

OTDK-DOLGOZAT

2015

NYUGDÍJCÉLÚ SPEKULÁCIÓ

Európai befektetés modellezése sztochasztikus tőkepiaci környezetben

PENSION FUND SPECULATION

Modelling European investment in stochastic stock market environment

Kézirat lezárva: 2013. november 18.

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS	1
1. BOLYONGÁSELMÉLET	4
1.1. BROWN-MOZGÁS.....	4
1.2. ÁRFOLYAMMOZGÁS JELLEMZŐI	10
2. RÉSZVÉNYBEFEKTETÉS STATISZTIKAI ELEMZÉSE	14
2.1. SPDR MSCI EUROPE HOZAMAINAK KOCKÁZATA	14
2.2. SPDR MSCI EUROPE HOZAMAINAK ELOSZLÁSA	21
2.3. SPDR MSCI EUROPE HOZAMAINAK FÜGGETLENSÉGE	25
3. RÉSZVÉNYBEFEKTETÉS MODELLEZÉSE	30
3.1. SPDR MSCI EUROPE ÁRFOLYAMÁNAK MODELLEZÉSE	30
3.2. NYUGDÍJCÉLŰ BEFEKTETÉS MODELLEZÉSE	36
3.3. NYUGDÍJCÉLŰ BEFEKTETÉS LEHETŐSÉGELEMZÉSE	46
ÖSSZEFOGLALÁS	51
IRODALOMJEGYZÉK	53
MELLÉKLETEK	I
1. MELLÉKLET: SPDR MSCI EUROPE HISTORIKUS ADATAI.....	II
2. MELLÉKLET: 3 HAVI EURIBOR HISTORIKUS ADATAI.....	III
3. MELLÉKLET: HOZAMSZÁMÍTÁS	IV

TÁBLÁZAT- ÉS ÁBRAJEGYZÉK

1. táblázat: MSCI Europe Index napi tőkeértékének eloszlása (2013.09.30.)	15
2. táblázat: SPDR MSCI Europe loghozameloszlásának paraméteres próbái	23
3. táblázat: SPDR MSCI Europe loghozameloszlásának nem-paraméteres próbái	24
4. táblázat: SPDR MSCI Europe átlagos napi loghozamának egymintás z-próbája.....	28
5. táblázat: SPDR MSCI Europe árfolyamának helyzetmutatói (2014.06.30.)	34
6. táblázat: SPDR MSCI Europe egy év alatti relatív kockázott értéke.....	35
7. táblázat: SPDR MSCI Europe egy év alatti abszolút kockázott értéke.....	36
8. táblázat: Nyugdíjcélú befektetési modell	43
9. táblázat: Nyugdíjcélú befektetés értékének helyzetmutatói (2013.06.30.)	44
10. táblázat: Helyettesítési ráta helyzetmutatói	46
11. táblázat: Megtakarítási ráta lehetőségelemzése (RR)	47
12. táblázat: Nyugdíjba vonulás tervezett időpontjának lehetőségelemzése (RR)	48
13. táblázat: Eszközallokáció lehetőségelemzése (RR)	49
1. ábra: Standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye	5
2. ábra: Porszem Brown-mozgásának szimulációja	6
3. ábra: Árfolyam geometriai Brown-mozgásának szimulációja	10
4. ábra: SPDR MSCI Europe napi loghozamainak eloszlásfüggvénye.....	19
5. ábra: SPDR MSCI Europe napi loghozamainak hisztogramja.....	21
6. ábra: SPDR MSCI Europe napi loghozamainak Q-Q Plot ábrája	24
7. ábra: SPDR MSCI Europe napi loghozamainak alakulása	25
8. ábra: SPDR MSCI Europe napi loghozam – ACF	26
9. ábra: SPDR MSCI Europe napi négyzetes loghozamainak alakulása.....	29
10. ábra: SPDR MSCI Europe napi négyzetes loghozam – ACF	29
11. ábra: SPDR MSCI Europe árfolyammozgásának szimulációja	32
12. ábra: Tőkeallokációs egyenes.....	42

„A hadviselés egy olyan bonyolult szerkezet működésére emlékeztet, amelyben hatalmas a súrlódás, így a papíron könnyűszerrel elvégzett számítások csak óriási erőfeszítés árán ültethetők át a valóságba.”

Carl von Clausewitz¹

¹ Carl von Clausewitz: On War (in Roberts, 2010: 160.)

BEVEZETÉS

Az elmúlt több mint fél évszázad során a befektetés-elmélet dinamikus fejlődésen ment keresztül. A pénzügyi közgazdaságtan felértékelődésének egyik megnyilvánulási formája a területen jelentős eredményeket elérő kutatóknak odaítélt közgazdasági Nobel-díjak száma.² A befektetési tevékenység és a tudományos gondolkodás kapcsolatának egyik korai példáját illusztrálja a preszókratikus filozófusról, Thalészról szóló anekdota, mely Arisztotelész Politika című művében (I. könyv, XI. rész) található.

„Thalésznek többen szemére hányták szegénységét, mondván, hogy a bölcselet nem hajt hasznot. Ő azonban – a hagyomány szerint – csillagászati ismeretei alapján előre látta, hogy az olajfák termése bőséges lesz, s ezért még a tél folyamán megszerezte az összes milétoszi és khioszi olajsajtolókat, csekély összegű előleggel lekötve olcsón bérbe vette azokat, mivel senki sem ígért többet. Amikor aztán elérkezett a termés betakarításának ideje, s mindenki egyszerre és gyorsan akart sajtolóhoz jutni, Thalész tetszés szerinti áron adta bérbe (az olajsajtolókat) és sok pénzt szerzett: megmutatta, hogy a bölcsek könnyen meggazdagodhatnak, ha akarnak, de nem ez az, amire ők törekednek.” (Dörömbözi, 2006: 39.).

(Bodor András és Szabó György fordítása)

A történet alapján feltételezhető, hogy már az ókori görögök is ismerték azokat az ügyleteket, melyeket ma derivatív pénzügyi termékekkel bonyolítanak le. Esetünkben az olajsajtolók bérleti díja az alaptermék. Thalész egy vételi jogot tartalmazó opciót vásárolt, mely biztosította annak lehetőségét, hogy a termés betakarításakor egy előre meghatározott „olcsó” bérleti díjért cserébe hasznosíthassa az olajsajtolókat. Amennyiben az olajfák termése szűkös, akkor az opció nem kerül lehívásra és a veszteség mértéke megegyezik a „csekély összegű” opciós díjjal. A történet szerint azonban a termés bőséges volt, ebből adódóan az olajsajtolók iránt megnőtt a kereslet, továbbá Thalész kihasználva monopol helyzetét a piacon magas bérleti díjat tudott érvényesíteni.

² Tobin (1981), Modigliani (1985), Markowitz – Miller – Sharpe (1990), Merton – Scholes (1997), Fama – Hansen – Shiller (2013)

Az anekdota Thalész személyiségének két merőben eltérő oldalát mutatja be. Egyfelől ott van a tudományok iránt érdeklődő filozófus, aki elefántcsonttornyából vizsgálva a tőle független objektív valóságot előrejelzést készít az olajfák termésére. Másfelől viszont ott van a gazdasági életben aktív szerepet vállaló, a piac szerkezetét befolyásoló üzletember, aki sikeresen koncentrálna az olajsajtolók kínálatát ezzel maximalizálva saját hasznát.

A befektetések világa, illetve a tőzsdék fellendüléséről és összeomlásáról szóló színes történetek mindig is a közérdeklődésre számot tartó területek közé tartozott. Sokan sokféle céllal és megközelítéssel használva interpretálták már az 1634-1637 közötti holland tulipánmániát, a Déltengeri Társaság 1720-as szárnyalását és a buborék kipukkadását (Madarász, 2009; 2011a; 2011b; 2012) vagy éppen a Nathan Rothschild-ről szóló anekdotát, mely szerint bennfentes információ birtokában (a waterlooi csata végkimenetelét ismerve) spekulált az angol állampapírok árfolyamára (Zsiday, 2010). A tőzsdei áralakulás mechanizmusait vizsgáló – módszertanilag megalapozott – kutatások azonban csak a 20. században kerültek a tudományos közösség érdeklődésének előterébe. Jelentős eredmények születtek többek között az árfolyammozgás, a portfólió-kiválasztás és a származtatott termékek értékelésének területén.

A globalizáció és az információs technológia robbanásszerű fejlődésével párhuzamosan a pénzügyi szektor szakemberei egyre nagyobb mértékben rá vannak utalva a döntéshozatal során a tudományos kutatások eredményeit integráló gyakorlati alkalmazásokra. A verseny erősödése megteremtette annak a tanulási folyamatnak az alapját, amire építve az intézményi befektetők (alapkezelők, biztosító társaságok, nyugdíjpénztárak) a hatékonyság növelésével innovatív termékek és szolgáltatások bevezetésével képesek a felmerülő igényeket minél jobban kielégíteni. Szerepük egyre jelentősebb a megtakarítások összegyűjtésében, a hitelfelvevők ellenőrzésében, a pénzügyi eszközök árazásában, illetve a kockázatkezelés területén.

A kutatási terület és azon belül a téma kiválasztásakor meghatározó szerepet játszott az elméleti megalapozottság és a gyakorlati felhasználás egyensúlya. A pénz- és tőkepiaci kérdésekkel foglalkozó kutatók számára rendelkezésre álló adatbázisok biztosítják annak lehetőségét, hogy az elemzés módszertanilag változatos feladatokat nyújtson. A kutatási koncepció három részből áll össze koherens egésszé. Az első rész a tőkepiaci árfolyammozgás szakirodalmi áttekintését nyújtja, melyet összefoglalóan

bolyongáselméletnek neveznek. A második részben európai adatokat használva a bolyongáselmélet alapvető feltevéseinek – az árfolyamváltozás függetlenségének és normális eloszlásának – statisztikai vizsgálatára kerül sor. Végül a harmadik részben az árfolyamok modellezése kap hangsúlyos szerepet figyelembe véve az empirikus tulajdonságokat.

A kutatás célja egy európai részvénybefektetés rövid, illetve hosszú távú modellezése. A rövid távú befektetés hossza egy év, mely keretei között a befektetés lehetséges jövőbeli értéke és a kockázatosított érték kerül meghatározásra. A hosszú távú befektetés alapesetben 40 év, mely egy nyugdíjcélú befektetés felhalmozási időszakát foglalja magában. Ennek keretei között a befektetés jövőbeli értékének meghatározása mellett kiszámításra kerül a helyettesítési ráta, mely megmutatja, hogy a nyugdíj értéke hogyan viszonyul az utolsó év keresetéhez. További célként megfogalmazható a befektetési modell feltevéseinek statisztikai vizsgálata.

A kutatás tárgyát az SPDR MSCI Europe tőzsdén kereskedett alap és a 3 havi Euribor képezi. A megfigyelési időszak tíz évet foglal magába, mely 2003. június 30-ától 2013. június 28-áig tart. Az alapadatok a Yahoo és az Európai Központi Bank adatbázisából származnak. A nyugdíjcélú befektetési portfólió ennek megfelelően egy kockázatos és egy kockázatmentes eszközből áll. A két eszköz portfólión belüli aránya a befektető hasznosságfüggvényének maximalizálásával kerül meghatározásra. A kutatás feladata a befektetési modell két változatának a lognormális eloszlású és a log t -eloszlású modellnek a bemutatása valamint az eredmények értelmezése. Mindkét változat feltételezi, hogy az időben egymást követő árfolyamváltozások függetlenek egymástól, továbbá jól leírható egy előre meghatározott eloszlással. A kutatás részeként a statisztikai elemzés feladata a tőzsdén kereskedett alap kockázatértékelésén túl, annak meghatározása, hogy a napi logaritmikus árfolyamváltozás milyen mértékben független, illetve jellemezhető normális eloszlással.

Módszertani szempontból a logaritmikus árfolyamváltozás aritmetikai Brown-mozgást, míg az árfolyam geometriai Brown-mozgást követ. Az eloszlás paramétereire múltbeli adatok alapján készült becslés. A logaritmikus árfolyamváltozás normalitása paraméteres (Jarque-Bera) és nem-paraméteres statisztikai próbával (Kolmogorov-Smirnov, Shapiro-Wilk) is kiértékelésre került. Az időbeli függetlenség Portmanteau és Ljung-Box próba alapján lett értékelve, melyek központi eleme az autokorrelációs függvény. Az adatelemzés Microsoft Excel 2010-es táblázatkezelő szoftverrel készült.

1. BOLYONGÁSELMÉLET

1.1. BROWN-MOZGÁS

Robert Brown skót botanikus 1827 nyarán mikroszkóppal sorozatos megfigyeléseket végzett virágpolleneken (Brown, 1866). Folyadékban vizsgálva felfigyelt azok rendezetlen mozgására. Először úgy gondolta, hogy a mozgás a virágporszemek organikus jellegéből adódik. Később különböző élettelen (inorganikus) porszemek vizsgálatakor is ugyanazt a cikcakkos mozgást figyelte meg, aminek alapján arra a következtetésre jutott, hogy a jelenség fizikai természetű nem pedig biológiai.

Albert Einstein 1905-ben publikálta az addigra Brown-mozgásnak elnevezett természeti jelenség kvantitatív leírását (Einstein, 1956). A molekuláris hőelmélet szerint az apró porszemek mozgását a vízmolekulák rendezetlen hőmozgása váltja ki. Egy adott porszemnek nekiütközve a vízmolekulák minden irányból erőlkéseket fejtenek ki, ennek következtében a diffúziós jelenséget a mikroütközések együttes hatása irányítja. Mivel a porszem tömege kellően kicsi ezért a molekuláris sokk következtében valamilyen irányba véletlenszerűen elmozdul.

Norbert Wiener amerikai matematikus rakta le a Brown-mozgás elméletének alapjait. Bebizonyította, hogy a fizikai jelenséget leíró kvantitatív modell önmagában nem tartalmaz ellentmondást (Wiener, 1921a; 1921b). A Wiener-folyamat egy időben változó sztochasztikus folyamat, mely során egyre több független normális eloszlású valószínűségi változót adunk össze oly módon, hogy egységnyi időtáv alatt az összeg standard normális eloszlású (fehér zaj). A Wiener-folyamat az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- $W_0 = 0$;
- W_t normális eloszlású, melynek várható értéke nulla, varianciája t nagyságú $\sim N(0, t)$ és a folyamat növekménye $W_t - W_s$ szintén normális eloszlású $\sim N(0, t - s)$ tetszőleges $0 \leq s < t$ időpont értékekre;
- W_t folyamat növekménye stacionárius: $W_t - W_s$ eloszlása megegyezik a $W_{t+a} - W_{s+a}$ eloszlásával $\sim N(0, t - s)$;
- W_t folyamat független növekményű: tetszőleges $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ időpontosorozatra bármely $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ növekmény független.

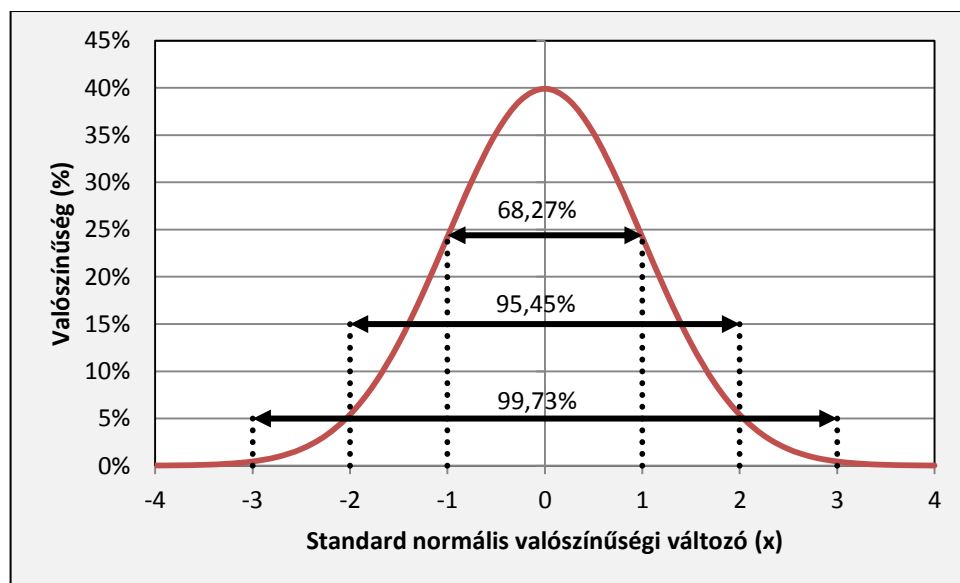
A Wiener-folyamat jövőbeli állapotvalószínűsége nem függ attól, hogy a folyamat milyen múltbeli állapotokon ment keresztül (Markov-folyamat). Minden, amit érdemes tudni a folyamatról azt a jelenbeli állapot tükrözi, másképpen megfogalmazva a folyamatnak nincsen memóriája.

Tegyük fel, hogy egy időben változó folyamat növekményei függetlenek és azonos eloszlásúak, ekkor a kumulált növekmények eloszlása az elemszám növelésével tart a normális eloszláshoz. A normális eloszlás használata a centrális határeloszlás-tételen alapszik. Amennyiben a valószínűségi változók (ξ_i) függetlenek és azonos eloszlásúak, akkor a standardizált összeg (η_n) eloszlásfüggvénye az elemszám (n) növelésével tart a standard normális eloszlásfüggvényhez.

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\eta_n < x) = \Phi(x)$$

Ahol a standard normális eloszlásfüggvényt $\Phi(x)$ jelöli. A valószínűségi változók várható értékét és szórását m és σ jelöli valamint az összeg várható értékét és szórását nm és $\sigma\sqrt{n}$ jelöli. Az 1. ábra a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét szemlélteti.

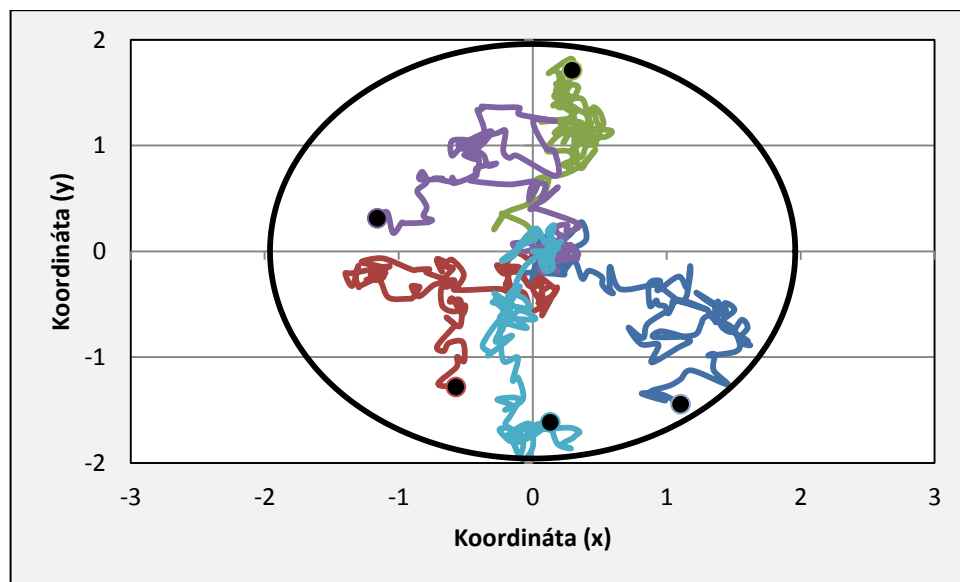


1. ábra: Standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye

Forrás: Saját szerkesztés

A normális eloszlás a természetben egyik leggyakrabban megfigyelhető eloszlásfüggvény. A várható érték és a szórás segítségével az eloszlás teljes mértékben meghatározható. A normális eloszlás szimmetrikus, ezért a legnagyobb valószínűséggel előforduló érték az átlag, ami megegyezik a módusz és a medián értékével. Annak valószínűsége, hogy a megfigyelt érték az átlagtól vett $\pm 1\sigma$ intervallumba esik 68,27%. Az átlagtól vett $\pm 2\sigma$, illetve $\pm 3\sigma$ intervallumba kerülés valószínűsége 95,45%, illetve 99,73%.

A 2. ábra kétdimenziós térben szemlélteti egy porszem mozgásának egységnyi idő alatt megtett öt lehetséges realizációját. Tekintsük a $[0, 1]$ időintervallumot egy egységnek, a megfigyelési időszak hosszának és bontsuk fel 100 darab ($\Delta t = 0,01$) részidőszakra. Az origóból kiindulva a már megtett úthoz lépésenként hozzáadódik egy véletlen nagyságú és irányú növekmény, melynek várható értéke nulla, varianciája Δt nagyságú. A porszem által bejárt utakat különböző színű vonalak, az időszak végi helyzetüket pedig fekete pontok jelölik. A körvonal a megbízhatósági szintet jelöli, 95% annak valószínűsége, hogy a porszem időszak végi helyzete a körvonalon belül fog elhelyezkedni.



2. ábra: Porszem Brown-mozgásának szimulációja

Forrás: Saját szerkesztés

A szimulációban a részidőszak (Δt) nagyságát tetszőlegesen kicsiny – nullánál nagyobb – értéként megadhatjuk. A Brown-mozgás matematikai modelljét azonban csak határértéken ($\Delta t \rightarrow 0$) kapjuk. A szimulációt többször lefuttatva független, azonos eloszlású mintát kapunk, mely segítségével meghatározható a porszem időszak végi helyzetének eloszlása (az illusztráció egy ötelemű mintának tekinthető).

A Brown-mozgás elmélete többek között a tőkepiaci árfolyamok modellezése során is alkalmazható. Az időben sztochasztikusan változó árfolyam (apró porszem) mozgását a piacra érkező új információk (molekuláris sokk) befolyásolják.

„Az új információk definíciószerűen meglepetések, így szokásos feltenni, hogy az egymást követő árváltozások függetlenek. Mivel a sokféle új információ egy része felfelé, más része lefelé lökdösi az árat, a sok-sok hatás egy haranggörbében összegződik.” (Medvegyev – Száz, 2010: 14.).

Louis Bachelier francia matematikus az elsők között foglalkozott – tudományosan megalapozott módon – a pénzügyi eszközök árfolyam-alakulásával. Doktori értekezésében az árfolyammozgás törvényszerűségeit vizsgálta valószínűség-számítási módszerekkel (Bachelier, 1900). Célja egy adott jövőbeli időpontra vonatkozóan az árfolyam valószínűség-eloszlásának előállítása volt, annak érdekében, hogy meghatározza a származtatott pénzügyi eszközök (opciók, határidős termékek) értékét – melyek az alaptermék lejáratkori árfolyamától függenek. Folytonos modelljében az árfolyam független, normális eloszlású valószínűségi változó, mely időbeli alakulása bolyongási folyamatot követ. A tőkepiacra vonatkozóan az alábbi feltevéseket fogalmazta meg:

- Az árfolyamokra a múlt és a jelen eseményein túl a jövővel kapcsolatos várakozások is hatással vannak, továbbá nem csak külső gazdasági tényezők, hanem a tőkepiac belső működése is befolyásolja az áringadozást. Az árfolyamokat mozgásban tartó végtelen sok tényező miatt nem lehet megbízható előrejelzést készíteni, az ingadozás mértéke megközelítőleg az eltelt idő négyzetgyökével nő.
- Ugyanazon információhalmaz alapján a piaci szereplők egymásnak ellentmondó következtetéseket vonhatnak le. Egy adott pillanatban a vevők az árfolyam emelkedésére, míg az eladók az árfolyam csökkenésére számítanak, ebből

adódóan a piac egésze – egy adott pillanatban – nem számít sem az árfolyam emelkedésére sem pedig annak csökkenésére.

- A jövőre vonatkozóan az éppen aktuális árfolyam a legvalószínűbb kimenetel, tehát minden egyes pillanatban ugyanakkora valószínűséggel emelkedhet vagy csökkenhet az árfolyam. Mind a vevők mind pedig az eladók várható nyeresége nulla, amely összefüggés biztosítja, hogy a tőkepiaci „játék” igazságos legyen.

Keynes az Általános elméletben kitér a tőkepiaci szereplők rövidtávú várakozásainak elemzésére. Megközelítése szerint a befektetők hosszú távú prognózisok felállítása helyett erőforrásaikat arra használják, hogy előrejelzést készítsenek az eszközérték rövidtávú megváltozására.

A befektetők a döntéshozatal során legalább harmadik szintű gondolkodási sémát követnek. Ennek értelmében nem azokba a pénzügyi eszközökbe fektetnek, amelyeket a legjövödelmezőbbnek tartanak, de még csak nem is azokba, amelyekről úgy gondolják, hogy a piaci szereplők számára a legnépszerűbbek. „Eljutottunk ahhoz a harmadik fokhoz, ahol arra használjuk intelligenciánkat, hogy kitaláljuk: a közvélemény szerint mi lesz a közvélemény” (Keynes, 1965: 178.). Érdemes kiemelni, hogy Keynes likvid tőkepiacokra vonatkozó megállapításai alapvetően a piac állapotával foglalkozó új információkat érinti, ami mindösszesen egy részét képezi az eszközértékelés folyamatának.

Samuelson tanulmányában a szabadon versenyző piacokon kialakult árak tulajdonságaival foglalkozott (Samuelson, 1965). Matematikailag levezette, hogy a megfelelően előre jelzett árak időbeli alakulása véletlen bolyongás. Egy pénzügyi termék vétele és eladása ugyanolyan mértékben előnyösnek kell lennie az ügyletben résztvevő mindkét fél számára, ennek hiányában nem jönne létre a tranzakció. Feltételezhető, hogy a piaci szereplők döntéshozatalát a racionális magatartás jellemzi. A szűkösen rendelkezésre álló források és a korlátozott befektetési lehetőségek arra készíteti őket, hogy tevékenységüket hatékonyan és önérdékkövető módon viselkedve végezzék. A jelenbeli árak kialakítása során figyelembe veszik a jövőre vonatkozó várakozások diszkontált értékét. Ebben az értelemben, amit a jövőről tudni lehet – adott információhalmaz alapján – azt az aktuális piaci árak már tartalmazzák.

Samuelson elvetette a korlátok nélküli bolyongást. Egyrészt a részvények ára nem csökkenhet nulla alá. A tulajdonosok felelőssége korlátozott, ami azt jelenti, hogy legfeljebb a részesedésük mértékéig kötelesek helytállni a vállalat adósságaiért. Másrészt a gazdasági növekedés miatt az árfolyamváltozás várható értéke hosszú távon pozitív. A befektetők magatartását az árfolyam-növekedés körüli bizonytalanság határozza meg. Minél nagyobb egy pénzügyi eszköz kockázata, annál nagyobb hozamot várnak el a piaci szereplők. Nincs biztosra vehető tipp, a magas hozam elérésének lehetősége csak abban az esetben áll fenn, ha a befektető hajlandó nagyobb kockázatot vállalni.

Jelöljük S -sel az árfolyam értékét, mint valószínűségi változót. Az árfolyamváltozást első megközelítésként általánosított Wiener-folyamattal – más néven aritmetikai Brown-mozgással – jellemezzük. Ennek során egyre több független normális eloszlású valószínűségi változót adunk össze oly módon, hogy egységnyi időtáv, azaz egy év alatt az összeg várható értéke μ , varianciája σ^2 nagyságú. A pénzben kifejezett árfolyamváltozást az alábbi folyamattal jellemezhetjük:

$$dS = \mu dt + \sigma dW$$

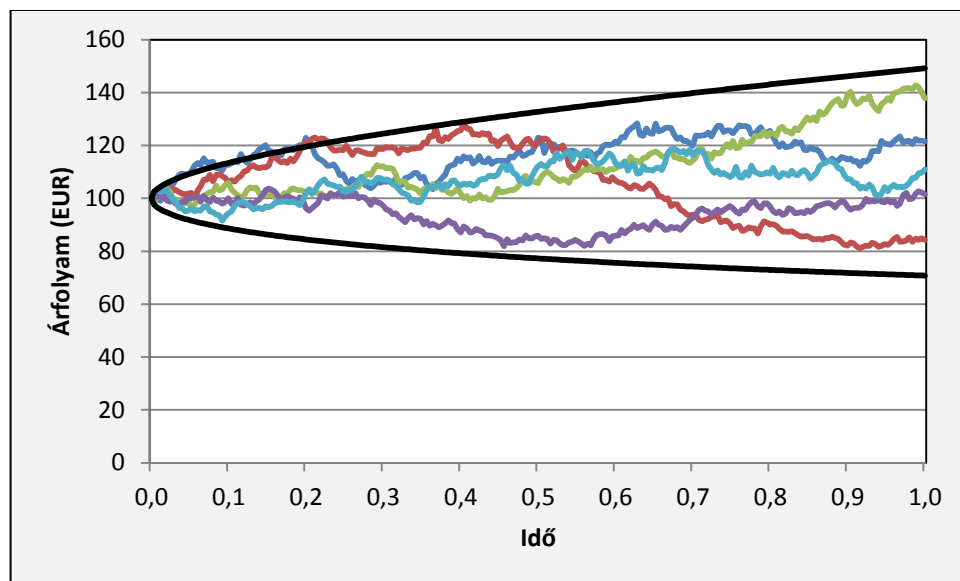
Az egyenlet jobb oldalán az első tag a determinisztikus trend komponens, ami az árfolyamváltozás pénzben kifejezett várható értékét jelenti. A második tag a sztochasztikus zaj komponens, ami a trendtől való pénzben kifejezett véletlenszerű eltérést jelenti. Közgazdasági szempontból azonban indokolt a konstans paramétereket százalékos formában megadni. Különböző árfolyamértékek mellett a befektetők által elvárt százalékos megtérülés és az árfolyam százalékos ingadozása stabilabbnak tekinthető, mint a paraméterek pénzben kifejezett értéke. Amennyiben a százalékos árfolyamváltozás aritmetikai Brown-mozgás szerint alakul

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

akkor a pénzben kifejezett árfolyamváltozás geometriai Brown-mozgást követ.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Tekintsük a $[0, 1]$ időintervallumot egy évnek, az előrejelzési időszak hosszának. Az intervallumot bontsuk fel 250 darab ($\Delta t = 0,004$) részidőszakra, amelyek így a tőzsdei kereskedési napokat jelképezik. A pénzügyi eszköz jelenlegi árfolyama 100 euró, az éves várható hozam $\mu = 10\%$, az árfolyam volatilitása pedig $\sigma = 20\%$. A 3. ábra az árfolyam mozgásának egy év alatti öt lehetséges realizációját szemlélteti. A fekete vonal a megbízhatósági szintet jelöli, 95% annak valószínűsége, hogy adott jövőbeli időpontban az árfolyam a két vonal közé fog esni.



3. ábra: Árfolyam geometriai Brown-mozgásának szimulációja

Forrás: Saját szerkesztés

1.2. ÁRFOLYAMMOZGÁS JELLEMZŐI

Holbrook Working amerikai közgazdász/statisztikus tudományos kutatásainak középpontjában az árupiaci termékek elemzése állt. Arra a következtetésre jutott, hogy az árupiaci termékek árfolyam-alakulásában megfigyelhető valamilyen mértékű szabályszerűség, de ennek ellenére az időben egymást követő árfolyamértékek különbségei véletlenszerűen alakulnak (Working, 1934). Tehát az árfolyamváltozás idősora hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint egy véletlen számsorozat. A látszólag szabályszerű árfolyam-alakulást úgy kapjuk meg, hogy egy adott kezdőértékhez hozzáadjuk a véletlen növekményeket. Ennek megfelelően az árfolyam-alakulás idősora olyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint egy kumulált véletlen számsorozat.

A kumulált véletlen számsorozatok egyik alkalmazási területét a gazdasági jelenségek idősoraival történő összehasonlítás jelenti. Ennek eredményeként véleményyt formálhatunk a különböző jelenségek véletlenszerűségének mértékéről. A tőzsdei alkalmazást tekintve megvizsgálhatjuk az egyes árfolyam alakzatok előrejelző képességét. Amennyiben egy kumulált véletlen számsorozatban a látszólag szabályszerű alakzatok olyan gyakorisággal fordulnak elő, mint egy tőzsdei árfolyam esetén, akkor ezeknek nincsen szignifikáns előrejelző képessége. Working a búza árfolyamát vizsgálva arra a megállapításra jutott, hogy az árfolyam-alakulás nagymértékben hasonlít egy kumulált véletlen számsorozatra.

Maurice Kendall angol statisztikus 22 tőzsdei idősor adatait vizsgálva keresett hosszú távú szabályszerűséget a búzának, a gyapotnak és a különböző angol gazdasági ágazatok részvényindexeinek árfolyammozgásában (Kendall, 1952). Az elemzés rámutatott arra, hogy az árfolyamváltozás rendszertelensége olyan mértékű, hogy elfed bárminemű tendenciát, ami esetleg jellemezhetné a folyamatot.

„Az árfolyamok úgy tűnik bolyongási folyamatot követnek, mintha egyszer egy héten a Véletlen Démona kiválasztana egy számot egy szimmetrikus eloszlású sokaságból és hozzáadná azt a jelenlegi árhoz, így határozva meg a következő heti árfolyamértéket” (Kendall, 1952: 13.).

A hosszú időre visszatekintő idősorok árfolyamváltozásában kismértékű autokorrelációt lehetett megfigyelni. Gyakorlati szempontból az időpontról időpontra bekövetkező árfolyamváltozások egymástól függetlennek bizonyultak, ami azt jelenti, hogy a múltbeli árfolyamértékek alapján nem lehet megbízható előrejelzést készíteni. A legtöbb, amit egy bennfentes információkkal nem rendelkező befektető tehet, hogy rövidtávon a jövőbeli árfolyam legjobb becsléseként elfogadja a jelenbeli árfolyamot.

Harry Roberts amerikai statisztikus Working és Kendall nyomdokain haladva folytatta a részvényárak viselkedésével foglalkozó kutatásokat (Roberts, 1959). Amerikai részvényeket és tőzszeindexeket vizsgálva Kendall megállapításaival megegyező eredményre jutott. Cikkét elsősorban gyakorlati szakemberek számára írta, melyben felhívta a figyelmet a technikai elemzés problémáira és rámutatott az árfolyamok

statisztikai tulajdonságaiból levonható következtetésekre. Állítása szerint a technikai elemzők valamilyen oknál fogva figyelmen kívül hagyták a tudományos kutatások eredményeit és továbbra is a pénzügyi termékek historikus árfolyamértékei és tranzakciós volumen adatai alapján készítenek előrejelzést a jövőbeli árfolyammozgásra. A technikai elemzés az alábbi feltevésekre épül:

- A piaci árban tükröződik minden olyan információ, amely segítségével valószínűsíteni lehet az árfolyammozgás jövőbeli irányát. Az elemzés elkészítéséhez nincs szükség a mikro- és makrogazdasági folyamatok ismeretére.
- A pénzügyi termékek múltbeli árfolyamértékei alapján különböző időtávokra vonatkozóan emelkedő, illetve csökkenő trendeket lehet meghatározni. A tendencia jövőbeli folytatódása vagy irányváltása a technikai elemzés különböző eszközeivel vizsgálható.
- A grafikonon megfigyelhető jellegzetes mozgások, árfolyam alakzatok (pl. fej és vállak, füles csésze, zászló stb.) rendszeresen ismétlődnek. Az alakzatokból levonható következtetések az értékpapír kereskedők pszichológiai indíttatású döntéshozatalára vezethető vissza.

A technikai elemzés eszköztárának bizonyos elemei nem mentesek a szubjektív alkalmazástól. Adott esetben egy árfolyam alakzat megfigyelése inkább az elemző képzelőerejének köszönhető mintsem valós tőkepiaci folyamatok felismerésének. Továbbá ugyanazon helyzetben ugyanazon információk és eszközök felhasználásával az elemzők egyéni értelmezéseiből adódóan egymásnak ellentmondó következtetések születhetnek.

Roberts szerint valószínűleg a technikai elemzés összes alakzata mesterséges úton előállítható megfelelően definiált véletlen számsorozatok generálásával. Egy kumulált véletlen számsorozatban ugyanúgy meg lehet határozni támasz és ellenállás szinteket, grafikus becsléssel készített trendvonalakat, mint a pénzügyi eszközök árfolyama esetén.

Az árfolyamváltozást egy olyan szerencsejátékhoz hasonlította, mely során az aktuális kimenetel független a múltbeli realizációktól és a kimenetek valószínűsége időben állandónak tekinthető. Ennek alapján a historikus árfolyamváltozások elemzése a relatív gyakoriságok becsléséhez szükséges, melyekkel helyettesíthetők a valószínűségek, ha kellően nagyszámú megfigyelés áll rendelkezésre.

Roberts a Dow Jones Industrial Average (DJIA) részvényindex egy éves árfolyam-alakulását modellezte. A heti árfolyamváltozásokat független, normális eloszlású valószínűségi változóként kezelte, mely várható értéke 0,5, szórása pedig 5,0 nagyságú. Az éves árfolyam-alakulást jelképező kumulált véletlen számsorozat kezdeti értéke 450 volt, melyhez hozzáadta a szimuláció során előállított 52 darab heti árfolyamváltozást. Tanulmányában összehasonlította a szimulációt a DJIA index 1956-os teljesítményével mind az árfolyamváltozás mind pedig az árfolyam-alakulás tekintetében. Eltérésként a részvényindex heti árfolyamváltozásainak nagyobb volatilitását emelte ki, mely különbséget a szórás értékének pontosabb becslésével lehet kezelni.

2. RÉSZVÉNYBEFEKTETÉS STATISZTIKAI ELEMZÉSE

2.1. SPDR MSCI EUROPE HOZAMAINAK KOCKÁZATA

Az SPDR (Standard & Poor's depositary receipt) tőzsdén kereskedett alapok (Exchange-Traded Fund – ETF) vagy más néven Spiders passzív vagyionkezelését a State Street Global Advisors (SSgA) látja el. Az ETF-ek kereskedése a részvényekhez hasonlóan a másodlagos piacon zajlik. Legfontosabb jellemzői közé tartozik, hogy likviditásuk folyamatosan biztosított és a rövidre eladás (short selling), illetve a tőkeáttételes kereskedés (buying on margin) is megengedett.

Az SPDR MSCI Europe tőzsdén kereskedett alap célja, hogy reprodukálja a Morgan Stanley Capital International (MSCI) azonos megnevezésű fejlett európai részvénytőzsdéi indexének teljesítményét. Az MSCI Europe Index képet ad a befektetők számára az európai részvénytőzsdéi aktuális állapotáról, a különböző részvények együttes árfolyamváltozásának irányáról és mértékéről. A részvényindex legfontosabb jellemzői:

- Az index közközhányaddal korrigált piaci tőkeérték súlyozású részvényindex, továbbá osztalékfizetést figyelembe vevő teljes hozamindex;
- A befektetésre alkalmas lehetőségek halmazát úgy alakítja ki, hogy a méret (nagy és közepes kapitalizáció) és a stílus (érték és növekedés alapú befektetés) szegmensek között ne legyen átfedés;
- Nagy hangsúlyt kap az index összetételének lemásolhatósága, tehát annak a kritériumnak való megfelelés, hogy egy átlagos befektető képes legyen reprodukálni az index teljesítményét;
- A méret szerinti szegmentáció biztosítja az egyensúlyt a piaci tőkeértékhez való igazodás és az országok közötti diverzifikáció követelményei között;
- Az index további feladata, hogy a stabilitást megőrizve képes legyen alkalmazkodni a piaci folyamatokban bekövetkező változásokhoz.

Az index befektetési célpontjai közé tartoznak a nagy és közepes kapitalizációval rendelkező vállalatok, melyek 16 fejlett európai ország részvénytőzsdéjét fedik le, ezek: Ausztria, Belgium, Dánia, Egyesült Királyság, Finnország, Franciaország, Görögország, Hollandia, Írország, Németország, Norvégia, Olaszország, Portugália, Spanyolország, Svájc és Svédország.

Az 1. táblázat az MSCI Europe Index piaci tőkeértékének 2013. szeptember 30-ai ágazati szintű eloszlását mutatja. A piaci kapitalizáció több mint fele 59,52% a négy legnagyobb tőkeértékkel rendelkező gazdasági szektorra összpontosul. Az alapvető fogyasztási javak szektora, a pénzügyi, az egészségügyi és az ipari szektor számottevően hozzájárul a részvényindex teljesítményéhez.

1. táblázat: MSCI Europe Index piaci tőkeértékének eloszlása (2013.09.30.)

Részvényindex	Vállalatok száma	Piaci kap. (millió euró)	Piaci kap. (%)
MSCI Europe Consumer Discretionary	56	596 460,33	9,85
MSCI Europe Consumer Staples	43	838 108,04	13,85
MSCI Europe Energy	25	568 501,73	9,39
MSCI Europe Financials	98	1 304 123,25	21,54
MSCI Europe Health Care	27	750 212,18	12,39
MSCI Europe Industrials	86	710 242,84	11,73
MSCI Europe Information Technology	15	198 036,23	3,27
MSCI Europe Materials	39	487 536,54	8,05
MSCI Europe Telecommunication Services	24	359 660,12	5,94
MSCI Europe Utilities	24	240 370,01	3,97
MSCI Europe	437	6 053 251,26	100,00

Forrás: MSCI (2013) alapján saját szerkesztés

Tekintsük az elemzés alapadatainak az SPDR MSCI Europe ETF historikus napi záró árfolyamértékeit $[S_0, S_1, \dots, S_t, \dots, S_n]$. A megfigyelési időszak tíz évet foglal magába, mely 2003. június 30-ától 2013. június 28-áig tart. Képezzünk az alapadatokból egy származtatott idősort oly módon, hogy minden egyes árfolyamértéknek vegyük a természetes alapú logaritmusát $[\ln(S_0), \ln(S_1), \dots, \ln(S_t), \dots, \ln(S_n)]$. Az árfolyam logaritmusa arra ad választ, hogy az Euler-féle számot hányadik hatványra kell emelni ahhoz, hogy eredményként az adott árfolyamot kapjuk: $S_t = e^{\ln(S_t)}$.

A vizsgált jelenség lényeges tulajdonságát kifejező tendenciát az időpontról időpontra bekövetkező logaritmikus árfolyamváltozás $[r_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})]$ átlagolásával ragadhatjuk meg. Az alábbiakban az ETF napi loghozamainak $[r_1, r_2, \dots, r_t, \dots, r_n]$ elemzésére kerül sor. Mivel az ETF devizaneme euró, ezért a

historikus napi záró árfolyamértékekből származtatott napi loghozamok euró hozamokként értelmezendők. Az SPDR MSCI Europe ETF napi loghozamainak számtani átlaga (η):

$$\eta = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t$$

Az időszak során naponta átlagosan 0,022 logszázalékos árfolyam-növekedést lehetett megfigyelni. A napi loghozamok változékonyságát a szórással (σ) jellemezhetjük, mely a pénzügyi szakirodalomban az egyik legelterjedtebb kockázati mérőszám.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \eta)^2}$$

Az időszak során a napi árfolyam-növekedés nem egyenletesen, hanem 1,242 logszázalékos szórás mellett valósult meg. A kockázatértékelés során különböző mutatókat használhatunk, annak függvényében miként definiáljuk a pénzügyi eszközök kockázatát (Bugár – Uzsoki, 2006). A legtöbb befektető kockázat alatt valamilyen kedvezőtlen eredmény bekövetkezésének lehetőségét érti. Kedvezőtlen eredmény lehet valamilyen mértékű veszteség elszenvedése vagy egy meghatározott célértéket alulmúló teljesítmény.

A kockázat számszerűsítésének célja, hogy egy meghatározott mutató segítségével menedzselni lehessen a befektetés kockázatát. A kapott érték függvényében a befektetők dönthetnek annak felvállalásáról, vagy olyan ügyletek lebonyolításáról melyekkel mérsékelhető vagy éppen megnövelhető az adott befektetés kockázata. Továbbá a kockázat mérése – a jövedelmezőség mellett – jelentős szerepet játszik a befektetési alternatívák összehasonlításában, rangsorolásában. A továbbiakban különböző kockázati mutatók bemutatására és számszerűsítésére kerül sor.

A szórás egy kétoldali, szimmetrikus kockázati mutató, amely éppúgy figyelembe veszi a várható értéket felülmúló, mint az attól elmaradó hozamokat. A befektetők ugyanakkor a várhatónál kedvezőbb eredményt nem tekintik kockázatnak. Ennek a problémának egy lehetséges megoldását jelentheti a szemi-szórás (Semi-Standard Deviation – SSD) alkalmazása. A szemi-szórás egy olyan egyoldali, aszimmetrikus

kockázati mutató, amely kiszámításakor az átlag alatti hozamokat figyelembe vesszük, az átlaggal megegyező vagy azt meghaladó hozamokat pedig nullának tekintjük.³ Az ETF napi loghozamaira vonatkoztatva a mutató értéke 0,895%.

$$SSD(r) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_{t,SD})^2}, \quad r_{t,SD} = \begin{cases} r_t - \eta & \text{ha } r_t < \eta \\ 0 & \text{ha } r_t \geq \eta \end{cases}$$

A négyzetes átlag tulajdonság miatt a szórás és a szemi-szórás érzékenyen reagál a mintában előforduló kiugróan nagy pozitív és negatív hozamokra, ami a befektetők indokoltnál nagyobb mértékű kockázatkerülését okozhatja. Az átlagos abszolút eltérés (Mean Absolute Deviation – MAD) mutató használata megoldást nyújt erre a problémára. Az időszak során az ETF napi loghozamai átlagosan 0,851%-kal tértek el az átlagtól.

$$MAD(r) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |r_t - \eta|$$

A kockázati mutatókkal szemben támasztott aktuális követelményekre hivatkozva – válsághelyzetekre történő reagálási képesség – Bugár és Uzsoki (2006) inkább hátrányosnak tekinti a MAD mutató azon tulajdonságát, hogy a szélsőséges hozamokat nem hangsúlyozza ki kellőképpen. Továbbá a szóráshoz hasonlóan a MAD egy kétoldali, szimmetrikus mérőszám, ami az átlagot meghaladó értékeket is figyelembe veszi.

Az eddig bemutatott mérőszámok a kockázatot a számtani átlag alapján mérik. A loghozamok szóródása ugyanakkor az egyes értékek egymástól vett különbségeivel is jellemezhető, amit a Gini-féle átlagos differencia (Gini's Mean Difference – GMD) mutatóval mérhetünk. Az időszak során az ETF napi loghozamai átlagosan 1,266%-kal tértek el egymástól.

$$GMD(r) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |r_j - r_k|$$

³ A befektetők kockázatérzékelésétől függetlenül, az egyoldali mérőszámok alkalmazása abban az esetben nyújt többlet információt a befektetések kockázatáról amennyiben a hozamok eloszlása aszimmetrikus.

A szóródás terjedelmével a mintában előforduló legnagyobb és legkisebb érték különbségét számszerűsíthetjük. A tőzsdén kereskedett alap napi loghozamainak legnagyobb és legkisebb értéke között fennálló távolság 17,219%. A mutató értékét jelentősen befolyásolhatják a szélsőséges események. A Lehman Brothers 2008. szeptember 15-ei bukása a gazdaságtörténet eddigi legnagyobb csődjének tekinthető (Bloomberg, 2008). Az ezt követő időszakot a nemzetközi pénz- és tőkepiacok volatilitásának megugrása és a pénzügyi szektor szereplőinek átrendeződése jellemezte. Az ETF legnagyobb és legkisebb napi loghozama is ezen időszakhoz kötődik. A legkisebb hozam 2008. október 10-én realizálódott, a veszteség mértéke 8,346% volt. A legnagyobb hozamot nem sokkal ezt követően 2008. november 24-én lehetett megfigyelni, melynek mértéke 8,873%.

A gyakorlatban inkább az interkvantilis terjedelemmutatók használata javasolt, mely kiküszöböli a szélsőséges hozamokra való túlzott érzékenységet. A napi loghozamok felső és alsó kvartilisének különbsége 1,204%. A mutató értéke számottevően kisebb a szóródás terjedelménél, ami rámutat a tőkepiacokon ritkán előforduló nagy hatású események jelentőségére.

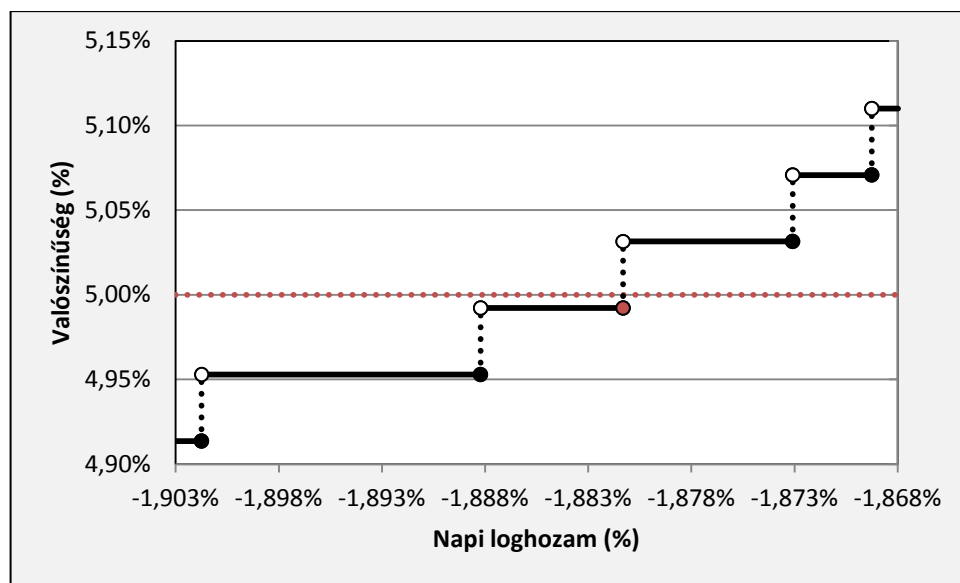
Vannak olyan kockázati mértékek, melyek fókuszában kizárólag a pénzügyi eszközök lehetséges veszteségei állnak. A mutatók e csoportjába tartozik a kockáztatott érték (Value at Risk – VaR) és a feltételes kockáztatott érték (Conditional Value at Risk – CVaR). A kockáztatott érték egy meghatározott időtáv alatt bekövetkező maximális veszteség mértékét adja eredményül, adott megbízhatósági szint mellett. A feltételes kockáztatott érték pedig a VaR-t meghaladó veszteségek várható értékéről ad információt (Rockafellar – Uryasev, 2000; 2002). A megbízhatósági szint (α) tipikusan 95 vagy 99 százalék szokott lenni.

A diszkrét napi loghozamokat növekvő sorba rendezve a megbízhatósági szint függvényében meghatározhatjuk a kockáztatott értéket. A Value at Risk a hozamok eloszlásfüggvényének ($F(r) = P(r < r_i)$) azon felső határához (szuprémumához) tartozó hozam, ahol az ennél kisebb hozamok valószínűsége kisebb vagy egyenlő, mint $1 - \alpha$. A kapott értéket mínusz előjellel vesszük figyelembe, mivel a negatív hozamot pozitív veszteségként, a pozitív hozamot pedig negatív veszteségként értelmezzük. Ennek háttérben az a megfontolás áll, hogy a veszteségekhez (negatív hozamokhoz) pozitív kockázatot társítunk.

Az időszak során az ETF napi -1,881%-os hozamánál az esetek 4,99%-ban lehetett alacsonyabb hozamot megfigyelni. Előjelváltással megkapjuk az ETF napi maximális veszteségét 95%-os megbízhatósági szint mellett.

$$VaR_{\alpha}(r) = -\sup\{r_i | F(r) \leq 1 - \alpha\}$$

A 4. ábra egy részletet mutat a tőzsdén kereskedett alap napi loghozamainak (lépcsős) eloszlásfüggvényéből. A piros színnel jelölt koordináta-hozam adja meg az előjelváltás előtti kockázatosított értéket.



4. ábra: SPDR MSCI Europe napi loghozamainak eloszlásfüggvénye

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

A Value at Risk kedvező tulajdonságai mellett az egyik legnagyobb hátránya, hogy nem veszi figyelembe a kockázatosított értéket meghaladó veszteségek nagyságát. A befektetők számára nem ad információt arról, hogy milyen mértékű veszteségre számíthatnak, ha bekövetkezik a legrosszabb lehetőségek egyike. Erre a problémára nyújt megoldást a feltételes kockázatosított érték használata.

Diszkrét eloszlás esetén az alsó Conditional Value at Risk ($CVaR_{\alpha}^{-}$) a kockáztatott értékkel megegyező és az azt meghaladó veszteségek átlagát adja eredményül, míg a felső Conditional Value at Risk ($CVaR_{\alpha}^{+}$) a kockáztatott értéket meghaladó veszteségek átlagát számszerűsíti.

$$CVaR_{\alpha}^{-}(r) = -E(r|r \leq -VaR_{\alpha}(r))$$

$$CVaR_{\alpha}^{+}(r) = -E(r|r < -VaR_{\alpha}(r))$$

Az ETF napi alsó és felső feltételes kockáztatott értéke rendre 2,958 és 2,966 százalék 95%-os megbízhatósági szint mellett. Az alsó CVaR a legnagyobb veszteségek 5,03%-át a felső CVaR pedig a legnagyobb veszteségek 4,99%-át átlagolja. A VaR és a felső CVaR súlyozott átlagolásával egy olyan feltételes kockáztatott értéket kapunk, mely a megbízhatósági szinthez igazodva a legnagyobb veszteségek pontosan 5%-ának átlagát adja eredményül. A mutató értéke 2,964%.

$$CVaR_{\alpha}(r) = \lambda VaR_{\alpha}(r) + (1 - \lambda) CVaR_{\alpha}^{+}(r)$$

A kockáztatott érték súlyát az alábbi képlettel kapjuk meg:

$$\lambda = \frac{1 - F(-VaR_{\alpha}(r)) - \alpha}{1 - \alpha}$$

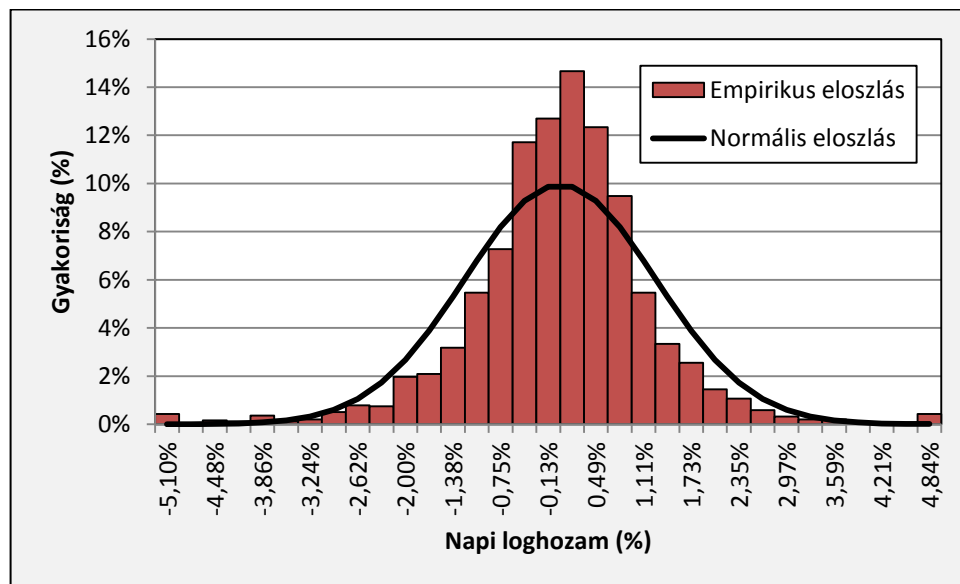
A $CVaR_{\alpha}(r)$ képletben megközelítőleg a kockáztatott érték súlya 0,16%, míg a felső kockáztatott érték súlya 99,84%. A mutatók között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$VaR_{\alpha}(r) \leq CVaR_{\alpha}^{-}(r) \leq CVaR_{\alpha}(r) \leq CVaR_{\alpha}^{+}(r)$$

A CVaR használatának előnye, hogy értéke folytonosan változik a megbízhatósági szint függvényében, továbbá az eddig bemutatott – hagyományos és veszteség típusú – kockázati mértékek közül egyedülként megfelel Artzner et al. (1999) négy koherencia axiómáinak. Teljesíti a transzláció invariancia, a szubadditivitás, a pozitív homogenitás és a monotonitás feltételeit.

2.2. SPDR MSCI EUROPE HOZAMAINAK ELOSZLÁSA

A napi loghozamok hisztogramja első megközelítésben jól illeszkedik a normális eloszláshoz, ugyanakkor két megállapítást már az 5. ábra alapján is tehetünk. Egyfelől a normális eloszláshoz képest a megfigyelések nagyobb mértékben sűrűsödnek középen, amit úgyis megfogalmazhatunk, hogy egy tipikus kereskedési nap alkalmával szinte alig képződik számottevő eredmény. A piacra érkező sok új információ egy nap alatt kifejtett hatása mérsékelt. Másfelől pedig az eloszlás vastagszélű, amely tulajdonságra többek között Benoit Mandelbrot (1963) matematikus is felhívta a figyelmet. A gyapot árfolyamát vizsgálva, megfigyelte, hogy a normális eloszláshoz képest nagyobb a szélsőséges (ugrásszerű) árfolyamváltozás valószínűsége. A loghozameloszlás csúcsossága és vastag szélei miatt az eloszlás leptokurtikus.



5. ábra: SPDR MSCI Europe napi loghozamainak hisztogramja

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

A negatív aszimmetria azt jelenti, hogy a szélsőséges hozamok között nagyobb gyakorisággal fordulnak elő negatív értékek. A növekvő sorba rendezett 2544 darab megfigyelés közül a két középső érték számtani átlaga az SPDR MSCI Europe ETF mediánja. A napi loghozamok fele (50%-a) 0,063%-nál kisebb, a másik fele (50%-a) ennél az értéknél nagyobb. Az eloszlás negatív aszimmetriájára utal a medián számtani átlagot (0,022%) meghaladó értéke. Az eloszlás ferdeségét vizsgálhatjuk a variancia (V) és a szemi-variancia (SV) között fennálló kapcsolattal. Szimmetrikus eloszlás esetén

$V(r)/2SV(r)$ egyenlő 1-gyel. Negatív aszimmetria esetén kisebb, míg pozitív aszimmetria esetén nagyobb 1-nél a mutató értéke (Markowitz, 1959). A tőzsdén kereskedett alap esetében 0,963 a mutató értéke, ami megerősíti a loghozamok negatív aszimmetriáját. Statisztikai elemzésekben az eloszlás ferdeségét leggyakrabban a standardizált harmadik momentummal (Skewness) mérik, aminek mintából becsült értéke:

$$\hat{S}(r) = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{t=1}^n \left(\frac{r_t - \eta}{\sigma} \right)^3 = -0,044$$

A loghozameloszlás normalitásának feltevése mellett a függvény aszimptotikusan normális eloszlást követ, melynek várható értéke nulla, varianciája $6/n$ nagyságú. A negatív aszimmetria mértékét vizsgálva nullhipotézisként megfogalmazhatjuk, hogy a loghozameloszlás ferdesége a normális eloszláshoz hasonlóan nullával egyenlő. Ezzel szemben áll az alternatív hipotézis mely értelmében a mutató értéke nem egyenlő nullával. A próbafüggvény aszimptotikusan standard normális eloszlást követ:

$$t = \frac{\hat{S}(r)}{\sqrt{6/n}}$$

A minta adatai nem mondanak ellent a nullhipotézisnek. Az ETF napi loghozameloszlásának szimmetrikusságát 36,57%-os szignifikanciaszintig elfogadhatjuk. A hozameloszlás vastag széleit a tőkepiaci szakirodalom erős szélfüggőségnek nevezi. Egy részvényindex szélsőségesen nagy pozitív vagy negatív hozama általában politikai vagy gazdasági rendszerkockázatból, illetve a tőkepiac belső működéséből származik. Az eloszlás széleinek vastagságát a standardizált negyedik momentum méri. A normális eloszlást meghaladó többlet csúcsosság (excess Kurtosis) mintából becsült értéke:

$$\hat{K}(r) = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{t=1}^n \left(\frac{r_t - \eta}{\sigma} \right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} = 7,770$$

A loghozameloszlás normalitásának feltevése mellett a függvény aszimptotikusan normális eloszlást követ, melynek várható értéke nulla, varianciája $24/n$ nagyságú. Az eloszlás széleinek vastagságát vizsgálva nullhipotézisként megfogalmazhatjuk, hogy a

loghozameloszlás többlet csúcsossága a normális eloszláshoz hasonlóan nullával egyenlő. Ezzel szemben áll az alternatív hipotézis mely értelmében a mutató értéke nem egyenlő nullával. A próbafüggvény aszimptotikusan standard normális eloszlást követ:

$$t = \frac{\hat{K}(r)}{\sqrt{24/n}}$$

A minta adatai ellentmondanak a nullhipotézisnek. Nincs olyan szignifikanciaszint, amely mellett elfogadható lenne, hogy az ETF napi loghozameloszlása nem vastagszélű. A Jarque-Bera (JB) próba az előbbi két paraméter kombinálásával vizsgálja az eloszlás normalitását (Jarque – Bera, 1987). Nullhipotézisként megfogalmazhatjuk, hogy a loghozameloszlás normális eloszlású. Ezzel szemben áll az alternatív hipotézis mely értelmében a loghozameloszlás eltér a normális eloszlástól. A próbafüggvény aszimptotikusan khi-négyzet eloszlást követ kettő szabadságfokkal:

$$JB = \frac{\hat{S}^2(r)}{6/n} + \frac{\hat{K}^2(r)}{24/n}$$

A minta adatai ellentmondanak a nullhipotézisnek. Nincs olyan szignifikanciaszint, amely mellett elfogadható lenne, hogy az ETF napi loghozameloszlása normális eloszlású. A statisztikai próbák eredményét a 2. táblázat tartalmazza.

2. táblázat: SPDR MSCI Europe loghozameloszlásának paraméteres próbái

Megnevezés	Aszimmetria	Csúcsosság	Jarque-Bera
Próbafüggvény	-0,904	79,998	6400,552
Szabadságfok	2544	2544	2
p-érték	36,57%	0,00%	0,00%

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

A nem-paraméteres statisztikai próbák közül a Kolmogorov-Smirnov és a Shapiro-Wilk próba is megerősíti az eddigi eredményeket, nincs olyan szignifikanciaszint, amely mellett elfogadható lenne, hogy az ETF napi loghozamai normális eloszlású sokaságból

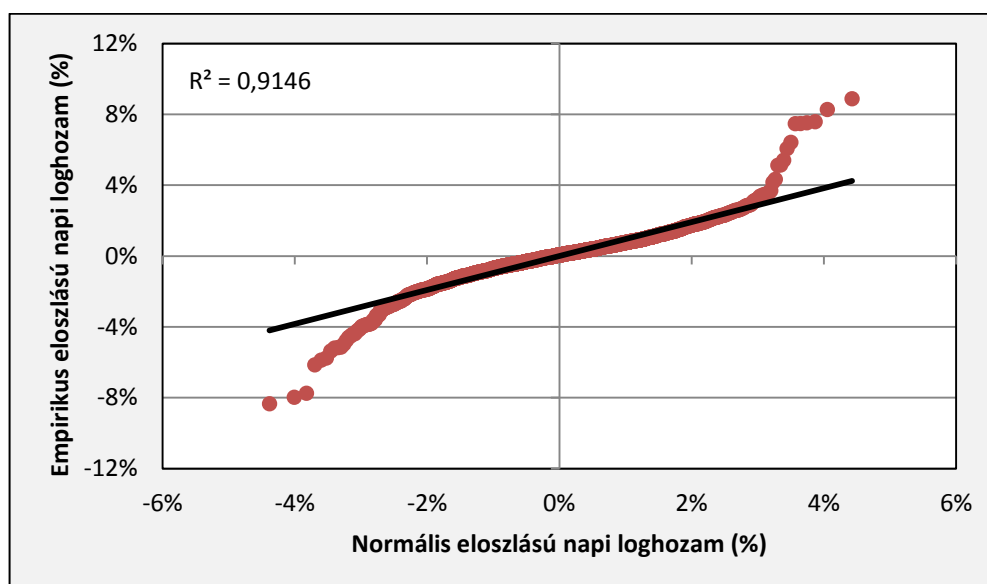
származnának (3. táblázat). A módszertani leírás és Excel-ben történő végrehajtás megtalálható a www.real-statistics.com internetes oldalon.

3. táblázat: SPDR MSCI Europe loghozameloszlásának nem-paraméteres próbái

Megnevezés	Kolmogorov-Smirnov	Shapiro-Wilk
Próbafüggvény	0,074	0,915
Szabadságfok	2544	2544
p-érték	0,00%	0,00%

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

Empirikus és elméleti eloszlások összehasonlítását a Q-Q Plot grafikus ábrával is elvégezhetjük. A kvantilis pontok a normális eloszlás szerinti értékek függvényében ábrázolják az ETF napi loghozamait. Amennyiben a loghozameloszlás normális, akkor az egyes kvantilis pontok a trendvonal körül kismértékű, véletlenszerű ingadozást mutatnak. A 6. ábra alapján a megfigyelések szélsőséges értékei jelentősen eltérnek a normális eloszlás szerinti értékektől, ami a loghozameloszlás vastag széleire utal. Ennek ellenére a determinációs együttható 91,46%-os illeszkedést mutat.

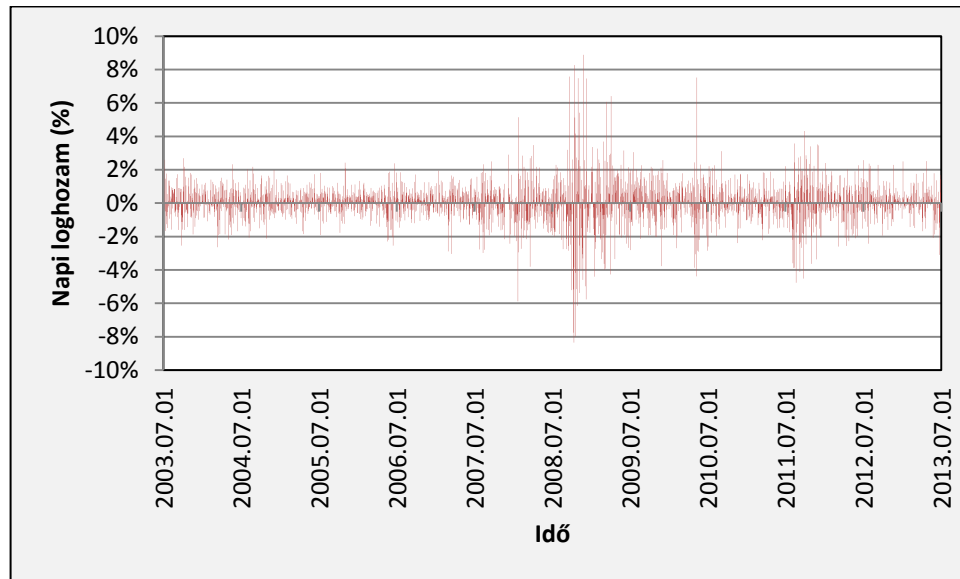


6. ábra: SPDR MSCI Europe napi loghozamainak Q-Q Plot ábrája

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

2.3. SPDR MSCI EUROPE HOZAMAINAK FÜGGETLENSÉGE

A tőkepiac hatékonyságának értékelésekor alapvető fontosságú annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy az új információkat a piaci szereplők milyen gyorsan építik be az árfolyamba. Másképpen megfogalmazva statisztikailag kimutatható-e az időben egymást követő loghozamok között autokorreláció? A 7. ábra a tőzsdén kereskedett alap napi loghozamainak időbeli alakulását szemlélteti.



7. ábra: SPDR MSCI Europe napi loghozamainak alakulása

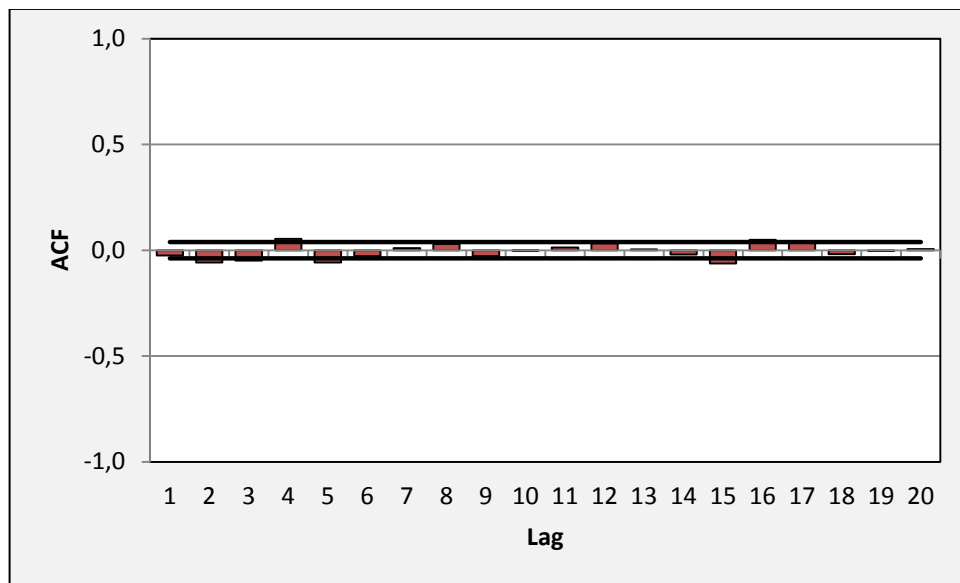
Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

A napi loghozamok változó mértékű ingadozást mutatnak, az időszak során több esetben is $\pm 5\%$ -ot meghaladó loghozamokat lehetett megfigyelni. Mind pozitív mind negatív tartományban hasonló nagyságú kilengések jellemezték a folyamatot. A loghozamok időbeli alakulása véletlenszerű, irányát tekintve nem lehet megfigyelni szabályszerűséget, mintázatot.

Gazdasági idősorok elemzésekor általában a gyenge stacionaritást szokták vizsgálni, aminek érvényességét akkor fogadhatjuk el, ha a megfigyelések átlaga és a megfigyelések közötti korreláció állandó. Az ETF időben egymást követő napi loghozamainak lineáris kapcsolatát az autokorrelációs függvény segítségével mérhetjük, ami a stacionárius idősorok elemzésének alapvető eszköze. A mintából becsült autokorrelációs együttható azt mutatja, hogy az adott napi loghozamok hogyan korrelálnak a k nappal eltolt loghozamokkal.

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (r_t - \eta)(r_{t-k} - \eta)}{\sum_{t=1}^n (r_t - \eta)^2}$$

A loghozameloszlás normalitásának feltevése mellett a függvény aszimptotikusan normális eloszlást követ, melynek várható értéke nulla, varianciája $(1 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \hat{\rho}_i^2)/n$ nagyságú bármely pozitív egész k értékre. A 8. ábra az ETF napi loghozamainak autokorrelációs függvényét ábrázolja. Amennyiben az autokorreláció értéke nulla, akkor 95% annak valószínűsége, hogy a 20 napig vizsgált egyes autokorrelációs értékek a feketével jelölt alsó és felső kritikus vonal közé fognak esni.



8. ábra: SPDR MSCI Europe napi loghozam – ACF

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

Az időbeli függetlenséget Portmanteau próbával (Box – Pierce, 1970) m napig vizsgálva nullhipotézisként megfogalmazhatjuk, hogy az elemzésbe bevont m darab egyedi autokorreláció mindegyike nullával egyenlő. Ezzel szemben áll az alternatív hipotézis miszerint van olyan autokorreláció, mely értéke nem egyenlő nullával. A próbafüggvény aszimptotikusan khi-négyzet eloszlást követ m szabadságfokkal:

$$Q^*(m) = n \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_k^2$$

Az ETF napi loghozamainak időbeli függetlenségét 20 napig vizsgálva a minta adatai alapján elvethetjük a nullhipotézist. A 20 darab egyedi autokorreláció közül legalább egy szignifikánsan különbözik nullától.

A próbafüggvény képletét módosítva növelhetjük a próba erejét, mely így megbízhatóbb eredményt ad kisebb minták, illetve normális eloszlástól eltérő megfigyelések esetén (Ljung – Box, 1978):

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

A Ljung-Box próba is megerősíti, hogy a 20 darab egyedi autokorreláció közül legalább egy szignifikánsan különbözik nullától. Ugyanakkor érdemes kiemelni, hogy mindegyik korrelációs együttható – legyen az pozitív vagy negatív irányú – gyenge kapcsolatot mutat, nem haladja meg a $\pm 0,1$ értéket. Ilyen mértékű statisztikai tulajdonságra profit szerzés céljából eredményes kereskedési stratégiát nem lehet alapozni.

Amennyiben a napi loghozamok várható értéke nem tér el szignifikánsan nullától, akkor a kockázat proxyjaként vehetjük a napi loghozamok négyzetes értékeit. Egymintás z-próbával vizsgálva a napi átlagos loghozamot nullhipotézisként megfogalmazhatjuk, hogy az átlag értéke nullával egyenlő. Ezzel szemben áll az alternatív hipotézis mely értelmében az átlag értéke nem egyenlő nullával. A próbafüggvény aszimptotikusan standard normális eloszlást követ:

$$t = \frac{\eta - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

A minta adatai nem mondanak ellent a nullhipotézisnek. Az ETF napi átlagos loghozama 37,09%-os szignifikanciaszintig nem tér el nullától. Ennek egy lehetséges gazdasági magyarázata a részidőszak rövidegéből adódóan abban áll, hogy a befektetőknek nincsen határozott hozamelvárása egy napra vonatkozóan. Az egymintás z-próba eredményét a 4. táblázat tartalmazza.

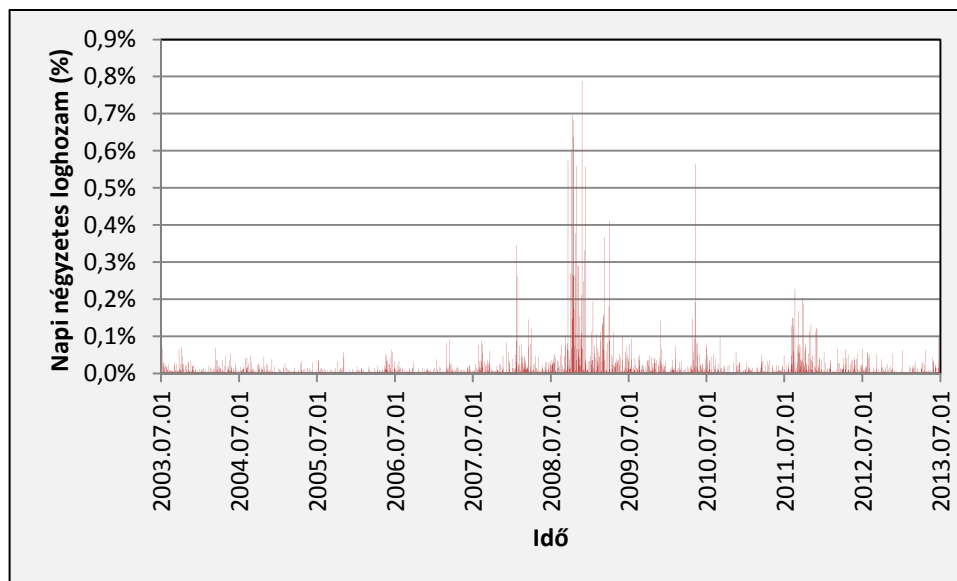
4. táblázat: SPDR MSCI Europe átlagos napi loghozamának egymintás z-próbája

Megnevezés	Egymintás z-próba
Próbafüggvény	0,895
Szabadságfok	2544
p-érték	37,09%

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

A négyzetes értékek vizsgálatával arra a kérdésre keresünk választ, hogy a napi átlagtól, nullától való négyzetes eltérés várható értéke megegyezik-e minden részidőszakban, azaz a napi loghozamokat jellemzi-e a homoszkedaszticitás. Amennyiben egy változónak az egyik részidőszakban magasabb, míg egy másik részidőszakban alacsonyabb a varianciája, akkor azt mondjuk, hogy a folyamat heteroszkedasztikus. A gazdasági jelenségekkel foglalkozó empirikus szakirodalom szerint egyes folyamatok – pl. infláció, pénzügyi termékek hozamalakulása – esetén megfigyelhető a volatilitás időbeli klasztereződése (Engle, 1982; 2001). Gyakorlati felhasználás szempontjából a részidőszakokhoz tartozó variancia pontosabb becslésével növelni tudjuk a portfólió kiválasztás hatékonyságát.

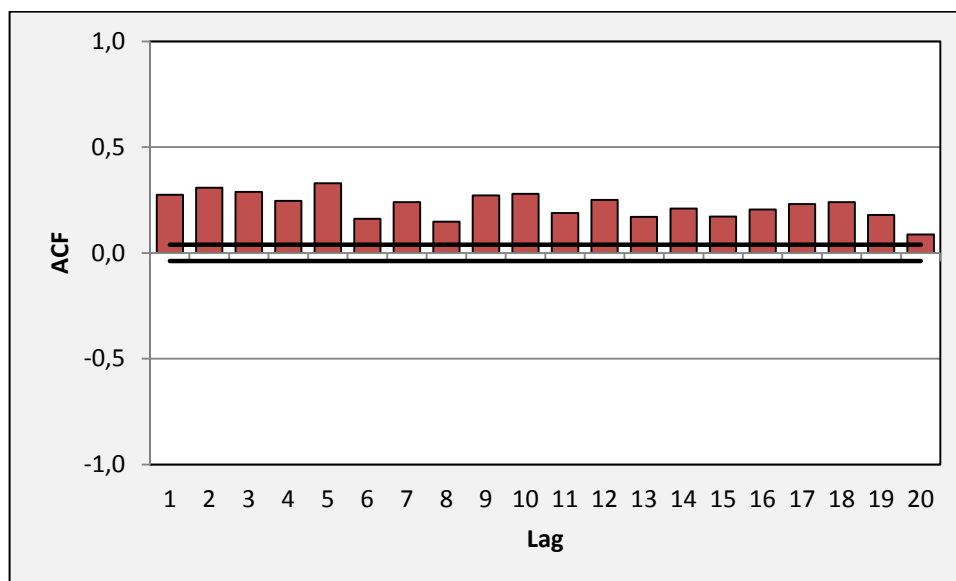
Előre jelzés szempontjából a napi loghozamok négyzetes értékei alapján továbbra sem tudjuk megmondani, hogy a következő részidőszakban a loghozam értéke pozitív vagy negatív lesz. Ugyanakkor abban az esetben, ha a tőkepiacon az elmúlt időszakban nagy kilengéseket lehetett tapasztalni, akkor feltételezhetjük, hogy a hozamalakulást a jövőben is erős ingadozás fogja jellemezni. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy hosszabb nyugodt időszakokat extrém kiugró értékekkel teli időszakok követnek. A befektetés kockázata időben nem állandó, hanem egy jelentős része bizonyos gazdasági események bekövetkezéséhez, tőkepiaci válságokhoz köthető. Az ETF napi négyzetes loghozamainak időbeli alakulását a 9. ábra szemlélteti. A hozamalakulást 2008-ig mérsékelt változékonyság jellemezte, míg 2008 és 2011 között a pénzügyi válság következtében az ingadozás mértéke jelentősen felerősödött.



9. ábra: SPDR MSCI Europe napi négyzetes loghozamainak alakulása

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

Portmanteau és Ljung-Box próbával 20 napig vizsgálva a napi négyzetes loghozamok időbeli függetlenségét, a minta adatai alapján elvethetjük a nullhipotézist. A 20 darab egyedi autokorreláció közül legalább egy szignifikánsan különbözik nullától. A 10. ábra a napi hozamok négyzetes értékeinek autokorrelációs függvényét szemlélteti. A korrelációs együtthatók pozitív irányú közepesnél gyengébb, illetve gyenge kapcsolatot mutatnak.



10. ábra: SPDR MSCI Europe napi négyzetes loghozam – ACF

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

3. RÉSZVÉNYBEFEKTETÉS MODELLEZÉSE

3.1. SPDR MSCI EUROPE ÁRFOLYAMÁNAK MODELLEZÉSE

Az árfolyam-modellezés (Hull, 1999; Medvegyev – Száz, 2010; Száz, 2009) célja, hogy egy adott jövőbeli időpontra vonatkozóan meghatározzuk a pénzügyi eszköz lehetséges árfolyamértékeinek eloszlását. Tehát az adott időpontra vonatkozó előrejelzés során nem egy konkrét célárfolyamra vagyunk kíváncsiak, hanem árfolyamértékek sokaságára, melyek statisztikai jellemzőiből (várható érték, medián, percentilisek) tudunk következtetéseket levonni. A jövőbeli árfolyam a jelenlegi árfolyam és az addigi relatív árfolyamváltozások szorzata:

$$S_T = S_0 \cdot \frac{S_1}{S_0} \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdot \dots \cdot \frac{S_t}{S_{t-1}} \cdot \dots \cdot \frac{S_T}{S_{T-1}} = S_0 \cdot \frac{S_T}{S_0}$$

Célszerű a relatív árfolyamváltozást technikailag átalakítani az alábbi módon:

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = e^{\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)} = e^{r_t}$$

ahol r_t a t -edik részidőszak loghozama. Ekkor a jövőbeli árfolyam a kumulált loghozam transzformáltja:

$$S_T = S_0 \cdot e^{r_1} \cdot e^{r_2} \cdot \dots \cdot e^{r_t} \cdot \dots \cdot e^{r_T} = S_0 \cdot e^{r_1+r_2+\dots+r_t+\dots+r_T} = S_0 \cdot e^{\sum r_t}$$

Az átalakítás előnye, hogy statisztikai szempontból kényelmesebb olyan változókat modellezni, melyek értékei összegezhetőek. Ekkor a jövőbeli árfolyam egy konstans (S_0) és egy exponenciális függvény ($e^{\sum r_t}$) szorzata, ahol az exponens a részidőszakokhoz tartozó valószínűségi változók összegéből áll ($r_1 + r_2 + \dots + r_t + \dots + r_T$).

A loghozam, a relatív árfolyamváltozás és az árfolyam is valószínűségi változó. A sztochasztikus folyamatot a loghozamok szimulációja közvetíti a relatív árfolyamváltozáson keresztül az árfolyamig. A modell feltételezi, hogy az egymást követő loghozamok függetlenek és normális eloszlásúak. Mivel a loghozam normális eloszlású,

ezért egyrészt a kumulált loghozam eloszlása is normális, másrészt a relatív árfolyamváltozás eloszlása lognormális. Továbbá az S_0 ismert konstans, ezért a jövőbeli árfolyam eloszlása is lognormális. A modell rendelkezik azzal a pozitív tulajdonsággal, hogy kizárja annak lehetőségét, hogy a jövőbeli árfolyam negatív értéket vegyen fel.

Monte Carlo módszerrel diszkrét idejű, folytonos árfolyam-alakulás szimulációját végezhetjük el. Tekintsük a $[0, 1]$ időintervallumot egy évnek, az előrejelzési időszak hosszának és bontsuk fel 250 darab ($\Delta t = 0,004$) részidőszakra, amelyek így a tőzsdei kereskedési napokat jelképezik. Tehát az éves loghozam 250 darab parányi loghozam összegéből tevődik össze. Az SPDR MSCI Europe tőzsdén kereskedett alap jelenbeli árfolyama: $S_0 = 129,63$ euró (2013.06.28.).

A részidőszakokhoz tartozó loghozamokat sztochasztikus differencia egyenlettel fejezzük ki. A sztochasztikus jelleget a Wiener-folyamat adja, mely a piacra érkező új információkat modellezi véletlen számsorozattal helyettesítve azokat. A részidőszakokhoz tartozó információk hatást a standard normális eloszlás lineáris transzformáltjával állítjuk elő, melynek várható értéke nulla, varianciája Δt nagyságú.

$$\Delta W_t = \sqrt{\Delta t} \cdot N(0, 1)$$

A részidőszakokhoz tartozó loghozamokat általánosított Wiener-folyamattal állítjuk elő. A Wiener-folyamat lineáris transzformáltja egy determinisztikus trend és egy sztochasztikus zaj komponensből tevődik össze.

$$r_t = \eta \Delta t + \sigma \Delta W_t$$

A trend az éves várható loghozam Δt nagyságú része, mely minden egyes részidőszakban hozzáadódik a folyamathoz. A zaj a loghozam éves volatilitásának ΔW_t nagyságú része, mely véletlen kilengéseket generálva módosítja a folyamatot. Feltételezzük, hogy a tőzsdén kereskedett alap loghozama időben stacionárius, tehát a várható érték és a szórás állandó.

A paraméterekre az ETF napi záró árfolyamértékei alapján készíthetünk becslést. Számítsuk ki az egyes napok relatív árfolyamváltozásának logaritmusát, majd határozzuk meg a napi loghozamok számtani átlagát (η_{napi}) és szórását (σ_{napi}). Mivel a várható loghozam az eltelt idővel, a szórás pedig az eltelt idő négyzetgyökével arányosan nő, ezért a paraméterek értéke az alábbi módon kerül évesítésre:

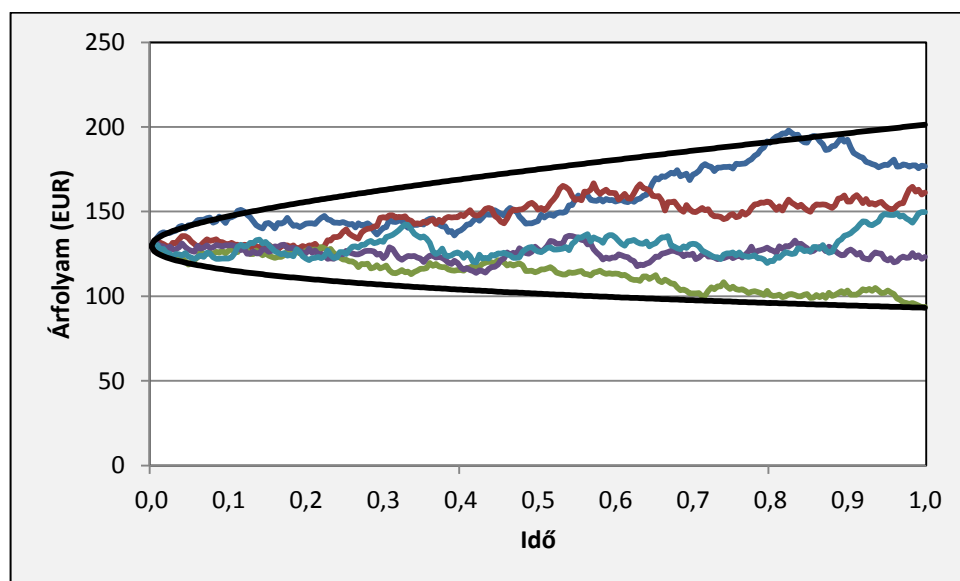
$$\eta = \eta_{napi} \cdot 250 = 5,51\%$$

$$\sigma = \sigma_{napi} \cdot \sqrt{250} = 19,64\%$$

A részidőszakokhoz tartozó loghozamok sztochasztikus differencia egyenlete:

$$r_t = 5,51\% \cdot 0,004 + 19,64\% \cdot \sqrt{0,004} \cdot N(0, 1)$$

A modellben a loghozam aritmetikai Brown-mozgást, az árfolyam pedig geometriai Brown-mozgást követ. Az egy éves előrejelzési időszakra lefuttatva a szimulációt megkapjuk az árfolyam mozgásának egy lehetséges realizációját. A 11. ábra az ETF árfolyam-alakulásának öt lehetséges realizációját szemlélteti. A fekete vonal a megbízhatósági szintet jelöli, 95% annak valószínűsége, hogy adott jövőbeli időpontban az árfolyam a két vonal közé fog esni.



11. ábra: SPDR MSCI Europe árfolyammozgásának szimulációja

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

Annak érdekében, hogy statisztikailag értékelni tudjuk az egy évvel későbbi időpontban az árfolyam eloszlását, futtassuk le a szimulációt tízezer alkalommal. Az eloszlás helyzetmutatóira a szimulációs módszer mellett analitikusan is adhatunk becslést. A lognormális eloszlás pozitív aszimmetriája miatt az árfolyam várható értéke fél varianciával nagyobb, mint a medián. A percentilisek kiszámításához pedig szükségünk van a standard normális eloszlás táblázatos értékeire. Egy éves előrejelzési időszak esetén a jövőbeli időpont $T = 1$.

$$E(S_T) = S_0 e^{\eta T + 0,5\sigma^2 T}$$

$$Med(S_T) = S_0 e^{\eta T}$$

Árfolyam 5. és 95. percentilise a standard normális eloszlás táblázatos értékei alapján:

$$P_5(S_T) = S_0 e^{\eta T + \sigma\sqrt{T} \cdot (-1,64)}$$

$$P_{95}(S_T) = S_0 e^{\eta T + \sigma\sqrt{T} \cdot 1,64}$$

A normális eloszlású változók mérsékelt változékonyságot mutatnak, az eloszlás szélein elhelyezkedő értékek valószínűsége alacsony. Figyelembe véve a loghozameloszlás empirikus tulajdonságait végezzük el a szimulációt Student-féle t -eloszlással is. A szabadságfok megválasztásával tudjuk az eloszlás széleinek vastagságát megadni. A paraméter növelésével a t -eloszlás konvergál a normális eloszláshoz, tehát minél kisebb a szabadságfok, annál nagyobb a szélsőséges értékek valószínűsége. Az illeszkedést vizsgálva meghatározhatjuk, hogy mely szabadságfok mellett közelíti meg a t -eloszlás leginkább az ETF empirikus napi loghozameloszlását. A szabadságfokot $\nu = 4$ -nek választva az eloszlás szélei már kellően vastagnak tekinthetők, a determinációs együttható 98,81%-os illeszkedést mutat.⁴ Amennyiben Student-féle t -eloszlással modellezzük a loghozamokat, akkor a jövőbeli árfolyam log t -eloszlást követ. Az 5. táblázat a jövőbeli árfolyam eloszlásának helyzetmutatóit tartalmazza mind szimulációs mind pedig analitikus módon meghatározva azok értékeit.

⁴ A szabadságfokot 1-től 10-ig vizsgálva $\nu = 4$ -nél volt a legmagasabb a determinációs együttható értéke.

5. táblázat: SPDR MSCI Europe árfolyamának helyzetmutatói (2014.06.30.)

Megnevezés	Lognormális eloszlás		Log t -eloszlás	
	Szimuláció	Analitikus	Szimuláció	Analitikus
1. percentilis	86,31	86,73	72,49	65,62
5. percentilis	99,16	99,16	87,02	90,11
25. percentilis	119,74	119,98	113,73	118,43
Medián	137,40	136,97	137,39	136,97
Várható érték	139,87	139,64	142,64	139,64
75. percentilis	156,80	156,37	165,70	158,42
95. percentilis	190,12	189,21	217,68	208,20
99. percentilis	217,14	216,31	261,29	285,93

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

Először nézzük a lognormális és a log t -eloszlást külön-külön. A szimulációs módszer alapján számított helyzetmutatók értéke a minta nagy elemszámának (10 000) köszönhetően nem tér el jelentősen az analitikusan meghatározott értékekhez képest. A szimulációs és az analitikus módszer között az árfolyameloszlás szélein figyelhető meg némi eltérés. Vegyük például a log t -eloszlást, amely esetén analitikus módszerrel számolva 1% annak valószínűsége, hogy az ETF egy évvel későbbi árfolyama magasabb lesz, mint 285,93 euró. Szimulációs módszerrel ugyanez az érték érezhetően kisebb, esetünkben 261,29 euró.

Másodjára az analitikus módszer alapján hasonlítsuk össze a lognormális és a log t -eloszlás eredményeit. Szándékunknak megfelelően a log t -eloszlás az árfolyameloszlás széleit jelző percentilisekhez szélsőségesebb értéket rendel, mint a lognormális eloszlás szerinti modell. Log t -eloszlás esetén 98% annak valószínűsége, hogy az árfolyam 65,62 és 285,93 euró közötti intervallumba fog esni. Lognormális eloszlás esetén az intervallum szűkebb, a kritikus értékek közelebb esnek a várható értékhez, 98% annak valószínűsége, hogy az árfolyam 86,73 és 216,31 euró közötti intervallumba fog esni.

Végül pedig számszerűsítsük a pénzügyi intézmények által leggyakrabban használt alsóági kockázati mutatót a Value at Risk-et. A kockáztatott érték mutató egy meghatározott időtáv alatt bekövetkező maximális veszteség mértékét adja eredményül, adott megbízhatósági szint mellett. A VaR mutató két típusát különböztethetjük meg. A relatív VaR a befektetés várható értékéhez, míg az abszolút VaR a befektetés kezdeti

értékéhez képest számszerűsíti a maximális veszteséget. Amennyiben a loghozamok eloszlása normális, akkor a relatív Value at Risk értéke a T időpontig 95%-os megbízhatósági szint mellett:

$$\text{relatív } VaR_{95\%}(S_T) = E(S_T) - P_5(S_T) = S_0 e^{\eta T + 0,5\sigma^2 T} - S_0 e^{\eta T + \sigma\sqrt{T} \cdot (-1,64)}$$

Az abszolút Value at Risk értéke a T időpontig 95%-os megbízhatósági szint mellett:

$$\text{abszolút } VaR_{95\%}(S_T) = S_0 - P_5(S_T) = S_0 - S_0 e^{\eta T + \sigma\sqrt{T} \cdot (-1,64)}$$

A 6. táblázat az ETF egy év alatti relatív Value at Risk értékét tartalmazza különböző megbízhatósági szintek mellett mind szimulációs mind pedig analitikus módon meghatározva azokat.

6. táblázat: SPDR MSCI Europe egy év alatti relatív kockáztatott értéke

Megnevezés	Lognormális eloszlás		Log t -eloszlás	
	Szimuláció	Analitikus	Szimuláció	Analitikus
75%-os megbízhatósági szint	20,14	19,66	28,91	21,21
95%-os megbízhatósági szint	40,72	40,48	55,62	49,53
99%-os megbízhatósági szint	53,57	52,91	70,15	74,02

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

A relatív VaR analitikus módszerrel számított értékeit elemezve 99% annak valószínűsége, hogy a log t -eloszlást követő ETF árfolyama egy év alatt a várható értékhez képest maximum 55,38 eurót fog csökkenni. Másképpen megfogalmazva 1% annak valószínűsége, hogy az árfolyam egy év alatt többet veszít értékéből a várható értékhez képest, mint 55,38 euró. A lognormális modell szerinti maximális veszteség mértéke természetesen kevesebb, a várható értékhez képest 41,52 euró.

A 7. táblázat az ETF egy év alatti abszolút Value at Risk értékét tartalmazza különböző megbízhatósági szintek mellett mind szimulációs mind pedig analitikus módon meghatározva azokat. A kockázatértékelés az előbbieknél megfelelően történik a különbség mindösszesen abban áll, hogy a maximális veszteséget a jelenlegi árfolyamhoz képest mérjük.

7. táblázat: SPDR MSCI Europe egy év alatti abszolút kockázatotott értéke

Megnevezés	Lognormális eloszlás		Log <i>t</i> -eloszlás	
	Szimuláció	Analitikus	Szimuláció	Analitikus
75%-os megbízhatósági szint	9,89	9,65	15,90	11,20
95%-os megbízhatósági szint	30,47	30,47	42,61	39,52
99%-os megbízhatósági szint	43,32	42,90	57,14	64,01

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

Az abszolút VaR előnyös tulajdonságai közé tartozik, hogy a befektetett tőkén elszennvedhető effektív veszteséget méri, tehát – a relatív VaR mutatóval ellentétben – a modell szerint nem fordulhat elő olyan eset, hogy a befektetett összegnél nagyobb veszteséget kapjunk eredményül.

A tőkepiaci jelenségek leírására kifejlesztett modellek számos korlátba ütköznek azon kívül, hogy a valóság egyszerűsített megjelenítését teszik lehetővé. Tegyük fel egy pillanatra, hogy ismerjük az SPDR MSCI Europe árfolyammozgásának valódi modelljét, legyen ez esetünkben a lognormális. Gyakorlati szempontból a korlátozottan rendelkezésre álló adatok miatt nem lehetünk biztosak abban, hogy az elmúlt tíz év adataiból becsült paraméterek megfelelő iránymutatással szolgálnak a jövőre vonatkozóan.

3.2. NYUGDÍJCÉLÚ BEFEKTETÉS MODELLEZÉSE

Az emberi életpálya során adódó egyik elemi probléma az öregkori biztonságról való gondoskodás, amely hosszú távú megtakarítás, nyugdíjcélú befektetés nélkül nehezen képzelhető el (Csontos et al., 1997). Egy pénzügyileg kiegyensúlyozott nyugdíjrendszer részeként az egyéni öngondoskodásnak a jövőben egyre hangsúlyosabb szerepet kell betöltenie.

A gazdaságilag fejlett országokban a demográfiai folyamatok alakulása a társadalom előregedését vetíti előre. A nyugdíjban töltött élettartam átlagosan már most elérheti a 20-25 évet, ami alapvetően két tényezőre vezethető vissza. Egyfelől az egészségügyi ellátás javulása és a kedvező életkörülmények miatt nőtt a várható élettartam. Másfelől a nyugdíjkorhatár-emelés a legtöbb fejlett országban nem követte az élettartam-növekedés mértékét (Kovács, 2010).

A nyugdíjkorhatárt betöltve a gazdaságilag inaktívak részéről természetes módon felmerül az igény olyan javak fogyasztására, melyek felhalmozása és tárolása nem oldható meg aktív korukban. Ebből adódóan a nyugdíjrendszer elsődleges feladatai közé tartozik annak meghatározása, hogy egy adott időszakban a gazdaságilag aktívak által előállított javakból, milyen mértékben részesüljenek a társadalom inaktív tagjai. A tőkefedezeti rendszerben az inaktívak részesedésének gazdasági alapját az aktív korban felhalmozott értékpapírok adják. A nyugdíjcélú befektetés felélése vagy a portfólió pénzáramlása (osztalék, kamat) nyújt fedezetet a fogyasztásra. A tőkefedezeti rendszer egyik legnagyobb előnye a diverzifikáció. Különböző országok értékpapírjaiba fektetve mérsékelhető az egy adott ország gazdasági teljesítményétől való függés, továbbá az egyéni felhalmozás jobban illeszkedik a munkavállalók növekvő nemzetközi mobilitásához (Borza, 2010).

Az öngondoskodás feltételeinek megteremtése érdekében az államnak a pénzügyi közvetítőrendszer szabályozásán kívül számos feladatot kell ellátnia. Az elvonások mértékének csökkentésével nagyobb teret lehetne engedni az egyéni döntéshozatalnak. Több pénzt hagyva az embereknek egy hiteles gazdaságpolitika képes ösztönözni az egyének felelős pénzügyi magatartását annak kommunikálásával és következetes betartásával, hogy a kisebb elvonás arányosan kevesebb jövőbeli állami kötelezettséggel jár együtt. A pénzügyi kultúra fejlesztése szintén hozzájárul ahhoz, hogy a társadalom tagjai képesek legyenek felismerni a különböző életszakaszokhoz kötődő célokat és ezeknek megfelelően kezelni pénzügyeiket. A hosszú távú megtakarítások piacán mind az ügyfél mind pedig a szolgáltató érdeke, hogy rendelkezésre álljanak olyan könnyen átlátható tömegtermékek, melyeket a nagy volumen – kis haszon elv alapján lehet értékesíteni. Tőzsdén kereskedett alapokkal a megtakarítók alacsony költségek mellett fektethetnek be olyan passzív indexalapokba, melyek reprodukálják a részvény- és kötvénypiacok, illetve egyéb pénzügyi eszközök teljesítményét (Holtzer, 2010).

A befizetéssel meghatározott (defined contribution – DC) tőkefedezeti programok számos országban a magánszektor nyugdíjcélú befektetéseinek meghatározó formájává váltak. Ebben a konstrukcióban a felhalmozás a tagok egyéni számláján történik. A befizetés mértéke előre meghatározott, míg a szolgáltatás a befektetés teljesítményétől, a pénz- és tőkepiaci hozamoktól függ. Az Egyesült Államokban az elmúlt években megnőtt a népszerűsége a céldátumra optimalizált életciklusalapoknak (target date fund – TDF). A TDF a DC-nyugdíjkonstrukciók kiemelt pénzügyi termékévé nőtte ki magát. Az életciklus-elméletnek megfelelően a céldátumra optimalizált alapok a futamidő elején mikor az ügyfelek még fiatalok több kockázatot vállalnak a nagyobb várható hozam elérése érdekében. A nyugdíjkorhatárhoz közeledve a kockázat fokozatos csökkentésével pedig áthelyeződik a hangsúly a befektetés reálértékének megőrzésére. Ezt a feladatot lényegében egy előre meghatározott eszközallokációs stratégiával lehet elérni. A futamidő elején az alap nagyarányú részvénykitettséggel rendelkezik, ami azt jelenti, hogy a befektetés értéke érzékenyen reagál a piaci változásokra. A futamidő végéhez közeledve az alapon egyre nagyobb súlyt kapnak a kötvény- és pénzpiaci eszközök, ami következtében mérséklődik a befektetés értékének ingadozása (Vízkeleti, 2010).

A DC-nyugdíjkonstrukcióval szemben természetesen merül fel a kérdés, hogy mennyire lesz sikeres a felhalmozás, milyen mértékű nyugdíjra számíthat az ügyfél? Az őszinte válasz az, hogy senki sem tudja biztosan. A szolgáltatónak nincsen előre meghatározott kötelezettsége arra vonatkozóan, hogy mekkora legyen a befektetés jövőbeli értéke, ezért nem is kell azt pontosan tudnia. Az állam sem rendelkezik ilyen információval, pedig a gyenge befektetési teljesítmény, a kedvezőtlen pénz- és tőkepiaci hozamok miatt nyomás alá kerülhet, hogy mentse meg a szerencsétlenül járt megtakarítókat. Annak ellenére, hogy akár 70 évig is kapcsolatban lehet az ügyfél a tőkefedezeti rendszerrel, mindösszesen azzal van tisztában, hogy értékesítettek neki egy pénzügyi terméket, mely kommunikáció szintjén a kényelmes nyugdíjas évek ígérését hordozza magában (Blake et al., 2001).

A nyugdíjcélú befektetés modellezésének feladata, hogy információval lássa el a megtakarítókat és segítse a döntéshozatal folyamatát. Dowd és Blake (2013) a DC programok modellezésére vonatkozóan 16 alapelvet fogalmaztak meg, melyek összhangban vannak az OECD (2012) ajánlásaival.

- A modell alapjául szolgáló feltevéseknek elfogadhatónak, transzparensnek és belsőleg ellentmondásmentesnek kell lennie.

- A modell kalibrálásának megfelelően ellenőrzöttnek kell lennie és a jövőre vonatkozó projekciókat múltbeli adatokon vissza kell tesztelni.
- A sztochasztikus modellnek képesnek kell lennie kezelni a számszerűsíthető (érzékelhető) kockázatot.
- A modell minden egyes kimeneti változójának értékeihez hozzá kell rendelni egy megfelelően definiált kockázati mértéket, különös tekintettel az alsóági kockázatra. Például számszerűsíthetjük az adott változó kockázatosított értékét 95%-os megbízhatósági szint mellett, továbbá a változó lehetséges értékeinek 90%-os megbízhatósági tartományát.
- Annak érdekében, hogy az ügyfél jól informált döntést hozhasson, a különböző lehetőségek közötti választás következményeit kvantitatív módon be kell mutatni.
- A modellnek figyelembe kell vennie az ügyfél lényeges jellemzőit, mint például a foglalkozását, a nemét, a meglévő eszközeit és kötelezettségeit.
- Az eszközallokációról szóló döntés meghozatalakor a modellnek be kell mutatnia az ügyfél kockázati attitűdjének következményeit. Ugyancsak szükséges annak érzékeltetése, hogy milyen változásokat idéz elő az eszközallokációnak, a hozzájárulás mértékének és a tervezett nyugdíjba vonulás időpontjának módosítása. Az eljárás lehetővé teszi, hogy optimális döntés szülessen a kulcsváltozók értékének kombinációjára vonatkozóan.
- A modellnek figyelembe kell vennie a konstrukció során felmerülő összes költséget.
- A modellnek figyelembe kell vennie a túlélési kockázatot (longevity risk) és az ügyfél várható élettartamának tervezett növekedését.
- A modellnek projekciót kell készítenie mind a nyugdíjba vonulás időpontjára mind pedig a nyugdíjban töltött élettartamra vonatkozó kimenetelekről. Az alábbiakban felsorolt stratégiákhoz köthető kockázatokat egyértelműen be kell mutatni:
 - A meghatározott összegű pénzáramlás választása az indexált annuitás helyett magában hordozza annak kockázatát, hogy az infláció miatt az élettartam növekedésével párhuzamosan csökken az életszínvonal;

- A lehíváson alapuló stratégiák magukban hordozzák annak kockázatát, hogy az ügyfél eleinte többet vesz ki az alapból, mint amennyit a későbbi befektetési teljesítmény meg tudna indokolni.
- A modellnek integrált módon figyelembe kell vennie a nyugdíjba vonulás előtti és utáni időszakot. Erre az esetlegesen bekövetkező nem kívánatos események elkerülése miatt van szükség – mint amilyen az életszínvonal jelentős csökkenése a nyugdíjazást követően. Az ügyfél számára segít meghatározni, hogy milyen kiigazításra van szükség – ami jelentheti a hozzájárulás mértékének és/vagy a részvényeszközök súlyának növelését, továbbá a nyugdíjba vonulás elhalasztását.
- A modellnek figyelembe kell vennie az egyéb forrásból származó nyugdíjakat. Ezek közé tartozik az állami nyugdíj és a lakástőke felélése.⁵ Egy jól megalkotott DC modell segíti az élethosszig tartó pénzügyi tervezést.
- A modellnek a lehető legpontosabban tükröznie kell a valóságot, ami olyan külső tényezők figyelembe vételét jelenti, mint a munkanélküliség kockázata, a munkaidő (teljes vagy rész), az adók és a jóléti jogosultságok.
- Fontos a szcenárió-elemzés és a stressz-teszt használata. Minden egyes forgatókönyv esetén:
 - A feltevéseknek érthetőnek kell lennie;
 - Értékelni kell a feltevések elfogadhatóságát; és
 - Stressz-teszt alkalmazásával meg kell határozni, hogy melyik feltevések az igazán fontosak és melyek kevésbé. Ez lehetővé teszi a modellező számára, hogy a lényeges feltevéseket amennyire csak lehet, kontroll alatt tartsa.
- A modellt időről időre naprakésszé kell tenni és indokolt esetben változtatni kell a feltevéseken. A módosítások körültekintő dokumentálása és az ügyfél tájékoztatása mind arra szolgál, hogy a modell a továbbiakban is megtartsa hitelességét.
- A modellnek illeszkednie kell ahhoz a célhoz, amiért elsődlegesen megalkották.

⁵ A „lakásért járadék”-programok (időskorijelzálog-szerződés és halasztott átadású ingatlanértékesítés) jellemzőiről, szabályozásáról és elterjedtségéről lásd Kun (2008).

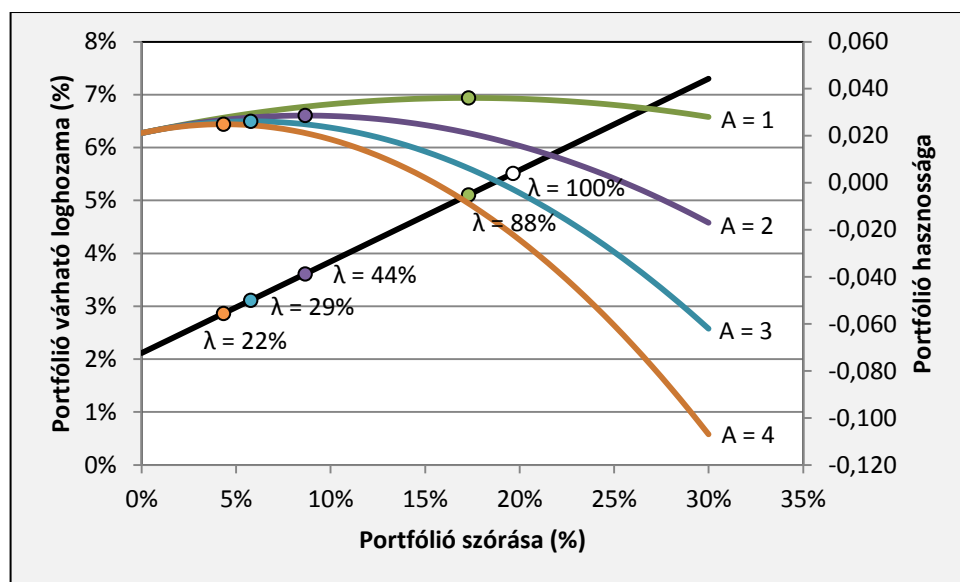
A továbbiakban a nyugdíjcélú megtakarítási modell célja, hogy egy adott jövőbeli időpontra vonatkozóan meghatározza a befektetés lehetséges értékének eloszlását. Tekintsük a felhalmozási időszak hosszát 40 évnek, ekkor feltételezzük, hogy a modell szerinti befektető a nyugdíjkorhatárt elérve 40 évnyi megszakítás nélküli munkaviszonnyal fog rendelkezni. Az időegység továbbra is egy év, a részidőszak nagyságát hozzáigazítjuk a hónapokhoz ($\Delta t = 1/12$), tehát a fizetést a munkavállaló havonta egy alkalommal a hónap végén kapja meg. Az időszak kezdetén az éves fizetés legyen 30 000 euró, melyet 2%-os inflációval minden év elején korrigálunk, tehát az első évi fizetés 31 200 euró, ami havonta 2600 eurót jelent. Alapesetben a megtakarítási ráta legyen a havi fizetés 15%-a, amely összeg minden hónap végén hozzáadódik a nyugdíjcélú befektetés aktuális értékéhez.

A pénzügyi portfólió egy kockázatos és egy kockázatmentes eszközből áll. A kockázatos eszköz az SPDR MSCI Europe tőzsdén kereskedett alapba történő befektetést jelenti. Gyakorlati szempontból érdemes megemlíteni, hogy az ETF mind a lakossági, mind az intézményi befektetők számára lehetővé teszi, hogy alacsony költségek mellett hozzájussanak az európai részvényt piacot reprezentáló részvényt csomaghoz. A piaci szereplők a másodlagos forgalmazás, vagyis a tőzsdei kereskedés során tudják megvásárolni vagy eladni az ETF jegyeit. A kockázatmentes eszköz hozamainak szórása nulla, továbbá nem korrelál a kockázatos eszköz hozamaival. Általában a kockázatmentes eszköz proxyjaként az állam által kibocsátott rövid futamidejű értékpapírokat szokták használni. Ennek háttérében az a megfontolás áll, hogy „pénznyomtatással” az állam eleget tud tenni kötelezettségeinek ezért a fizetése képtelenség lehetősége nem áll fenn. Ugyanakkor az infláció, a fizetőeszköz elértéktelenedésének kockázatát továbbra is a befektetők viselik. Egy másik megközelítés szerint a kockázatmentes eszköz hozamát az irányadó bankközi kamatlábak alapján is meg lehet becsülni. Ebben az esetben is azt feltételezzük, hogy a jegybank a pénzügyi rendszer stabilitásának megőrzése érdekében vállalja a végső hitelező szerepét, mint implicit kötelezettséget. Az Euribor (Euro Interbank Offered Rate) az európai irányadó bankközi kamatlábat jelenti, mely megmutatja, hogy a kiemelt bankok milyen kamattal adnak egymásnak kölcsönt. A modellben a kockázatmentes eszköz hozamát a 3 havi Euribor fogja jelképezni. A megfigyelési időszak szintén 2003. június 30-ától 2013. június 30-áig tart. Az időszak során az átlagos éves loghozam 2,11% volt, mely értéket a továbbiakban állandónak vesszük.

Összhangban az életciklus-elmélettel a felhalmozási időszak elején a portfólió összetételén belül a kockázatos eszköz dominál, mely az idő előrehaladtával tízévente fokozatosan csökken. Az adott tízéves részidőszak optimális portfólió összetételét a befektető hasznosságfüggvényének maximalizálásával határozzuk meg. A hasznosságfüggvény a hozam és a kockázat közötti átváltást teszi mérhetővé a befektető egyéni preferenciáját tükrözve:

$$U = \eta_p - 0,5A\sigma_p^2$$

Minél nagyobb a befektető kockázatkerülési együtthatója (A) annál nagyobb mértékben csökkenti a portfólió szórása (σ_p) a befektető hasznosságát, aminek alapját a portfólió várható hozama (η_p) képezi. Az első tíz év alatt a befektető kockázatkerülési együtthatója 1, majd a második tíz év alatt 2 és így tovább egészen 4-ig. A kockázatos eszköz portfólión belüli arányának változtatásával felrajzolhatjuk a tőkeallokációs egyenest, mely a befektető különböző döntési alternatíváit szemlélteti. A befektető optimális választása a kockázatkerülési együtthatótól függ. A 12. ábra a tőkeallokációs egyenest és a befektető hasznosságfüggvényét szemlélteti.



12. ábra: Tőkeallokációs egyenes

Forrás: ECB (2013) és Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

A fekete színű vonal a tőkeallokációs egyenes, melyen a fehér pont a 100%-ban kockázatos eszközből álló portfóliót jelöli. A különböző színű görbék a befektető hasznosságfüggvényét ábrázolják eltérő kockázatkerülési együttható mellett. A görbék maximumpontja jelöli ki a tőkeallokációs egyenesen az optimális portfóliót. A hasznosságfüggvények maximumát és a hozzájuk tartozó optimális portfóliót azonos színű pont jelöli. Minél nagyobb a kockázatkerülési együttható annál kisebb a kockázatos eszköz súlya a portfólióban, melyet λ jelöl. A kockázatos eszköz arányát az optimális portfólión belül az alábbi képlettel határozhatjuk meg:

$$\lambda^{opt} = \frac{\eta - r_f}{A\sigma^2}$$

Ahol η a kockázatos eszköz, r_f pedig a kockázatmentes eszköz várható loghozamát jelöli, illetve σ a kockázatos eszköz szórása. Amennyiben a kockázatkerülési együttható értéke 1, akkor a hasznosságfüggvény maximális értéke 0,036, továbbá az optimális portfólión belül 88,01% a kockázatos eszköz aránya. Mivel előre meghatározott súlyokkal dolgozunk, ezért a portfólió összetétele hónapról hónapra kiigazításra kerül, annak érdekében, hogy a teljesítmény a pénzügyi eszközök megfelelő arányát tükrözze. A 8. táblázat a nyugdíjcélú befektetési modell paramétereit tartalmazza.

8. táblázat: Nyugdíjcélú befektetési modell

Megnevezés	Modell paramétereinek értéke
Kockázatos eszköz éves loghozama (η)	5,51%
Kockázatos eszköz éves szórása (σ)	19,64%
Kockázatmentes eszköz éves loghozama (r_f)	2,11%
Részydőszak nagysága (Δt)	0,08 év
Befektetés kezdeti értéke (V_0)	15 000,00 EUR
Éves fizetés az időszak elején (I_0)	30 000,00 EUR
Éves infláció (i)	2,00%
Megtakarítási ráta (s)	15,00%

Forrás: ECB (2013) és Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

Monte Carlo módszerrel a nyugdíjcélú befektetés diszkrét idejű, értékét tekintve folytonos szimulációját végezhetjük el. Legyen a $[0, 40]$ időintervallum a felhalmozási időszak hossza és bontsuk fel 480 darab ($\Delta t = 0,08$) részidőszakra, melyek így az egyes hónapokat jelképezik. Annak érdekében, hogy statisztikailag értékelni tudjuk a befektetés jövőbeli értékének eloszlását, futtassuk le a szimulációt tízezer alkalommal. A kockázatos eszköz részidőszakokhoz tartozó loghozamait sztochasztikus differencia egyenlettel fejezzük ki. A nyugdíjcélú befektetés értéke a T -edik időpontban:

$$V_T = V_{T-\Delta t} \cdot [e^{\lambda(\eta\Delta t + \sigma\Delta W_T) + (1-\lambda)r_f\Delta t}] + [I_0\Delta t \cdot (1+i)^{[T]} \cdot s]$$

Az egyenlet jobb oldala három részből áll. Az első rész ($V_{T-\Delta t}$) a befektetés értékét jelöli az egyel korábbi hónap végén. A második rész $[e^{\lambda(\eta\Delta t + \sigma\Delta W_T) + (1-\lambda)r_f\Delta t}]$ az adott hónapban a portfólió értékében bekövetkező relatív változást mutatja. A kitevő a kockázatos és a kockázatmentes eszköz loghozamának súlyozott számtani átlagát jelenti. A harmadik rész $[I_0\Delta t \cdot (1+i)^{[T]} \cdot s]$ az adott havi fizetés megtakarításra szánt részét mutatja, amit a hónap végén hozzáadunk a befektetés aktuális értékéhez. A $[T]$ jelölés a T időpontérték felső egészrészét jelenti, tehát az exponens az első évben végig egy, a második évben végig kettő és így tovább. Összefoglalva tehát a befektetés adott hónap végi értékét a részidőszak hozama és a fizetés arányos része határozza meg. A 9. táblázat a nyugdíjcélú befektetés jövőbeli értékének helyzetmutatóit tartalmazza szimulációs módszerrel meghatározva azokat.

9. táblázat: Nyugdíjcélú befektetés értékének helyzetmutatói (2053.06.30.)

Megnevezés	Lognormális eloszlás	Log t -eloszlás
1. percentilis	347 622	290 674
5. percentilis	400 631	351 991
25. percentilis	503 395	478 254
Medián	602 674	610 159
Várható érték	637 161	695 527
75. percentilis	730 841	802 292
95. percentilis	997 511	1 317 630
99. percentilis	1 274 258	1 952 948

Forrás: ECB (2013) és Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

A szimulációs módszer alapján hasonlítsuk össze a lognormális és a log t -eloszlás eredményeit. A nyugdíjkorhatárt elérve a lognormális modell szerint a befektetés várható értéke 637 161 euró, továbbá 90% annak valószínűsége, hogy a 400 631 és a 997 511 euró közötti intervallumba fog esni. A log t modell esetén a befektetés várható értéke 695 527 euró, továbbá az intervallum terjedelme nagyobb, 90% annak valószínűsége, hogy a befektetés értéke 351 991 és 1 317 630 euró közé fog esni.

A felhalmozási időszak végén a megtakarítónak döntenie kell arról, hogy milyen stratégia mentén fogja finanszírozni a nyugdíjas éveit. A hosszú élet kockázata alapvetően egyéni kockázat, de az ügyfél dönthet úgy is, hogy áthárítja egy szolgáltatóra. Az alábbiakban sorra vesszük, hogy milyen típusú kockázatokkal számolhatunk a felhalmozási időszakot követően.

- A nyugdíjba vonulás időpontjában kamatláb kockázat merül fel, mivel a kamatláb és a járadék értéke között pozitív irányú kapcsolat van;
- Meghatározott összegű járadék esetén inflációs kockázat merül fel, ami hatással van a járadék reálértékére;
- Amennyiben a nyugdíjba vonulás nem jelenti a befektetési tevékenység végét, akkor a portfólióból származó jövedelem a pénz- és tőkepiaci hozamokkal együtt fog ingadozni;
- Lehíváson alapuló stratégiák esetén felmerül annak kockázata, hogy a befektetés teljes egésze felélésre kerül a nyugdíjban töltött élettartam vége előtt.

A továbbiakban a nyugdíjat egy előre meghatározott hónapon át esedékes egyenlő nagyságú pénzösszegnek tekintjük. Legyen a nyugdíjban töltött várható élettartam 20 év, azaz 240 hónap. A nyugdíjcélú befektetés hatékonyságát a helyettesítési rátával (replacement ratio – RR) mérhetjük. A helyettesítési ráta megmutatja, hogy a nyugdíj értéke hogyan viszonyul az utolsó év keresetéhez. A helyettesítési ráta eloszlásának 5. percentilisét az alábbi képlettel kapjuk meg:

$$P_5(RR) = \frac{P_5(V_{40}) \cdot \left[\frac{1 - \frac{1}{(e^{r_f \Delta t})^{240}}}{e^{r_f \Delta t} - 1} \right]}{I_{40} \Delta t}$$

A számlálóban a havi nyugdíj összege szerepel, amit úgy kapunk meg, hogy a felhalmozási időszak végén rendelkezésre álló befektetési érték 5. percentilisét osztjuk a 240 hónapon át esedékes egységnyi pénzösszeg jelenértékével. A képletben a kamatláb a kockázatmentes eszköz effektív hozamával⁶ egyenlő. A vetítési alap pedig a nevezőben szereplő utolsó év havi fizetése.

A 10. táblázat a helyettesítési ráta helyzetmutatóit tartalmazza. A szimulációs módszer alapján hasonlítsuk össze a lognormális és a log *t*-eloszlás eredményeit. A lognormális modell szerint a helyettesítési ráta várható értéke 59,03%, továbbá 90% annak valószínűsége, hogy 37,11% és 92,41% közé fog esni. A log *t* modell esetén a helyettesítési ráta várható értéke 64,43%, továbbá 90% annak valószínűsége, hogy 32,61% és 122,07% közé fog esni.

10. táblázat: Helyettesítési ráta helyzetmutatói

Megnevezés	Lognormális eloszlás	Log <i>t</i> -eloszlás
1. percentilis	32,20%	26,93%
5. percentilis	37,11%	32,61%
25. percentilis	46,63%	44,31%
Medián	55,83%	56,53%
Várható érték	59,03%	64,43%
75. percentilis	67,71%	74,32%
95. percentilis	92,41%	122,07%
99. percentilis	118,05%	180,92%

Forrás: ECB (2013) és Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

3.3. NYUGDÍJCÉLÚ BEFEKTETÉS LEHETŐSÉGELEMZÉSE

A lehetségelemzés a modell azon paramétereinek megváltoztatását jelenti, melyekre a befektetőnek közvetlen ráhatása van. A továbbiakban három változó a megtakarítási ráta, a nyugdíjba vonulás tervezett időpontja és az eszközallokáció módosítására kerül sor. Mindhárom esetben az eddig ismertett modell jelenti a kiindulási alapot.

⁶ Kockázatmentes eszköz effektív havi hozama: $e^{2,11\% \cdot (1/12)} - 1 = 0,18\%$.

Alapesetben a megtakarítási ráta a havi fizetés 15%-a. Lehetőségelemzés keretei között megvizsgáljuk, hogy milyen mértékben változik meg a nyugdíjcélú befektetés jövőbeli értéke és a helyettesítési ráta, ha a paraméter értékét a havi fizetés 10, illetve 20%-ára módosítjuk. A 11. táblázat a helyettesítési ráta helyzetmutatóit tartalmazza szimulációs módszerrel meghatározva mindkét lehetőség értékeit.

11. táblázat: Megtakarítási ráta lehetőségelemzése (RR)

Megnevezés	Megtakarítási ráta 10%		Megtakarítási ráta 20%	
	Lognormális	Log t	Lognormális	Log t
1. percentilis	21,92%	18,28%	42,14%	34,89%
5. percentilis	25,54%	22,59%	48,34%	42,72%
25. percentilis	32,43%	30,94%	60,71%	58,27%
Medián	39,13%	40,19%	72,15%	73,85%
Várható érték	41,92%	46,38%	76,22%	83,47%
75. percentilis	48,08%	53,99%	86,90%	97,30%
95. percentilis	68,19%	91,06%	118,22%	156,80%
99. percentilis	87,45%	139,55%	149,95%	231,08%

Forrás: ECB (2013) és Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

A lognormális modell eredményeit elemezve amennyiben a megtakarítási rátát a havi fizetés 10%-ára csökkentjük, akkor a nyugdíjcélú befektetés várható értéke 452 493 euró, továbbá 90% annak valószínűsége, hogy a befektetés értéke 275 684 és 736 092 euró közé fog esni. A helyettesítési ráta várható értéke 41,92%, a 90%-os megbízhatósági tartomány [25,54%; 68,19%].

Amennyiben a megtakarítási rátát a havi fizetés 20%-ára növeljük, akkor a nyugdíjcélú befektetés várható értéke 822 732 euró, továbbá 90% annak valószínűsége, hogy a befektetés értéke 521 828 és 1 276 120 euró közé fog esni. A helyettesítési ráta várható értéke 76,22%, a 90%-os megbízhatósági tartomány [48,34%; 118,22%].

Alapesetben a nyugdíjba vonulás tervezett időpontja 40 év munkaviszonyt feltételez. Lehetőségelemzés keretei között megvizsgáljuk, hogy milyen mértékben változik meg a nyugdíjcélú befektetés jövőbeli értéke és a helyettesítési ráta, ha a paraméter értékét 35,

illetve 45 évre módosítjuk. A 12. táblázat a helyettesítési ráta helyzetmutatóit tartalmazza szimulációs módszerrel meghatározva mindkét lehetőség értékeit.

12. táblázat: Nyugdíjba vonulás tervezett időpontjának lehetőségelemzése (RR)

Megnevezés	Munkaviszony 35 év		Munkaviszony 45 év	
	Lognormális	Log t	Lognormális	Log t
1. percentilis	27,35%	23,19%	35,96%	29,95%
5. percentilis	32,02%	28,03%	41,46%	36,05%
25. percentilis	40,40%	38,14%	51,46%	49,20%
Medián	48,77%	49,46%	61,71%	62,93%
Várható érték	51,90%	56,65%	65,09%	71,00%
75. percentilis	59,69%	66,30%	74,37%	82,88%
95. percentilis	82,17%	109,79%	100,42%	132,40%
99. percentilis	104,46%	161,20%	128,11%	192,02%

Forrás: ECB (2013) és Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

A lognormális modell eredményeit elemezve amennyiben a nyugdíjba vonulás tervezett időpontja 35 évnyi munkaviszonyt feltételez, akkor a nyugdíjcélú befektetés várható értéke 507 383 euró, továbbá 90% annak valószínűsége, hogy a befektetés értéke 313 049 és 803 368 euró közé fog esni. A helyettesítési ráta várható értéke 51,90%, a 90%-os megbízhatósági tartomány [32,02%; 82,17%].

Amennyiben a nyugdíjba vonulás tervezett időpontja 45 évnyi munkaviszonyt feltételez, akkor a nyugdíjcélú befektetés várható értéke 791 249 euró, továbbá 90% annak valószínűsége, hogy a befektetés értéke 504 015 és 1 220 769 euró közé fog esni. A helyettesítési ráta várható értéke 65,09%, a 90%-os megbízhatósági tartomány [41,46%; 100,42%].

Alapesetben az eszközallokációt dinamikus módon az életciklus-elméletnek megfelelően alakítjuk ki. Lehetőségelemzés keretei között két statikus eszközallokációt vizsgálunk meg. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen mértékben változik meg a nyugdíjcélú befektetés jövőbeli értéke és a helyettesítési ráta, ha konzervatív, illetve kockázatos eszközallokációt valósítunk meg. Konzervatív eszközallokáció esetén a befektető kockázatkerülési együtthatója 4, míg kockázatos eszközallokáció esetén 1 a

befektetési időszak teljes egésze alatt. A 13. táblázat a helyettesítési ráta helyzetmutatóit tartalmazza szimulációs módszerrel meghatározva mindkét lehetőség értékeit.

13. táblázat: Eszközallokáció lehetőségelemzése (RR)

Megnevezés	Kockázatkerülési együttható 4		Kockázatkerülési együttható 1	
	Lognormális	Log t	Lognormális	Log t
1. percentilis	33,31%	28,40%	19,38%	11,62%
5. percentilis	37,06%	33,64%	28,26%	19,91%
25. percentilis	43,78%	41,95%	54,21%	47,28%
Medián	49,08%	49,35%	89,14%	94,75%
Várható érték	49,93%	51,07%	126,56%	192,02%
75. percentilis	55,19%	58,41%	150,07%	202,05%
95. percentilis	65,87%	74,41%	347,53%	644,54%
99. percentilis	74,66%	89,49%	633,65%	1652,74%

Forrás: ECB (2013) és Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

A lognormális modell eredményeit elemezve amennyiben konzervatív eszközallokációt választunk, akkor a nyugdíjcélú befektetés várható értéke 538 955 euró, továbbá 90% annak valószínűsége, hogy a befektetés értéke 400 090 és 710 980 euró közé fog esni. A helyettesítési ráta várható értéke 49,93%, a 90%-os megbízhatósági tartomány [37,06%; 65,87%].

Amennyiben kockázatos eszközallokációt választunk, akkor a nyugdíjcélú befektetés várható értéke 1 366 160 euró, továbbá 90% annak valószínűsége, hogy a befektetés értéke 304 997 és 3 751 446 euró közé fog esni. A helyettesítési ráta várható értéke 126,56%, a 90%-os megbízhatósági tartomány [28,26%; 347,53%].

A befektetési modell eredményeinek helyes interpretálásához, fontos kihangsúlyozni, hogy a kapott értékeket nem előrejelzésként, hanem sokkal inkább sztochasztikus “mi lenne ha” projekcióként értelmezzük. A lehetséges kimeneteket és a hozzájuk tartozó valószínűségeket akkor fogadhatjuk el, ha a modell alapjául szolgáló különböző feltevések a későbbiek során igaznak bizonyulnak (Dowd – Blake, 2013).

A társadalomtudományok roppant komplexitása az előrejelzést csak még nehezebbé teszi, a jövőre irányuló feltevések és becslések kisebb nagyobb mértékben magukban hordozzák a hiba lehetőségét. A gazdasági jelenségek alapvető problémája, hogy minden mindennel összefügg, emiatt különösen embert próbáló feladat olyan modellt alkotni, mely a lényegét nem áldozza fel az érthetőség és a könnyen kezelhetőség oltárán. A nem számszerűsíthető (nem érzékelhető) kockázat vagy más néven bizonytalanság természetesen kívül esik a modell hatókörén, miközben ugyanúgy része a valóságnak. Az eredmények értékelésekor ezen megfontolásokat érdemes figyelembe venni.

ÖSSZEFOGLALÁS

Az adatgyűjtési és feldolgozási tevékenység elősegíti a valóság megismerését. A megismerés célja, hogy minél pontosabb előrejelzések szülessenek, mely által kiszámíthatóbbá válik a világ. Kiszámíthatóság nélkül a társas együttműködés alapja kérdőjeleződik meg. A felhalmozott tudásra építve képesek vagyunk befolyásolni a környezetünket és alkalmazkodni hozzá. Az előrejelzések készítésekor azzal az egyszerűsítő feltételezéssel élünk, hogy a múlt hasonlít a jövőre, tehát ebben a megközelítésben a jövő nem több mint a múlt előrevetített árnyékképe.

A piaci szereplők a tudást, mint eszközt az előre meghatározott céljaik megvalósítása érdekében használják fel. Az előrejelzések eredményei egyrészt biztosítják annak lehetőségét, hogy a múltbeli összefüggések, szabályszerűségek ellenőrzésnek, tesztelésnek legyenek alávetve, másrészt az eredményekre építve javulhat a döntéshozatal folyamata. Az üzleti életben a tudás fogalma alapvetően a hatékonysághoz és eredményességhez kapcsolódik, amik lehetővé teszik a célok elérését.

A tanulmányban a bolyongáselmélet szakirodalmi feldolgozásán túl bemutatásra került egy gyakorlati célkitűzéseket szem előtt tartó rövid valamint hosszú távú befektetési modell. A rövid távú egy éves előrejelzés során arra koncentráltunk, hogy meghatározzuk a befektetés jövőbeli értékét és a befektetés kockáztatott értékét. A hosszú távú befektetés során megvizsgáltuk, hogy a nyugdíjcélú megtakarítás kulcsváltozóinak (megtakarítási ráta, nyugdíjba vonulás időpontja, eszközallokáció) módosításával milyen mértékben változik meg a befektetés jövőbeli értéke és a helyettesítési ráta. A tőkepiaci hozamok szimulációja normális eloszlás mellett Student-féle t -eloszlással is le lett futtatva, annak érdekében, hogy a modell reflektáljon az empirikus hozameloszlás vastag széleire. A szabadságfokot 4-nek választva volt a legmagasabb a determinációs együttható értéke, mely a t -eloszlás és az empirikus hozameloszlás közötti illeszkedést mutatja.

A részvénybefektetés statisztikai vizsgálatával alapvetően arra a kérdésre kerestünk választ, hogy az európai adatok mennyiben felelnek meg az empirikus pénzügyek stilizált tényeinek. A stilizált tények közé tartozik a hozameloszlás negatív aszimmetriája és az eloszlás széleinek normális eloszlást meghaladó vastagsága. Továbbá a volatilitás klasztereződése azt jelenti, hogy a tőkepiacon a hosszabb nyugodt időszakokat extrém kiugró értékekkel teli időszakok követik. Az SPDR MSCI Europe tőzsdén kereskedett alap napi loghozameloszlásának enyhe negatív aszimmetriája nem tekinthető szignifikánsnak,

nem tudtuk megcáfolni azt az állítást, hogy a napi loghozamok egy szimmetrikus eloszlású sokaságból származnak. Ugyanakkor az eloszlás nem tekinthető normálisnak, mivel a napi loghozamok eloszlása csúcsosabb és a szélei vastagabbak. A tőzsdén kereskedett alap időben egymást követő napi loghozamai közötti autokorreláció előjeltől függetlenül gyenge kapcsolatot mutat, továbbá a napi loghozamok négyzetes értékei közötti autokorreláció pozitív irányú közepesnél gyengébb kapcsolatot mutat, ami utóbbi tulajdonság arra utal, hogy a volatilitás hajlamos a klaszteresedésre.

A befektetési modell finomhangolását könnyen el lehet végezni, a befektetők egyéni életkörülményeit valamint Dowd és Blake (2013) alapelveit figyelembe véve a nyugdíjcélú megtakarítási modellt számos irányba tovább lehet fejleszteni. Abban az esetben, ha a befizetéssel meghatározott nyugdíjkonstrukció feltevései kellően megalapozottak, akkor az ügyfél számára egy olyan pénzügyi termék áll rendelkezésre, mely elfogadható hozzájárulás és nagy valószínűség mellett kínálja az öregkori biztonság lehetőségét. Mindebből az következik, hogy a tervezési, döntés-előkészítési folyamat első lépéseként a modell kimenő paramétereit – a befektetés várható értékét és a helyettesítési rátát – kell meghatározni. Ezt követően a megcélzott értékekhez rendeljük hozzá a modell bemenő paramétereit, kulcsváltozóit. A projekciók eredményét felhasználva egyrészt tökéletesíthetünk magán a befektetési modellen, másrészt megkönnyíthetjük és hatékonyabbá tehetjük az ügyfelek döntéshozatalát.

IRODALOMJEGYZÉK

Folyóiratok

- Artzner, P. – Delbaen, F. – Eber, J. M. – Heath, D. (1999): Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9 (3): 203-228.
- Bachelier, L. (1900): The Theory of Speculation. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3 (17): 21-86. Translated by May, D. (2011).
- Blake, D. – Cairns, A. J. G. – Dowd, K. (2001): Pensionmetrics: stochastic pension plan design and value-at-risk during the accumulation phase. *Insurance: Mathematics and Economics*, 29 (2): 187-215.
- Borza, G. (2010): A kötelező járadékokról. *Hitelintézeti Szemle*, 9 (2): 165-173.
- Box, G. E. P. – Pierce, D. A. (1970): Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association*, 65 (332): 1509-1526.
- Bugár, Gy. – Uzsoki, M. (2006): Befektetések kockázatának mérése. *Statisztikai Szemle*, 84 (9): 876-898.
- Csontos, L. – Király, J. – László, G. (1997): Az ezredvégi nagy borzongás. *Közgazdasági Szemle*, 44 (7): 569-596.
- Dowd, K. – Blake, D. (2013): Good Practice Principles in Modelling Defined Contribution Pension Plans. *Pensions Institute*, Discussion Paper PI-1302
- Engle, R. F. (1982): Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50 (4): 987-1008.
- Engle, R. F. (2001): GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics. *Journal of Economic Perspectives*, 15 (4): 157-168.
- Holtzer, P. (2010): Az öngondoskodás stratégiai megközelítésben. *Hitelintézeti Szemle*, 9 (2): 109-127.
- Jarque, C. M. – Bera, A. K. (1987): A Test for Normality of Observations and Regression Residuals. *International Statistical Review*, 55 (2): 163-172.
- Kendall, M. G. (1953): The Analysis of Economic Time-Series – Part 1: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society*, 116 (1): 11-34.
- Kovács, E. (2010): A nyugdíjreform demográfiai korlátai. *Hitelintézeti Szemle*, 9 (2): 128-149.
- Kun, J. (2008): A „lakásért járadék”-programok (Értékek és kockázatok – nemzetközi kitekintés). *Hitelintézeti Szemle*, 7 (1): 91-115.
- Ljung, G. M. – Box, G. E. P. (1978): On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65 (2): 297-303.
- Madarász, A. (2009): Buborékok és legendák: Válságok és válságmagyarázatok – a tulipánmánia és a Déltengeri Társaság, I. rész. *Közgazdasági Szemle*, 56 (7): 609-633.
- Madarász, A. (2011a): Buborékok és legendák: Válságok és válságmagyarázatok – II/1. rész: A Déltengeri Társaság. *Közgazdasági Szemle*, 58 (11): 909-948.

- Madarász, A. (2011b): Buborékok és legendák: Válságok és válságmagyarázatok – II/2. rész: A Déltengeri Társaság. *Közgazdasági Szemle*, 58 (12): 1001-1028.
- Madarász, A. (2012): Adósság, pénz és szabadság. *Közgazdasági Szemle*, 59 (5): 457-507.
- Mandelbrot, B. (1963): The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, 36 (4): 394-419.
- Rockafellar, R. T. – Uryasev, S. (2000): Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2 (3): 21-41.
- Rockafellar, R. T. – Uryasev, S. (2002): Conditional value-at-risk for general loss distribution. *Journal of Banking and Finance*, 26 (7): 1443-1471.
- Roberts, H. V. (1959): Stock-Market „Patterns” and Financial Analysis: Methodological Suggestions. *Journal of Finance*, 14 (1): 1-10.
- Samuelson, P. A. (1965): Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. *Industrial Management Review*, 6 (2): 41-49.
- Vízkeleti, S. (2010): A hosszú távú megtakarítási piac újdonsága: az életciklusalap. *Hitelintézeti Szemle*, 9 (2): 174-186.
- Wiener, N. (1921a): The Average of an Analytic Functional. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 7 (9): 253-260.
- Wiener, N. (1921b): The Average of an Analytic Functional and the Brownian Movement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 7 (10): 294-298.
- Working, H. (1934): A Random-Difference Series for Use in the Analysis of Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, 29 (185): 11-24.

Könyvek

- Brown, R. (1866): *The miscellaneous botanical works of Robert Brown*. Volume 1, Ray Society, London, pp. 463-484.
- Csernyák, L. (szerk.) (2006): *Analízis*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
- Csernyák, L. (szerk.) (2007): *Valószínűességszámítás*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
- Dörömbözi, J. (szerk.) (2006): *Filozófiai szöveggyűjtemény I.* 5. kiadás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
- Einstein, A. (1956): *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Dover, New York, pp. 1-18.
- Hull, J. C. (1999): *Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek*. Panem – Prentice-Hall, Budapest, pp. 270-290.
- Jackson, M. – Staunton, M. (2001): *Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA*. John Wiley & Sons, West Sussex, pp. 1-154.
- Keynes, J. M. (1965): *A foglalkoztatás, a kamat és a pénz általános elmélete*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, pp. 169-186.
- Korpás A. (szerk.) (1996): *Általános statisztika I.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
- Korpás A. (szerk.) (1997): *Általános statisztika II.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
- Markowitz, H. M. (1959): *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley & Sons, New York, pp. 188-202.
- Medvegyev, P. – Száz, J. (2010): *A meglepetések jellege a pénzügyi piacokon*. Nemzetközi Bankárképző Központ, Budapest, pp. 1-63.
- Roberts, A (szerk.) (2010): *A hadviselés művészete II.* Kossuth Kiadó, Budapest

- Száz, J. (2009): *Pénzügyi termékek áralakulása*. Jet Set Tipográfiai Műhely, Budapest
- Tsay, R. S. (2010): *Analysis of Financial Time Series*. 3rd edn., Wiley, New Jersey, pp. 1-35.
- Zsiday, V. (2010): *Mániák és válságok a tőzsde hőskorában*. NET Média, Budapest

Internetes források

- Bloomberg (2008): *Lehman Files Biggest Bankruptcy Case as Suitors Balk*.
<http://www.bloomberg.com/apps/news?pid=newsarchive&sid=awh5hRyXkvs4>
(letöltve: 2013.09.16.)
- ECB (2013): *Monthly Bulletin – Money market interest rates*.
<http://sdw.ecb.europa.eu/browse.do?node=bbn175>
(letöltve: 2013.10.08.)
- MSCI (2013): *MSCI Europe Index adatai*.
http://www.msci.com/products/indexes/size/all_cap/methodology.html
http://www.msci.com/resources/fact_sheet/
(letöltve: 2013.10.08.)
- OECD (2012): *The OECD Roadmap for the Good Design of Defined Contribution Pension Plans*.
<http://www.oecd.org/finance/private-pensions/50582753.pdf>
(letöltve: 2013.10.16.)
- SPDR (2013): *SPDR MSCI Europe tőzsdén kereskedett alap adatai*.
<http://www.spdrseurope.com>
(letöltve: 2013.10.08.)
- Yahoo (2013): *SPDR MSCI Europe tőzsdén kereskedett alap napi záró árfolyamértékei* (2003.06.30. – 2013.06.28.).
<http://finance.yahoo.com>
(letöltve: 2013.10.08.)
- Zaiontz, C. (2013): *Real Statistics Using Excel*.
<http://www.real-statistics.com>
(letöltve: 2013.10.16.)

MELLÉKLETEK

1. MELLÉKLET: SPDR MSCI EUROPE HISTORIKUS ADATAI

SPDR MSCI Europe historikus záró árfolyamértékei (2003.06.30. – 2013.06.28.)			
Dátum	t	Záró árfolyam	Loghozam (%)
2003.06.30.	0	74,00	-
2003.07.01.	1	72,15	-2,5318
2003.07.02.	2	73,70	2,1256
2003.07.03.	3	74,25	0,7435
2003.07.04.	4	73,98	-0,3643
2003.07.07.	5	75,92	2,5885
2003.07.08.	6	75,55	-0,4885
2003.07.10.	7	74,30	-1,6684
2003.07.11.	8	75,40	1,4696
2003.07.14.	9	76,75	1,7746
2003.07.15.	10	76,15	-0,7848
2003.07.16.	11	75,20	-1,2554
2003.07.17.	12	74,80	-0,5333
⋮	⋮	⋮	⋮
2013.06.12.	2532	132,24	-0,2945
2013.06.13.	2533	132,12	-0,0908
2013.06.14.	2534	132,36	0,1815
2013.06.17.	2535	133,27	0,6852
2013.06.18.	2536	133,24	-0,0225
2013.06.19.	2537	132,86	-0,2856
2013.06.20.	2538	128,81	-3,0957
2013.06.21.	2539	127,32	-1,1635
2013.06.24.	2540	125,47	-1,4637
2013.06.25.	2541	127,27	1,4244
2013.06.26.	2542	129,43	1,6829
2013.06.27.	2543	130,26	0,6392
2013.06.28.	2544	129,63	-0,4848

Forrás: Yahoo (2013) alapján saját szerkesztés

2. MELLÉKLET: 3 HAVI EURIBOR HISTORIKUS ADATAI

3 havi Euribor historikus adatai (2003. július – 2013. június)			
Dátum	t	Kamatláb (%)	Loghozam (%)
2003.07.	1	2,1300	2,1076
2003.08.	2	2,1404	2,1178
2003.09.	3	2,1473	2,1246
2003.10.	4	2,1436	2,1209
2003.11.	5	2,1590	2,1360
2003.12.	6	2,1463	2,1236
2004.01.	7	2,0895	2,0680
2004.02.	8	2,0706	2,0495
2004.03.	9	2,0288	2,0085
2004.04.	10	2,0488	2,0281
2004.05.	11	2,0859	2,0644
2004.06.	12	2,1127	2,0907
2004.07.	13	2,1160	2,0939
⋮	⋮	⋮	⋮
2012.06.	108	0,6589	0,6567
2012.07.	109	0,4970	0,4958
2012.08.	110	0,3324	0,3318
2012.09.	111	0,2463	0,2460
2012.10.	112	0,2079	0,2077
2012.11.	113	0,1920	0,1918
2012.12.	114	0,1854	0,1852
2013.01.	115	0,2049	0,2047
2013.02.	116	0,2234	0,2232
2013.03.	117	0,2061	0,2059
2013.04.	118	0,2089	0,2087
2013.05.	119	0,2012	0,2010
2013.06.	120	0,2103	0,2101

Forrás: ECB (2013) alapján saját szerkesztés

3. MELLÉKLET: HOZAMSZÁMÍTÁS

Egy pénzügyi eszköz jövőbeli árfolyama (S_T) a jelenbeli árfolyam (S_0) és az Euler-féle szám loghozammal (r) hatványozott szorzata:

$$S_T = S_0 e^r$$

Amennyiben osztunk a kezdeti árfolyammal, akkor megkapjuk az időszak relatív árfolyamváltozást:

$$\frac{S_T}{S_0} = e^r$$

Az egyenlet mindkét oldalának vesszük a természetes alapú logaritmusát:

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \ln(e^r)$$

Mivel $\ln(e^r) = r \cdot \ln(e)$ és a két függvény egymás inverze $\ln(e) = 1$, ezért: $\ln(e^r) = r$. A loghozam a relatív árfolyamváltozás természetes alapú logaritmusára vagy másképpen a jövőbeli és a jelenbeli árfolyam logaritmusának különbsége:

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \ln(S_T) - \ln(S_0) = r$$

Amennyiben a loghozamok eloszlása normális, akkor a relatív árfolyamváltozás (e^r) lognormális eloszlású, tehát a jövőbeli árfolyam nem vehet fel negatív értéket. Formálisan megfogalmazva, ha egy változó természetes alapú logaritmusára normális eloszlású, akkor a változó lognormális eloszlást követ. Amikor a loghozamok eloszlásának bal széle felé közelítünk, akkor:

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} e^r = \frac{S_T}{S_0} = 0 \Rightarrow S_T \geq 0$$

