csak a $t_1 - t_2$ különbségtől függ), és $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ együttes eloszlása normális, amiből következik az, hogy minden $X_i(t)$ árfolyamváltozás normális eloszlást követ.

Jelölje μ_i az i -dik hozam várható értékét, és σ_{ij} a hozamok kovariancia mátrixának egy elemét, melyek az alábbi módon írhatók fel:

$$\mu_i = E[X_i],$$

$$\sigma_{ij} = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j].$$

Egy $\mathbf{w}$ portfólió hozamának μ_p várható értéke és σ_p^2 varianciája tehát:

$$E[X_t] = \sum_{i=1}^N w_i E[X_i(t)] \rightarrow \mu_p = \sum_{i=1}^N w_i \mu_i,$$

$$\sigma_p^2(X_t) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^N w_i X_i(t) \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j.$$

Egy racionálisan gondolkodó befektető, aki egységnyi tőkét kíván befektetni a piacon, úgy választ a rendelkezésre álló lehetőségek közül, hogy vagy a várható hozamot vagy a szórást rögzíti.

1. **Adott várható hozam mellett** a legkisebb szórású portfóliót részesíti előnyben.

Adott várható hozam mellett az alábbi optimalizálási feladatot kell megoldanunk.

A következő célfüggvény minimalizálásával találjuk megfelelő portfólió összetételt, vagyis meghatározzuk a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ vektort.

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j;$$

Az alábbi feltételek mellett:

- Az várható hozam, amely mellett keressük a minimális kockázatú portfóliót, **adott**:

$$\sum_{i=1}^N w_i \mu_i = \mu,$$

- A befektetett tőke, más néven költségvetési korlát:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1.$$

A σ_{ij} kovariancia mátrix szigorúan pozitív definit (ez a normális eloszlást feltételezve teljesül), a célfüggvény szigorúan konvex, így a feladatnak pontosan egy optimuma létezik.

Jelölje $\sigma^{*2}(\mu)$ a μ adott várható értékhez tartozó minimális kockázatot. Az adott μ várható érték és σ kockázatok, amelyre $\sigma^2 \geq \sigma^{*2}(\mu)$ meghatározzák a lehetséges portfóliók halmazát, egységnyi költségvetési korlát mellett.

2. Adott kockázat (szórás) mellett a legnagyobb várható értékű hozamú portfóliót részesíti előnyben.

A következő célfüggvény maximalizálásával határozzuk meg az optimális portfólió összetételét, vagyis meghatározzuk a $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)$ vektort.

$$\max_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N w_i \mu_i$$

Az alábbi feltételek mellett:

- Az kockázat, amely mellett keressük a maximális várható hozamú portfóliót, **adott**.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j,$$

- A befektetett tőke, vagyis költségvetési korlát:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1.$$

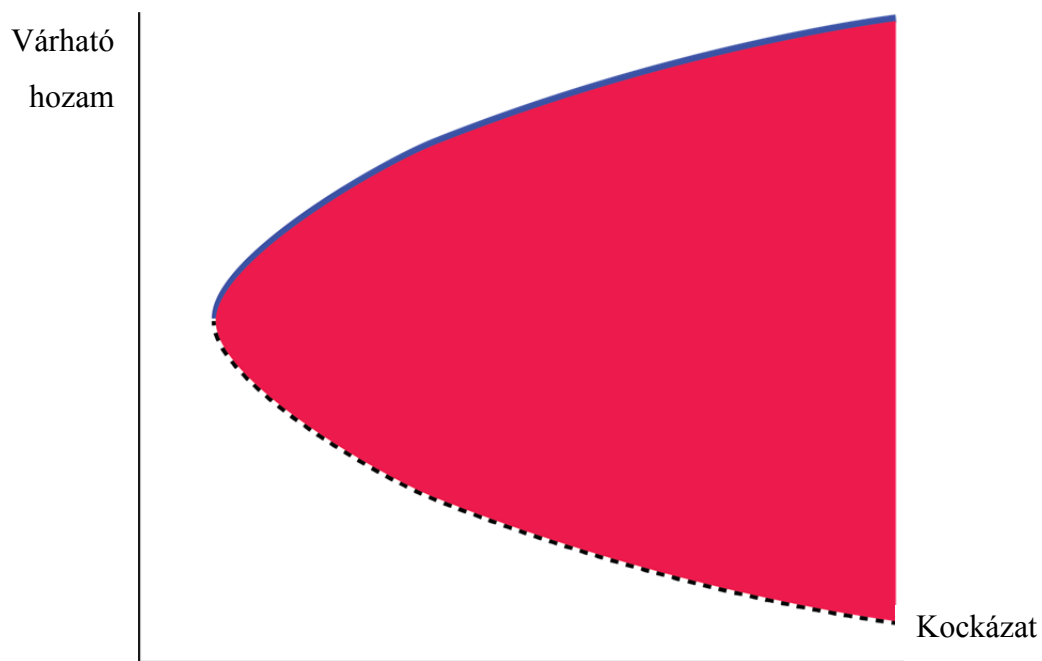
2.1.2. A Pareto-optimális portfólió

Azt mondjuk, hogy egy A portfóliót egy B portfólió dominál, ha a B portfóliónak, nagyobb a várható hozama az A portfóliónál és kisebb a szórása, mint A-nak.

Amennyiben nincs olyan portfólió, amely dominálja az A portfóliót, az A portfóliót Pareto-optimálisnak, vagy hatékony portfóliónak nevezünk.

A Pareto optimális portfóliók kockázat-várható hozam közötti összefüggést (görbét) Pareto határhalmazznak nevezzük.

A 2. ábrán láthatóak a lehetséges portfóliók (piros terület), a határportfóliók (folytonos és pontozott kék görbe) és hatékony portfóliók (folytonos kék görbe) halmaza a hozam-kockázat síkon.



2. ábra: Lehetséges portfóliók halmaza

Forrás: Varga-Haszonits I. (2009)

A modell néhány gyenge pontja:

- Ha a várható értéket és a kovarianciát a múltbéli adatokból becsüljük, az nagyon érzékeny lehet mérési hibákra, illetve nem tartalmazza a ritka, extrém eseményeket.
- A modell túl egyszerű az együttes normális eloszlásnak a feltételezése miatt. A valóságban előfordulnak, ferde, aszimmetrikus, illetve vastag farkú eloszlások.
- A portfólió nem veszi számításban a tranzakciós kiadásokat.
- A kockázat jellemzése szórással csak szimmetrikus eloszlásoknál célszerű.

2.1.3. A hasznosság (utilitás) fogalma

Bár a fenti optimalizálási feladat megoldásai megadják a hatékony portfóliók halmazát, arról nem adnak információt, hogy végül melyik portfóliót választja a racionálisan gondolkodó befektető. Ennek elméleti meghatározásához bevezethető a hasznosság vagy utilitás fogalma.

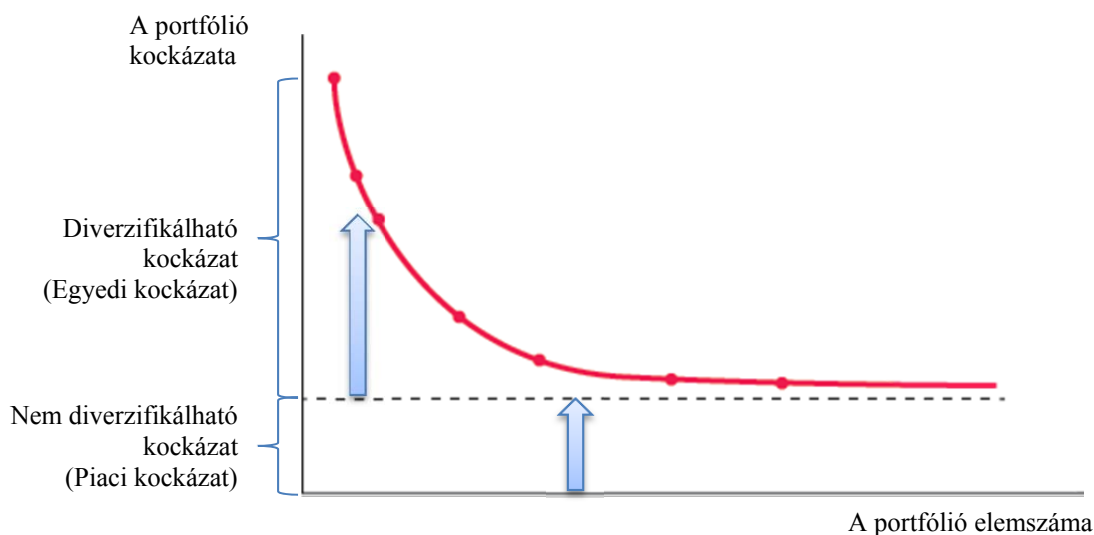
Ez a Neumann-Morgenstern féle hipotézisen alapul, mely szerint a bizonytalanság közepette a befektető a várható hasznosság alapján mérlegel, és célja ennek maximalizálása (Neumann – Morgenstern, 1944). Ez az ötlet jóval korábban is megtalálható D. Bernoulli St Pétervári paradoxon megoldásában (Bernoulli 1738).

A racionális döntéshozatal eljárása szerint a döntéshozó az összes lehetséges változat megismerése után amellett a változat mellett fog dönteni, amely a legnagyobb hasznossággal jár számára. A $\max_{\mu} U(\mu, \sigma^{*2}(\mu))$ hasznosság-maximalizáló feladat megadja a befektető számára leghatékonyabb, azaz legnagyobb hasznossággal járó választást. A gyakorlatban ugyanakkor a befektető döntéseit más szubjektív tényezők is befolyásolják, mint kockázatvállalási hajlandóság, spekulációs szándék, így a döntések hasznosság szerinti meghatározása csupán elméleti síkon ad számunkra útmutatást.

2.1.4. Portfólió diverzifikálása

Amennyiben a kockázatot a szórással jellemezzük, tudjuk, hogy minél alacsonyabb a portfóliót alkotó értékpapírok korrelációja páronként (fordítottan korreláltak), annál kisebb lesz a portfólió kockázata, mivel a hozamok eltérő irányba mozognak, illetve minél több értékpapírba fektetünk be, esélyünk van megosztani a kockázatot. Tulajdonképpen ez a biztosítócégek alapelve is.

A kockázat csökkentésének általánosan használt módszere a diverzifikálás, amikor a befektetéseket megosztják az egyes értékpapírok között úgy, hogy az egyes befektetések értéke minél nagyobb mértékben ellentétesen változzon az egyes értékpapírok értékét meghatározó események bekövetkezése esetén.



3. ábra: Diverzifikáció hatása a portfólió kockázatára

Forrás: Brealey-Myers (2005)

Ebből következően minél több papírból áll a portfólió, annál kisebb a kockázata. A portfólió diverzifikálhatósága nyilván a befektethető tőkétől is függ. Azt is meg kell említeni, hogy a diverzifikációval csökkenhet a várható hozam is. Tehát felmerül a kérdés, hogy mennyi kockázatot vállaljunk (ne vállaljunk) egy portfólió összeállításában, ha az a várható haszon rovására megy.

A diverzifikálás az összes kockázatnak csak egy részét szüntetheti meg, a nem diverzifikálható, a piac általános állapotával összefüggő kockázatok nem mérsékelhetők diverzifikációval (lásd 3. ábra). A jól diverzifikált portfólió kockázata viszont nem tartalmaz egyedi kockázatot, hanem kizárólag a piaci kockázatból áll (Brealey-Myers, 2005).

A diverzifikálás néhány eszköze

- Több ipárhoz kötődő befektetés
- A biztonság növelése megfelelő állampapírokkal, bankbetétekkel
- A futamidők diverzifikálása
- Több devizanemben történő befektetés, az árfolyamkockázatok kezelésére

A fentiekből következően a pénzeszközök és értékpapírok portfóliója a legtöbbször magasabb hozamot eredményez, bármilyen adott szórás esetén, mint egy különálló értékpapír. A befektetőknek tehát érdemes diverzifikálni, még akkor is, ha többletinformációval rendelkezik az értékpapírról, vagy ha tranzakciós költségeket kell fizetnie. Kivételt képez az az eset, ha az adott értékpapírról biztos információkat szerez a befektető, például teljesen bizonyosan tudja, hogy mi fog történni az adott részvénnel a piacon. Ebben az esetben nyilvánvalóan érdemes a teljes vagyont az adott értékpapírba fektetni, ugyanis az teljesen kockázatmentesnek minősül. A valóságban azonban a legtöbbször csak olyan pluszinformációval rendelkeznek a befektetők, melyek valamivel előnyösebb helyzetbe hozzák a többi befektetőnél, de nem biztosítják a biztos és kockázatmentes profitot. Ezért érdemes ebben az esetben is több olyan értékpapír között megosztani a befektetést, amelyekről a befektető többletinformációval rendelkezik.

Az esetek többségében a portfóliót képező értékpapírok kockázata megbecsülhető az alapján, hogy milyen hatással van az adott pénzeszköz a teljes portfólió kockázatára, amelynek részét képezi. Az adott értékpapír kockázatát a volatilitása (azaz várható értékének, hozamának ingadozása) helyett azzal érdemes mérni, hogy az értékpapír árának alakulása mennyire mozog együtt a portfólióval. Hiába ingadozik egy adott értékpapír ára extrém mértékben, ha a mozgása független a portfóliót alkotó többi eszköztől, akkor csak kis mértékben vagy egyáltalán nem befolyásolja a portfólió kockázatának alakulását. Azaz a kockázat értékeléséhez a hozam szórásánál vagy varianciájánál fontosabb mérőszám lehet a portfólió és az adott pénzeszköz kovarianciája.

2.1.5. Egy értékpapír kockázatának hatása a portfólióra (Béta mutató)

Tegyük fel, hogy egy befektető a vagyonát csak kétféle befektetés között oszthatja meg, a kockázatmentes értékpapír és a piaci portfólió között. Ebben az esetben egy értékpapír kockázatát meg lehet becsülni, ha a piaci portfólióhoz viszonyítjuk, vagyis egy adott értékpapír kockázata nem más, mint a kockázat, amit hozzátesz a piaci portfólió kockázatához, és az alábbiak szerint becsülhető:

$$\text{Az értékpapír kockázata} = \frac{\text{Az értékpapír és a piaci portfólió kovarianciája}}{\text{A piaci portfólió varianciája}}$$

Legyen σ_m^2 a piaci portfólió varianciája az új értékpapír bekerülése előtt, és az értékpapír varianciája, amelyet hozzátesz a portfólióhoz σ_i^2 . Az új értékpapírra eső piaci érték szerinti portfóliósúly w_i , és az értékpapír és a piaci portfólió kovarianciája σ_{im} . A piaci portfólió varianciája az új értékpapír beszámítás előtt és után az alábbiak szerint alakul:

$$\text{Variancia az új értékpapír beszámítása előtt} = \sigma_m^2$$

$$\text{Variancia az új értékpapír beszámítását követően}$$

$$= \sigma_m'^2 = w_i^2 \sigma_i^2 + (1 - w_i)^2 \sigma_m^2 + 2w_i(1 - w_i)\sigma_{im}$$

Az értékpapír piaci érték szerinti súlya a piaci portfólióban kicsi, mivel a piaci portfólió tartalmazza az összes forgalomban lévő értékpapírt. Ennek alapján az egyenlet első része a 0-hoz közelít, a második része σ_m^2 -hez, így tehát a harmadik rész (σ_{im} , a kovariancia) az i értékpapír által hozzáadott kockázatot jellemzi.

Ez utóbbit elosztva a piaci portfólió hozamok varianciájával, egy adott értékpapír béta mutatója.

$$\beta = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

A β tehát az adott értékpapír piaci mozgásokra való érzékenységet kifejező mutatószám. A béta arról ad információt, hogy a piac 1 százalékos változása esetén mennyivel változik meg az adott értékpapír árfolyama. A piaci portfólió átlagos bétája 1.0, ha az adott értékpapír bétája ennél nagyobb, akkor az értékpapír az átlagosnál érzékenyebb a piac mozgásaira. Az egynél kisebb bétájú értékpapír pedig átlagosnál kevésbé érzékenyen reagál a piaci elmozdulásokra (Brealy-Myers, 2005).

2.2. KOCKÁZATI MÉRTÉKEK

Koherens kockázati mértékek

A következő négy axiómát Artzner, Delbaen, Eber és Heath matematikusok dolgozták ki a koherens kockázati mértékek fogalmának meghatározásához.

Jelölje Ω a valószínűségi változók halmazát, ahol $w_i \in \Omega$, és legyen $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy kockázati mérték.

Azt mondjuk, hogy ρ koherens kockázati mérték, ha mind a négy koherencia axiómát teljesíti.

1. Monotonitás: Ha $X, Y \in \Omega$ és $X \geq Y$, akkor $\rho(X) \leq \rho(Y)$.
2. Pozitív homogenitás: Ha $X \in \Omega$ és $a > 0$, akkor $\rho(aX) \leq a\rho(X)$.
3. Szubadditivitás: Ha $X, Y, X + Y \in \Omega$ akkor $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
4. Transzláció invariancia: Ha $X \in \Omega$ és $a \in \mathbb{R}$, akkor $\rho(X + a) = \rho(X) - a$.

A **monotonitás** azt jelenti, hogy ha két befektetés közül a másodikon mindig kevesebbet nyerünk, vagy többet veszítünk, mint az elsőn, akkor a második befektetésünk kockázatának nagyobbának kell lenni, mint az elsőnek.

A **pozitív homogenitás elve** szerint, ha az adott értékpapírba fektetett összeget két-háromszorosára növeljük, akkor a kockázat is kétszeresére illetve háromszorosára nő. A feltétel teljesüléséhez azonban likvid piac szükséges, illetve hogy a befektetésünk a teljes piachoz képest ne legyen meghatározó, azaz hogy az adott értékpapírral történő kereskedésünk ne befolyásolja a piacot.

A koherens kockázati mértékek konvexitása a pozitív homogenitás és a szubadditivitás feltételék együttes fennállása esetén érvényesül. A **szubadditivitás** biztosítja a diverzifikációs elv teljesülését, vagyis hogy X és Y befektetésből álló portfólió kockázata kisebb, mint ha csak X vagy csak Y értékpapírba fektettünk volna. Fontos azonban, hogy ez az elv is csak likvid piacokon és relatíve kis befektetési pozíciók esetén érvényesül.

A **transzláció invariancia** teljesülése azt jelenti, hogy ha a befektetésünket egy a konstanssal, azaz kockázatmentes értékpapírba való befektetéssel növeljük, akkor a kockázatunk ugyanannyival csökken. A kockázatmentes értékpapír olyan befektetés, amelynek a hozama bármilyen esemény bekövetkezése esetén ugyan annyi, vagyis az értékpapír hozama nem ingadozik, és nulla a valószínűsége annak, hogy a kibocsátó csődbe megy. A kockázatmentes értékpapír a valóságban csak erős közelítéssel létezik, például

államkötvények (elsősorban stabil országok államkötvényei), vagy jegybanki betétek sorolhatók ebbe a kategóriába.

2.2.1. A szórás

A szórás (standard deviation) az egyes értékek és a számtani átlag különbségének négyzetes átlaga. A Markowitz modell szerint a kockázat mérésére használt szórás normális eloszlású hozamok esetén:

- jól méri a bizonytalanságot és ösztönzi a diverzifikációt
- mindenféle befektetésre kiszámítható
- összegezzhető és összehasonlítható

Nem normális árfolyam ingadozások esetén azonban nem jellemzi megfelelően a kockázatot, hiszen nem írja le az eloszlás farkának lecsengését, és nem tesz különbséget a veszteség és a nyereség között, ami probléma, ha az eloszlás nem szimmetrikus.

2.2.2. Az átlagos abszolút eltérés

Az átlagos abszolút eltérés (mean absolute deviation) definíciója a következő:

$$MAD = \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}(X)|]$$

Vagyis az átlagos abszolút eltérés az átlagtól számított eltérések abszolút értékeinek számtani átlaga. E kockázati mérőszám több szempontból is hasonlít a szórásra, mivel ebben az esetben is az átlagtól való átlagos eltérést számoljuk. Előnyként említhető, hogy kevésbé érzékeny az úgynevezett outlier-ekre (kiugró értékekre), mint a szórás, amely az eltérések négyzetre emelésének következtében kiugró értékek esetén jelentősen megnövekedik. A szóráshoz hasonlóan ez a mérőszám is konvex, és kielégíti a szubadditivitás feltételét is, viszont a MAD sem tesz különbséget a nyereségek és a veszteségek között.

2.2.3. Szemivariancia

Egy X hozamú befektetés szemivarianciája a következő:

$$v^2(X) = \mathbb{E}(\min\{X - \mathbb{E}[X], 0\})$$

A szemivariancia definíciója abban tér el X varianciájától (szórásnégyzetétől), hogy a várható hozamtól kisebb értékek eltérésének négyzetére átlagol, azaz csak az átlag alatti hozamokat veszi figyelembe. A mérőszám előnye hogy konvex, és kifejezi, hogy az értékpapírhozamok eloszlása általában aszimmetrikus, érzékenyebb a veszteségekre.

Tehát: $v(X) > \sigma(X)$

Hátránya, hogy az eloszlás farkára, hasonlóan a szóráshoz, nem elég érzékeny.

2.2.4. Value at Risk (VaR)

A pénzügyi kockázatok értékelésére, illetve kockázati managementben az egyik legnépszerűbb mérőszám a Value at Risk (VaR). Egy adott befektetés VaR-ja α konfidenciaszinten az a lehetséges veszteség, amelynél többet már csak $1 - \alpha$ valószínűséggel veszíthetünk, ahol az α konfidencia szint $0 \leq \alpha \leq 1$, de tipikusan 0,95, 0,99 lehet. A VaR tehát nem más, mint a hozameloszlás kvantilise.

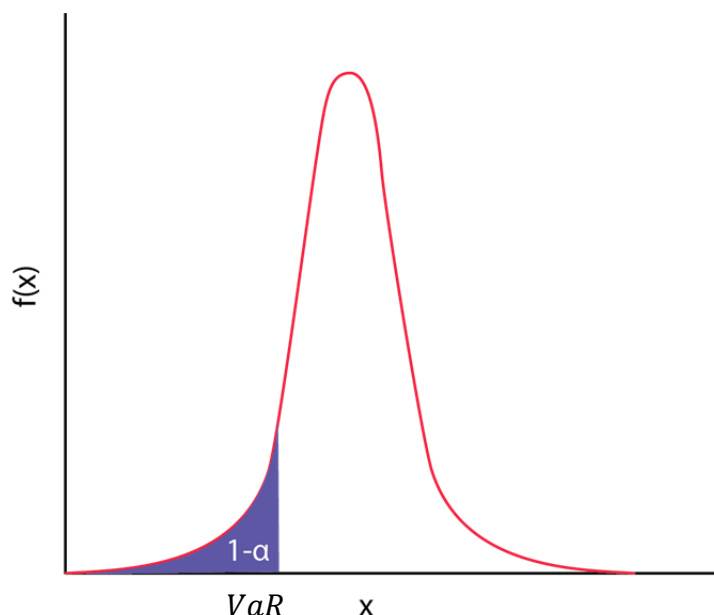
Ha X eloszlásfüggvénye $F_x(X)$ folytonos, a kockázatotott érték definíciója:

$$Var_{\alpha}(X) = -F_x^{-1}(1 - \alpha)$$

Ha $F_x(X)$ nem folytonos, hanem diszkrét, akkor szokásos definiálni alsó VaR-t (Var_{α}) és felső VaR-t (Var^{α}):

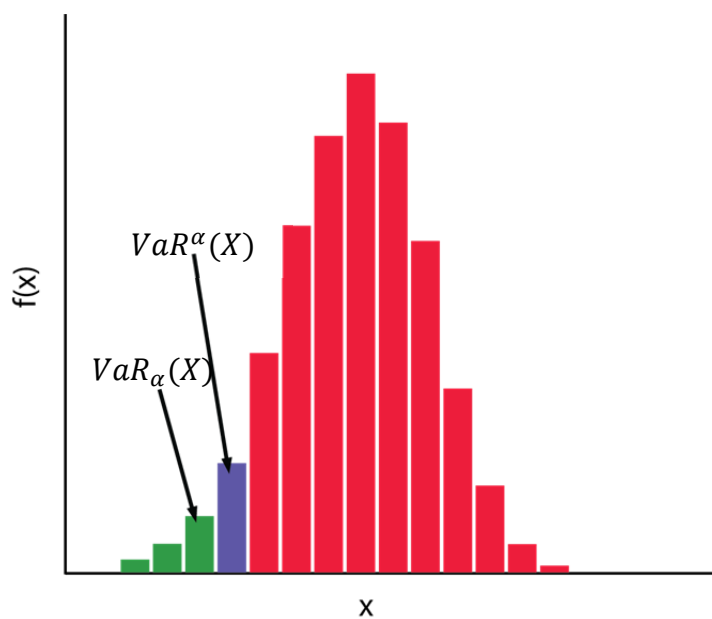
$$Var_{\alpha}(X) = -\sup\{x | F_x(X) < 1 - \alpha\}$$

$$Var^{\alpha}(X) = -\inf\{x | F_x(X) > 1 - \alpha\}$$



4. ábra: VaR folytonos sűrűségfüggvény mellett

Forrás: Varga-Haszonits I. (2009)



5. ábra: VaR diszkrét sűrűségfüggvény mellett

Forrás: Varga-Haszonits I. (2009)

A VaR előnyei:

- Kifejezetten a veszteségekre koncentrálnak.
- Tetszőleges eloszlásokra létezik.
- A kockázatot pénzvészteségben fejezi ki.

A VaR hátrányai:

- A szubadditivitási axioma nem teljesül, ezért nincsen garancia arra, hogy a portfólió kockázati mértéke kisebb az értékpapírok egyedi kockázatok összegénél.

Amennyiben X és ennek következtében Z eloszlása szimmetrikus, akkor:

$$F_Z^{-1}(1 - \alpha) = -F_Z^{-1}(\alpha)$$

Speciálisan, ha X normális eloszlású, Z standard normális eloszlású lesz, és ebben az esetben:

$VaR_\alpha(Z) = \Phi^{-1}(\alpha)$, ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvény, más néven hibafüggvény jelölése. A VaR ebben az esetben konvex lesz, ugyanakkor a VaR-nál nagyobb veszteségekről VaR továbbra sem mond semmit.

Gyakran alkalmazzák a VaR-t a tőke megfelelés szabályozásában illetve a kockázatmérés és -kezelés gyakorlatában.

2.2.5. Conditional Value at Risk (CVaR)

A Conditional Value at Risk a VaR-nál nagyobb veszteségek átlaga a VaR-t beleértve. Definiálható a VaR-hoz hasonlóan az alsó és felső értéke az alábbiak szerint:

$$CVaR_\alpha(X) = -\mathbb{E}[X|X \leq -VaR_\alpha(X)],$$

$$CVaR^\alpha(X) = -\mathbb{E}[X|X \leq -VaR^\alpha(X)],$$

ahol X a vizsgált befektetés hozama egy adott időhorizonton.

A CVaR a VaR-hoz hasonlóan nem konvex, ezért előfordul, hogy a diverzifikáció hatására növekszik.

A VaR és a CVaR tehát megfelel az összes koherencia axiómának a szubadditivitást kivételével. A CVaR továbbá információt nyújt a kiugró veszteségekről is, a cél lehet tehát, hogy találjunk egy olyan kockázati mértéket, amely megőrzi ez utóbbiak előnyös tulajdonságait, ugyanakkor az összes koherencia axiómának eleget tesz.

2.2.6. Expected Shortfall

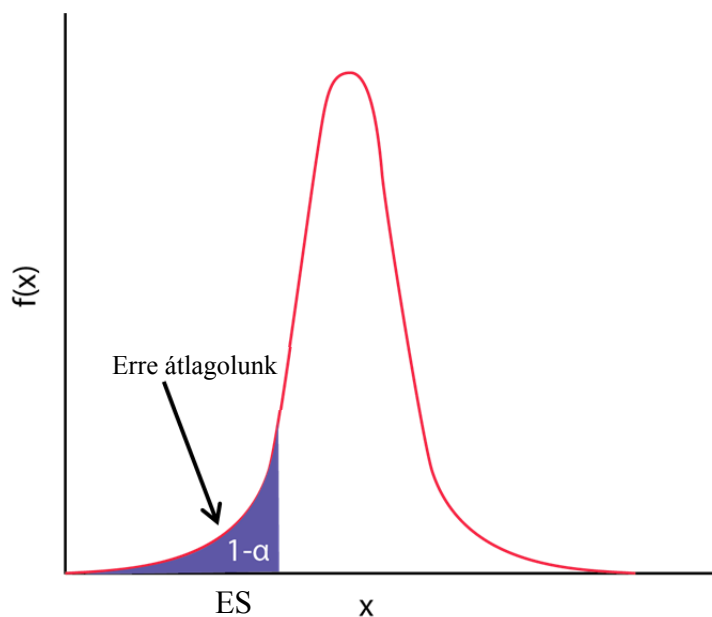
A CVaR-hoz nagyon hasonló kockázati mérték az ES, azaz Expected Shortfall, amelyet az alábbiak szerint definiálhatunk.

Legyen X egy valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvények $F_X(X)$. X ExpectedShortfall-ja α konfidencia szint mellett:

$$ES_{\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_X(p) dp,$$

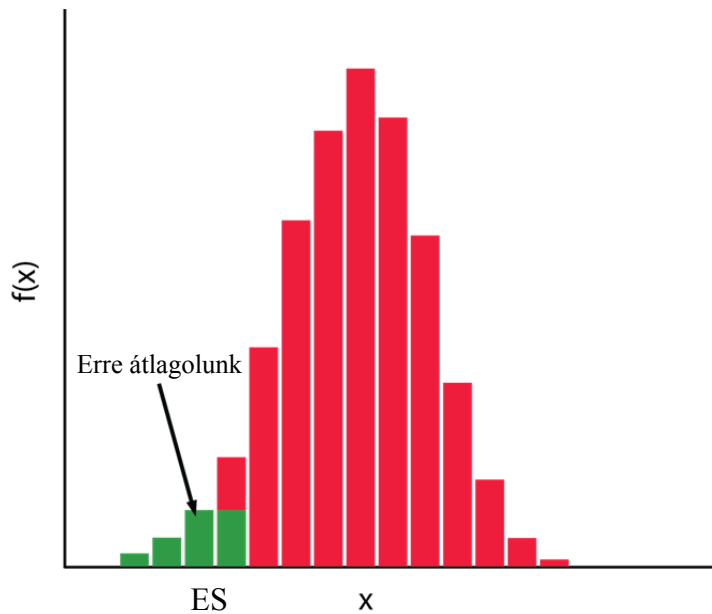
Ha az eloszlásfüggvény nem folytonos, nincs inverze, akkor $F_X(p)$ az általánosított $F_X^-(p)$ -vel helyettesítjük.

$$F_X^-(p) = \sup\{x | F_X(x) < p\}.$$



6. ábra: Expected Shortfall folytonos eloszlásokra

Forrás: Varga-Haszonits I. (2009)



7. ábra: Expected Shortfall diszkrét eloszlásokra

Forrás: Varga-Haszonits I. (2009)

Belátható, hogy a bemutatott kockázati mértékek közül kizárólag az ExpectedShortfall koherens. A szórás, a MAD és a szemivariancia például sértik a monotonitás és a transláció invariancia axiómákat. A VaR és a CVaR viszont monoton, pozitív homogén és transláció invariáns, azonban nem konvex, ezért a szubadditivitás feltételének nem felel meg.

2.3. PORTFÓLIÓ ELOSZLÁSÁNAK MODELLEZÉSE NEM NORMÁLIS ESETBEN

A pénzpiaci folyamatok elemzéséhez a normális vagy Gauss eloszlás feltételezése több szempontból leegyszerűsítő. A gyakorlatban az árfolyamok és a hozamok ingadozása ugyanis túl sok kiugró értéket eredményeznek ahhoz, hogy azok normál eloszlással reálisan leírhatóak legyenek. A Gauss eloszlás másik gyengesége a szimmetria, mivel a gyakorlati tapasztalatok szerint a kockázatelemzéshez aszimmetrikus eloszlások alkalmazása ennél jóval realisztikusabb eredményhez vezetnek.

2.3.1. Hatványfüggvény eloszlás

Benoit Mandelbrot matematikus szintén sokat foglalkozott a részvényárfolyamok viselkedésével (Mandelbrot, 1961). Munkássága során arra jutott, hogy a normális eloszlásnál az úgynevezett hatványfüggvény eloszlások sokkal jobban leírják az értékpapírárak és a hozamok alakulását. A hatványfüggvény eloszlásoknál két változó, X és Y kapcsolata az alábbiak szerint írható le.

$$Y = \alpha^k$$

Ebben az egyenletben α egy konstans érték és k a hatványfüggvény kitevő. Mandelbrot szerint a normális és a lognormális eloszlások olyan események modellezésére alkalmasak, amelyekben nincsenek kiugró értékek és nem jellemzőek a szélsőséges véletlenszerűségek. Ezzel szemben a hatványfüggvény eloszlások alkalmasak a kiugró értékek, extrém ingadozások modellezésére. A hosszú távon viszonylag kis ingadozást mutató, de mindkét irányú kilengésekkel teli érték- és árutőzsdei árfolyamok alakulásának bemutatására alkalmasabbak a hatványfüggvény eloszlások.

A hatványfüggvény eloszlásoknál jóval gyakrabban fordulhatnak elő extrém értékek, mint a normális eloszlásoknál, ezért előbbit alkalmasnak tartják az ilyen típusú árfolyam ingadozások modellezésére. Hatványfüggvény eloszlásoknál, ha az értékpapír hatványkitevője kicsi, akkor az kockázatosabb befektetésnek minősül, mivel ebben az esetben gyakrabban fordulnak elő kiugró értékek.

2.3.2. Mandelbrot fraktálok

Mandelbrot kutatásai alapján olyan elmélet látott napvilágot, ahol - szemben a normál eloszlás alkalmazásával - lehetővé vált a gyakori árfolyam ingadozások modellezése. Mandelbrot rájött, hogy az ingadozó árfolyamok rendszerét alaposabban megvizsgálva felfedezhetők olyan minták, amelyek ismétlődő jellegűek. Az 1970-es években Mandelbrot létrehozott egy

önálló matematikai ágat, a fraktál geometriát, ahol az eseményeket nem a hagyományos statisztikai vagy matematikai módszerekkel vizsgálta, hanem úgynevezett fraktálok segítségével. A fraktál olyan komplex geometriai alakzat, amely önismétlő jellegű, vagyis kisebb részei hasonlítanak a teljes egészre. Összefüggést talált abban, hogy a fraktálgeometriai alakzatok és az árfolyamok alakulása is az első vizsgálat során teljesen véletlenszerűnek tűnhetnek, de közelebbről vizsgálva kiderül, hogy mégis felfedezhetők az ismétlő minták.

Ez utóbbi két megközelítést (hatványfüggvény eloszlás illetve Mandelbrot fraktálok) a portfólió eloszlások nem normális esetben történő modellezésének alternatívájaként mutattuk be, azonban dolgozatban nem kívánok velük mélyebben foglalkozni.

2.3.3. Aszimmetrikus eloszlások, vastag farkú eloszlások

Az aszimmetria kétféleképpen vetődik fel.

1. Az értékpapírok hozamának modellezésében
2. A portfólió hozamának modellezésében

1. Amikor az értékpapírok modellezését tekintjük, akkor egy változó valószínűségi eloszlását kell vizsgálnunk. Ezek az eloszlások nem tekinthetők szimmetrikusnak (lásd 6. ábra), így az egyedi kockázatok modellezésére nem alkalmasak olyan kockázati mértékek, amelyek szimmetrikusak az átlagra nézve. Nyilván az átlagnál jóval kisebb hozamértékek veszteséget hordoznak, az átlagnál nagyobb értékek pedig kíváncsabbak. Ilyen esetekben a kockázatot érdemesebb valamely másik mérték használatával számszerűsíteni, alkalmas lehet például a szemivariancia, a VaR, vagy az Expected Shortfall.



8. ábra: Értékpapírok jellegzetes hozameloszlása

Forrás: Saját szerkesztés

2. A portfólió hozama egy olyan valószínűségi változó, mely az egyedi hozamok lineáris kombinációjaként tevődik össze. Ezért belátható, hogy a gyakorlatban nem követ normális eloszlást, sőt egyéb más szimmetrikus eloszlást sem.

Mivel a hozamok együttes eloszlása a valóságban nem tekinthető együttes normális eloszlásnak, a páronkénti korrelációs együttható illetve a kovariancia mátrix nem fejezi ki elég jól az összefüggést (együttes ingadozást).

Ebben a dolgozatban a következőkben kitérünk a portfólióban lévő értékpapírok együttes eloszlásának kopulák segítségével történő modellezésére.

3. KOPULÁK

3.1. AZ ELŐZMÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA, A KOPULA ALKALMAZÁSÁNAK FELVETÉSE

A klasszikus portfólió elmélet az együttes normális eloszlás feltételével dolgozik. Ennek alapján a befektetők a kockázat csökkentés céljából kihasználják a diverzifikációt, vagyis olyan értékpapírokba fektetnek, amelyek alacsony korrelációval rendelkeznek. A korreláció jó mutatószáma az összefüggésnek együttes normális eloszlás esetén, de van néhány komoly hátránya (Embrechts, 2003):

- X és Y valószínűségi változóknak véges varianciájuk kell lenniük ahhoz, hogy a korrelációs együttható létezzen. Ez nem teljesül, ha a valószínűségi változónak vastag farkú eloszlása van (például Student 2 szabadságfokkal)
- Annak ellenére, hogy a függetlenség implikálja azt, hogy a korrelációs együttható nulla, ez fordítva nem igaz csak az együttes normális esetben.
- A korrelációs együttható nem invariáns a monoton transzformációkra (pl. lognormális). Ez azért van, mert nem csak az együttes eloszlásuktól függ, hanem a peremeloszlásuktól is, így például a mérési skála megváltoztatása, vagy más monoton transzformációja kihatással van rá.
- A korrelációs együttható esetében gyakran előfordul, hogy egy megfigyelés is nagy hatással legyen rá.

Összegezve a lineáris korrelációs együttható nem tekinthető robusztus mértéknek. Tehát érdemes más összefüggési mutatókat, módszereket alkalmazni. Erre McNeil és szerzőtársai rávilágítottak a 2005-ben írt könyvükben.

A kopula bemutatása egy rövid példán keresztül

A Kopulák segítségével lehetőségünk van a valószínűségi változók közötti összefüggések modellezésére. A Kopula kifejezés elsőként Sklar vezette be 1959-ben, mely a latin *copulare* kifejezésből származik, melynek jelentése csatlakozik, összekapcsol, egyesül. A Kopula lényege, hogy leírja a több valószínűségi változó között fennálló kapcsolatot. Sklar elméletének bevezetése óta a kopulák igen elterjedtek a pénzügyi világban (Cerubinni-Luciano, 2004, Meleevergne-Sornette, 2006).

Az alábbiakban egy egyszerű példán keresztül szemléltetjük a kopulák alkalmazhatóságát.

Legyen X_1 és X_2 két valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy X_1 információt ad számunkra X_2 alakulásáról. Vajon X_1 -ből mennyi információt szerezhethünk X_2 -re vonatkozóan, azaz milyen a kapcsolat, az egymástól függés a két valószínűségi változó között.

Tegyük fel az első esetben, hogy a két valószínűségi változó két különböző kontinensek folyójának vízállását jelöli. Jelölje X_1 valószínűségi változó az Amerikai Egyesült Államokban New York államában lévő Hudson folyó vízállását, X_2 valószínűségi változó pedig a Duna vízállását jelöli. Ebben az esetben X_1 és X_2 függetlenek egymástól, azaz X_1 nem ad számunkra információt X_2 alakulásáról.

A második esetben az eljárás az emberek magassága és súlya közötti összefüggés vizsgálata mintavétel alapján. Ekkor X_1 valószínűségi változó jelöli az emberek magasságát és X_2 valószínűségi változó jelöli az emberek súlyát. Ebben az esetben az egyik változónak az ismerete információval szolgál a másik változóról, tehát összefüggés áll fenn közöttük, mégpedig egy közepesen erős együttmozgásról beszélhetünk, vagyis minél magasabb a vizsgált ember, annál több a súlya. A kettő valószínűségi változó között közelítőleg együttes normális eloszlásról van szó, adott, körülbelül 0,70 korrelációs együtthatóval, amelynek peremei is megközelítőleg normálisak.

A két változó közötti kapcsolat pontos meghatározásához szükségünk van egy eszközre. Tudjuk, hogy minden X_i valószínűségi változó megfeleltethető a peremeloszlás függvényével, más néven marginálisával, melyet $F_i(x) = P(X_i \leq x)$ jelöl. Fontos megjegyezni, hogy a peremeloszlás függvény nem ad információt a kapcsolat milyenségéről.

Az első esetben, amikor függetlenség van a két változó között, az együttes eloszlás függvény egyszerűen képezhető a két peremeloszlás függvényből.

$$H(x, y) = F(x) \cdot G(y)$$

A peremeloszlás függvények és a két valószínűségi változó közötti kapcsolat – utóbbi esetben függetlenség – ismeretében teljes mértékben leírható X_1 és X_2 együttes eloszlása. Ebből látható, hogy szükségünk van egy általános modellre, ami alkalmas a peremeloszlás és a függőség ilyen típusú szétválasztására. Ezt a célt szolgálja a kopula.

Visszatérve az elsőként vizsgált függetlenségi esethez, a fenti kifejezés alapján a peremek sajátos eloszlásától letisztított összefüggés leképezhető az alábbiak szerint.

$$C(u, v) = u \cdot v$$

ahol C a függetlenségi kopula.

A második példa esetében, ahol a két változó között összefüggés van, az együttes eloszlásfüggvény a következőképpen néz ki.

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

ahol C a normális kopula.

A kopula függvény meghatározza az összefüggés rendszerét a peremektől letisztítva, úgy hogy a peremeloszlás függvényeket egyenletes eloszlás függvényekkel helyettesítjük. Az így kapott általános eset modellként alkalmazható a valószínűségi változók együttes mozgásának vizsgálatához. A kopula tehát a valószínűségi változók közötti az összefüggés rendszert fejezi ki.

3.2. A KOPULA DEFINÍCIÓJA ÉS NÉHÁNY FONTOS KOPULA

A kopula függvény egy sajátos együttes eloszlásfüggvény, amelynek peremei egyenletes eloszlások. A következő alap definíciók Nelsen könyvéből származnak (Nelsen, 1999)

Definíció: A $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ egy két dimenziós kopula (vagy röviden kopula), ha jellemzők rá az alábbi tulajdonságok:

- Minden $u, v \in [0,1]$ -re igaz, hogy $C(u, 0) = 0 = C(0, v)$,
- Minden $u, v \in [0,1]$ -re igaz, hogy $C(u, 1) = u$ és $C(1, v) = v$,
- Minden $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$, $u_1 \leq u_2$ és $v_1 \leq v_2$ pontban fennáll a

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \text{ egyenlőtlenség.}$$

Az együttes eloszlás függvény és a kopula függvény közti kapcsolatot a Sklar tétel határoz meg. Ezért a Sklar tétel a kopulák centrális tételének tekinthető.

Sklar tétel (Sklar, 1959)

Legyen $H(x, y)$ egy együttes eloszlás függvény, $F(x)$ és $G(y)$ peremeloszlás függvények. Ebben az esetben létezik egy kopula függvény, amelyre igaz a következő:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)), (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Ha F és G folytonos függvények, akkor C egyértelmű.

Ebből a képletből kiderül, hogyan lehet egy $C(u, v)$ kopula függvény és bármilyen $F(x)$ és $G(y)$ eloszlásfüggvényekkel együttes eloszlásfüggvényt generálni. Az is megfigyelhető, hogy az együttes eloszlásfüggvény $H(x, y)$ hogyan bontható az összefüggés struktúrájára, amit $C(u, v)$ ír le $F(x)$ és $G(y)$ peremeire.

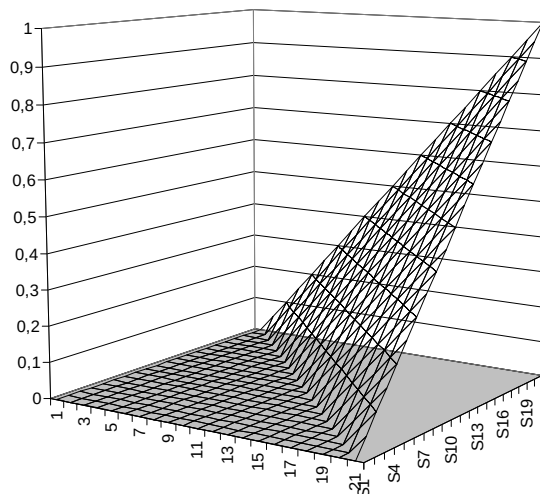
A következőkben néhány fontos és népszerű kopulafajtát mutatunk be.

3.2.1. A minimum, a maximum és a függetlenségi kopulák

Legyen $C(u, v)$ egy kopula. Ekkor minden $(u, v) \in [0, 1]^2$ pontra igaz, hogy

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) = M(u, v),$$

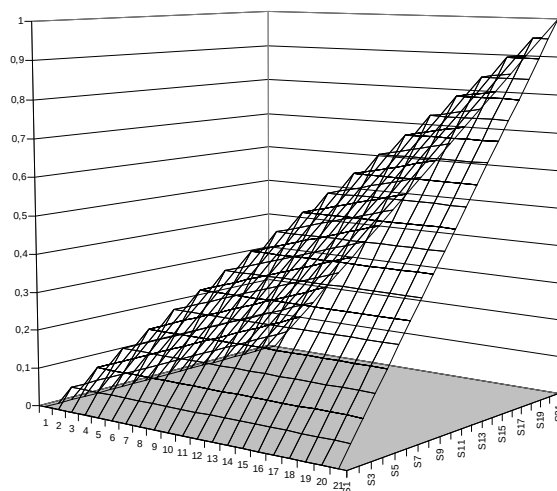
Minimum kopulának nevezik $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ kopulát, amely X_1 és X_2 valószínűségi változók tökéletes negatív függőségi esete.



9. ábra: Minimum kopula

Forrás: Saját szerkesztés

Maximum kopulának nevezik $M(u, v) = \min(u, v)$ kopulát, amely X_1 és X_2 valószínűségi változók tökéletes pozitív függőségi esete.

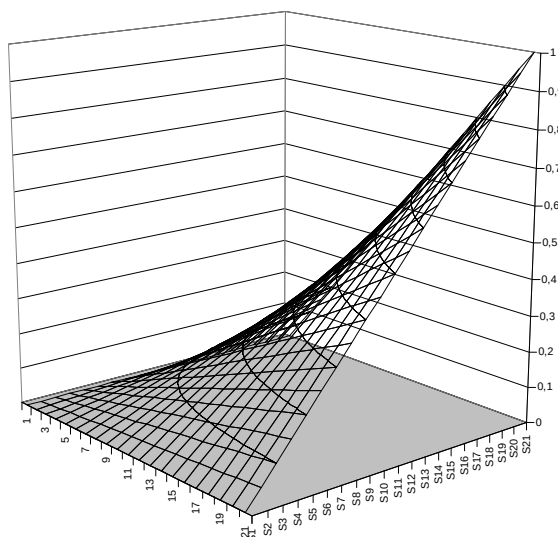


10. ábra: Maximum kopula

Forrás: Saját szerkesztés

Egy $C(u, v)$ tetszőleges kopula, amely két valószínűségi változó kapcsolatát modellezi, e két felület között helyezkedik el. Vegyük észre a fenti ábrákból, hogy a két felület egy zárt tartományt határoz meg. Minden kopula e között a két kopula között húzódik meg.

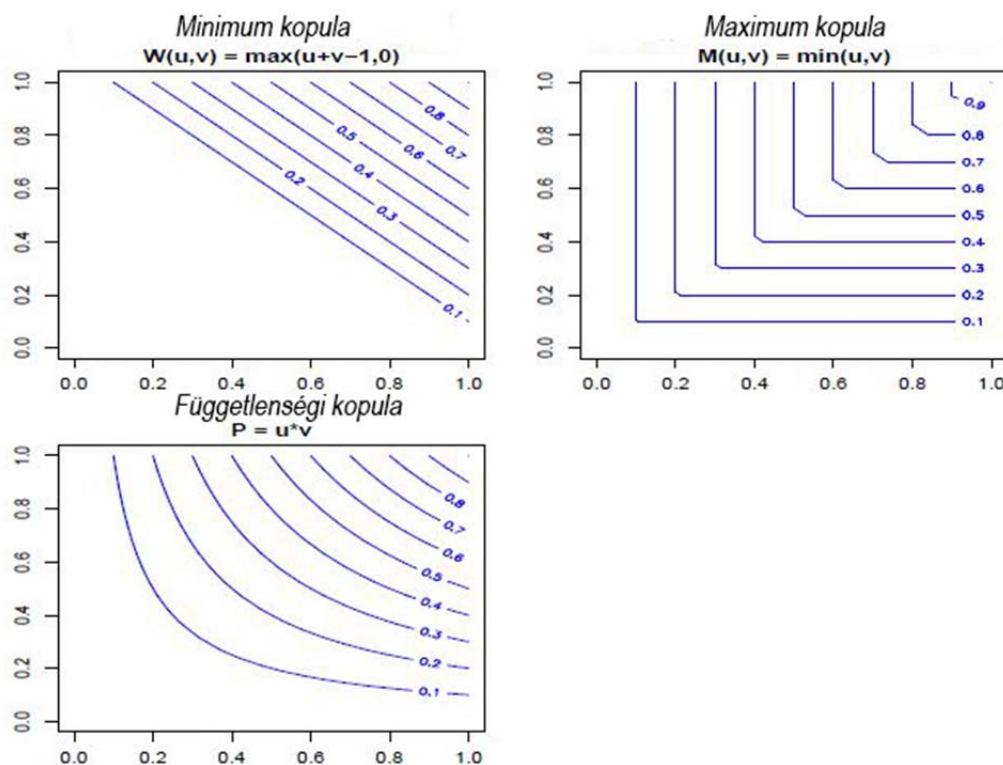
Ha X_1 és X_2 valószínűségi változók *függetlenek egymástól*, akkor a kapcsolatukat a **függetlenségi kopula** határozza meg az alábbiak szerint: $C(u, v) = uv$, $u, v \in [0, 1]$.



11. ábra: Fügetlenségi kopula

Forrás: Saját szerkesztés

Az alábbi ábrák mutatják a 9. 10. és 11. ábrán szereplő kopulák különböző valószínűségekhez tartozó szintvonalait.



12. ábra: Kontúr diagram: A minimum, a maximum és a függetlenségi kopula szintvonalai

Forrás: Saját szerkesztés

Mint ismeretes az együttes normális eloszlás gyorsan lecseng, vagyis a nagyon nagy értékek illetve a nagyon kis értékek együttes bekövetkezésének a valószínűsége erősen közelít a nullához, ezért nem megfelelő az extrém esetek modellezésére.

A kopulák egyik fő erőssége hogy képesek ettől különböző extrém eseteket modellezni, illetve a nem szimmetrikus eseteket is.

3.2.2. Alsó és felső extrémításokban való összefüggések jellemzése

Tegyük fel hogy $F(x) = P(X < x)$, $G(y) = P(Y < y)$ két folytonos peremeloszlás függvény.

Az alábbi két határértékkel jellemezzük a felső extrémításokban való összefüggést, illetve az alsó extrémításokban való összefüggést.

$$\lambda_U = \lim_{\substack{u \rightarrow 1 \\ u < 1}} P(Y > G^{-1}(u) | X > F^{-1}(u))$$

$$\lambda_L = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} P(Y \leq G^{-1}(u) | X \leq F^{-1}(u))$$

Amennyiben a fenti értékek különböznek nullától, alsó-, felső, vagy mindkét féle extrémításban való összefüggés fedezhető fel. Extrémításban való összefüggés érzékletesen azt jelenti, hogy „vastag farkú” eloszlásokról van szó, amelyben az extrém estek együttes bekövetkezése nem elhanyagolandó (nem nullához közeli) valószínűséggel következnek be. Ezt a normális eloszlás nem teljesíti, mivel ott elég hamar cseng le az együttes eloszlás, viszont például a kis szabadságfokú Student eloszlás ezt már jobban képes modellezni.

A kétváltozós kopula esetében $C(u, v)$, λ_U és λ_L az alábbiak szerint írható fel.

$$\lambda_U = \lim_{\substack{u \rightarrow 1 \\ u < 1}} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$

$$\lambda_L = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{C(u, u)}{u}$$

Összegezve, egy együttes eloszlásfüggvény modellezésnél érdemes figyelembe venni az extrémításokban való viselkedést. Ha ezt mintából akarjuk tenni, megfelelő nagy mintára lesz szükségünk, vagy fel kell használnunk előzetes szakértői információt az összefüggések milyenségéről.

3.2.3. Gauss és t kopula

A Gauss kopula és a Student t kopula két implicit kopula, mivel nem lehet explicit kifejezni, csak az alábbi integrálos formulákkal.

A Gauss kopula 2004-ben igen elterjedt a pénzügyi világban.

A Gauss kopula definiálható kétdimenziós normális eloszlással, ekkor a következőképpen néz ki.

$$C(u, v; \rho) = \Phi_\rho^2(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2 - \rho xy - y^2}{2(1-\rho^2)}} dx dy$$

ahol $\Phi(x)$ az egyváltozós normális eloszlásfüggvényt, és $\Phi_\rho^2(x, y)$ a kétváltozós normális eloszlás együttes eloszlásfüggvényét jelöli, mely standard normális peremekkel rendelkezik, a peremeloszlások közti ρ korrelációval.

Felső extremitásokkal és az alsó extremitásokkal való összefüggést a Gauss kopula esetében az alábbi függvény írja le.

$$\lambda_L = \lambda_U = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi \left(x \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) = 0$$

Ez azt jelenti, hogy a változók extrém értékei függetlenül jelennek. Minél magasabb a korrelációs együttható, annál nagyobbak azok az extrém értékek, amelyek között létre jön a függetlenség.

A Student t kopula függvénye pedig a következőképpen néz ki.

$$C(u, v; \rho, v) = t_{\rho, v}^2(t_v^{-1}(u), t_v^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2 - \rho xy + y^2}{v(1-\rho^2)}\right)^{1+\frac{v}{2}}} dx dy$$

ahol $t_v(x)$ a t -eloszlás v szabadságfokkal, és $t_{\rho, v}^2(x, y)$ jelöli a kétváltozós t eloszlás együttes eloszlásfüggvénye a permeloszlások közti ρ korrelációval, t_v^{-1} az inverz egydimenziós Student eloszlás, amelynek várható értéke 0 és szórása $\frac{v}{v-2}$ a szabadságfok függvénye.

A Student eloszlásban megjelenik egy új paraméter, a Gauss kopulához képest, a szabadságfok, amely szabályozza az extrémális értékek együttes bekövetkezését. A szabadságfok növelésével csökken az együttes extrémális valószínűségek bekövetkezése. (Ez várható mivel megközelíti a normális eloszlást.)

Felső extrémításokkal és az alsó extrémításokkal való összefüggést a Student t kopula esetében az alábbi függvény írja le.

$$\lambda_L = \lambda_U = 2t_{v+1} \left(-\sqrt{v+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right),$$

ahol t_{v+1} jelöli az eloszlásfüggvényét egy egyváltozós $v+1$ szabadságfokkal rendelkező Student t eloszlásnak. Minél nagyobb a korrelációs együttható, és kisebb a szabadságfok, annál erősebb az extremitásokban való összefüggés.

3.2.4. Arkhimédeszi kopulák

Az Arkhimédeszi kopulák fontos paraméteres kopulacsaládok, amelyeket egy úgynevezett generáló függvény segítségével generálunk.

Először definiáljuk a generáló függvényeket a következőképpen.

Legyen $\varphi: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ egy folytonos, szigorúan csökkenő függvény, úgy, hogy:

$$\varphi(1) = 0 \text{ és } \varphi(0) = \infty.$$

A generáló függvény segítségével definiálhatók az Arkhimédeszi kopulák.

Definíció: A $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ **Arkhimédeszi kopula** φ generátorfüggvénnyel áll elő, amennyiben a fent definiált $\varphi(x)$ függvény konvex.

Az Arkhimédeszi kopulák több családja is ismert, ezek közül a legnépszerűbbek a Gumbel, a Clayton és a Frank kopulák. Az alábbiakban bemutatjuk ezeket a kopulacsaládokat, amelyeket a generáló függvények és a paraméterek határoznak meg.

A Gumbel kopula

A Gumbel kopula a következőképpen néz ki:

$$C_{\theta}^G(u, v) = e^{-[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}}, \quad 1 \leq \theta \leq \infty$$

A Gumbel kopula generátorfüggvénye:

$$\varphi(t) = (-\ln t)^{\theta}$$

Felső extrémításokkal való összefüggését: $\lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$ írja le. Ha a θ paraméter 1-hez tart akkor, a kopula a függetlenségi kopulához tart, ha pedig ∞ -hez tart akkor teljes összefüggési kopulához tart.

$$C_1^G = \Pi; C_{\infty}^G = M$$

Ebből az következik, hogy ez a kopula a függetlenségi és a maximális kopula között található, mivel a paraméter határesetei éppen ezeket a kopulákat határozzák meg.

A Clayton kopula

A Clayton kopula a következőképpen néz ki:

$$C_{\theta}^C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta \in [0, \infty)$$

A Clayton kopula generátorfüggvénye:

$$\varphi(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}$$

Alsó extremitásokkal való összefüggését: $\lambda_L = 2^{\frac{-1}{\theta}}$ írja le.

$$C_0^C = \Pi; C_\infty^C = M$$

A Frank kopula

A Frank kopula a következőképpen néz ki:

$$C_\theta^F(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right), \quad \theta \in \mathbb{R} - \{0\}$$

A Frank kopula generátorfüggvénye:

$$\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$$

Felső, illetve extremitásokkal való összefüggését: $\lambda_U = \lambda_L = 0$ írja le.

$$C_{-\infty}^F = W; C_0^F = \Pi; C_\infty^F = M$$

3.3. OLYAN KÉT DIMENZIÓS ELOSZLÁS SZIMULÁCIÓJA, AMELY BEMUTAT KÜLÖNBÖZŐ ÖSSZEFÜGGÉSI STRUKTÚRÁKAT UGYANOLYAN KORRELÁCIÓ MELLETT

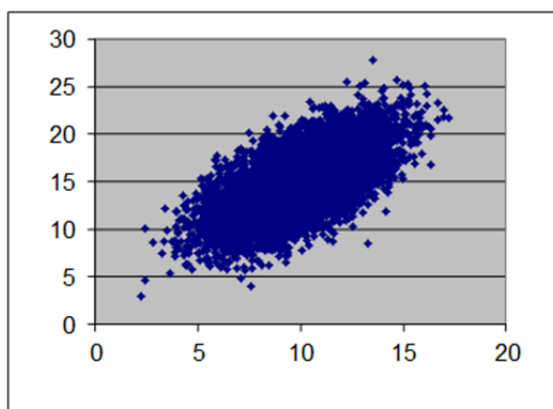
Ebben a részben rávilágítottunk szimulált példákon keresztül, milyen különbségek lehetnek együttes eloszlások között, amelyek peremeloszlásai ugyanazok, és korrelációs együtthatójuk is azonos. Ezek a példák kidomborítják az összefüggés hatását a különböző eloszlások esetében, és így a kopulák jótekonny hatását a kétdimenziós együttes eloszlások modellezésében.

Példák ugyan olyan korrelációs együtthatójú eloszlásokra normális illetve nem normális esetben

a) Ugyan olyan peremeloszlású es korrelációs együtthatóval rendelkező normális és Clayton eloszlású együttes eloszlások jellemzése

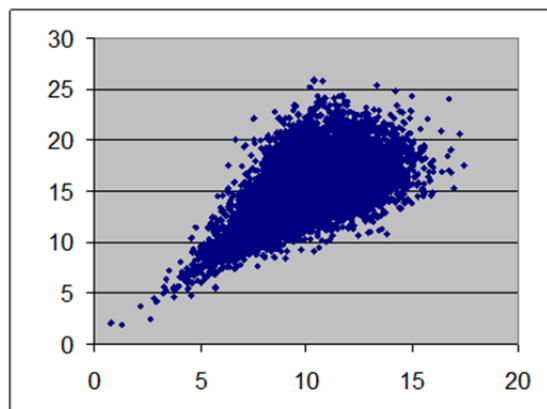
A két peremeloszlás normális eloszlást követ $X \sim N(10; 2)$ illetve $Y \sim N(15; 3)$. A korrelációs együttható a két változó között $R=0,643$. Ezeket a peremeloszlásokat behelyettesítve a Gauss kopulába egy együttes normális eloszlást kapunk R paraméterrel.

Ugyanezeket a peremeket behelyettesítettük egy Clayton kopulába, amelynek a paramétere $\theta = 1,84$. Az így kapott együttes eloszlásokból generáltuk a pontokat a 13. és a 14. ábrán.



13. ábra: Normális függőség

Forrás: Saját szerkesztés

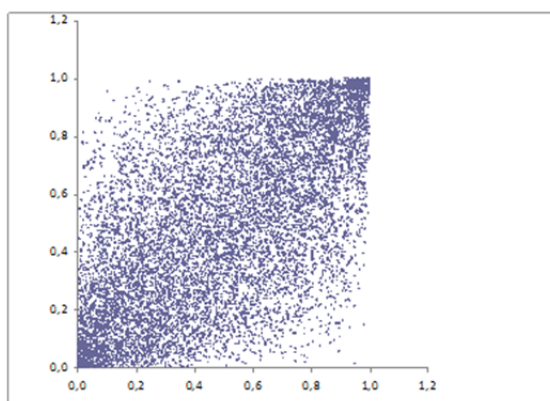


14. ábra: Clayton függőség

Forrás: Saját szerkesztés

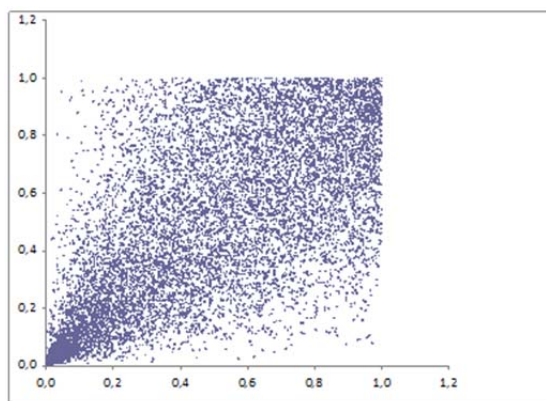
A 14. ábrában nagyon jól látszik, hogy nem szimmetrikus, nem ellipszis jellegű (ami a normális eloszlásra utal) és az alsó extrémításban erősebb összefüggés jelenik meg, mint a 13. ábrán.

Ha csak az összefüggést akarjuk elemezni, az együttes eloszlást letisztítjuk a peremek sajátos eloszlásától egyenletes eloszlással helyettesítve azokat. A kopula sűrűségfüggvényből generálunk pont felhőket a normális illetve a Clayton kopula esetében (15. ábra és 16. ábra).



15. ábra: Gauss kopula

Forrás: Saját szerkesztés



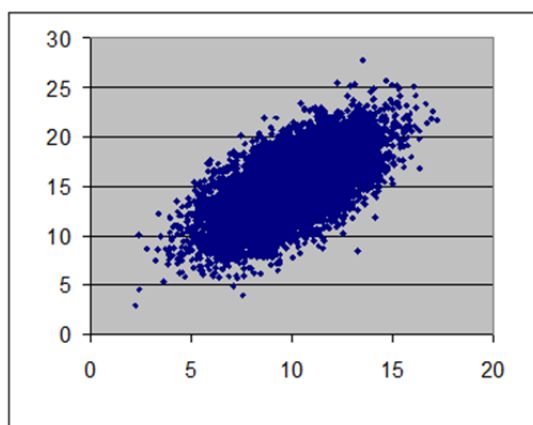
16. ábra: Clayton kopula

Forrás: Saját szerkesztés

b) Ugyan olyan peremeloszlású es korrelációs együtthatóval rendelkező normális és Gumbel eloszlású együttes eloszlások jellemzése

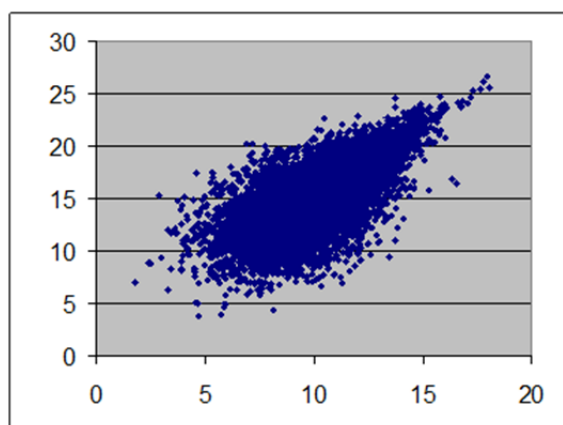
Ebben az esetben is a két peremeloszlás normális eloszlást követ $X \sim N(10; 2)$ illetve $Y \sim N(15; 3)$. A korrelációs együttható a két változó között $R=0,643$. Ezeket a peremeloszlásokat behelyettesítve a Gauss kopulába egy együttes normális eloszlást kapunk R paraméterrel. Ugyanezeket a peremeket behelyettesítettük egy Gumbel kopulába, amelynek a paramétere $\theta = 1,84$. Az így kapott együttes eloszlásokból generáltuk a pontokat a 17. és a 18. ábrán.

A 18. ábrában jól észrevehető, hogy nem szimmetrikus, nem ellipszis jellegű (ami a normális eloszlásra utal) és a felső extremitásban erősebb összefüggés jelenik meg, mint a 17. ábrán.



17. ábra: Normál függőség

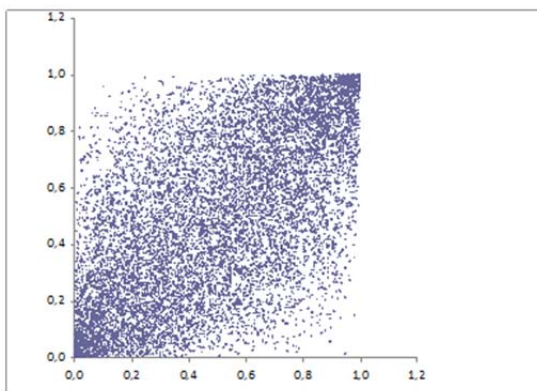
Forrás: Saját szerkesztés



18. ábra: Gumbel függőség

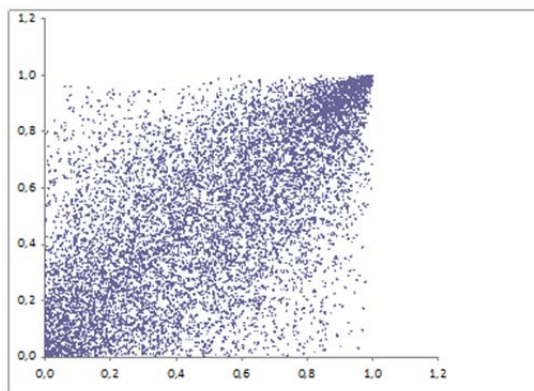
Forrás: Saját szerkesztés

Ha csak az összefüggési struktúrát akarjuk elemezni, az együttes eloszlást letisztítjuk a peremek sajátos eloszlásától egyenletes eloszlással helyettesítve azokat. A kopula sűrűségfüggvényből generálunk pont felhőket a normális illetve a Gumbel kopula esetében (19. ábra és 20. ábra).



19. ábra: Gauss kopula

Forrás: Saját szerkesztés



20. ábra: Gumbel kopula

Forrás: Saját szerkesztés

3.4. ÖSSZEFOGLALÁS

A valószínűségi változók közötti összefüggésének jellemzésére és modellezésében a kopulák alkalmazásának számos előnye van:

- A kopulákkal lehetőség van nem lineáris függőségek modellezésére.
- Lehetőséget nyújtanak az összefüggés és a peremek különválasztására.
- Bármilyen peremeloszlás esetén alkalmazhatók.
- Az extrém esetek modellezésére is jól alkalmazhatók, mivel képesek vastag extremitású eloszlások modellezésére is.

4. „GOODNESS OF FIT” – ILLESZKEDÉS JÓSÁGÁNAK TESZTELÉSÉRE ALKALMAZHATÓ MÓDSZEREK KOPULÁK ESETÉBEN

Az alábbiakban bemutatunk néhány módszert az illeszkedés jóságának tesztelésére, melyek kopulák esetében alkalmazhatók. Ezek és más módszerek összehasonlítása a Berg (2007) cikkében található.

Legyen C a mintához illesztett többdimenziós kopula. Tegyük fel, hogy meg szeretnénk vizsgálni az illeszkedés jóságát.

A hipotézisek a következők:

$$\mathcal{H}_0 = C \in \mathcal{C} = \{C_\theta; \theta \in \Theta\}$$

$$\mathcal{H}_1 = C \notin \mathcal{C} = \{C_\theta; \theta \in \Theta\}$$

ahol Θ a paraméter értékkészlete.

Az egyváltozós eloszlások esetében az illeszkedés jóságának vizsgálatához használhatjuk az Anderson-Darling tesztet (Anderson – Darling, 1954) vagy a QQ diagramot. Többdimenziós esetben kevesebb lehetőségünk van. A legegyszerűbb módja a többdimenziós valószínűségi változók esetében történő illeszkedési vizsgálatnak a khi négyzet próba.

A módszerek elsősorban abban különböznek, hogy hogyan történik a dimenziócsökkentés. Egyváltozós esetben gyakran használják a standard egyváltozós statisztikákat, mint például a Cramer együttható számítás vagy a Kolmogorov-Smirnov féle kétmintás próba.

A kopula esetében az illeszkedés jóságának a tesztelésénél csak a kopula illeszkedésének jóságára vagyunk kíváncsiak. Ebben az esetben nem vagyunk kíváncsiak a peremek eloszlására. Ehelyett az adatok rangsorolásával végzett tesztelés a megfelelő megoldás. Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll egy n elemű minta $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, \dots, x_{1d}), \dots, \mathbf{x}_n = (x_{n1}, \dots, x_{nd})$ amit egy d -dimenziós véletlen $\mathbf{X}$ vektorból kapunk. A beavatkozás az úgynevezett a $\mathbf{Z}$ próba vetkorból vett próbamintákon alapul $\mathbf{z}_1 = (z_{11}, \dots, z_{1d}), \dots, \mathbf{z}_n = (z_{n1}, \dots, z_{nd})$, ahol

$$\mathbf{z}_j = (z_{j1}, \dots, z_{jd}) = \left(\frac{R_{j1}}{n+1}, \dots, \frac{R_{jd}}{n+1} \right),$$

ahol R_{ji} a rangja az x_{ji} változónak $(x_{1i}, \dots, x_{ni})$ intervallumon. A tört nevezőjében $(n + 1)$ -et használunk n helyet, hogy elkerüljük a $[0,1]^d$ határokon megjelenő numerikus problémákat. Az összes perem ilyen módon történő transzformációja gyakran elvezet az empirikus perem transzformációhoz. Adott független változók $(x_1, \dots, x_n)$ és a próbaminták $(z_1, \dots, z_n)$ a C kopula mintájának tekinthetők. Megjegyzendő, hogy a rang transzformáció függőséghez vezet, így a próbamintánk $(z_1, \dots, z_n)$ nem tekinthető függetlennek. Szükség van tehát egy paraméter becslési eljárásra, hogy megbízható P érték becslést kapjunk.

Egy alap kiindulópont a Rosenblatt transzformáció

A Rosenblatt transzformáció (Rosenblatt, 1952) adott függő változók halmazát független változók $U[0,1]$ halmazává transzformálja, melyet a többdimenziós eloszlás határoz meg. Ez a transzformáció univerzálisan használható független változóból történő ismert eloszlású független változók $U[0,1]$ létrehozásához.

A Rosenblatt transzformáció definíciója

Legyen $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$ egy véletlen vektor $F_i(z_i)$ perem eloszlásokkal és $F_{i|1\dots i-1}(Z_i \leq z_i | Z_1 = z_1, \dots, Z_{i-1} = z_{i-1})$ feltételes eloszlásokkal $i = 1, \dots, d$.

$\mathbf{Z}$ vektor Rosenblatt transzformációját $\mathcal{R}(\mathbf{Z}) = \mathcal{R}_1(Z_1), \dots, \mathcal{R}_d(Z_d)$ adja meg, ahol

$$\mathcal{R}_1(Z_1) = P(Z_1 \leq z_1) = F_1(z_1),$$

$$\mathcal{R}_2(Z_2) = P(Z_2 \leq z_2 | Z_1 = z_1) = F_{2|1}(z_2 | z_1),$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{R}_d(Z_d) = P(Z_d \leq z_d | Z_1 = z_1, \dots, Z_{d-1} = z_{d-1}) = F_{d|1\dots d-1}(z_d | z_1, \dots, z_{d-1}).$$

Ebben az esetben a $\mathbf{V} = V_1, \dots, V_d$ véletlen vektor, ahol most az $\mathcal{R}_i(Z_i)$ az $U[0,1]^d$ véletlen változó.

Első módszer – a diszkrét kopula alkalmazása

Az első módszer, amit itt megemlítünk a Genest (2008) módszere, ami a diszkrét kopulát alkalmazza.

Genest és Rémillard (2008) a kopula eloszlás függvényét ajánlja a dimenziók csökkentéséhez. Az alábbiakban bemutatott módszerek a diszkrét kopulára épülnek.

$$\hat{C}(\mathbf{u}) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n I\{Z_{j1} \leq u_1, \dots, Z_{jd} \leq u_d\}$$

Ahol $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0,1]^d$. A diszkrét kopula a $P(Z_1 < u_1, \dots, Z_d < u_d)$ megfigyelt gyakorisága. A módszer azon alapul, hogy összevetjük a $\hat{C}(z)$ -t egy becsült $C_{\hat{\theta}}(\mathbf{z})$ -vel. Ez egy nagyon természetes megközelítés, azt figyelembe véve, hogy bármely másik többdimenziós illeszkedésvizsgálat a diszkrét és a null hipotézis eloszlás függvénye közötti eltérést vizsgálatán alapul. Genest és szerzőtársai szerint, mivel ez egy nem paraméteres módszer, a $\hat{C}$ mutató fejezi ki a legjobb módon a kopula illeszkedésének jóságát.

A Cvm statisztika ebben az esetben

$$\hat{T}_2 = n \int_{[0,1]^d} \{\hat{C}(z_j) - C_{\hat{\theta}}(z_j)\}^2$$

Második módszer – a Rosenblatt transzformáció felhasználása

A következő módszert ugyancsak Genest és szerzőtársai vezették be és ez a módszer felhasználja a Rosenblatt transzformációt.

Genest és szerzőtársai az előbbi megközelítés alkalmazását ajánlják a $\mathbf{V} = \mathcal{R}(\mathbf{Z})$ vektorra. Ezek után érdemes összehasonlítani $\hat{C}(\mathbf{v})$ -t a függetlenségi kopulával, amit $C_{\perp}(\mathbf{v})$ jelöl.

$$\hat{T}_2 = n \int_{[0,1]^d} \{\hat{C}(\mathbf{v}) - C_{\perp}(\mathbf{v})\}^2 d\hat{C}(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n \{\hat{C}(\mathbf{v}_j) - C_{\perp}(\mathbf{v}_j)\}^2$$

Harmadik módszer – a Kendall tau mutató tesztelése

A következő módszer a Kendall tau összefüggési mutatót hivatott tesztelni. Genest és Rivest (1993), Wang és Wells (2000), Savu és Trede (2004) és Genest és szerzőtársai (2006) a Kendall tau összefüggési mutató $K(w) = P(C(Z) \leq w)$ alkalmazását ajánlják az illeszkedés jóságának mérésére.

Az S_4 teszt a következő megfigyelő függvényre épül.

$$S_4(w) = P\{C(\mathbf{Z}) \leq w\}, \quad w \in [0,1]$$

Ahol $\mathbf{Z}$ egy próbavektor. A null hipotézis alapján $S_4(w) = S_{4,\hat{\theta}}(w)$ ami kopulával fejezhető ki. A megfigyelő függvény $S_{4\text{empirikus}}$ változata a következőképpen néz ki.

$$\hat{S}_4(w) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n I\{\hat{C}(\mathbf{z}_j) \leq w\}$$

A Cvm statisztika az alábbi.

$$\hat{T}_4 = n \int_0^1 \{\hat{S}_4(w) - S_{4,\hat{\theta}}(w)\}^2 d\hat{S}_4(w) = \sum_{j=1}^n \left\{ \hat{S}_4\left(\frac{j}{n+1}\right) - S_{4,\hat{\theta}}\left(\frac{j}{n+1}\right) \right\}^2$$

Negyedik módszer – a Spearman korrelációs együtttható tesztelése

A következő módszer a Spearman korrelációs együttthatót teszteli. Quessy és szerzőtársai (2007) a Speraman féle együttthatón $L_2(w) = P(Z_1 Z_2 \leq w)$ alapuló kétdimenziós kopula illeszkedésének tesztelésére alkalmas módszert ajánlanak. Megjegyzendő, hogy $L_2(w) = P(C_{\perp}(Z_1, Z_2) \leq w)$. Ebben az esetben a történő d dimenzióra való kiterjesztés $L_d(w) = P(C_{\perp}(\mathbf{Z}) \leq w)$ és az S_5 az az alábbi.

$$S_5(w) = P\{C_{\perp}(\mathbf{Z}) \leq w\}, \quad w \in [0, 1]$$

Ahol $\mathbf{Z}$ a próba vektor. A null hipotézis alapján $S_5(w) = S_{5,\hat{\theta}}(w)$ ami kopulával fejezhető ki. A teszt S_5 empirikus változata a következőképpen néz ki.

$$\hat{S}_5(w) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n I\{C_{\perp}(\mathbf{z}_j) \leq w\}$$

A Cvm statisztika az alábbi.

$$\hat{T}_5 = n \int_0^1 \{\hat{S}_5(w) - S_{5,\hat{\theta}}(w)\}^2 d\hat{S}_5(w) = \sum_{j=1}^n \left\{ \hat{S}_5\left(\frac{j}{n+1}\right) - S_{5,\hat{\theta}}\left(\frac{j}{n+1}\right) \right\}^2$$

5. HOGYAN KERÜLT A GAUSS KOPULA A PÉNZÜGYI ELEMZŐK ASZTALÁRA?

Li Xianglin (későbbi nevén David X. Li) Kínában született, 1960-ban. Megszerezte a közgazdász diplomát majd Kanadában tovább tanult és biztosítási területen szerezte meg a PhD-t. A pénzügyi karrierje 1997-ben kezdődött a Canadian Imperial Bank of Commerce nemzetközi piacok osztályán.

Észrevette a hasonlóságot, kockázat között, ami a csoportos életbiztosításoknál keletkezik és a CDO-k² (collateralised debt obligations), magyarul adósságfedezetű kötelezettségek között, és a felvetette a modellezés szükségességét.

2000-ben partner lesz a J.P. Morgan's kockázatelemzés egységénél, majd 2003-ban a Credit derivatives research at Citigroup-nak lesz a vezérigazgatója. 2004-ben a Barclays Capital-nál vezeti a Credit quantitative analytics csoportot.

Li cikke "On Default Correlation: A Copula Function Approach" 2000-ben jelent meg, amelyben először alkalmazzák a Gauss kopulát a CDO-k modellezésére, mely munkája nyomán a Gauss kopula hamarosan egy elfogadott és népszerű eszköze lett a pénzügyi intézeteknek. Ezzel modellezték értékpapírok közötti kapcsolatokat. A CDO-kra alkalmazva lehetővé tette az matematikailag pontosan kivitelezhető beárazást jó néhány befektetésnek, amit előtte a komplexitásuk miatt nem lehetett beárazni, mint például a jelzáloghiteleket. Később, a pénzügyi krízis után ezért Jones Sam a 2009 április 24-én megjelenő Financial Times folyóiratban "a világ legbefolyásosabb aktuáriusának" nevezte.

A pénzügyi krízis utáni matematikában ezt a modellt erősen hibásnak tartják, felelősnek a történetekért és "Recipe for disaster"-er névvel illetik (Salmon, 2009). Nassim Nicholas Taleb, egy közgazdász matematikus könyvet ír, amiben nagyon keményen bírálja a modellt és minden rossznak az eredetének ítéli. „Az emberek nagyon izgatottak a Gauss kopulával kapcsolatban annak matematikai eleganciája miatt, de az igazából soha nem működött. Az értékpapírok közötti kapcsolat nem mérhető a korrelációval. Bármilyen, ami a korrelációt veszi alapul, nem más mint sarlatánság.” Továbbá azt gondolja, hogy a múlt adatai alapján nem lehet elég jól következtetni a jövőre.

² A CDO-k olyan értékpapírok, amelyek mögött más befektetések, például jelzáloghitelek vagy kötvények állnak fedezetként. A CDO lehetővé teszi, hogy más befektetések egybecsomagolása révén új értékpapír jöjjön létre. (Meissner, 2008)

Taleb könyve (Taleb, 2007) nagy hírnévre tett szert, 36 hetet töltött el a New York Times bestseller listáján és 32 nyelven jelent meg. Elérte művével, hogy az emberek, akik a válság következtében rosszul jártak, már nem a pénzügyi intézeteket okolták a kialakult helyzetért, hanem a Gauss kopulát és David X. Li-t.

Állítólag Li tisztában volt a modell határaival, mivel 2005-ben kijelentette "Nagyon kevés ember érti a modell lényegét., Li a következőket is írta a modellről: "A szóban forgó kopula az egyszerűségével nyerte el nagy népszerűségét... Ugyanakkor kevésbé van megtámogatva az ismert pénzügyi gazdaság elméletével... Alapvetően egy hitel portfólió modellt állítottunk elő biztos hitelportfólió elmélet nélkül."

A sok támadó között, akadt, aki védelmére kelt. Kai Gilkes a CreditSights-ban azt írja Li-t nem lehet hibáztatni, annak ellenére, hogy Ő találta fel a modellt, azok a bankárok a hibásak, akik, rosszul értelmezték és rosszul alkalmazták azt." (wikipedia.org, 2013)

A Gauss kopula védelmében

A matematikai modellek, amiket a matematikusok és közgazdászok fölépítettek, csak közelíteni próbálják a valóságot, amely "zavaros" és komplex. A modellek használatában fontos, hogy tisztában legyünk annak korlátosságával és gyengeségeivel.

A Gauss kopula arra lett alkalmazva, hogy összefüggéseket fejezzen ki bizonyos feltételek mellett. Például értékpapírok együtt ingadozása esetén. Ez persze általánosan nézve értelmetlen, hisz a piac mozgásától függően a pozitív korreláció átváltozhat negatív korrelációvá. Ez ugyanakkor nem jelenti azt, hogy fölösleges a Gauss kopulát használni, ha tisztázzuk a feltételeket, ami alatt működik. Ennél sokkal bonyolultabb modell esetében is, amelyet olyan feltétel mellett építünk meg, hogy nem vesszük figyelembe például a házak esését országos szinten, akkor a modell nem tudja kivédeni, nem tud felkészíteni az ellen, amit ez a tény maga után vonz.

2001-ben a cégek egymás után kezdték el használni Li Gauss kopulás formuláját, először a Moody's majd más nagy pénzügyi kockázatokat elemző intézetek is, mint például a Standard & Poor's. A Gauss kopula a használatával nem számoltak az extrémális események valószínűségének a bekövetkezésével. Emiatt elég nagy meggondolatlanság lenne a Gauss kopulákat hibáztatni, sőt mi több a matematikai modelleket általánosan. Inkább azok az úgynevezett szakemberek voltak hibásak, akik kizárólag ezt a modellt alkalmazták.

Saját véleményem a Gauss kopuláról, hogy tisztán látva a gyengeségeit olyan modelleket lehet ebből kiindulva építeni, amelyek bizonyos mértékig hivatottak a gyengeségek orvoslására. Például a korrelációt egy idő függvényeként tekinteni és egy

sztochasztikus folyamatként modellezni. Röviden fogalmazva “ne öntsük ki a gyereket a kádban lévő vízzel együtt”. Ezt azért is így gondolom, mert sok nem hozzáértő pénzügyi ember a kopula függvényeket általánosságban ítél el, a Gauss kopula meghurcolt múltja miatt, pedig rengeteg kiaknázatlan lehetőség rejlik bennük.

6. SZIMULÁCIÓ GUMBEL ILLETVE GAUSS KOPULA SEGÍTSÉGÉVEL

Ebben a részben két adott portfóliót fogunk összehasonlítani, kockázati szempontból. A két portfóliót csak az összefüggési rendszer különbözteti meg.

Az egyszerűség kedvéért az értékpapírokat két darab normális eloszlással modelleztük: $X \sim N(10,2)$ illetve $Y \sim N(15,3)$. A portfóliónkat úgy tervezzük, hogy a rendelkezésünkre álló tőke felét az egyikbe fektetjük a másik felét a másodikba.

Először feltesszük, hogy a két értékpapír együttes eloszlása normális adott korrelációs együtthatóval, majd úgy, hogy az összefüggés Gumbel kopula által van megadva. Ahhoz, hogy elemezni tudjuk a két portfóliót csupán az összefüggés szempontjából (mennyire számít az összefüggés), mindkét esetben ugyan olyan a korrelációs együttható mellett kell dolgoznunk, és természetesen ugyan olyan peremeloszlások mellett.

Együttes normális eloszlás generálása adott korrelációs együtthatóval és adott peremeloszlásokkal

Először generáltunk egy adott korrelációs együtthatós 2-dimenziós együttes normális eloszlást amely a „Cornorgen”,³ programmal készült. Ennek peremei standard normális eloszlásúak. Ahhoz, hogy a kívánt paraméterekhez jussunk, a peremeket megfelelőképpen transzformáljuk (Szórással megszorozzuk, majd hozzá adjuk az átlagot). Az új peremek között megmarad a korrelációs együttható.

Együttes eloszlás generálása, Gumbel kopula segítségével, adott korrelációs együtthatóval és adott peremeloszlásokkal

A Gumbel kopula θ paramétere kifejezhető a τ Kendall paraméter segítségével a következőképpen: $\theta = \frac{1}{1-\tau}$.

Majd felhasználjuk a korrelációs együttható és a Kendall közötti összefüggést $\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$.

³ Szántai Tamás Professzor programja.

Felhasználtuk továbbá a Gumbel sűrűségfüggvényt, amit deriválással kapunk a kopula eloszlásfüggvényéből az alábbiak szerint.

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \frac{\delta^2 C(u, v)}{\delta u \delta v} \\ &= C(u, v)(uv)^{-1}((-\log v)^\delta + (-\log v)^\delta)^{-2+\frac{2}{\delta}}(\log u \log v)^{\delta-1} \\ &\quad \times \{1 + (\delta - 1)((-\log u)^\delta + (-\log v)^\delta)^{-1/\delta}\} \end{aligned}$$

Több dimenzióban ezt például a Mathematica programcsomaggal lehet megtenni.

Ebből a sűrűség-függvényből generáljuk a Gumbel együttes eloszlást egyenletes eloszlású peremekkel a $[0; 1]$ -en. Ezeket a peremeket majd kívánt normálisra transzformáljuk.

Szimuláció, eredmények, elemzés

A kutatásunkhoz a szimulációt három különböző korrelációs együttható esteében készítjük: 0,68, 0,75, illetve 0,92-t.

A kockázatot két fajta mutatóval jellemezzük, amelyek az aszimmetrikus eloszlások esetében is jól alkalmazhatók (a szórással ellentétben). Az egyik a VaR, a másik, pedig az Expected Shortfall. Mindkét kockázati mutatót ismertettük a 2. fejezetben (2.1.4. és 2.1.6. alfejezetek).

A táblázatokban (1.-6. táblázat) az elméleti rho, az elméleti eloszlás korrelációs együtthatóját mutatja, amiből szimuláltuk a mintánkat. A „szim rho” pedig a szimulált mintából számolt korrelációs együtthatót.

Mivel az egyik eloszlást Gumbel kopula segítségével generáltuk ezért a „nagy értékek” közötti összefüggésének hatását akarjuk jellemezni a VaR illetve Expected Shortfall segítségével. Ezeket két α valószínűség esetében fogjuk nézni $\alpha = 0,05$ és $\alpha = 0,01$ esetében. Ha összehasonlítjuk a két α -nak megfelelő táblázatok, mindegyik esetben (Gumbel illetve normális) $\alpha = 0,05$ -höz tartozó táblázatok elemi kisebbek a $\alpha = 0,01$ táblázathoz tartozó elemeknél. Ez természetes és nem meglepő.

Most hasonlítsuk össze a különböző rho korrelációs együtthatókhoz tartozó VaR illetve Expected Shortfall-t, a Gumbel illetve normális összefüggés esetén.

1. táblázat: VaR és Expected Shortfall Gumbel összefüggés esetén, 0,05 alfaértéken

Gumbel alfa=0,05

Elm rho	0,68	0,75	0,92
Szim rho	0,686942	0,731075	0,886061
VaR	16,41929	16,33185	15,35791
Exp_short	17,50928	17,40609	16,42112

Forrás: Saját szimulált adatok

2. táblázat: VaR és Expected Shortfall normális összefüggés esetén, 0,05 alfaértéken

Normális alfa=0,05

Elm rho	0,68	0,75	0,92
Szim rho	0,676267	0,744016	0,922085
VaR	16,28229	16,35825	16,60724
Exp_short	17,23341	17,32458	17,5664

Forrás: Saját szimulált adatok

3. táblázat: VaR és Expected Shortfall Gumbel összefüggés esetén, 0,01 alfaértéken

Gumbel alfa=0,01

Elm rho	0,68	0,75	0,92
Szim rho	0,686942	0,731075	0,886061
VaR	18,24643	18,08909	17,03013
Exp_short	19,12219	18,98941	18,07196

Forrás: Saját szimulált adatok

4. táblázat: VaR és Expected Shortfall normális összefüggés esetén, 0,01 alfaértéken

Normális alfa=0,01

Elm rho	0,68	0,75	0,92
Szim rho	0,676267	0,744016	0,922085
VaR	17,80268	17,95052	18,14162
Exp_short	18,621	18,72104	18,99044

Forrás: Saját szimulált adatok

Vegyük észre, hogy $\rho = 0,65$ esetében a VaR és az Expected Shortfall is magasabb a Gumbel kopula esetében, miközben a magas $\rho = 0,92$ esetében magasabbak a Normális kopula esetében.

Itt az a jelenség jön létre, amit a Gauss kopula esetében Embrechts a következőképpen jegyzet meg: “Regardless of how high a correlation we choose, if we go far enough into the tail, extreme events appear to occur independently in each margin.” (Embrechts –Lindskog – McNeil, 2003). Vagyis minél nagyobb a korrelációs együttható, annál kijebb kell menni az eloszlás extremitásába, ahol az értékek a függetlenséghez közelítenek.

Hogy ezt a feltevést ellenőrizzük $\rho = 0,75$ esetére, kiszámoltuk a portfólió kockázatát leíró két mutatót $\alpha = 0,001$ és $\alpha = 0,0005$ esetében, tehát ritka események esetében. Az eredményeket az 5. és a 6. táblázat szemlélteti.

5. táblázat: VaR és Expected Shortfall Gumbel és normális összefüggés esetén, 0,001 alfaértéken

rho = 0,75		alfa=0,001	
		Gumbel	Normális
	VaR	20,9218138	20,13870611
	Exp_short	20,263771	20,21584155

Forrás: Saját szimulált adatok

6. táblázat: VaR és Expected Shortfall Gumbel és normális összefüggés esetén, 0,0005 alfaértéken

rho = 0,75		alfa=0,0005	
		Gumbel	Normális
	VaR	21,2676756	20,08973871
	Exp_short	20,6760664	20,10171549

Forrás: Saját szimulált adatok

Ebből láthatjuk, hogy ha eléggé ritka esetekre koncentrálunk, azaz α elég kicsi, akkor a normális eloszlásból kapott portfólió, VaR illetve Expected Shortfall értéke kisebb, mint a Gumbel eloszlásból. Ahhoz, hogy ezeket szimulációkból értelmezni tudjuk elég nagy szimulációra volt szükségünk. A dolgozatban $n = 10\,000$ nagyságú mintát szimuláltunk.

Következtetések

Amikor a korrelációs együttható elég magas, akkor a normális eloszlás jól modellezi az együttes eloszlást és nem érdemes más eloszlást alkalmazni, amikor a korrelációs együttható közepesen erősnél kisebb, akkor már észrevehető, hogy az együttes normális eloszlás

gyorsabb lecsengése miatt, nem modellezi elég megbízhatóan a ritka események együttes bekövetkezését. Ilyen esetekben érdemes olyan kopula függvénnel megpróbálni a modellezést, amelyik a ritka események közötti összefüggéseket hűbben tudja modellezni. Ezt paraméterrel (pereméterekkel) lehet szabályozni.

7. Számítógépes modellezési lehetőségek

Az R csomag egy szabadon hozzáférhető programcsomag, ami nem csak kopulák modellezésére, hanem más statisztikai alkalmazásra is használható. Speciálisan a többdimenziós kopulákkal való modellezésnek a leírására találtam a Journal of Statistical Software „Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula” című ismertetőjét, amit a következőkben röviden bemutatok.

Ahhoz, hogy a szakértők számára a kopulákkal való modellezés a gyakorlatban lehetővé váljon, szükség van megfelelő nyílt forráskódú alkalmazásra. A következőkben bemutatom az R programcsomag **copula** modulját funkcionalitás és alkalmazástechnikai részletek szempontjából.

Az R programcsomag egy alaposan megtervezett és egyszerűen bővíthető platform, melynek alkalmazásával lehetőség van a kopulákkal való többdimenziós modellezésre. A programban lehetőség van a leggyakrabban alkalmazott elliptikus kopulák (pl. Gauss kopulák, t-kopulák) és az Archimédeszi kopulákkal történő modellezésre kiegészítve a különféle a sűrűség és eloszlás értékelési módszerekkel, véletlenszám-generátorral és grafikus megjelenítési lehetőséggel. A programban rendelkezésre állnak a maximum likelihood módszeren alapuló kopula illesztési modellek. A program a felhasználó céljainak megfelelően kiegészíthető az általa meghatározott kopulákkal és peremekkel adott konkrét probléma megoldása érdekében.

A kopula népszerű eszköze a többdimenziós modellezésnek számos területen, ahol több valószínűségi változó közötti kapcsolat meghatározására van szükség, és az együttes normális eloszlás nem képes megfelelően bemutatni a kapcsolat jellegét. A biztosításmatematikában a kopulákat az egyéni túlélési vizsgálatokra alkalmazzák, ahol a kopula segítségével a halálozás és a veszteségek közötti összefüggéseket modellezzik. A pénzügyekben a kopulákat eszközallokációra,⁴ hitelértékelésre, nemfizetési kockázatok modellezésére, derivatívák értékelésére, és kockázatmenedzsmentre is alkalmazzák. Az orvos biológiában korrelált események modellezésére és kockázatok összehasonlítására használják. A műszaki

⁴ Az eszközallokáció nem más, mint a befektetési politika, amely szerint kialakítjuk a portfóliót. Ez úgy történik, hogy megvizsgáljuk az összes eszközt (lehetséges befektetést) kockázat-hozam szempontjából, és úgy alakítjuk ki a portfólióba bevont eszközök arányát, hogy figyelembe vesszük a befektető egyéni kockázatvállalási hajlandóságát, az eszközök egymásra hatását.

tudományok területén pedig többváltozós folyamatok szimulációjára, hidrológiában pedig modellezésre alkalmazzák.

A kopula, ahogy már korábban is meghatároztuk, egy többváltozós eloszlás egyenletes peremekkel a $(0,1)$ intervallumon. Legyen U egy p -dimenziós random vektor, melyre C kopula a következő.

$$C(u_1, \dots, u_p) = \Pr(U_1 \leq u_1, \dots, U_p \leq u_p)$$

Bármely együttes folytonos valószínűségi változó átalakítható kopulává, ha a peremeloszlásait egyenletes eloszlásokkal helyettesítjük. Így a kopula segítségével lehetőség van a peremektől függetlenített többdimenziós összefüggési struktúrák modellezésére.

Ahhoz azonban, hogy a kopulák segítségével a gyakorlatban is modellezni tudjunk, szükségünk van megfelelő szoftverre. Sajnos azonban csak néhány fajta szoftvercsomag létezik a kopula alapú modellezésre. Az R szoftver csomag egy ingyenesen hozzáférhető szoftver a statisztikai modellezésre (R Development Core Team 2007), amely használható Unix/Linux, Windows és MacOS környezetben is. A program alacsonyabb szintű programnyelvekkel kombinálható (például C/C++, Fortran) kezelőfelületet és kiváló grafikai megjelenítést biztosít.

A **copula** csomag az S statisztikai programnyelv objektum orientált tulajdonságait kihasználva tervezték meg. A programcsomag nyilvánosan elérhető a Comprehensive R Archive Network oldalán a <http://cran.r-project.org/web/packages/> linken. Az S4-style osztályok az elliptikus és az Archimédeszi kopulákkal való modellezésre alkalmazhatók. Kétváltozós esetben a szélsőérték kopula osztály is megvalósítható (ennek nem számítógépes, hanem elméleti korlátai vannak). Minden kopulacsalád esetében lehetőség van a sűrűségi, eloszlási módszerekkel és véletlenszám-generátorral dolgozni. A vizualizáláshoz kétváltozós esetben lehetőség van kontúr vonalak készítésére és perspektivikus megjelenítésre. Lehetőség van továbbá a maximum likelihood módszeren alapuló kopula illesztésre, amely egyszerűen bővíthető a megfelelő peremek illesztésével.

7.1. Az R csomag S4-style osztályai

A **copula** csomag két legfontosabb osztálya „copula” és az „mvdc”. A **copula** osztály kopulák definiálására alkalmas, míg az **mvdc** osztály segítségével többváltozós eloszlásokat határozhatunk meg kopulák segítségével.

A copula osztály

A két leggyakrabban alkalmazott kopula család az elliptikus kopulák és az Archimédeszi kopulák családja. A kopula csomagot kibővítették az `ellipCopula` és az `archmCopula` virtuális osztályokkal. Ezek a virtuális osztályok úgy lettek tervezve, hogy rugalmasan összekapcsolhatók legyenek a valós osztályokkal oly módon, hogy megosztják egymással a tulajdonságaikat, de különböző megjelenítést alkalmaznak.

Az elliptikus kopula egy olyan kopula, amely megfelel egy elliptikus eloszlásnak a Sklar tételnek megfelelően. Legyen F egy elliptikus eloszlás többváltozós eloszlásfüggvénye. F_i jelöli az egy dimenziós folytonos perem-eloszlásfüggvényeket és F_i^{-1} ennek az inverz függvénye (kvantilis függvénye). Ebben az esetben F által meghatározott kopula a következőképpen néz ki.

$$C(u_1, \dots, u_p) = F[F_1^{-1}(u_1), \dots, F_p^{-1}(u_p)]$$

Az elliptikus kopulák a pénzügyek és a kockázatmenedzsment területén nagyon népszerűvé váltak egyszerű alkalmazhatóságuk miatt.

Speciálisan a többdimenziós normális és többdimenziós, Student-t eloszlások modellezésére alkalmazható az elliptikus kopula osztályokon belül a `normalCopula` a Gauss kopula előállításához, a `tCopula` pedig a t-kopula előállításához.

Az Archimédeszi kopula φ generátorfüggvénnyel áll elő az alábbiak szerint.

$$C(u_1, \dots, u_p) = \varphi^{-1}\{\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_p)\}$$

ahol φ^{-1} a φ generátorfüggvény inverze.

A generátor függvény egyértelműen meghatároz egy Archimédeszi kopulát.

A csomagban a leggyakrabban használt egy paraméteres Archimédeszi kopulacsaládok alkalmazására van lehetőség. Ezek a `claytonCopula` a Clayton kopulákhoz, a `frankCopula` a Frank kopulákhoz és a `gumbelCopula` a Gumbel kopula előállításához.

Három vagy több dimenziós Archimédeszi kopulák modellezésére csak pozitív függőség esetén van lehetőség. Negatív függőség esetén csak két dimenziós Archimédeszi kopulát lehet előállítani.

Az mvdc osztály

Az mvdc osztály alkalmazható a többdimenziós eloszlások adott peremekkel történő előállítására kopulák segítségével.

Ez az osztály három fő részből áll:

- **copula**, amely meghatározza a C kopulát
- **margins**, amely meghatározza a peremeloszlások nevét ($F_1, \dots, F_p$)
- **paramMargins**, amely egy lista, ami meghatározza a megfelelő perem paramétereit

Az R programcsomag tartalmazza a statisztikában alkalmazott eloszlásokat, mint például normális (**norm**), Student-t (**t**), gamma (**gamma**), lognormális (**lnorm**), weibull (**weibull**) eloszlás. Ezeket mind fel lehet használni a peremek meghatározásához. A felhasználó által meghatározható eloszlások is használhatóak, mint az eloszlás függvény, sűrűség függvény, és az eloszlás kvantilis függvénye.

7.2. A copula osztály módszerei

Eloszlás és sűrűség

A **copula** pont-eloszlás és sűrűség funkciói a **pcopula** és a **dcopula**.

Egy elliptikus kopula eloszlása az alábbi.

$$C(u_1, \dots, u_p) = F[F_1^{-1}(u_1), \dots, F_p^{-1}(u_p)]$$

A fenti függvény értékeléséhez szükséges az elliptikus eloszlás együttes eloszlásfüggvénye és az összes perem egyváltozós kvantilis függvénye. A differenciálás megadja az elliptikus kopula sűrűségfüggvényét.

$$c(u_1, \dots, u_p) = \frac{f[F_1^{-1}(u_1), \dots, F_p^{-1}(u_p)]}{\prod_{i=1}^p f_i[F_i^{-1}(u_i)]}$$

ahol f az elliptikus eloszlás együttes sűrűségfüggvénye, és $f_1, \dots, f_p$ a perem sűrűség függvények. Egy Σ szórásmátrixú Gauss kopula sűrűségfüggvénye a következőképpen néz ki.

$$c(u_1, \dots, u_p | \Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{q}^T (I_p - \Sigma^{-1}) \mathbf{q} \right\}$$

ahol $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_p)^T$ és $q_i = \Phi^{-1}(u_i)$ minden $i = 1, \dots, p$ -re és Φ az eloszlásfüggvény az $N(0,1)$ intervallumon.

Az R csomagban az **mvtnorm** és az **sn** segítségével lehetőségünk van az F eloszlásfüggvény és f sűrűségfüggvény használatára többdimenziós normál és többdimenziós Student-t összefüggések esetében.

Az Archimédeszi kopulák esetében az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény egyaránt függ a kopula generátorfüggvényétől és a generátorfüggvény inverz függvényétől. Ezek a függvények minden egyes Archimédeszi kopulára meg vannak határozva.

A $C(u_1, \dots, u_p) = \varphi^{-1}\{\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_p)\}$ függvény sűrűségfüggvénye előállítható az eloszlás függvény differenciálásával, ami sok esetben rendkívül hosszadalmas feladat. Az R programcsomagban lehetőség van a szimbolikus differenciálásra. Ahogy a p dimenzió száma nő, a szimbolikus differenciálási folyamat eredményeképp előálló sűrűségfüggvény meghaladja az átlagos számítógépek memória kapacitását. Sőt mi több, mivel az így elért eredmények nincsenek szimbolikusan egyszerűsítve, numerikus problémák is felmerülhetnek. Az ilyen szimbolikus kifejezések előállításához igénybe vehetjük a Mathematica programcsomagot (ez egy nem ingyenes, de igen elterjedt programcsomag) és feldolgozhatjuk a **deriv** funkció segítségével egy algoritmus kifejezést generálva, mielőtt importáljuk R-be.

Az eloszlás és sűrűség módszerek funkciója az **mvdc**-re a **pmvc** és a **dmvdc**.

Az eloszlásfüggvény az alábbi.

$$F(x_1, \dots, x_p) = C\{F_1(x_1), \dots, F_p(x_p)\}$$

A differenciálás után pedig előállítható a sűrűségfüggvény.

$$f(x_1, \dots, x_p) = c[F_1(x_1) \dots, F_p(x_p)] \prod_{i=1}^p f_i(x_i)$$

ahol c a C sűrűségfüggvénye és $f_1, \dots, f_p$ a peremek sűrűségfüggvénye.

Véletlenszám-generátor

A véletlenszám-generátor eljárás az **rcopula** a copula által generált objektum esetében és **rmvdc** egy **mvdc** objektum esetében.

Az elliptikus kopula véletlenszám-generátora egyszerűen adódik a neki megfelelő elliptikus eloszlás véletlenszám-generátorából. A Sklár tételből adódik, hogy a véletlen számok a kopulából legenerálhatók egy többdimenziós eloszlás összes véletlen szám peremének transzformálásával. A kopula csomagban lehetőségünk van a generátor

alkalmazására a normál kopulához és t-kopulához is úgy, hogy a többdimenziós normális és többdimenziós t véletlenszám-generátort használjuk az **mvtnorm** csomagban.

Egy általános kopulából való változó generálás elvégezhető az iteráció segítségével. A leggyakrabban alkalmazott, kettőnél magasabb dimenziójú Archimédeszi kopulákhoz léteznek gyorsabb algoritmusok akkor, ha az inverz generátor függvényről φ^{-1} ismert, hogy néhány pozitív valószínűségi változó Laplace transzformációjából jött létre. Ezt a pozitív valószínűségi változót gyakran nevezik úgy, hogy frailty. Legyen γ a frailty realizáció és $v_1, \dots, v_p$ a független realizálása a valószínűségi változóknak $(0,1)$ intervallumon. Ekkor $u_i = \varphi^{-1}(-\gamma^{-1} \log v_i)$, $i = 1, \dots, p$ az Archimédeszi kopula realizációja φ generátorfüggvénnyel. Ez az algoritmus egyszerűen és gyorsan végrehajtható, mivel a frailty véletlenszám-generátora rendelkezésre áll.

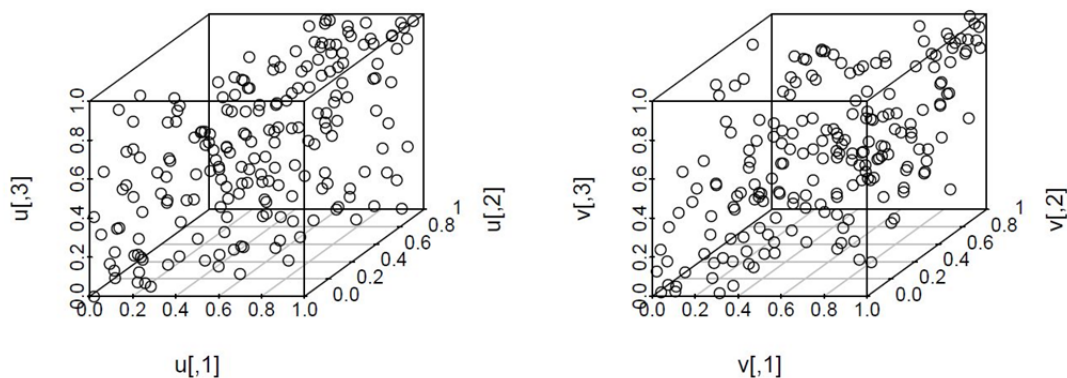
Ismert, hogy a Clayton, Frank és Gumbel kopula frailty eloszlása a gamma, a lognormális, és a polinomiális eloszlás (ez az eredetiben positvestable volt). A gamma eloszlású véletlenszám-generátor elérhető az R programcsomagban. A lognormális és a polinomiális eloszlású véletlenszám-generátor elvégezhető például a Chambers-Mallows-Stuck (1976) eljárással.

A **copula** csomag a polinomiális valószínűségi változók előállításához Nolan (2006) féle megoldást használja Fortran nyelven megvalósítva, ami a Chamber féle megoldás átdolgozott változata.

A kétváltozós Archimédeszi kopulák esetében a negatív függőség is engedélyezett. Így a kétváltozós Archimédeszi kopulákhoz a véletlenszám-generátor külön alkalmazható.

Grafika

A grafikus megjelenítés fontos eszköze a kopula alapú modellezés eredményének illusztrálásához. A szórás bemutatásához a **scatterplot3d** csomaggal létre lehet hozni háromdimenziós szórásdiagramokat. Az alábbi példa 200 véletlenszerű pont szóródását mutatja be háromdimenziós normál kopula és háromdimenziós t -kopula esetében.



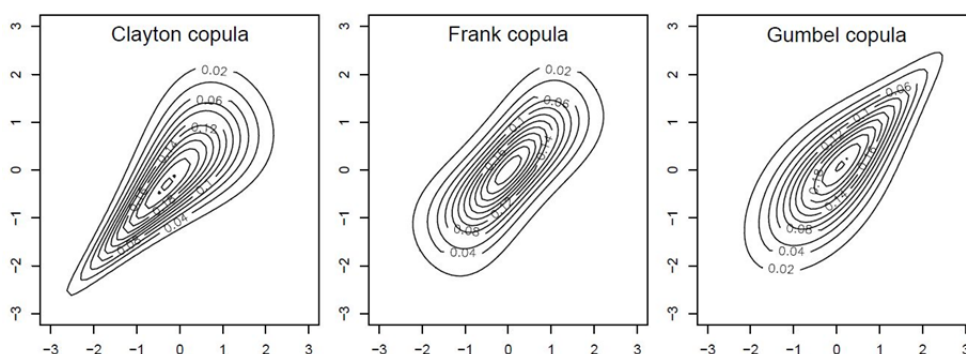
21. Ábra: Véletlen számok szóráspontjai háromdimenziós normál kopula és t -kopula esetében

Forrás: Journal of Statistical Software (2007)

A copula és az mvdc által létrehozott objektumok esetében is lehetőség van a kopulacsomag keretein belül perspektivikus megjelenítésre és kontúrvonalak rajzolására egyaránt. Ezek a **persp** és a **contour** funkciók segítségével érhetők el.

A kontúrvonalak a 22. ábrán láthatók. Megjegyzendő, hogy a kopula paramétereit, oly módon lettek kiválasztva, hogy a τ Kendall paraméter mindhárom eloszlás esetében 0,5.

A **persp** eljárás egyszerűen meghívható. Az első argumentum meghatározza, hogy az eljárás **copula** vagy **mvdc** objektumra vonatkozik. A második argumentum pedig arra vonatkozik, hogy a diagramban megjeleníteni kívánt függvény eloszlás-, vagy sűrűségfüggvény.



22. Ábra: A háromdimenziós Clayton, Frank és Gumbel kopula kontúrvonalai

Forrás: Journal of Statistical Software (2007)

7.3. Hogyan illesszünk kopulát az adatainkra?

A sűrűségfüggvények segítségével, melyek mind a `copula` mind az `mvdc` objektumok esetében használhatók, könnyedén illeszthetünk kopula alapú modelleket a maximum likelihood eljárás segítségével. A csomagban a `loglikCopula` és a `loglikMvdc` funkciók segítségével kifejezhető az adatok loglikelihood illesztési függvénye a meghatározott kopula modell esetén. Ezeket a függvényeket optimalizálni lehet, melynek eredményeképpen előáll a maximum likelihood becslés. A csomagban a `fitCopula` és a `fitMvdc` funkciók segítségével elvégezhető az eredmények becslése és előáll a jelentés.

Tegyük fel, hogy megfigyelés útján rendelkezünk n darab független valószínűségi változóval adott többdimenziós eloszlásból, $\{(X_{i1}, \dots, X_{ip})^T : i = 1, \dots, n\}$. Tegyük fel továbbá, hogy a többdimenziós eloszlás p peremeloszlásokkal F_i eloszlásfüggvénnyel és f_i , $i = 1, \dots, p$ sűrűségfüggvénnyel van megadva és a sűrűsége c . A becült paraméter vektor $\theta = (\beta^T, \alpha^T)^T$. Ebben az esetben a loglikelihood illesztési függvény a következőképpen néz ki.

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log c\{F_1(X_{i1}; \beta), \dots, F_p(X_{ip}; \beta); \alpha\} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \log f_i(X_{ij}; \beta)$$

A θ paraméter ML becslő függvénye az alábbi.

$$\hat{\theta}_{ML} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}} l(\theta)$$

Ahol Θ a paraméter értékkészlete.

Megjegyzendő, hogy a p dimenzió számának növekedésével a paraméterek száma is megnő, és az optimalizálási feladat nehezebben megoldható. Erre további megoldásokat kínál a cikk, melyekre ebben a dolgozatban nem térünk ki, de ajánljuk az érdeklődő olvasó figyelmébe.

A kopula modellek maximum likelihood becslése egyszerűen elvégezhető bonyolultabb problémák megoldására is. Például amikor a résztvevő jellegzetes peremeloszlásokat kívánjuk a peremekbe beépíteni, elegendő megírni egy loglikelihood függvényt, amely egy kopula és az összes perem loglikelihood összegezése. Így a maximum likelihood becslést (a keresett téta paramétereket) megkapjuk a loglikelihood függvény optimalizálás révén.

7.4. Megoldásra váró numerikus problémák a csomagban

Számos numerikus probléma merült föl a **copula** csomag fejlesztése során az eloszlás és sűrűség értékélésnél, a paraméter helyek határainál, és az optimalizálásnál. Ezek a problémák jelenleg még nincsenek túl elegánsan megoldva a csomagban, de fontos hogy tudatosítsuk ezeket, mivel a felhasználói szempontból lényeges a korlátok figyelembevétele, illetve ezek a problémák arra várnak, hogy fejlesztők megoldást keressenek rá.

Az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény értékelése során előforduló numerikus problémák elsősorban a kopulafajta kiválasztásánál merülnek fel. Az eloszlásfüggvény értékelése nagyon fontos az extrémális értékek vizsgálata során, mivel mind az alsó, mind a felső extremitásokban való összefüggés meghatározza a határát az eloszlásfüggvénynek az extrém értékekben. Például az alsó extremitásban való összefüggés a kétdimenziós kopula esetében $\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \Pr(U_1 \leq u | U_2 \leq u) = \lim_{u \rightarrow 0} C(u, u)/u$. A sűrűségfüggvény értékelés pedig a likelihood függvény alapú következtetéseknél nagyon fontos. Ebben a cikkben a sűrűségfüggvénnyel kapcsolatos numerikus problémákra fókuszáltak a szerzők.

Egy Archimédeszi kopula esetében a sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény differenciálásával állítható elő, az eloszlás függvényt pedig a generátorfüggvényből és annak inverzéből kaphatjuk. Sajnos az így előállított sűrűségfüggvény esetében az súlyos pontatlanságok merülnek fel a határpontokon, amelyet a felhalmozódó numerikus hibák okozhatnak a függvényértékelési sorban. A probléma megoldására a numerikus értékelést megelőzően a kifejezés algebrai úton történő egyszerűsítését alkalmazhatjuk. A **copula** új kiadásában az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény egyszerűsített szimbolikus kifejezések előállításához használhatjuk a Mathematica programcsomagot. Ezeknek a kifejezéseknek az előállítása a dimenziók számának növekedésével azonban nagyon memória- és időigényes. A Clayton a Frank és a Gumbel kopula esetében a dimenziók maximális száma 10. A kifejezés előállítása a magas dimenziójú Frank kopula esetében a legnehezebb. Az egyszerűsítés nélkül a sűrűség értékelése a Frank kopula esetében szoros függőség ($\alpha = 50$) esetében éppen a határán van a **NaN**⁵ által engedélyezettnek, miközben az egyszerűsített kifejezés alkalmazásával könnyedén elvégezhető. Ehhez hasonló egyszerűsített kifejezések előállíthatók az **Rmetricsf Copulae** csomagjával. Az értékelés hatékonyságának további

⁵ A programozásban a **NaN** (not a number) kifejezés egy numerikus érték, amely egy nem meghatározott vagy egy nem valós számot fejez ki, jellemzően a lebegőpontos számításoknál.

növeléséhez a **copula** csomag segítségével oldhatjuk meg úgy, hogy meghívjuk a **deriv** funkciót a szimbolikus kifejezésekre vonatkozóan, melynek révén egy algoritmikus kifejezés áll elő, így elkerülhetők az ismétlődő értékelések. Ez a megoldás jól alkalmazható alacsony (2 vagy 3) dimenziójú kopulák esetében, viszont ennél nagyobb dimenziójú Archimédeszi kopulák esetében ismét a **NaN** által engedélyezett határokat súrolja.

A numerikus problémák felmerülhetnek sűrűségértékelés során akkor is, amikor a kopula paraméterek elérnek valamilyen határértéket. A függetlenségi kopulát, mint az Archimédeszi kopula határát, gyakran elérhetjük, amikor a kopula paraméterek elérnek egy bizonyos értéket. Következésképpen ezekre az értékekre külön képletet kell alkalmazni. Numerikus problémák mindazonáltal akkor is felléphetnek, ha az értékeink megközelítik ezeket a határértékeket. Például ha egy kétváltozós Clayton kopula esetében a függőségi paraméter közel áll nullához, a numerikus értékelés közepeset ad. A jelenlegi kiadás úgy kezeli az esetet, amikor a paraméter közel áll a nullához, mintha az nulla lenne. Ez nyilvánvalóan nem egy elegáns megoldás.

Az elliptikus kopulák esetében az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény pontossága függ az **mvtnorm** által létrehozott többdimenziós eloszlások pontosságától és az egyváltozós kvantilis függvényektől. Amikor egy normál vagy *t*-kopula esetén a korrelációs együttható eléri az egy vagy mínusz egy értéket lehetetlenné válik a Cholesky-felbontás, amely a sűrűségértékeléseknél centrális fontosságú a többdimenziós normális és Student-*t* esetben.

A sűrűségfüggvény értékelésnél további numerikus problémák fordulhatnak elő bizonyos paraméter értékek esetében a maximum likelihood becslés során, amikor optimalizáljuk a loglikelihood függvényt. A paraméter értékkészletének alsó és felső határa kiválasztható a **fitCopula** argumentum listájából a kívánalmaknak megfelelően. Az ilyen határok azért hasznosak a gyakorlati alkalmazás során, mert a felhasználó előzetesen meg tudja állapítani hol helyezkedhet el a paraméter.

7.5. Összegzés, és további fejlesztési lehetőségek bemutatása

A magasabb dimenziójú ($p > 2$) Archimédeszi kopulákra a véletlenszám-generátor jelenleg egy összetett algoritmust használ. Whelan (2004) egy olyan algoritmust ajánl, amely integrál kifejezésen alapul, és alkalmazható összetetten beágyazott Archimédeszi kopulák esetében is. Wu, Valdez és Sherris (2006) egy olyan algoritmust ajánl a cserélhető Archimédeszi kopulákból történő mintavételhez, amely a változó átalakítási technika kétdimenziósra és többdimenziósra való kiterjesztésén alapul. Ez a technika alkalmazható, ha a frailty eloszlás nem ismert. Alternatív megoldás lehet még a frailty eloszlás előállítása a Laplace

transzformáció numerikus inverziója révén. A kopula kiválasztás és illesztés adott adathalmazra rendkívül fontos és nehéz feladat. A valóságnak megfelelő adatok generálása nem ismert, vagyis adott adatmennyiségre előfordulhat, hogy több lehetséges kopula is illeszthető, de előfordulhat az is, hogy egyik sem. Amikor a maximum likelihood eljárást használják az a bevett szokás, hogy az adatokhoz illesztik az összes lehetséges kopulát, és azt választják, amelyiknél a legmagasabb értékű a likelihood függvény. A kopulák közötti választás grafikus eszköze a Kendall eljárás. Illetve használható az illeszkedés jóságának tesztelésére a khi négyzet próba. A kopula kiválasztása és az illeszkedés jóságának tesztelésének területén jelenleg is aktív kutatások vannak.

A **copula** csomag újabb változatában további kétváltozós kopulák is benne vannak, amelyek extremitásokban való összefüggéseket modellezik. Ilyenek a Galambos kopula (Galambos, 1987) a Husler-Reiss kopula (Hüsler – Reiss, 1989) és a Gumbel kopula (Gumbel, 1960) ami szintén egy Archimédeszi kopula. Az kétváltozós összefüggések vizsgálatához használható a Kendall-féle tau mutató a Sperman féle rho mutató és az alsó és felső extremitásokban való összefüggést kifejező index. Az összefüggés vizsgálatot követően a kopula értékeinek visszaállítására is lehetőség van a kalibrációs függvény segítségével. Az összefüggés vizsgálatra numerikus módon bármely kopula esetében lehetőség van, az analitikus megoldás alkalmazása azonban nem minden kopula esetén lehetséges. Nemrégiben implementálták a csomagba az Ali-Mikhail-Haq kopulát (Ali – Mikhail – Haq, 1978) és a Plackett kopulát (Plackett, 1965) a kétváltozós kopulák közül.

Néhány olyan funkció hiányzik a **copula** csomagból melyek segítségével hatékonyabb megoldásokat eredményezne a szoftvert használata. A maximum likelihood függvényen kívül más típusú becslési eljárásokra is szükség lenne, például momentumok módszere és egyéb nem paraméteres eljárások. Az Archimédeszi kopulák esetében lehetőség van a kopula becslésére a paraméteres generátor függvény és a nem paraméteres generátor függvény becslésének párosításával. Szükség lenne továbbá a kopula választási és az illeszkedés jóságának tesztelésére alkalmazható funkciókra. A kopula választás megoldható úgy, hogy azt a kopulát válasszuk ki, amelyik esetében a megfigyelt adatok és a kopula közötti szóródás minimális. Az illeszkedés jóságának tesztelését pedig úgy szokták elvégezni, hogy felbecsülik a vizsgált szórás mértékét szemben annak null eloszlásával a feltételezett kopulacsalád alatt. Az empirikus kopula hasznos eszköze az adatelemzésnek. A kétváltozós empirikus kopula egy kétváltozós empirikus eloszlásfüggvény, amit az **ecdf** egyváltozós függvény segítségével lehet előállítani az R programcsomagban. A **stepfun** kétváltozós verziója alkalmazható erre a célra. Az empirikus összefüggés mérése a **cor.test** funkció segítségével elvégezhető.

Végül, de nem utolsó sorban szükség lenne további gyakran használt kopulára, hogy a felhasználók több lehetőség közül választhassanak, így elkerülhető lenne a redundáns programozási munka.

8. NÉHÁNY ZÁRÓ GONDOLAT A KOPULÁK GYAKORLATI ALKALMAZÁSÁRÓL

A kopulák alkalmazása az összefüggés rendszerek modellezésének általános eszköze, ami a pénzügyi gyakorlatban kiválóan alkalmazható. Ugyanakkor a kopulák egyszerűsége egyben a hátrányuk is. Fontos tehát kihangsúlyozni a kopulák használatának előnyeit és hátrányait.

A szimulált példánkból kiderült, hogy ha a korrelációs együttható nem magasabb a közepesen erősnél (0,75-nél), akkor a Gumbel kopula jobban modellezi a ritka eseményeket, mint a normális (Gauss kopula). Ha a portfólió diverzifikációját is szempontnak tekintjük, akkor törekedni kell arra, hogy a páronkénti korrelációk ne legyenek magasak. Tehát ilyen portfólió modellezésére nem a Gauss kopulát használnánk, hanem más kopulákat.

A többdimenziós kopulák alkalmazásával lehetőség nyílik a peremek és az összefüggés különválasztására, ezáltal az összefüggés rendszer külön kezelhető a peremektől. Például lehetőség van Gauss kopula alkalmazására Student t vagy más eloszlású peremekkel. Így egy új többdimenziós eloszlás áll elő a speciális kívánalmaknak megfelelően. A kopulák gyakorlati alkalmazásának területén gyakran találkozhatunk ilyen és ehhez hasonló eljárásokkal. Ugyanakkor ezeknek az eljárásoknak a hatékonysága sok kérdést vet fel, és fontos, hogy óvatossággal kezeljük.

Egyes kopulák, amelyek nem többdimenziós eloszlásokból származnak, mint például az Arkhimédeszi kopulák, kizárólag a matematika követhetőség miatt kapták formájukat. Így a gyakorlati modellként való alkalmazhatóságuk tesztelése minden esetben szükséges.

Végül, de nem utolsó sorban a kopula statikus modellezése a függőségnek, míg néhány másik alkalmazás, főképp a pénzügyek területén, idősorokra utal és dinamikusan modellezi az összefüggési rendszert. Ezért vannak kutatások olyan kopulákra nézve, ahol már a paraméter időben változhat.

Fontos megemlíteni, hogy a kopulák kiküszöbölik a lineáris korrelációval járó buktatókat, így a függőségre vonatkozóan egy matematikailag konzisztens modell eredményeznek.

A kopula számos helyen és főleg a pénzügyek területén való sikeres alkalmazása miatt ez egy gyakran használt fogalom. Olyan területeken, ahol bonyolult egymásra hatások figyelhetők meg, mint például a hitelkockázatok esetében, sokszor alkalmazzák nagy sikerrel a kopulákat az összefüggésrendszerek modellezésére és a piaci adatok kalibrálására. Továbbá a kopulák kiváló eszközként szolgálnak portfóliókon és más pénzügyi és biztosítási termékeken végzett stressz tesztekhez, mivel alkalmasak az extrém esetek modellezésére is.

A dolgozatban bemutatott R csomag **copula** moduljának elterjedésével mindenki számára hozzáférhetően lehetővé válik a számítógépen történő kopula alapú modellezés. A programcsomag funkcióival lehetőség van a sűrűség és az eloszlás értékelésére, véletlenszám-generálásra, grafikus ábrázolásra és kopula alapú modellek illesztésére.

Kopulák alkalmazhatósága magasabb dimenziókban jelenleg még korlátolt, mivel ugyan az az egy, kettő, ritkábban három paraméter függvénye a magas dimenziós kopula is. Így nem nyílik külön lehetőség az összefüggés modellezésére a különböző pároknak, amelyek lehetnek például különböző módon korrelálva. Ezeknek az eseteknek a modellezésére bevezették a Vine kopulákat, amelyek alkalmazása egyre jobban elterjed a pénzügyi elemzésekben. Ezek lehetővé teszik, hogy egy magas rendű kopula, különböző pár-kopula szorzatából álljon elő. Ez egy aktív kutatási területet képez jelenleg.

IRODALOMJEGYZÉK

Szakirodalom

Ali, M.M. – Mikhail, N.N. – Haq, M.S. (1978): *A Class of Bivariate Distributions Including the Bivariate Logistic*. Journal of Multivariate Analysis, 8, pp. 405–412.

Anderson, T. W. – Darling, D. A. (1954): *A test of goodness of fit*. Journal of the American Statistical Association 49, pp. 765–769.

Artzner, P. – Delbaen, F. – Eber, J.-M. – Heath, D. (1998): *Coherent measures of risk*. <http://www.math.ethz.ch/~delbaen/ftp/preprints/CoherentMF.pdf>

Berg, D. (2007). *Copula goodness-of-fit testing: an overview and power comparison*. Technical report, University of Oslo. Statistical research report no. 5, ISSN 0806-3842

Bernoulli, D. (Originally published in 1738) translated by Dr. Sommer, L. (January 1954): *Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk*. Econometrica (The Econometric Society) Vol. 22, No. 1., pp. 22–36.

Brealey, R. A. – Meyers, S. C. (2005): *Modern Vállalati pénzügyek*. Panem Kft., Budapest, pp. 163-217.

Chambers, J.M. – Mallows, C.L. – Stuck, B.W. (1976): *A Method for Simulating Stable Random Variables (Corr: V82 P704; V83 P581)*. Journal of the American Statistical Association, 71, pp. 340–344.

Cherubini, U. – Luciano, E. – Vecchiato, W. (2004): *Copula Methods in Finance*. Wiley, Chichester

David X. Li (2000): *On Default Correlation: A Copula Function Approach*. Journal of Fixed Income, Vol. 9, Issue 4, pp. 43–54.

Embrechts, P. – Lindskog, F. – McNeil A. (2003): *Modelling dependence with copulas and applications to risk management*. In S. Rachev (Ed.), Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, Elsevier, pp. 331-385.

Galambos J. (1987): *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics (Second Edition)*. Krieger Publishing Company, Inc.

- Genest, C. – R'émillard, B. (2008): *Validity of the parametric bootstrap for goodness-of-fit testing in semiparametric models*. Ann. Henri Poincaré 44.
- Genest, C. – R'émillard, B. – Beaudoin, D. (2008): *Omnibus goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study*. Insurance: Mathematics and Economics 42.
- Genest, C. – Rivest L.-P. (1993): *Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas*. Journal of the American Statistical Association, pp. 1034–1043.
- Gumbel, E. J. (1960): *Bivariate Exponential Distributions*. Journal of the American Statistical Association, 55, pp. 698–707.
- Hüsler, J. – Reiss, R.D. (1989): *Maxima of Normal Random Vectors: Between Independence and Complete Dependence*. Statistics & Probability Letters, 7, pp. 283–286.
- Kosztolányi B. (2011): *Dollármilliókat fizet a büntetés elkerüléséért az amerikai nagybank*. Menedzsment Fórum, 2011.
http://www.mfor.hu/cikkek/A_JP_Morgan_is_becsapta_ugyfeleit.html
 (letöltve: 2013.10.29.)
- Malevergne, Y. – Sornette, D. (2006): *Extreme Financial Risks*. Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York
- Mandelbrot, B. (1961): *The Variation of Certain Speculative Prices*, Journal of Business, v34, pp. 394-419.
- Markowitz, H. (1952): *Portfolio Selection*. Journal of Finance, 7. pp. 77-91.
- McNeil, A. – Frey, R. – Embrechts, P. (2005): *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press
- Meissner, G. (2008): *The Definitive Guide to CDOs*. Risk Books, p. 71.
- Nelsen, R. B. (1999): *An introduction to copulas, Volume 139 of Lecture Notes in Statistics*, Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York
- Neumann, J. – Morgenstern, O. (1944): *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press

Nolan, J. P. (2006): *Stable Distributions – Models for Heavy Tailed Data*.
<http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html> (letöltve: 2013.11.18.)

Plackett, R. L. (1965): *A Class of Bivariate Distributions*. Journal of the American Statistical Association, 60, pp. 516–522.

Salmon, F. (2009): *Recipe for Disaster: The Formula That Killed Wall Street*. Wired Magazine 17 (3).

Sklar, A. (1959): *Fonctions de repartition a n dimensions e leurs marges*. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris 8, pp. 229-231.

Taleb, N. N.(2007): *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable*. Random House

Varga-Haszonits I. (2009): *Kockázati Mértékek Instabilitása*. Doktori értekezés, teo.elte.hu
http://teo.elte.hu/minosites/ertekezes2009/varga_haszonits_i.pdf (letöltve: 2013.03.06.)

Whelan, N. (2004): *Sampling from Archimedean Copulas*. Quantitative Finance, 4(3), pp. 339–352.

Wu, F. – Valdez, E.A. – Sherris, M. (2006): *Simulating Exchangeable Mutivariate Archimedean Copulas and Its Applications*. Working paper, School of Actuarial Studies, University of New South Wales.

Internetes források

Bázel II fedezetértékelés az AdviseSoft Core-ban. advisesoft.com
<http://www.advisesoft.com/images/AdviseSoft%20H%EDrlev%E9l%202009%20ny%E1r/>
(letöltve: 2013.10.26.)

Journal of Statistical Software (2007): *Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula*. Volume 21, Issue4. jstatsoft.org
<http://www.jstatsoft.org/v21/i04/paper>

In defence of the Gaussian copula. The Economist | NEW YORK
http://www.economist.com/blogs/freeexchange/2009/04/in_defense_of_copula
(letöltve: 2013.11.02.)

David X. Li. wikipedia.org
http://en.wikipedia.org/wiki/David_X._Li (letöltve: 2013.10.22.)