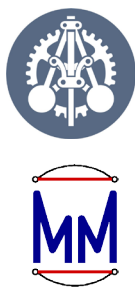


Az almarázás dinamikája

TDK dolgozat



Szerzők: Peschka Alfréd III. évf.
Béri Bence III. évf.



Konzulens:

Dr. Stépán Gábor egyetemi tanár
Műszaki Mechanika Tanszék



Tartalom

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	2
JELÖLÉSJEGYZÉK.....	3
1 BEVEZETÉS	5
2 A MECHANIKAI MODELLEK HIERARCHIÁJA.....	6
2.1 KETTŐS INGA MODELL	7
2.2 RUGÓS INGA MODELL	11
2.3 RUGÓLÁNC MODELL DISZKRÉT RUGÓKKAL.....	13
2.4 RUGÓLÁNC MODELL HAJLÍTOTT RÚDDAL.....	14
2.5 INGAMODELL HAJLÍTOTT RÚDDAL	17
3 A CSILLAPÍTOTT, KOMBINÁLT INGA ÉS RUGALMAS RÚD MODELLJE	24
3.1 MODÁLIS ANALÍZIS ALKALMAZÁSA ARÁNYOSAN CSILLAPÍTOTT REZGÉSEK ESETÉN	25
3.2 DISSZIPATÍV POTENCIÁL	26
3.3 BEFOGOTT RÚD LEHAJLÁSÁNAK VIZSGÁLATA	26
3.4 MÁTRIXEGYÜTTHATÓS MOZGÁSEGYENLET FELÍRÁSA	33
4 A MODELLEK PARAMÉTEREINEK KÍSÉRLETI MEGHATÁROZÁSA	37
4.1 GEOMETRIAI PARAMÉTEREK	37
4.2 TEHETETLENSÉGI PARAMÉTEREK.....	38
4.3 MEREVSÉGI PARAMÉTEREK	39
4.3.1 Torziós rugómerevség.....	39
4.3.2 A szár rugóállandó mátrixa és anyagjellemzői.....	40
4.4 A SZÁR KARAKTERISZTIKÁJA.....	42
4.5 A SZÁR LEHAJLÁSÁNAK MÉRÉSE, ÖSSZEVETÉS A SZÁMOLT ADATOKKAL	43
4.6 CSILLAPÍTÁS	44
4.7 AZ ALMASZÁR SZAKÍTÓSZILÁRDSÁGA	47
5 AZ ALMARÁZÁS ÚTGERJESZTÉSES MODELLJE.....	47
5.1 AZ ÁLTALÁNOS ERŐK MEGHATÁROZÁSA	48
5.2 A STACIONÁRIUS MEGOLDÁS MEGHATÁROZÁSA, FREKVENCIAGÖRBÉK	49
5.3 HAJLÍTÓ NYOMATÉK, FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOT	50
6 NEMLINEARITÁS MEGJELENÉSE.....	54
7 ÖSSZEFOGLALÁS	56
MELLÉKLET	58
1 A 4. FEJEZETBEN ISMERTETETT ÁTLAGOS MÉRT ADATOK TÁBLÁZATOS FORMÁJA	58

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnénk köszönetet mondani Dr. Stépán Gábor professzor úrnak a szakmai támogatásért és témánk kidolgozásához nyújtott segítségért. Dr. Samu Krisztiánnak a Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszéken az egyik laboratóriumi méréshez nyújtott segítségéért, és Dr. Szirmai Jenőnek, hogy ötleteivel hozzájárult egyes matematikai problémák kezeléséhez.

Jelölésjegyzék

$\mathbf{a}$	m/s^2	gyorsulásvektor
$\mathbf{A}$	SI	lengéskép vektor
A	m^2	felület
B_x, B_y	N	B pontban ébredő x és y irányú erő
c_{jk}	SI	rugóállandó mátrix eleme
c_k	SI	konstansok
$\mathbf{C}$	SI	alma szárának rugóállandó mátrixa
d	m	alma szárának átmérője
$\emptyset D$	m	átmérő
D	-	relatív csillapítási tényező
$\mathcal{D}$	Nm/s	disszipatív potenciál
E	Pa	rugalmassági modulusz
f	m	lehajlás
F	N	erő
g	m/s^2	gravitációs gyorsulás
h	m	az almaszár-alma csuklóponthoz az alma felületétől mért távolsága
H	m	alma magassága
I	m^4	másodrendű keresztmetszeti nyomaték
k_{jk}	SI	általános csillapítási mátrix eleme
k_s	s	arányszám a csillapítási és merevségi mátrix között
$\mathbf{K}$	SI	csillapítási mátrix
L	m	rúd hossza
m	kg	tömeg
M_h	Nm	hajlító nyomaték
$\mathbf{M}$	SI	tömegmátrix
p	-	alma geometriáját jellemző arányszám
$\mathbf{q}$	SI	általános koordináták vektora
$\mathbf{Q}$	N	általános erő vektora

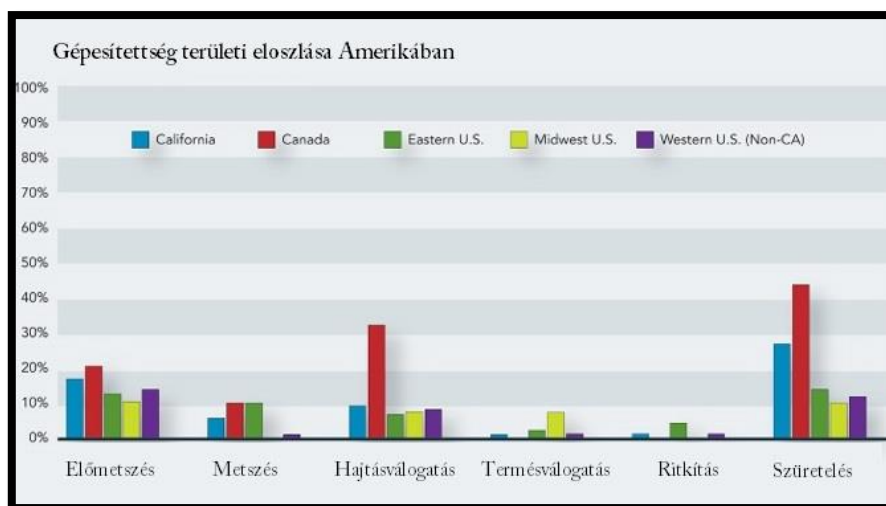
r	m	útgerjesztés amplitúdója
$r(t)$	-	útgerjesztés időfüggvénye
$\mathbf{r}$	m	helyvektor
R	m	gömb sugara
s	m	ívhossz
s	N/m	rugómerevség
s_{jk}	SI	általános merevségi mátrix eleme
s_t	Nm/rad	torziós rugómerevség
$\mathbf{S}$	SI	merevségi mátrix
t	s	idő
T	Nm	kinetikus energia
$\mathbf{T}$	SI	transzformációs mátrix
U	Nm	potenciál függvény
$\mathbf{v}$	m/s	sebességvektor
$\mathbf{y}$	SI	modális koordináták vektora
α	rad/s	sajátkörfrekvencia
δ_x, δ_y	m	rúd végpontjának x és y irányú elmozdulása
$\boldsymbol{\varepsilon}$	rad/ s ²	szöggyorsulás vektor
θ_s	kgm ²	súlyponti tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték
Λ	-	logaritmikus dekrementum
σ_M	Pa	szakítószilárdság
σ	Pa	normál feszültség
φ_0	rad	rúd végső keresztmetszetének szögelfordulása
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi$	rad	szögelfordulás/ általános koordináta
ω	rad/s	gerjesztés körfrekvenciája
Ω	rad/s	szögsebesség

„A mechanikában nem árt, ha az ember tisztában van azzal, mire nincs szüksége ahhoz, hogy valamit elkészítsen.”

James Watt

1 Bevezetés

Dolgozatunkban olyan problémák megoldásával foglalkozunk, amelyekkel korszerűsíthetők a különböző gyümölcsök, esetünkben almafajták szüretelése, a kézi munkaerőt gépek váltják fel. A betakarítás gépesítése több szempontból is kedvező lehet. Elsősorban munkaerő-, illetve időtakarékoság (éjjel-nappali munkavégzés) jellemzi, hosszabb távon pedig megtérülnek a költségek az adott technológia bevezetésével. A műszaki tudományok, technológiák fejlődése révén a költséghatékonyság javul, ez történik a mezőgazdaságban is. A mezőgazdasági termelés nagy része már ma is gépekkel valósul meg, de a gyümölcsszüretelés mindmáig a legnagyobb költséghányadot képviseli, hiszen ezen a területen még ma is nagyrészt az emberi munkaerő dominál. Fontos ugyanakkor kiemelni, hogy főleg külföldön sok helyen folyik fejlesztés a témában. Itt elsősorban az Egyesült Államokra, Kanadára kell gondolnunk. Ezen országok hatalmas mezőgazdasági területekkel rendelkeznek, így a betakarítás pusztán emberi erővel lehetetlen lenne. Az elmúlt években, a dolgozatban is megjelenő gyümölcsszüretelés mechanizmussal történő megoldása nagy teret nyert. Az 1.1 ábra szemlélteti ezeket a tendenciákat.



1.1 ábra Szüretelőgépek alkalmazásának aránya [1]

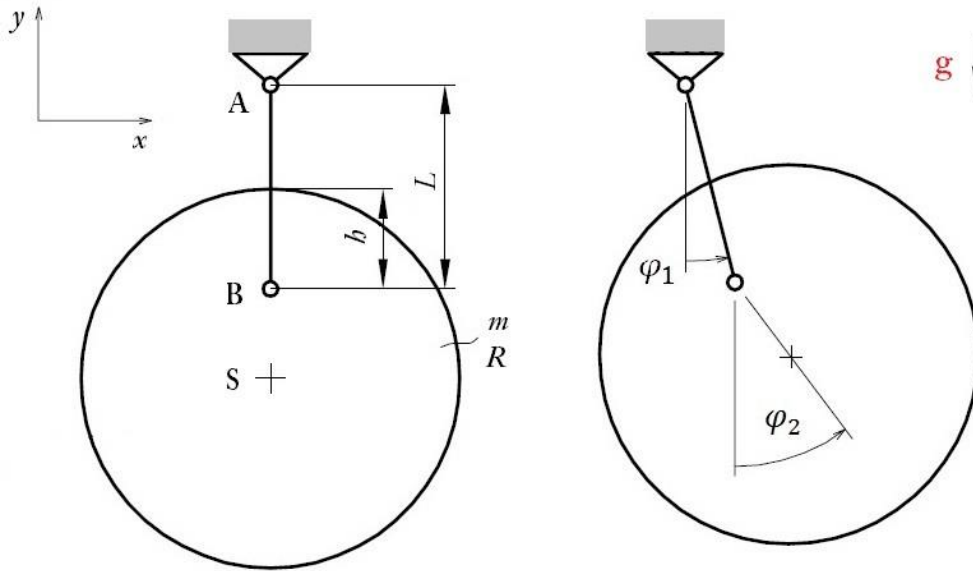
A probléma évtizedek óta foglalkoztatja a kutatókat, mint például Rand és Cooke, amerikai professzorokat: 1969-es tanulmányukban [2] foglalkoztak a gyümölcsök rezgéstani

viselkedésével. Munkájuk elsősorban a hasonló geometriai formákkal rendelkező gyümölcsökre terjedt ki, mint például: barack-, szilva-, citrom-, narancs-, cseresznye- és almafélék. Mechanikai modellalkotásuk során egy lineáris, két szabadságfokú kettős ingából indultak ki. A modell pontosítását az inga rúdjának mindkét végén megjelenő torziós rugó adta; felvetették ugyanis annak fontosságát, hogy a gyümölcsszár viselkedését dinamikailag pontosan kell modellezni. Meghatározták a sajátfrekvenciákat, valamint vizsgálták ezek függését a gyümölcsök geometriai viszonyaitól, és ezen eredmények alapján vontak le következtetéseket. Dolgozatunkban – ellentétben az említett tanulmánnyal – egy konkrét gyümölcsnek, az almának a mechanikai viselkedését vizsgáltuk és elemeztük. Az eddigiek alapján már látható a feladat fontossága és egyúttal a bonyolultsága, hiszen az alma ingaszerű viselkedése mellett a szár merevségét is figyelembe kell venni. Így még a két dimenziós linearizált modell összeállítása és annak elemzése is kihívást jelent. Munkánkban ezt a folyamatot fejtjük ki, törekedve a valóság minél pontosabb közelítésére, mely megjelenik a mechanikai modellalkotástól, a konkrét adatok számolásához szükséges méréseken át, az optimális modell vizsgálatáig.

2 A mechanikai modellek hierarchiája

Mechanikai modellalkotásunk során felépítettünk egy bonyolultsági hierarchiát modelljeink között. A természetben tett megfigyeléseinket vettük alapul, így a „Bevezető” szövegben is említett ingaszerű mozgást vizsgáltunk. Ezen mozgásforma, ahogy Rand és Cooke [2] is vizsgálta, alma esetében kettős ingaként jelenik meg. Vizsgálatainkat a legegyszerűbb kettős inga modellel kezdtük, majd lépésről lépésre haladva pontosítottuk modelljeinket, próbáltuk azokat a valósághoz mérten legmegfelelőbben közelíteni. Az alfejezetekben megjelenő modellek felépítése hasonló jellegű. Ezek az alapkoncepció szerint egy rúdból és egy gömbből állnak. A rúd tömege és átmérője elhanyagolható, a gömböt pedig a sugara és a tömege jellemzi. Ez a konstrukció eleve különbözik a [2] forrásszövegben vizsgálttól modellek geometriai felépítésétől, mivel mi már figyelembe vettük a gömb és a rúd, vagyis az alma és a szára közti csatlakozás pontos helyét, aminek jelentős hatása van a kialakuló rezgésekre.

2.1 Kettős inga modell



2.1 ábra Kettős inga modell paraméterei és általános koordinátái

A rendszer egy L hosszúságú rúdból és egy R sugarú, m tömegű gömbből áll. A rúd csuklós felfüggesztésű, valamint a gömbhöz ugyancsak csuklóval csatlakozik a gömb súlypontjától $R-h$ távolságban. Az 2.1 ábrán vázolt két szabadságfokú rendszerhez egy φ_1 valamint egy φ_2 függőleges helyzettől való szögkitérés tartozik. φ_1 a rúd szögelfordulását, φ_2 pedig a gömb felfüggesztési pontja és a súlypontja közötti szakasz szögelfordulását jelöli.

Tehát az általános koordináták vektora

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

A rendszer kinetikus energiája

$$T = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} \theta_s \Omega^2, \quad (2.1.1)$$

ahol a szögsebesség

$$\Omega = \dot{\varphi}_2. \quad (2.1.2)$$

A gömb tehetetlenségi nyomatéka

$$\theta_s = \frac{2}{5} m R^2. \quad (2.1.3)$$

A gömb súlypontjának $\mathbf{v}_s$ sebessége a 2.1 ábra szerint felvett (x, y) koordináta-rendszerben a következő egyenletből adódik:

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{BS}, \quad (2.1.4)$$

ahol

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{AB}. \quad (2.1.5)$$

Mivel $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ a gömb súlypontjának sebessége

$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 L \cos \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 L \sin \varphi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (R-h)\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \\ (R-h)\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix}. \quad (2.1.6)$$

A (2.1.6) kifejezésben a φ_1 -et tartalmazó tagok a szállító sebesség komponenseit, a φ_2 -t tartalmazó tagok pedig a relatív sebesség komponenseit jelentik.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_S^2 = & \dot{\varphi}_1^2 L^2 \cos^2 \varphi_1 + (R-h)^2 \dot{\varphi}_2^2 \cos^2 \varphi_2 + 2\dot{\varphi}_1 L (R-h) \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_1^2 L^2 \sin^2 \varphi_1 \\ & + (R-h)^2 \dot{\varphi}_2^2 \sin^2 \varphi_2 + 2\dot{\varphi}_1 L (R-h) \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

azaz

$$\mathbf{v}_S^2 = \dot{\varphi}_1^2 L^2 + (R-h)^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1 L (R-h) \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (2.1.8)$$

A sebességvektor valamint a tehetetlenségi nyomaték helyettesítése után a kinetikus energia alakja:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}_1^2 L^2 + \frac{1}{2} m (R-h)^2 \dot{\varphi}_2^2 + m \dot{\varphi}_1 L (R-h) \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} \theta_s \dot{\varphi}_2^2. \quad (2.1.9)$$

A mátrix együtthatós differenciálegyenlet tömegmátrixának elemeit a φ_1 valamint φ_2 szerinti parciális deriváltak adják:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = m L^2 \dot{\varphi}_1 + m L (R-h) \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (2.1.10)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}_1^2} \right|_0 = m L^2. \quad (2.1.11)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}_1 \partial \dot{\varphi}_2} \right|_0 = m L (R-h) \cos(\varphi_2 - \varphi_1)|_0 = m L (R-h). \quad (2.1.12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = m (R-h)^2 \dot{\varphi}_2 + m L (R-h) \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \theta_s \dot{\varphi}_2. \quad (2.1.13)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}_2^2} \right|_0 = m (R-h)^2 + \theta_s|_0 = m (R-h)^2 + \frac{2}{5} m R^2. \quad (2.1.14)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}_2 \partial \dot{\varphi}_1} \right|_0 = m L (R-h) \cos(\varphi_2 - \varphi_1)|_0 = m L (R-h). \quad (2.1.15)$$

Ezek alapján a tömegmátrix,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m L^2 & m L (R-h) \\ m L (R-h) & m (R-h)^2 + \frac{2}{5} m R^2 \end{bmatrix}. \quad (2.1.16)$$

A mátrix elemeinek egyszerűsítése céljából bevezettünk egy p konstans szorzót.

$$R - h = pR \quad (2.1.17)$$

Így az egyszerűsödő tagok:

$$m(pR)^2 + \frac{2}{5}mR^2 = mR^2 \left(p^2 + \frac{2}{5}\right), \quad (2.1.18)$$

$$mL(R - h) = mLpR. \quad (2.1.19)$$

A potenciális energia nulla szintjét az „A” pont magasságában vegyük fel (lásd 2.1 ábra). Így a potenciális energia:

$$U = -mg[L\cos\varphi_1 + (R - h)\cos\varphi_2]. \quad (2.1.20)$$

A merevségi mátrix elemei a következő kifejezésekből adódnak:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = mgL\sin\varphi_1, \quad (2.1.21)$$

melynek második deriváltjai az egyensúlyi helyzetnél:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} \right|_0 = mgL\cos\varphi_1|_0 = mgL, \quad (2.1.22)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \right|_0 = 0. \quad (2.1.23)$$

A potenciális energia φ_2 szerinti deriváltja:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = (R - h)mg\sin\varphi_2, \quad (2.1.24)$$

aminek további deriváltjai:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} \right|_0 = (R - h)mg\cos\varphi_2|_0 = (R - h)mg, \quad (2.1.25)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_1} \right|_0 = 0. \quad (2.1.26)$$

Ezek alapján a merevségi mátrix,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} mgL & 0 \\ 0 & (R - h)mg \end{bmatrix}. \quad (2.1.27)$$

Egyszerűsítés után

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} mL^2 & mLpR \\ mLpR & mR^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) \end{bmatrix}, \quad (2.1.28)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} mgL & 0 \\ 0 & pRmg \end{bmatrix}. \quad (2.1.29)$$

Mivel nincsenek csillapító illetve nem potenciális erők, így $\mathcal{D} = 0$, $\mathbf{Q} = 0$.

A sajátkörfrekvenciák a frekvenciaegyenletből határozhatók meg, aminek alakja:

$$\det(-\alpha^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}) = 0, \quad (2.1.30)$$

illetve ezt kifejtve:

$$\begin{vmatrix} -\alpha^2 mL^2 + mgL & -\alpha^2 mLpR \\ -\alpha^2 mLpR & -\alpha^2 mR^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) + pRmg \end{vmatrix} = 0, \quad (2.1.31)$$

azaz:

$$\begin{aligned} \alpha^4 m^2 L^2 R^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) - \alpha^2 m^2 L^2 pRg - \alpha^2 gLm^2 R^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) + m^2 g^2 LpR \\ - \alpha^4 m^2 L^2 R^2 p^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

$$\left(\frac{2}{5} LR \right) \alpha^4 - g \left[Lp + R \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) \right] \alpha^2 + g^2 p = 0. \quad (2.1.33)$$

Ebből a két szabadságfokú lengőrendszer α_1, α_2 sajátkörfrekvenciái meghatározhatók. A következő feladat a lengésképek meghatározása volt. Az egyenletek összefüggősége miatt a mátrix második sora ugyan azt az eredményt adná, így elég csak az első sorral számolni.

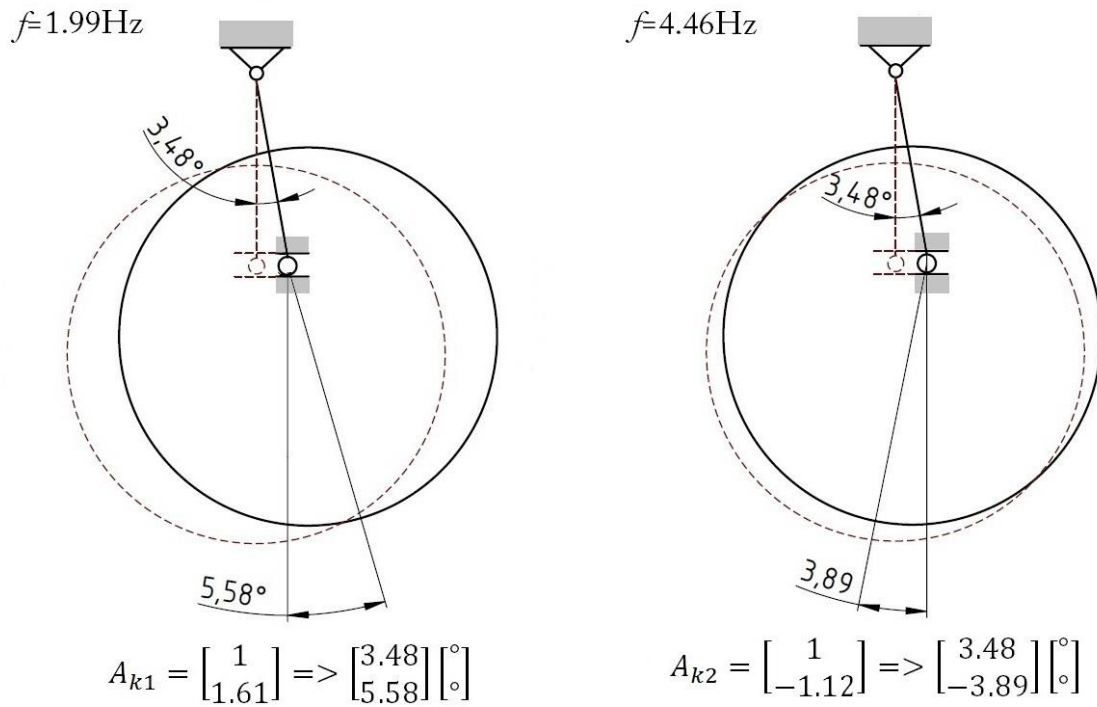
$$(-\alpha^2 \mathbf{M} + \mathbf{S})\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (2.1.34)$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha^2 mL^2 + mgL & -\alpha^2 mLpR \\ . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ A_{2k} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.1.35)$$

A két lengésképet a megfelelő α -k behelyettesítése után meghatározható az alábbi kifejezésből

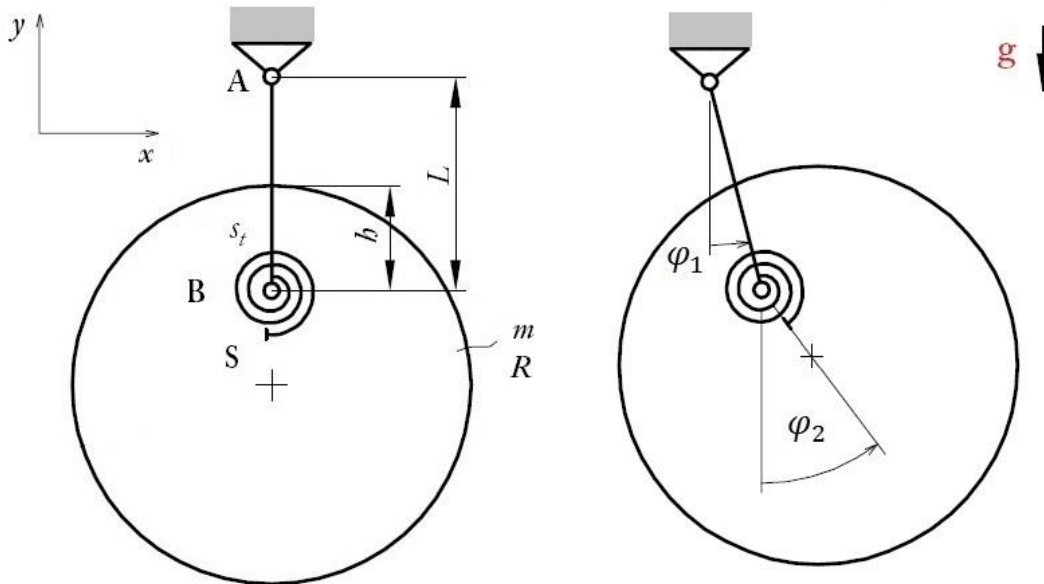
$$A_{2k} = \frac{-\alpha_k^2 mL^2 + mgL}{\alpha_k^2 mLpR} = \frac{-\alpha_k^2 L + g}{\alpha_k^2 pR}, \quad k = 1, 2. \quad (2.1.36)$$

Ezzel kiszámítottuk az $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ lengésképek vektorokat. A 2.2 ábrán a 4. fejezetben tárgyalt adatok alapján kapott $\left(f_{1,2} = \frac{\alpha_k}{2\pi} \right)$ sajátfrekvenciák és lengésképek láthatóak.



2.2 ábra Sajátfrekvenciák és lengésképek Golden alma paramétereivel

2.2 Rugós inga modell



2.3 ábra Rugós inga modell paramétereit és általános koordinátáit

Ez a modell annyiban tér el a 2.1. fejezetben tárgyalttól, hogy a rúd és a gömb csatlakozásában megjelenik egy torziós rugó, mely a valóságot pontosabban közelíti, ezáltal a

gömbnek, tehát magának az almának a szögelfordulása kisebb, mint az előző fejezetben bemutatott modell esetében.

A rendszer kinetikus energiája megegyezik a 2.1. fejezetben kifejtett kinetikus energiával, a tömegmátrix változatlanul

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} mL^2 & mLpR \\ mLpR & mR^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) \end{bmatrix}. \quad (2.2.1)$$

A rendszer potenciál függvénye az előző modellhez képest kiegészül a rugó potenciális energiájával:

$$U = -mg[L\cos\varphi_1 + (R - h)\cos\varphi_2] + \frac{1}{2}s_t(\varphi_2 - \varphi_1)^2. \quad (2.2.2)$$

Így a korábbi modellhez képest a merevségi mátrix most nem lesz diagonális:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} mgL + s_t & -s_t \\ -s_t & (R - h)mg + s_t \end{bmatrix}. \quad (2.2.3)$$

Csillapító illetve nem potenciális erők hiányában, $\mathcal{D} = 0, \mathbf{Q} = 0$.

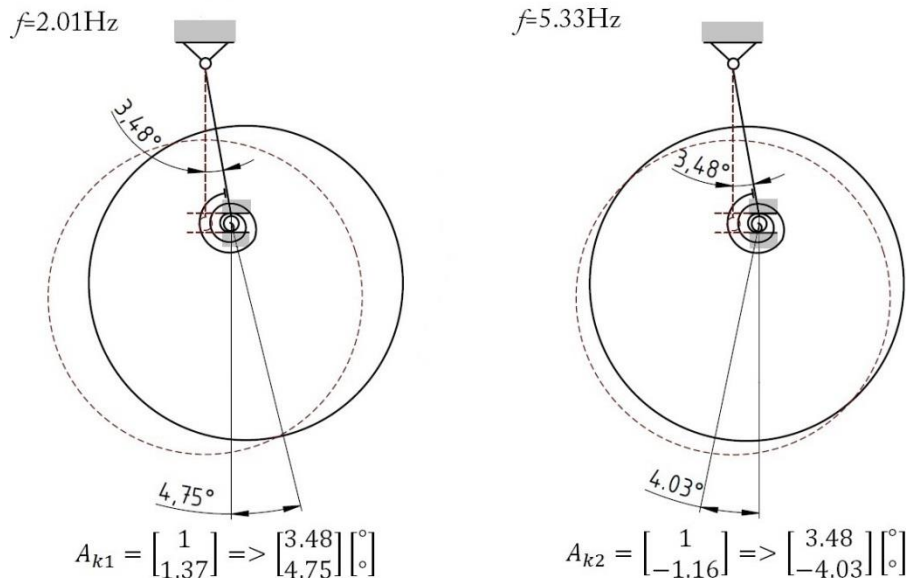
A frekvenciaegyenlet új alakja:

$$\left(\frac{2}{5}L^2R \right) \alpha^4 - g \left(L^2(p + p_t) + (RL + p_tR^2) \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) + 2RLpp_t \right) \alpha^2 + g^2(Lp + Lp_t + Rpp_t) = 0 \quad (2.2.4)$$

A korábbiakhoz hasonlóan a két lengéskép a megfelelő α_k sajátkörfrekvenciák behelyettesítése után meghatározható a következő kifejezésből

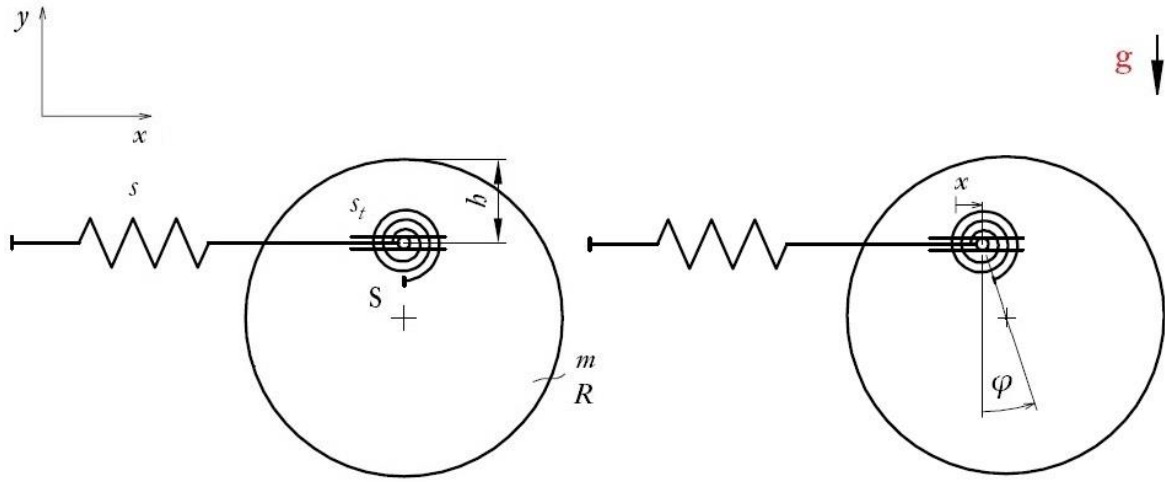
$$A_k = \frac{-\alpha_k^2 mL^2 + mgL + s_t}{\alpha_k^2 mLpR + s_t}, \quad k = 1, 2.$$

Az 2.4 ábrán a 4. fejezetben tárgyalt adatok alapján számolt sajátfrekvenciák és lengésképek láthatóak.



2.4 ábra Sajátfrekvenciák és lengésképek Golden alma paramétereivel

2.3 Rugólánc modell diszkrét rugókkal



2.5 ábra Rugólánc modell paraméterei és általános koordinátái

A 2.5 ábrán látható konstrukció egy „s” rugómerevségű rugóból, egy s_t torziós rugómerevségű torziós rugóból valamint az almát jelképező gömbből áll. A két rugó soros kapcsolású. A gömbbel a rugók gömb súlypontjától $R-h$ távolságban csuklósan kapcsolódnak. A rendszer kinetikus energiája,

$$T = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} \theta_s \Omega^2 \quad (2.3.1)$$

A szögsebesség

$$\Omega = \dot{\varphi}. \quad (2.3.2)$$

A gömb tehetetlenségi nyomatéka,

$$\theta_s = \frac{2}{5} m R^2. \quad (2.3.3)$$

A gömb súlypontjának sebessége

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{BS}, \quad (2.3.4)$$

ahol

$$\mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3.5)$$

Így a gömb súlypontjának sebessége

$$\mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} \dot{x} + \dot{\varphi}(R-h)\cos\varphi \\ \dot{\varphi}(R-h)\sin\varphi \end{bmatrix}. \quad (2.3.6)$$

Behelyettesítés a kinetikus energiába,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[(R-h)^2 + \frac{2}{5} R^2 \right] \dot{\varphi}^2 + m \dot{x} \dot{\varphi} (R-h) \cos\varphi. \quad (2.3.7)$$

A rendszer nullpontját a rugók és a gömb csuklós kapcsolódásának szintjéhez véve a potenciális energia felírása:

$$U = \frac{1}{2} s x^2 + \frac{1}{2} s_t \varphi^2 - m g (R-h) \cos\varphi. \quad (2.3.8)$$

Ezek alapján a tömeg-, és merevségi mátrix:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & m(R-h) \\ m(R-h) & m \left[(R-h)^2 + \frac{2}{5} R^2 \right] \end{bmatrix}, \quad (2.3.9)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s_t + mg(R-h) \end{bmatrix}. \quad (2.3.10)$$

Csillapító illetve nem potenciális erők hiányában, $\mathcal{D} = 0, \mathbf{Q} = 0$.

A frekvenciaegyenlet új alakja:

$$\alpha^4 m^2 R^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) - \alpha^2 m (p R m g + s_t) - \alpha^2 m s R^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) + s (p R m g + s_t) - \alpha^4 m^2 R^2 p^2 = 0.$$

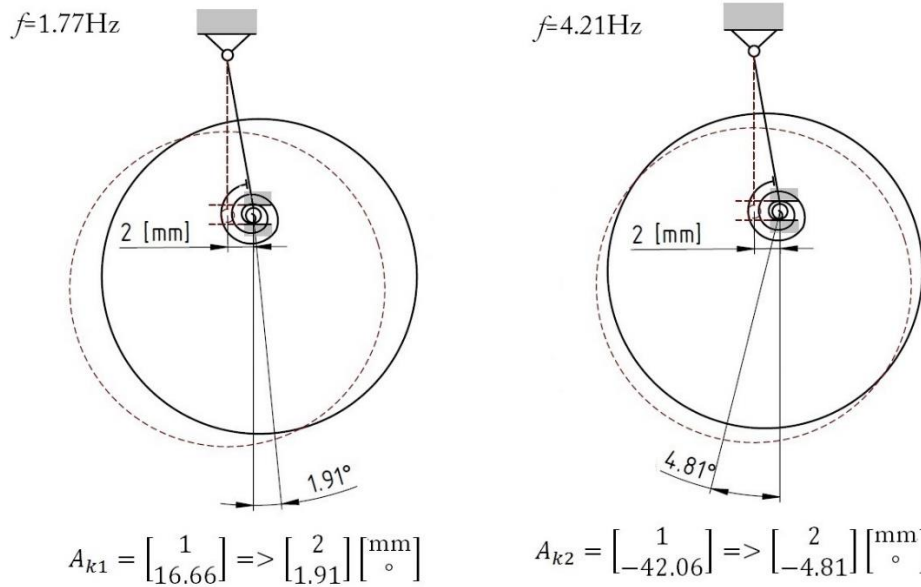
Egyszerűsítve:

$$\left(\frac{2}{5} m^2 R^2 \right) \alpha^4 - \left[m s_t + p R m^2 g + m s R^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) \right] \alpha^2 + s s_t + s p R m g = 0. \quad (2.3.11)$$

A korábbiakhoz hasonlóan a két lengéskép a megfelelő α_k sajátkörfrekvenciák behelyettesítése után meghatározható a következő kifejezésből

$$A_k = \frac{-\alpha_k^2 m + s}{\alpha_k^2 m p R}, \quad k = 1, 2.$$

Az 2.6 ábrán a 4. fejezetben tárgyalt adatok alapján számolt sajátfrekvenciák és lengésképek láthatóak.

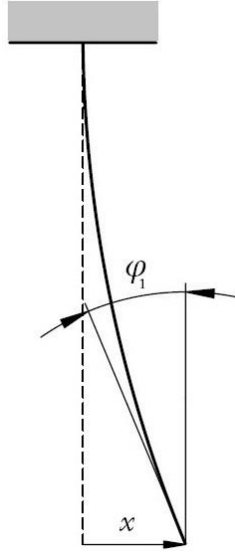


2.6 ábra Sajátfrekvenciák és lengésképek Golden alma paramétereivel

2.4 Rugólánc modell hajlított rúddal

Az eddig vizsgált modelleken egy további pontosítást hajtottunk végre, melyben a torziós rugó közelítő elfordulása a szár pontos szögelfordulásával lett helyettesítve. A következőkben ezt fejtjük ki részletesen.

A vizsgált rendszer tömegmátrixa változatlan.



2.7 ábra Hajlított szár

A pontosítás a rúd deformációjából adódik. A 2.7 ábrán látható hajlított rúd esetén a potenciális energiában megjelenik egy φ_1 szögelfordulás is, amely a torziós rugóból adódó alakváltozási energiát változtatja meg. A közelítés tehát egy befogott tartó x lehajlásán és φ_1 szögelfordulásán alapul:

$$x = \frac{FL^3}{3IE}, \quad (2.4.1)$$

$$\varphi_1 = \frac{FL^2}{2IE}. \quad (2.4.2)$$

A szögelfordulás valamint a lehajlás aránya

$$\varphi_1 \cong x \frac{3}{2L}. \quad (2.4.3)$$

Így az előző modellben szereplő rendszer potenciálfüggvényét kiegészítve,

$$U = \frac{1}{2}sx^2 + \frac{1}{2}s_t\left(\varphi - x\frac{3}{2L}\right)^2 - mg(R-h)\cos\varphi. \quad (2.4.4)$$

A merevségi mátrix elemeit a megfelelő deriváltak adják:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = sx - s_t\left(\varphi - x\frac{3}{2L}\right)\frac{3}{2L}, \quad (2.4.5)$$

melynek további deriváltjai:

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_0 = s + s_t\frac{9}{4L^2}, \quad (2.4.6)$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \varphi}\right|_0 = -s_t\frac{3}{2L}. \quad (2.4.7)$$

A potenciális energia φ szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = s_t \left(\varphi - x \frac{3}{2L} \right) + mg(R - h) \sin \varphi, \quad (2.4.8)$$

amit ismét tovább deriválva kapjuk:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right|_0 = s_t + mg(R - h) \cos \varphi|_0 = s_t + mg(R - h), \quad (2.4.9)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial x} \right|_0 = -s_t \frac{3}{2L}. \quad (2.4.10)$$

A merevségi mátrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s + s_t \frac{9}{4L^2} & -s_t \frac{3}{2L} \\ -s_t \frac{3}{2L} & s_t + mgpR \end{bmatrix}. \quad (2.4.11)$$

Csillapító illetve nem potenciális erők hiányában, $\mathcal{D} = 0, \mathbf{Q} = 0$.

A frekvenciaegyenlet új alakja:

$$\begin{aligned} & \alpha^4 m^2 R^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) - \alpha^2 m (pRmg + s_t) - \alpha^2 m \left(s + s_t \frac{9}{4L^2} \right) R^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) + \\ & (s + s_t \frac{9}{4L^2}) (pRmg + s_t) - \left(\alpha^4 m^2 R^2 p^2 + \alpha^2 mpRs_t \frac{3}{L} + s_t^2 \frac{9}{4L^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

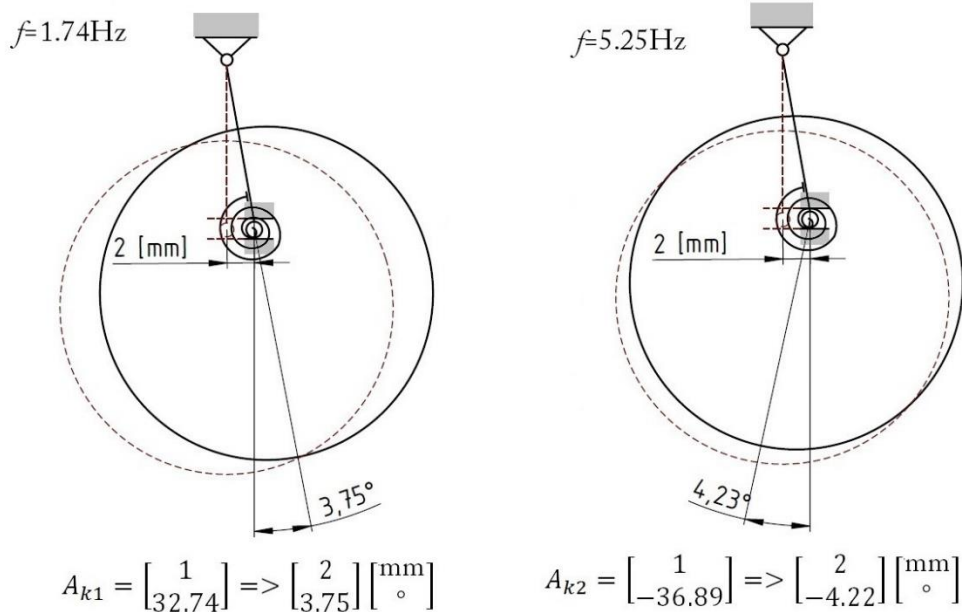
mely egyszerűsítve:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{5} m^2 R^2 \right) \alpha^4 - \left[ms_t + pRm^2 g + m \left(s + s_t \frac{9}{4L^2} \right) R^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) + mpRs_t \frac{3}{L} \right] \alpha^2 \\ & + (s + s_t \frac{9}{4L^2}) (pRmg + s_t) - s_t^2 \frac{9}{4L^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

A korábbiakhoz hasonlóan a két lengéskép a megfelelő α_k sajátkörfrekvenciák behelyettesítése után meghatározható a következő kifejezésből

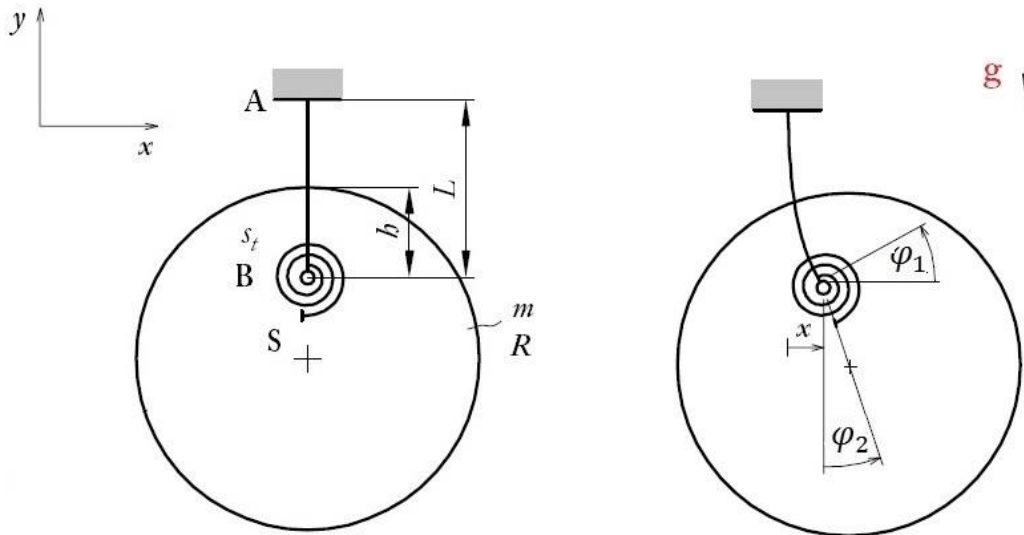
$$A_k = \frac{-\alpha_k^2 m + s + s_t \frac{9}{4L^2}}{\alpha_k^2 mpR + s_t \frac{3}{2L}}, \quad k = 1, 2.$$

Az 2.8 ábrán a 4. fejezetben tárgyalt adatok alapján számolt lengésképek láthatóak.



2.8 ábra Sajátfrekvenciák és lengésképek Golden alma paramétereivel

2.5 Ingamodell hajlított rúddal



2.5.1 ábra Inga hajlított rúddal (paraméterek és általános koordináták)

A modellalkotás azon lépése következik, melyben egy három szabadságfokú lengőrendszert vizsgálunk. A rendszer egy rugalmas rúdból, egy torziós rugóból, valamint egy gömbből áll. A korábbi modellekhez hasonlóan a rúd a gömbhöz a gömb súlypontjától $R-h$ távolságban ideális csuklóban kapcsolódik egy s_t merevségű torziós rugón keresztül a 2.5.1 ábra alapján.

A rendszer kinetikus energiája

$$T = \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}\theta_s\Omega^2. \quad (2.5.1)$$

Szögsebesség

$$\Omega = \dot{\varphi}_2. \quad (2.5.2)$$

Gömb tehetetlenségi nyomatéka

$$\theta_s = \frac{2}{5}mR^2. \quad (2.5.3)$$

A gömb súlypontjának relatív sebessége

$$\mathbf{v}_{\text{Srel}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_2(R-h)\cos\varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2(R-h)\sin\varphi_2 \end{bmatrix}. \quad (2.5.4)$$

A rendszer „B” pontjának sebessége

$$\mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.5.5)$$

A gömb súlypontjának sebessége a következőképpen alakul

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{BS}. \quad (2.5.6)$$

$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \dot{x} + \dot{\varphi}_2(R-h)\cos\varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2(R-h)\sin\varphi_2 \end{bmatrix} \quad (2.5.7)$$

$$v_S^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}_2(R-h)\cos\varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2(R-h)^2\cos^2\varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2(R-h)^2\sin^2\varphi_2 \quad (2.5.8)$$

A kinetikus energiába történő behelyettesítés:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}[m(R-h)^2 + \theta_s]\dot{\varphi}_2^2 + m\dot{x}\dot{\varphi}_2(R-h)\cos\varphi_2 \quad (2.5.9)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[(R-h)^2 + \frac{2}{5}R^2\right]\dot{\varphi}_2^2 + m\dot{x}\dot{\varphi}_2(R-h)\cos\varphi_2 \quad (2.5.10)$$

A kinetikus energia megfelelő számú deriváltjai:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + m\dot{\varphi}_2(R-h)\cos\varphi_2. \quad (2.5.11)$$

aminek további deriváltjai:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} \right|_0 = m, \quad (2.5.12)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\varphi}_2} \right|_0 = m(R-h)\cos\varphi_2|_0 = m(R-h), \quad (2.5.13)$$

illetve

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\varphi}_1} \right|_0 = 0. \quad (2.5.14)$$

A kinetikus energia φ_2 szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = m \left[(R - h)^2 + \frac{2}{5} R^2 \right] \dot{\varphi}_2 + m \dot{x} (R - h) \cos \varphi_2 \quad (2.5.15)$$

melyből a további deriváltak:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}_2^2} \right|_0 = m \left[(R - h)^2 + \frac{2}{5} R^2 \right], \quad (2.5.16)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}_2 \partial \dot{x}} \right|_0 = m(R - h) \cos \varphi_2|_0 = m(R - h), \quad (2.5.17)$$

továbbá

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}_2 \partial \dot{\varphi}_1} \right|_0 = 0. \quad (2.5.18)$$

Mivel a kinetikus energia nem tartalmaz $\dot{\varphi}_1$ tagokat így a függvény $\dot{\varphi}_1$ szerinti deriváltjai 0-át adnak.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = 0 \quad (2.5.19)$$

$$R - h = pR \quad (2.5.20)$$

A tömegmátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & mpR \\ 0 & 0 & 0 \\ mpR & 0 & mR^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) \end{bmatrix}. \quad (2.5.21)$$

Az, hogy a tömegmátrix egyik sora és oszlopa zérus, annak felel meg, hogy a szár tömegét (tehetetlenségét) elhanyagoltuk.

A szár merevségi mátrixa paraméterekkel

$$\mathbf{S}_r = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.5.22)$$

ahol

$$S_{12} = S_{21}.$$

A rendszer potenciálfüggvénye ennek alapján

$$U = \frac{1}{2} [x \quad \varphi_1] \mathbf{S}_r \begin{bmatrix} x \\ \varphi_1 \end{bmatrix} - mg(R - h) \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} s_t (\varphi_2 - \varphi_1)^2, \quad (2.5.23)$$

ahol kifejtve a szorzásokat:

$$U = \frac{1}{2} s_{11} x^2 + s_{12} \varphi_1 x + \frac{1}{2} s_{22} \varphi_1^2 - mg(R - h) \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} s_t (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \quad (2.5.24)$$

Megfelelő deriváltak adják a merevségi mátrix elemeit

$$\frac{\partial U}{\partial x} = s_{11} x + s_{12} \varphi_1, \quad (2.5.25)$$

amiből megkapható:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_0 = s_{11}, \quad (2.5.26)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \varphi_1} \right|_0 = s_{12}, \quad (2.5.27)$$

valamint

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \varphi_2} \right|_0 = 0. \quad (2.5.28)$$

A potenciális energia φ_1 szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = s_{12}x + s_{22}\varphi_1 - s_t(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (2.5.29)$$

aminek további deriváltjait véve

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} \right|_0 = s_{22} + s_t, \quad (2.5.30)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial x} \right|_0 = s_{12}, \quad (2.5.31)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \right|_0 = -s_t. \quad (2.5.32)$$

A potenciális energia φ_2 szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = mg(R - h)\sin\varphi_2 + s_t(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (2.5.33)$$

ebből megkapható:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right|_0 = mg(R - h)\cos\varphi_2 + s_t|_0 = mg(R - h) + s_t, \quad (2.5.34)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2 \partial x} \right|_0 = 0, \quad (2.5.35)$$

valamint

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_1} \right|_0 = -s_t. \quad (2.5.36)$$

Merevségi mátrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & s_{22} + s_t & -s_t \\ 0 & -s_t & mg(R - h) + s_t \end{bmatrix}. \quad (2.5.37)$$

Csillapító illetve nem potenciális erők hiányában, $\mathcal{D} = 0, \mathbf{Q} = 0$.

A sajátkörfrekvenciák a frekvenciaegyenletből határozhatóak meg. Melyet a (2.5.38) kifejezés ír le.

$$\frac{2}{5}m^2R^2(s_{22} + s_t)\alpha^4 - m \left[pR[mg(s_{22} + s_t) - 2s_t s_{12}] + s_t s_{22} + R^2 s_{11}(s_{22} + s_t) \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) - R \left(p^2 + \frac{2}{5} \right)^2 s_{12}^2 \right] \alpha^2 - s_t(s_{12}^2 - s_{11}s_{22}) + pRmg(s_{11}s_t + s_{11}s_{22} - s_{12}^2) = 0. \quad (2.5.38)$$

A korábbiakhoz hasonlóan a két lengéskép a megfelelő α_k sajátkörfrekvenciák behelyettesítése után meghatározható a következő kifejezésekből

$$A_{i2} = \frac{\alpha_k^2 m R p \frac{s_{12}}{s_t} + \alpha_k^2 m - s_{11}}{s_{12} - \alpha_k^2 m R p \frac{s_{22} + s_t}{s_t}},$$

$$A_{i3} = \frac{s_{12} + (s_{22} + s_t)A_{i2}}{s_t}.$$

A három szabadságfokú modell visszavezethető egy két szabadságfokú rendszerre, így a lengésképeket az átalakítás után közöljük.

A 3 szabadságfokú rendszer merevségi mátrixa

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & s_{22} + s_t & -s_t \\ 0 & -s_t & mg(R - h) + s_t \end{bmatrix}. \quad (2.5.39)$$

A mozgásegyenlet

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{S} \begin{bmatrix} x \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.5.40)$$

Mivel a tömegmátrix 2. sora valamint 2. oszlopa zérus elemeket tartalmaz így a 2. egyenlet:

$$s_{12}x + (s_{22} + s_t)\varphi_1 - s_t\varphi_2 = 0. \quad (2.5.41)$$

Az egyenletet átalakítva és φ_1 -et kifejezve:

$$\varphi_1 = \frac{-s_{12}}{s_{22} + s_t} x + \frac{s_t}{s_{22} + s_t} \varphi_2. \quad (2.5.42)$$

Az átalakított modell vizsgálata

Ahol a tömegmátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & mpR \\ mpR & mR^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) \end{bmatrix}. \quad (2.5.43)$$

Potenciális energia

$$U = \frac{1}{2}s_{11}x^2 + s_{12}\varphi_1x + \frac{1}{2}s_{22}\varphi_1^2 - mg(R-h)\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}s_t(\varphi_2 - \varphi_1)^2. \quad (2.5.44)$$

A (2.5.42) kifejezéssel történő helyettesítés után:

$$U = \frac{1}{2}s_{11}x^2 + s_{12}\left(\frac{-s_{12}}{s_{22}+s_t}x + \frac{s_t}{s_{22}+s_t}\varphi_2\right)x + \frac{1}{2}s_{22}\left(\frac{-s_{12}}{s_{22}+s_t}x + \frac{s_t}{s_{22}+s_t}\varphi_2\right)^2 - mg(R-h)\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}s_t\left[\varphi_2 - \left(\frac{-s_{12}}{s_{22}+s_t}x + \frac{s_t}{s_{22}+s_t}\varphi_2\right)\right]^2,$$

mely egyszerűsítve:

$$U = \left(\frac{1}{2}s_{11} - \frac{s_{12}^2}{s_{22}+s_t}\right)x^2 + \frac{s_{12}s_t}{s_{22}+s_t}x\varphi_2 + \frac{1}{2}s_{22}\left(\frac{s_t}{s_{22}+s_t}\varphi_2 - \frac{s_{12}}{s_{22}+s_t}x\right)^2 + \frac{1}{2}s_t\left[\left(1 - \frac{s_t}{s_{22}+s_t}\right)\varphi_2 + \frac{s_{12}}{s_{22}+s_t}x\right]^2 - mg(R-h)\cos\varphi_2. \quad (2.5.45)$$

A potenciális energia megfelelő számú deriváltjai adják a merevségi mátrix elemeit.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= 2\left(\frac{1}{2}s_{11} - \frac{s_{12}^2}{s_{22}+s_t}\right)x + \frac{s_{12}s_t}{s_{22}+s_t}\varphi_2 \\ &\quad - s_{22}\left(\frac{-s_{12}}{s_{22}+s_t}x + \frac{s_t}{s_{22}+s_t}\varphi_2\right)\frac{s_{12}}{s_{22}+s_t} \\ &\quad + s_t\left[\left(1 - \frac{s_t}{s_{22}+s_t}\right)\varphi_2 + \frac{s_{12}}{s_{22}+s_t}x\right]\frac{s_{12}}{s_{22}+s_t}. \end{aligned} \quad (2.5.46)$$

A (2.5.46)-es egyenletet tovább deriválva:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_0 &= s_{11} - 2\frac{s_{12}^2}{s_{22}+s_t} + s_{22}\left(\frac{s_{12}}{s_{22}+s_t}\right)^2 + s_t\left(\frac{s_{12}}{s_{22}+s_t}\right)^2 \\ &= s_{11} - \frac{s_{12}^2}{s_{22}+s_t}, \end{aligned} \quad (2.5.47)$$

illetve

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \varphi_2}\right|_0 = \frac{s_{12}s_t}{s_{22}+s_t} - \frac{s_{12}s_t s_{22}}{(s_{22}+s_t)^2} + \left(1 - \frac{s_t}{s_{22}+s_t}\right)\frac{s_t s_{12}}{s_{22}+s_t} = \frac{s_t s_{12}}{s_{22}+s_t}. \quad (2.5.48)$$

A potenciális energia φ_2 szerinti parciális deriváltja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} &= \frac{s_{12}s_t}{s_{22}+s_t}x + s_{22}\left(\frac{-s_{12}}{s_{22}+s_t}x + \frac{s_t}{s_{22}+s_t}\varphi_2\right)\frac{s_t}{s_{22}+s_t} \\ &\quad + s_t\left[\left(1 - \frac{s_t}{s_{22}+s_t}\right)\varphi_2 + \frac{s_{12}}{s_{22}+s_t}x\right]\left(1 - \frac{s_t}{s_{22}+s_t}\right) + mg(R-h)\sin\varphi_2, \end{aligned} \quad (2.5.49)$$

aminek további deriváltjait képezve:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} \right|_0 &= s_{22} \left(\frac{s_t}{s_{22} + s_t} \right)^2 + s_t \left(1 - \frac{s_t}{s_{22} + s_t} \right)^2 + mg(R - h) \cos \varphi_2 \big|_0 = \\ &= s_{22} \left(\frac{s_t}{s_{22} + s_t} \right)^2 + s_t \left(1 - \frac{s_t}{s_{22} + s_t} \right)^2 + mg(R - h) = \frac{s_{22}s_t}{s_{22} + s_t} + mg(R - h), \end{aligned} \quad (2.5.50)$$

illetve

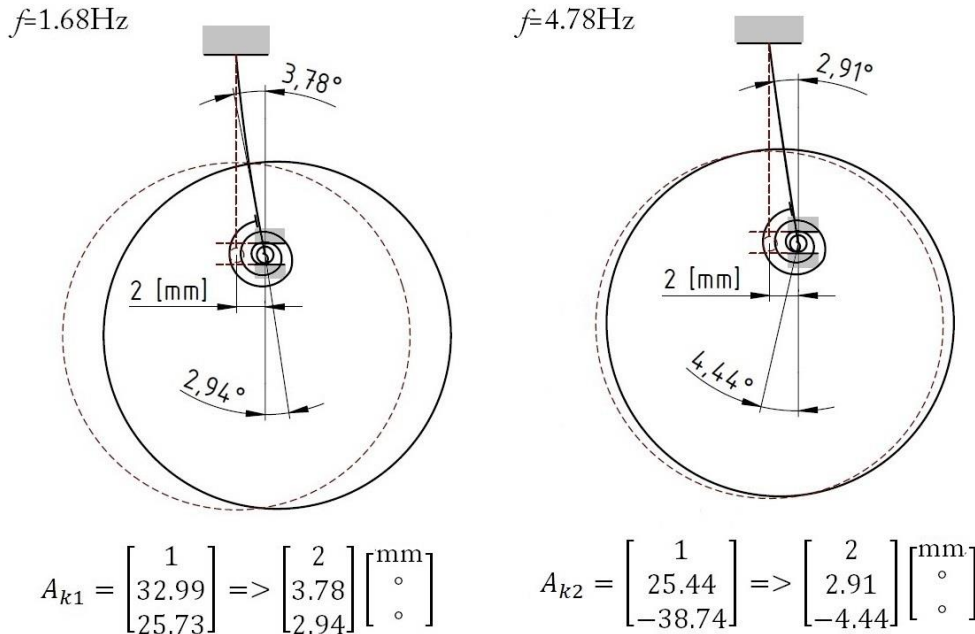
$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2 \partial x} \right|_0 = \frac{s_{12}s_t}{s_{22} + s_t} - \frac{s_{12}s_t s_{22}}{(s_{22} + s_t)^2} + \left(1 - \frac{s_t}{s_{22} + s_t} \right) \frac{s_t s_{12}}{s_{22} + s_t} = \frac{s_t s_{12}}{s_{22} + s_t} \quad (2.5.51)$$

Így a merevségi mátrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} - \frac{s_{12}^2}{s_{22} + s_t} & \frac{s_t s_{12}}{s_{22} + s_t} \\ \frac{s_t s_{12}}{s_{22} + s_t} & \frac{s_{22}s_t}{s_{22} + s_t} + mg(R - h) \end{bmatrix}. \quad (2.5.52)$$

Csillapító illetve nem potenciális erők hiányában, $\mathcal{D} = 0, \mathbf{Q} = 0$.

A sajátkörfrekvenciák a frekvenciaegyenletből határozhatóak meg. A determináns analitikus kifejtése annak bonyolultsága miatt nem történt meg. Megoldásához matematikai szoftvert használtunk és ezen szoftver segítségével határoztuk meg a lengésképeket is, melyek 2.5.2 ábrán láthatóak.



2.5.2 ábra Sajátfrekvenciák és lengésképek Golden alma paramétereivel

3.1 Modális analízis alkalmazása arányosan csillapított rezgések esetén

Arányos csillapítás /Rayleigh-féle/

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{K} = k_m \mathbf{M} + k_s \mathbf{S} - \text{lineáris kombináció,} \quad (3.1.2)$$

ahol

k_m, k_s – konstansok.

Tehát,

$$\mathbf{K} = k_s \mathbf{S}. \quad (3.1.3)$$

A k_s konstans kiszámítási módja:

$$(-\alpha_k^2 \mathbf{M} + \mathbf{S})\mathbf{A}_k = \mathbf{0} \quad (3.1.4)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ A_{12} \end{bmatrix} \quad (3.1.5)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ A_{22} \end{bmatrix} \quad (3.1.6)$$

Ahol

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ – lengésképek.

„ $\mathbf{T}$ ” transzformációs mátrix bevezetése:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{c}_1 \mathbf{A}_1 \quad \mathbf{c}_2 \mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 A_{12} & c_2 A_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.1.7)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}\mathbf{y}, \quad (3.1.8)$$

ahol

$\mathbf{y}$ – modális koordináta.

$$\mathbf{M} \mathbf{T} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{S} \mathbf{T} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (3.1.9)$$

$$\mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{T}^T \mathbf{S} \mathbf{T} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (3.1.10)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_1 A_{12} \\ c_2 & c_2 A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 A_{12} & c_2 A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.11)$$

Mivel:

$$\mathbf{A}_1^T \mathbf{M} \mathbf{A}_2 = 0 \quad (3.1.12)$$

és

$$\mathbf{A}_2^T \mathbf{M} \mathbf{A}_1 = 0 \quad (3.1.13)$$

$$\mathbf{A}_1 \perp \mathbf{A}_2. \quad (3.1.14)$$

A tömeg mátrixon keresztül

$$c_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{M} c_1 \mathbf{A}_1 = 1. \quad (3.1.15)$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{A}_1^T \mathbf{M} \mathbf{A}_1}} \quad (3.1.16)$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{A}_2^T \mathbf{M} \mathbf{A}_2}} \quad (3.1.17)$$

$$\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = k_s \mathbf{T}^T \mathbf{S} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} k_s \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & k_s \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2D_1 \alpha_1 & 0 \\ 0 & 2D_2 \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (3.1.18)$$

Így

$$k_s = \frac{2D_1}{\alpha_1} \quad (3.1.19)$$

3.2 Disszipatív potenciál

A (3.1.3) kifejezés alapján tehát az általános csillapítási mátrixunk és a merevségi mátrix között egy k_s arányossági tényező teremt kapcsolatot. Az arányossági tényező mérését a 4.6. fejezetben ismertetjük. Így a csillapítási mátrix segítségével felírhatjuk a disszipatív potenciált.

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} [\dot{x} \quad \dot{\phi}_2] \mathbf{K} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} k_{11} \dot{x}^2 + k_{12} \dot{\phi}_2 \dot{x} + \frac{1}{2} k_{22} \dot{\phi}_2^2 \quad (3.2.3)$$

A disszipatív potenciál (3.2.1) kifejezés szerinti felírásának a később ismertetett gerjesztett modell esetében lesz fontos szerepe.

3.3 Befogott rúd lehajlásának vizsgálata¹

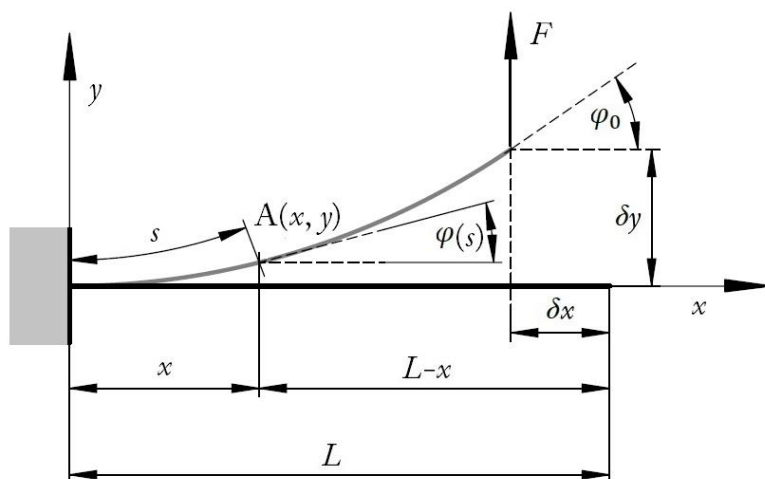
A vizsgálat egy adott, esetünkben kör keresztmetszetű lineárisan rugalmas, homogén, izotrop befogott rúdra vonatkozik, melyre érvényes a Hooke törvény:

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (3.3.1)$$

¹ A paraméterek átláthatósága érdekében a rúd lehajlását függőlegesen felfelé ható koncentrált erő esetében vizsgáltuk.

Azzal a feltételezéssel élünk, hogy a Bernoulli-Euler hipotézis érvényes, azaz a keresztmetszetek síkja sík marad (nem vetemedik), valamint a keresztmetszetek síkja merőleges marad a súlypontonra. A Feynman által javasolt elemzés szerint (ld. [3]) egy befogott rúd alakváltozása esetén felírható a Bernoulli-Euler, hajlító nyomaték - görbület összefüggés egy állandó keresztmetszetű lineárisan rugalmas rúd esetére:

$$IE \frac{d\varphi}{ds} = M. \quad (3.3.2)$$



3.2 ábra Befogott rúd lehajlása F koncentrált terhelés hatására

A 3.2 ábra szemlélteti az L hosszúságú befogott rudat, melyre szabad végén egy F koncentrált terhelés hat. A jelölések Descartes-féle koordináta rendszerben értendők. Az ábrán megjelenő δ_x az F koncentrált terhelés alatt lehajlott rúd szabad vége, valamint a nyugalmi helyzetben lévő rúd szabad vége közti „ x ” irányú távolságot adja meg. A δ_y jelölés pedig ugyanezen elrendezés „ y ” irányú távolságát adja. Az 3.2 ábrán megjelenő „ s ” jelölés egy ívhosszat jelöl, melyet a rögzített végtől veszünk fel. A φ_0 szög a lehajlott rúd szabad végének szögelfordulása. Ha a (3.3.2) kifejezést egyszer deriváljuk „ s ” szerint, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$IE \frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{dM}{ds}. \quad (3.3.3)$$

Ahol a hajlító nyomaték az 3.2 ábra „A” pontjában:

$$M(s) = F(L - \delta_x - x) \quad (3.3.4)$$

A (3.3.4) kifejezés „ s ” szerinti deriválásával valamint azzal az összefüggéssel, hogy $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$, egy nemlineáris differenciálegyenletet kapunk, amely leírja a befogott rúd alakváltozását a szabad végén F koncentrált terhelés alatt.

$$IE \frac{d^2\varphi}{ds^2} + F \cos\varphi = 0 \quad (3.3.5)$$

A (3.3.5) kifejezés tehát egy nemlineáris differenciálegyenlet melynek nincs zárt alakú megoldása. Egy sorfejtéses közelítő megoldás előállítása érdekében először egy $\frac{d\varphi}{ds}$ taggal történő szorzást hajtunk végre:

$$IE \frac{d\varphi}{ds} \frac{d^2\varphi}{ds^2} + F \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (3.3.6)$$

Átírás után

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{2} IE \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + F \sin\varphi \right] = 0. \quad (3.3.7)$$

A (3.3.7) egyenlet egyszer integrálható, figyelembe véve, hogy a rúd szabad végének lehajlása φ_0 , valamint a (3.3.2) és a (3.3.4) kifejezésből következik, hogy $\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_{s=L} = 0$. Így a (3.3.7) egyenletből adódik s -től L -ig történő integrálással:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{2}{IE} (F \sin\varphi_0 - F \sin\varphi). \quad (3.3.8)$$

Ez az s ívhossz és a φ szögelfordulás között egy szétválasztható típusú elsőrendű közönséges differenciálegyenlet, aminek megoldását így jelölhetjük ki a szögre vonatkozó integrálással:

$$s = \sqrt{\frac{IE}{2F}} \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\sqrt{\sin\varphi_0 - \sin\phi}}. \quad (3.3.9)$$

A rúd teljes L hosszára ez következő összefüggést jelenti:

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2F}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin\varphi_0 - \sin\phi}}. \quad (3.3.10)$$

Figyelembe véve hogy $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$, valamint $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$, a (3.3.9) kifejezésből a következő képletek adódnak a rúd semleges szála egy pontjának x és y irányú helyzetére:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{F}} (\sqrt{\sin\varphi_0} - \sqrt{\sin\varphi_0 - \sin\varphi}), \quad (3.3.11)$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2F}} \int_0^\varphi \frac{\sin\phi d\phi}{\sqrt{\sin\varphi_0 - \sin\phi}}. \quad (3.3.12)$$

Ezekből a (3.3.10)-hez hasonlóan $\varphi = \varphi_0$ helyettesítéssel adódik a rúd végső keresztmetszetének elmozdulása az x és y irányban:

$$\delta_x = L - x(\varphi_0), \quad (3.3.13)$$

$$\delta_y = y(\varphi_0). \quad (3.3.14)$$

A 4. fejezetben kifejtésre kerülő mérések alapján kapott tapasztalati összefüggés szerint a terheletlen rúd szabad vége, és a terhelt eset szabad vége közti „x” irányú valamint „y” irányú eltérés közti összefüggés a következő másodfokú alakban kereshető:

$$\delta_x = \kappa \delta_y^2, \quad (3.3.15)$$

ahol az ismeretlen κ paraméter meghatározása szükséges a rezgéstani mozgásegyenleteink pontos felírásához:

$$\kappa = \frac{\delta_x}{\delta_y^2}. \quad (3.3.16)$$

Behelyettesítve a (3.3.13), (3.3.14) kifejezéseket,

$$\kappa = \frac{L - x(\varphi_0)}{y(\varphi_0)^2}. \quad (3.3.17)$$

Újabb helyettesítéssel a (3.3.11), (3.3.12) kifejezések alapján a következő összefüggést kapjuk:

$$\kappa = \frac{\frac{2F}{IE} \left(L - \sqrt{\frac{2IE}{F}} \sqrt{\sin \varphi_0} \right)}{\left(\int_0^{\varphi_0} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}} \right)^2} \quad (3.3.18)$$

A következő lépésekben megjelenő sorfejtések $\varphi_0 = 0$ körüli, φ_0 szerinti Taylor-sorok.

A (3.3.10) egyenlet integrálandó függvényének négyzetgyök alatti kifejezése Taylor-sorokkal közelítve

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2F}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0 - \frac{1}{6}\varphi_0^3 + \frac{1}{120}\varphi_0^5 - + \dots - \varphi + \frac{1}{6}\varphi^3 - \frac{1}{120}\varphi^5 + \dots}}. \quad (3.3.19)$$

A (3.3.19) jobb oldalán szereplő integrált a φ_0 felső határ szerint ismételt sorba fejtve

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2F}} \left(2\sqrt{\varphi_0} + \frac{11}{30}\varphi_0^{\frac{5}{2}} + \frac{47}{560}\varphi_0^{\frac{9}{2}} + \dots \right). \quad (3.3.20)$$

A (3.3.20) kifejezésből F terhelő erőt kifejezve,

$$F = \frac{IE\varphi_0(3600 + 1320\varphi_0^2 + 121\varphi_0^4 + \dots)}{1800L^2}. \quad (3.3.21)$$

A (3.3.18) egyenlet nevezőjében szereplő kifejezést hasonlóan sorba fejtve

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}} = \frac{4}{3}\varphi_0^{\frac{3}{2}} + \frac{13}{105}\varphi_0^{\frac{7}{2}} + \dots, \quad (3.3.22)$$

és hasonlóan a (3.3.18) számlálójának második tagja:

$$\sqrt{\sin \varphi_0} = \sqrt{\varphi_0} - \frac{1}{12} \varphi_0^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{1440} \varphi_0^{\frac{9}{2}} + \dots \quad (3.3.23)$$

Behelyettesítve a (3.3.21), (3.3.22), (3.3.23) kifejezéseket a (3.3.18) egyenletbe:

$$\kappa \approx \frac{\frac{1}{900} \cdot \frac{\varphi_0(60 + 11\varphi_0^2)^2}{L^2} \left(L - 60 \sqrt{\frac{L^2}{\varphi_0(60 + 11\varphi_0^2)^2}} \left(\sqrt{\varphi_0} - \frac{1}{12} \varphi_0^{\frac{5}{2}} \right) \right)}{\left(\frac{4}{3} \varphi_0^{\frac{3}{2}} + \frac{13}{105} \varphi_0^{\frac{7}{2}} \right)^2}.$$

Az egyszerűsítés folyamata a következőkben látható.

$$\begin{aligned} \kappa &\approx \frac{\varphi_0(60 + 11\varphi_0^2)^2 \left(L - 60 \sqrt{\frac{L^2}{\varphi_0(60 + 11\varphi_0^2)^2}} \sqrt{\varphi_0} + 5 \sqrt{\frac{L^2}{\varphi_0(60 + 11\varphi_0^2)^2}} \sqrt{\varphi_0^5} \right)}{900L^2\varphi_0^3 \left(\frac{4}{3} + \frac{13}{105} \varphi_0^2 \right)^2} \\ \kappa &\approx \frac{49(60 + 11\varphi_0^2)^2 \left(L - 60 \sqrt{\frac{L^2}{\varphi_0(60 + 11\varphi_0^2)^2}} \sqrt{\varphi_0} + 5 \sqrt{\frac{L^2}{\varphi_0(60 + 11\varphi_0^2)^2}} \sqrt{\varphi_0^5} \right)}{4L^2\varphi_0^2(140 + 13\varphi_0^2)^2} \\ \kappa &\approx \frac{49(60 + 11\varphi_0^2)^2 \left(1 - 60 \frac{1}{\sqrt{\varphi_0(60 + 11\varphi_0^2)}} \sqrt{\varphi_0} + 5 \frac{1}{\sqrt{\varphi_0(60 + 11\varphi_0^2)}} \sqrt{\varphi_0^5} \right)}{4L\varphi_0^2(140 + 13\varphi_0^2)^2} \\ \kappa &\approx \frac{49(60 + 11\varphi_0^2)^2 \left(1 + \frac{5\varphi_0^2 - 60}{60 + 11\varphi_0^2} \right)}{4L\varphi_0^2(140 + 13\varphi_0^2)^2} \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

A (3.3.24) kifejezés nevezőjének egyszerűsítése (negyedfokú tagokat elhagyjuk)

$$L\varphi_0^2(140 + 13\varphi_0^2)^2 = 19600L\varphi_0^2 + \dots \quad (3.3.25)$$

A (3.3.24) egyenlet számlálójának Taylor soros közelítései

$$\frac{5\varphi_0^2 - 60}{60 + 11\varphi_0^2} \approx -1 + \frac{4}{15} \varphi_0^2 + \dots \quad (3.3.26)$$

Így

$$\kappa \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{49(60 + 11\varphi_0^2)^2 \left(\frac{4}{15} \varphi_0^2 \right)}{19600L\varphi_0^2}. \quad (3.3.27)$$

A (3.3.27) további egyszerűsítései

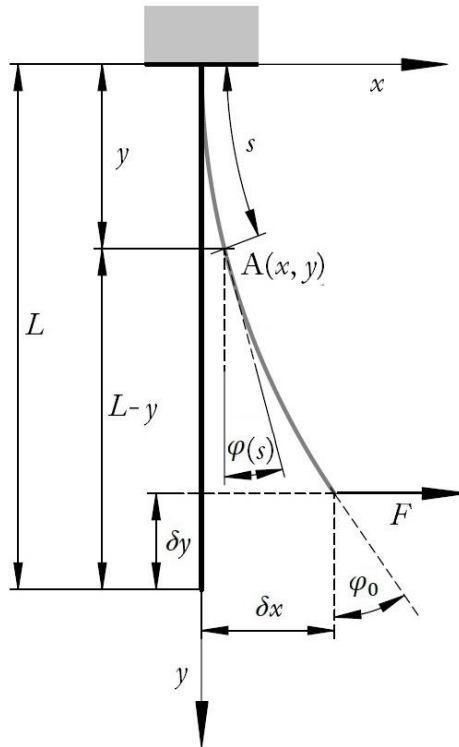
$$(60 + 11\varphi_0^2)^2 \left(\frac{4}{15} \varphi_0^2 \right) = \frac{4}{15} \varphi_0^2 3600 + \dots, \quad (3.3.28)$$

$$\kappa \approx \frac{49}{4} \cdot \frac{\frac{4}{15} \varphi_0^2 3600}{19600 L \varphi_0^2} = \frac{11760}{19600} \frac{1}{L} = \frac{3}{5L}. \quad (3.3.29)$$

Tehát

$$\kappa \approx \frac{3}{5L}. \quad (3.3.30)$$

Az alábbiakban levezetett összefüggést tehát alkalmazhatjuk esetünkben az alma szárának hajlítására. Ezen korrigált konstrukciót a 3.4 ábra szemlélteti.



3.4 ábra Függőlegesen befogott rúd hajlítása

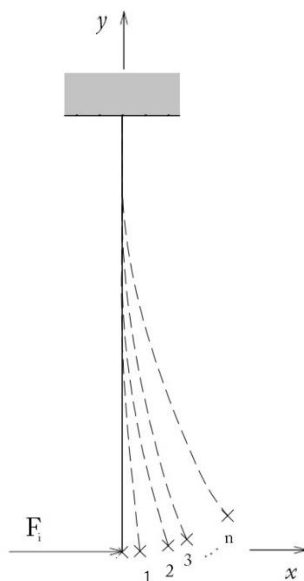
Tehát a szár rövidülését a (3.3.15) kifejezés alapján átírhatjuk függőlegesen befogott rúd esetére. Az eredeti rezgéstani modell jelöléseit használva, átírás után

$$\delta_y = \kappa \delta_x^2 \quad (3.3.31)$$

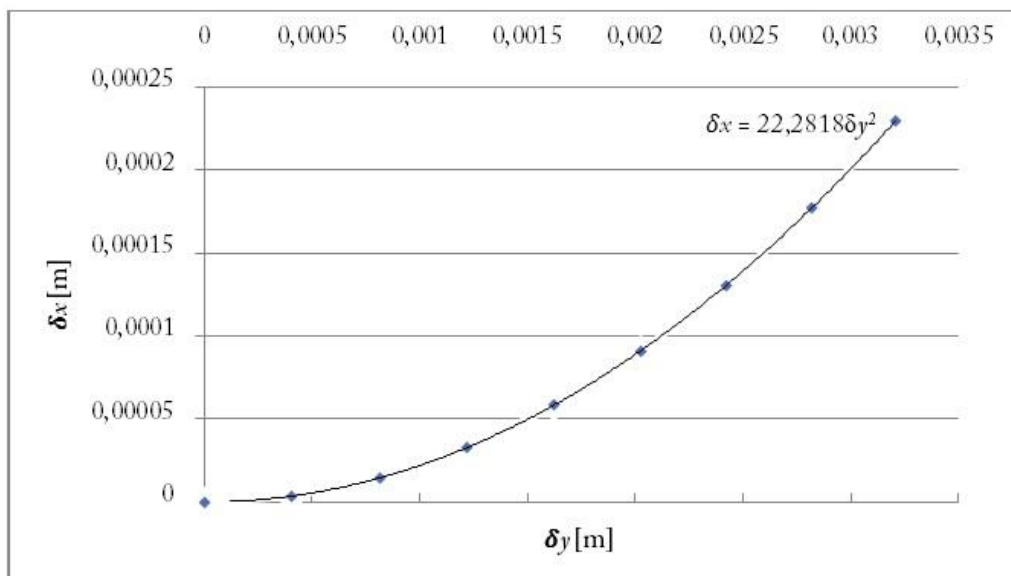
adódik.

Az előzőekben analitikusan levezetett összefüggéseket numerikus számítással is ellenőriztük. A számításokhoz a 4.3 alfejezetben tárgyalt almaszárak adatait használtuk fel. Különböző F erők esetén kiszámoltuk a szár végpontjának δ_x x irányú, és δ_y y irányú elmozdulásait, majd ezen értékeket diszkrét pontokként diagramban ábrázoltuk. Kísérleti tapasztalatok alapján egy másodfokú görbét illesztettünk az így ábrázolt pontokra, megkapva ezzel δ_x és δ_y kapcsolatát

($\delta_y = \kappa \delta_x^2$). Az ábrázolás elve 3.5 ábrán, míg a kiszámolt adatok, és az illesztett görbe egyenlete a 3.6 ábrán látható.



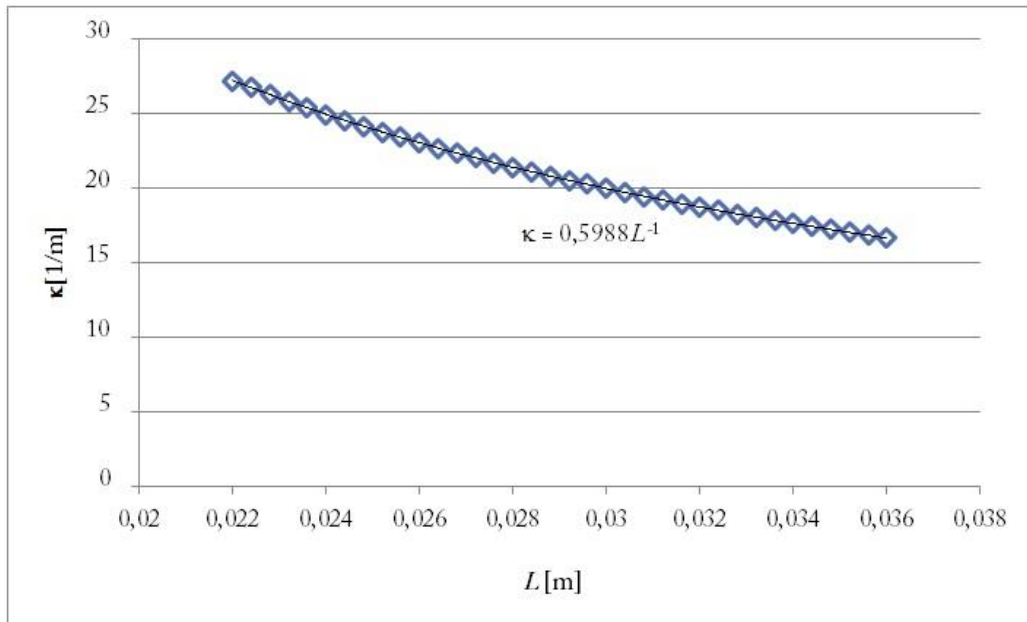
3.5 ábra A szár végpontjának elmozdulásai



3.6 ábra A szár végpontjának számolt elmozdulásai

Mint látható, ezzel a módszerrel csak konkrét almaszár esetén tudjuk meghatározni a két elmozdulás közötti kapcsolatot (κ értékét), így κ és az L szárhossz között összefüggést kerestünk. Ezt ismét LabView-ban elkészített programmal oldottuk meg, mely program adott IE hajlító merevség esetén az L értékét folyamatosan növelve, minden egyes növelés között 15 különböző F erőre az elmozdulásokat kiszámolja. Ezután a pontokra az ismertett módszer szerint egy parabolát illeszt, majd a κ értékét meghatározza. Ez a módszer tulajdonképpen az előzőekben ismertett numerikus számítást ismétli meg, folyamatosan

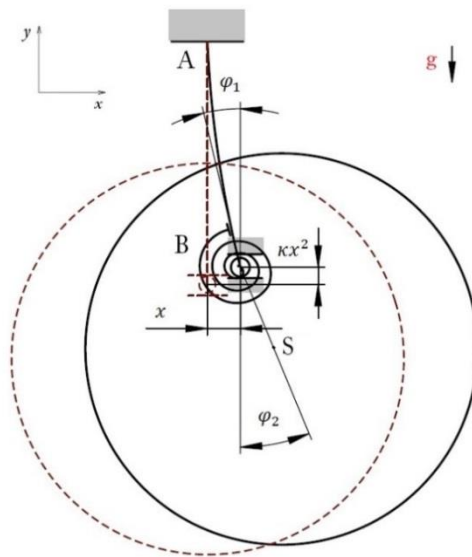
növekvő L értékek esetére. Ezáltal a κ változása ábrázolhatóvá vált L függvényében, amit a 3.7 ábra mutat.



3.7 ábra κ változása az L szárhossz függvényében

A 3.7 ábrán láthatóak a kiszámolt $\kappa - L$ pontok ábrázolva, mely pontokra a levezetett összefüggés alapján egy hiperbolikus görbét illesztettünk. Látható, hogy az $\frac{1}{L}$ együtthatója 0,5988 ami jó közelítéssel megegyezik a levezetett $0,6 \frac{1}{L}$ értékkel. Ezáltal ez a numerikus számolás megerősíti az analitikusan levezetett összefüggést.

3.4 Mátrixegyetthatós mozgásegyenlet felírása



3.4.1 ábra Kombinált inga paramétereivel

A vizsgált modell a 2.5. fejezetben tárgyalt rendszerrel megegyezik, így a 3.4.1 ábra szemlélteti a geometriai jellemzőket.

A rendszer kinetikus energiája

$$T = \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}\theta_s\Omega^2. \quad (3.4.1)$$

Szögsebesség

$$\Omega = \dot{\varphi}_2. \quad (3.4.2)$$

Gömb tehetetlenségi nyomatéka

$$\theta_s = \frac{2}{5}mR^2. \quad (3.4.3)$$

A „B” pont sebessége, melyben már megjelenik a „rövidülés” deriváltja is.

$$\mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (3.4.4)$$

$$y = \kappa x^2, \quad (3.4.5)$$

ahol y a rúd (szár) függőleges emelkedése.

A (3.4.5) kifejezés idő szerinti deriváltja:

$$\dot{y} = 2\kappa x \dot{x}. \quad (3.4.6)$$

A gömb súlypontjának sebessége

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{BS}. \quad (3.4.7)$$

$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \dot{x} + \dot{\varphi}_2(R-h)\cos\varphi_2 \\ 2\kappa x \dot{x} + \dot{\varphi}_2(R-h)\sin\varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.4.8)$$

Behelyettesítés a kinetikus energiába

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{\varphi}_2^2(R-h)^2\cos^2\varphi_2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}_2(R-h)\cos\varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2(R-h)^2\sin^2\varphi_2 + 4\kappa x \dot{x}(R-h)\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 + 4\kappa^2 x^2 \dot{x}^2] + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\dot{\varphi}_2^2.$$

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{\varphi}_2^2(R-h)^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}_2(R-h)\cos\varphi_2 + 4\kappa x \dot{x}(R-h)\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 + 4\kappa^2 x^2 \dot{x}^2] + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\dot{\varphi}_2^2 \quad (3.4.9)$$

$$T = \frac{1}{2}m(1 + 4\kappa^2 x^2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[(R-h)^2 + \frac{2}{5}R^2\right]\dot{\varphi}_2^2 + m(R-h)(\cos\varphi_2 + 2\kappa x\sin\varphi_2)\dot{x}\dot{\varphi}_2 \quad (3.4.10)$$

A kinetikus energia megfelelő számú deriváltjai adják a tömegmátrix elemeit:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(1 + 4\kappa^2 x^2)\dot{x} + m(R-h)(\cos\varphi_2 + 2\kappa x\sin\varphi_2)\dot{\varphi}_2, \quad (3.4.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = m \left[(R-h)^2 + \frac{2}{5} R^2 \right] \dot{\varphi}_2 + m(R-h)(\cos\varphi_2 + 2\kappa x \sin\varphi_2) \dot{x}, \quad (3.4.12)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\varphi}_2} \right|_0 = m(R-h)(\cos\varphi_2 + 2\kappa x \sin\varphi_2)|_0 = m(R-h). \quad (3.4.13)$$

Még egyszer deriválással, $x=0$ helyettesítéssel a tömeg mátrix változatlan marad (ld. (2.5.43))

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & mpR \\ mpR & mR^2 \left(p^2 + \frac{2}{5} \right) \end{bmatrix}, \quad (3.4.14)$$

azaz a rúd végének emelkedése nem változtatja meg másodfokú közelítésben a kinetikus energiát és lineáris közelítésben a tömegmátrixot sem. A helyzet azonban más lesz az erők potenciálfüggvényével.

A potenciális energia megegyezik az a 2.5. fejezetben tárgyalt rendszerével (2.5.23), kivéve a „rövidülés” okozta U_g helyzeti energiát:

$$U_g = \dots + mg\kappa x^2, \quad (3.4.15)$$

$$\frac{\partial U_g}{\partial x} = \dots + 2\kappa mgx. \quad (3.4.16)$$

Ezáltal a plusz tag:

$$\frac{\partial^2 U_g}{\partial x^2} = \dots + 2\kappa mg. \quad (3.4.17)$$

Ezzel kiegészítve a merevségi mátrix pontosított alakja

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} - \frac{s_{12}^2}{s_{22} + s_t} + 2\kappa mg & \frac{s_t s_{12}}{s_{22} + s_t} \\ \frac{s_t s_{12}}{s_{22} + s_t} & \frac{s_{22} s_t}{s_{22} + s_t} + mg(R-h) \end{bmatrix}. \quad (3.4.18)$$

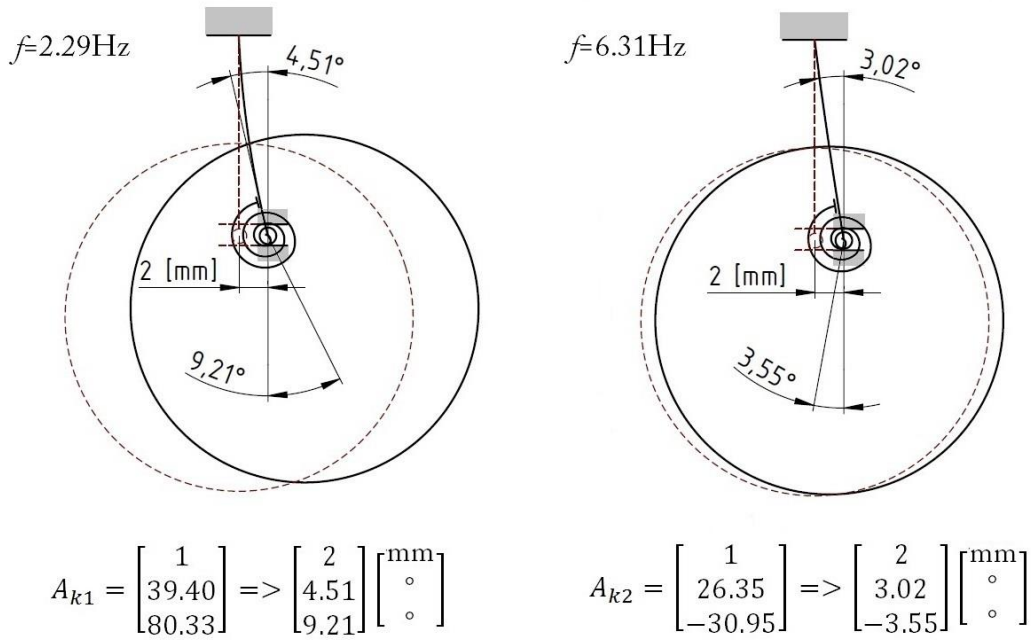
A könnyebb átláthatóság érdekében a, b, c paramétereket bevezetve írjuk fel a frekvenciaegyenlet új alakját:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{5} m^2 R^2 \\ b &= -\frac{1}{5(s_{22} + s_t)} \{ R^2(5p^2 + 2)[(s_{22} + s_t)(2mg\kappa + s_{11}) - s_{12}^2] + 5s_t(s_{22} - 2pRs_{12}) \\ &\quad + 5mgpR(s_{22} + s_t) \} m \\ c &= \frac{1}{s_{22} + s_t} \{ s_t[(2mg\kappa + s_{11})(mgRp + s_{22}) - s_{12}^2] + mgpR[s_{22}(2mg\kappa + s_{11}) - s_{12}^2] \} \\ a\alpha^4 + b\alpha^2 + c &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

A korábbiakhoz hasonlóan a két lengéskép a megfelelő α_k sajátkörfrekvenciák behelyettesítése után meghatározható a következő kifejezésből

$$A_k = -\frac{s_{12}^2 + [m(\alpha_k^2 - 2g\kappa) - s_{11}](s_{22} + s_t)}{mpR\alpha_k^2 s_{22} + (mpR\alpha_k^2 - s_{12})s_t}, \quad k = 1, 2$$

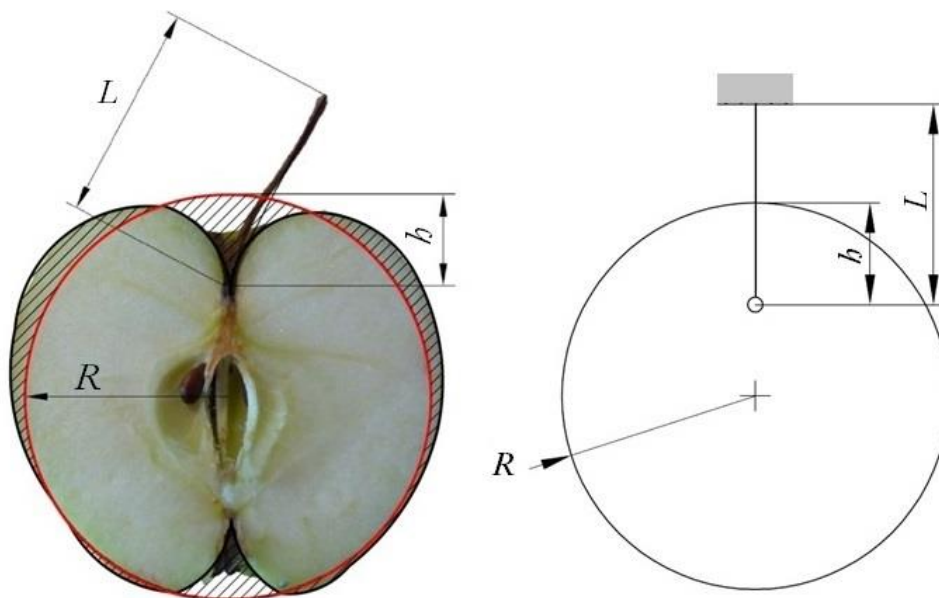
Az 3.4.2 ábrán a 4. fejezetben tárgyalt adatok alapján számolt lengésképek és sajátfrekvenciák láthatóak.



3.4.2 ábra Sajátfrekvenciák és lengésképek Golden alma paramétereivel

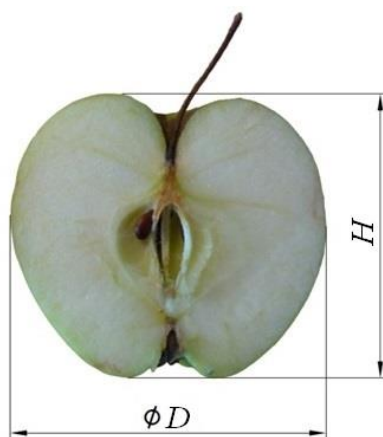
4 A modellek paramétereinek kísérleti meghatározása

4.1 Geometriai paraméterek



4.1.1 ábra A modell geometriai paramétere

A már ismertett modellekhez alapvetően 3 geometriai adatra volt szükségünk, az R sugárra, a szár L hosszára, illetve a szár almatestbe való benyúlásának h mértékére. Ezeket a méreteket almánként külön le mérve, majd végül átlagot számítva állapítottuk meg. A méréseknél 2 különböző, Golden és Idared fajtájú almát használtunk. A későbbiekben a modellek során csak a Golden típusú alma adatait használtuk fel. A 4.1.1 ábrán látható, hogy a valós alma alakja eltér a modelljeinkben használt ideális gömb alaktól, így a mérések során egy átlagos R sugár meghatározására törekedtünk. Megfigyelések alapján egy almát 2 mérettel lehet jellemezni, amit a 4.1.2 ábra is mutat.



4.1.2 ábra Az almatest 2 jellemző mérete

Ez a két méret, a 4.1.2 ábrán látható „szélesség” – D , illetve az alma „magassága” – H . Ezáltal az átlagos sugár egy almára vonatkozóan az

$$R = \frac{\frac{D}{2} + \frac{H}{2}}{2} \quad (4.1.1)$$

képlettel tekinthető. Az így, almánként kiszámolt közelítő **sugaraknak** ismét az átlagát véve kaptuk a 4.1.1 táblázatban szereplő adatokat.

	R (mm)	L (mm)	h (mm)	p (-)	m (g)	s_t (Nm/rad)
Golden	32,8	32,9	14,6	0,556	137,7	0,007122
Idared	39,2	28,5	18,2	0,535	221,0	0,008753

4.1.1 táblázat Az alma jellemző adatai

A 4.1.1 táblázatban látható további adatok a következők:

Szárhosszak – L (mm)

Szár benyúlása az almatestbe – h (mm)

Mivel az egyenletek során az $(R-h)$ érték gyakran előfordult, erre bevezettünk egy $pR=(R-h)$ egyszerűsítést, ahol p arányossági tényezőt szintén almánként kiszámolva, majd kiátlagolva kaptuk. Ezek az értékek szintén a 4.1.1 táblázatban láthatóak.

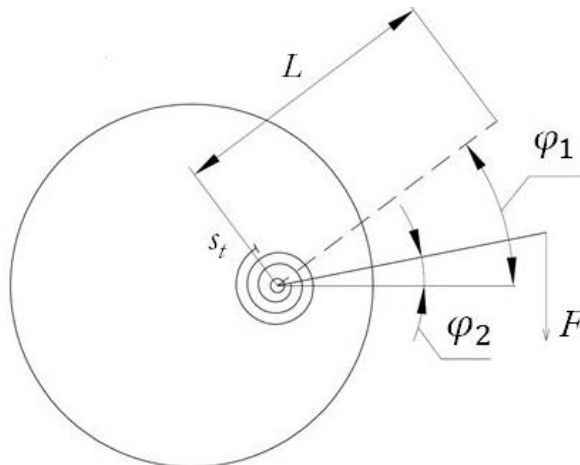
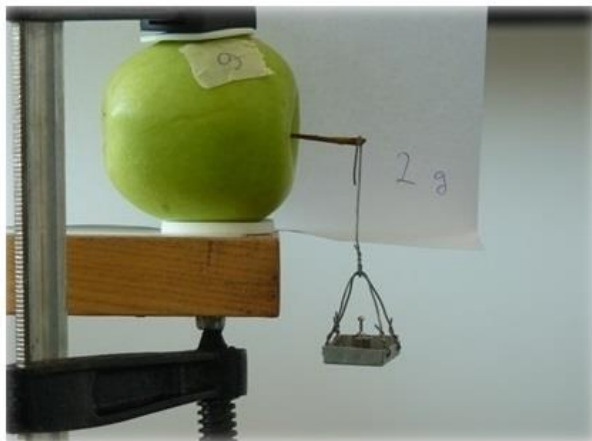
4.2 Tehetetlenségi paraméterek

Az alma (közelítő) tehetetlenségi nyomatékának meghatározásához a 4.1 pontban említett R sugár mellett az alma tömegére is szükség van. Fontos azonban kiemelni, hogy az almák tömege nem csak fajtától, de az érettség fokától is függ. Emiatt lényeges egy esetleges szüretnél meghatározni az alma érettségét, hogy alkalmas-e már a gépi szüretelésre. Méréseink során ismét 2 különböző fajtájú almát vizsgáltunk, melyek érettségi állapotuk szerint alkalmasak lettek volna gépi szüretelésre, így fogyasztásra is. A mért adatokat a 4.1.1 táblázat tartalmazza.

A mérési eredményekből látszik, hogy a különböző almafajták tömege jelentősen eltér egymástól, ami nagyban befolyásolja a sajátfrekvenciáit. Ezek miatt fontos az almafajtákat külön kezelni (esetleges gépi szüretelés előtt a gépet beállítani).

4.3 Merevségi paraméterek

4.3.1 Torziós rugómerevség



4.3.1 ábra A torziós rugómerevség mérése, és modellje

A torziós merevség mérésének elrendezését és annak modelljét mutatja a 4.3.1 ábra. Megfigyelések alapján ezen mérések folyamán a szár szemmel láthatóan nem hajlott el, ami a torziós rugó mérését befolyásolta volna, így az s_t rugómerevség könnyen számolható. A 2 szögre azért volt szükség, mert az almák szára különböző mértékben terhelés nélkül is adott szögben állt.

A csuklópontra a 4.3.1 ábra alapján felírt nyomatéki egyensúly

$$s_t(\varphi_1 - \varphi_2) = L \cos \varphi_2 F. \quad (4.3.1)$$

Ahol

φ_1 (rad) a terheletlen szárhoz tartozó szög

φ_2 (rad) a terhelt szárhoz tartozó szög

L (mm) a szár hossza

F (N) = $m_i g$ az adott terhelőerő, ami a ráakasztott m_i adott tömeg hatására jön létre

A (4.3.1)-es egyenletből kifejezhető a keresett torziós rugómerevség

$$s_t = \frac{L \cos \varphi_2 F}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (4.3.2)$$

Ezek alapján minden almán több mérést végeztünk, több különböző nagyságú tömeggel, így almánként átlagos torziós rugómerevségeket kaptunk. Az így kapott értékeket átlagoltuk az összes (azonos típusú) almára, így jutva el a végleges, átlagos torziós rugómerevséghez. Az értékeket a 4.1.1 táblázat tartalmazza.

4.3.2 A szár rugóállandó mátrixa és anyagjellemzői

A szár hajlító lengéseinek számolásához szükséges volt a szár rugóállandó mátrixát kimérni – meghatározni. A rugóállandó mátrix alakja

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Ha a szárat homogén, lineáris (kör) keresztmetszetű rúdnak modellezzük, ahol L a szár hossza, IE pedig a szár hajlító merevsége, a mátrix elemei

$$c_{11} = \frac{L^3}{2IE}, \quad (4.3.3)$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{L^2}{2IE}, \quad (4.3.4)$$

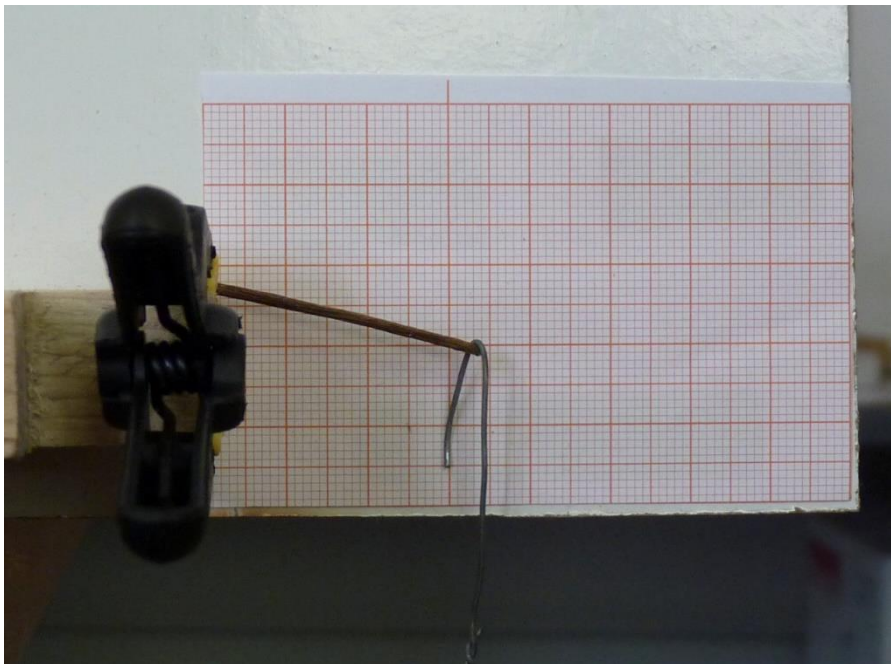
$$c_{22} = \frac{L}{IE}. \quad (4.3.5)$$

formában alakulnak. Ezen elemek közül a c_{11} illetve a $c_{12} = c_{21}$ volt mérhető az alábbi képletetek segítségével

$$c_{11} = \frac{f}{F}, \quad (4.3.6)$$

$$c_{12} = \frac{\varphi}{F}, \quad (4.3.7)$$

ahol f a szár végének erő irányú elmozdulása, φ a szár végének óramutató irányával megegyező elfordulása. Ezt a 2 értéket tudtuk mérni a 4.3.2 ábrán látható elrendezés szerint.



4.3.2 ábra Szár merevségének mérése

Ahogy a 4.3.2-es ábrán is látszik, a mérési elrendezés egy egyik végén befogott, másik végén terhelt almaszárból, és egy mögötte elhelyezett milliméterpapírból áll. A milliméterpapír segítségével leolvasható a szár végének erő irányú elmozdulása, AutoCad program segítségével pedig a szár végének, a terheletlen helyzetéhez viszonyított elfordulása határozható meg.

Az előzőek alapján száranként 2 mérést végeztünk, 3,9 illetve 6,9 gramm tömegekkel terhelve, majd az ezekből számított c_{11} illetve a $c_{12} = c_{21}$ értékek átlagát vettük. Ezeket a méréseket csak Golden típusú alma szárával végeztük el. A mért eredmények:

$$c_{11} = 0,0477 \text{ m/N}$$

$$c_{12} = c_{21} = 1,6332 \text{ rad/N}$$

A mátrix utolsó elemét, a c_{22} -t nem volt lehetőségünk kimérni, mivel nem tudtunk a szár végére erőpárt helyezni, így közelítő képletekkel számoltuk ki a már lemért adatokból.

Ahogy már említettük, a szárat homogén és állandó keresztmetszetű rúddal közelítettük, ami a valóságnak durva közelítését jelenti. A képletek illetve a valós szár közti eltérést úgy kompenzáltuk, hogy kapcsolatot teremtettünk a már mért 2 mennyiség, a c_{11} és a c_{12} között, majd ezek alapján egy egyenértékű szárhosszt számoltunk ki, ami teljesíti a 2 mért eredmény kapcsolatát. Az így megkapott egyenértékű hosszzal, és a (4.3.5) egyenlettel tudtuk a hiányzó mátrix elemet meghatározni:

$$\frac{c_{11}}{c_{21}} = \frac{2L}{3}, \quad (4.3.8)$$

$$c_{11} \approx \frac{2L}{3} c_{21}, \quad (4.3.9)$$

$$\tilde{L} = \frac{3c_{11}}{2c_{12}}, \quad (4.3.10)$$

ahol $\tilde{L}$ az egyenértékű szárhossz. Ezek alapján c_{22} a következőképpen számolható ki

$$c_{22} = \frac{3}{\tilde{L}^2} c_{11} \cong \frac{3}{L^2} c_{11}. \quad (4.3.11)$$

Az így kapott c_{22} értéke Golden típusú almaszárra:

$$c_{22} = 74,000 \text{ 1/Nm}$$

Ezáltal a szár rugalmassági mátrixa

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0,0477 & 1,6332 \\ 1,6332 & 74,000 \end{bmatrix} \text{ SI}.$$

Anyag-, és keresztmetszeti jellemző (IE)

A 4.3.2-es alfejezetben leírt c_{11} értékek, és a (4.3.3) egyenlet segítségével meghatározható az alma szárának IE keresztmetszeti- és anyagjellemzője, ha feltételezzük, hogy a szár homogén, rugalmas és állandó kör keresztmetszetű.

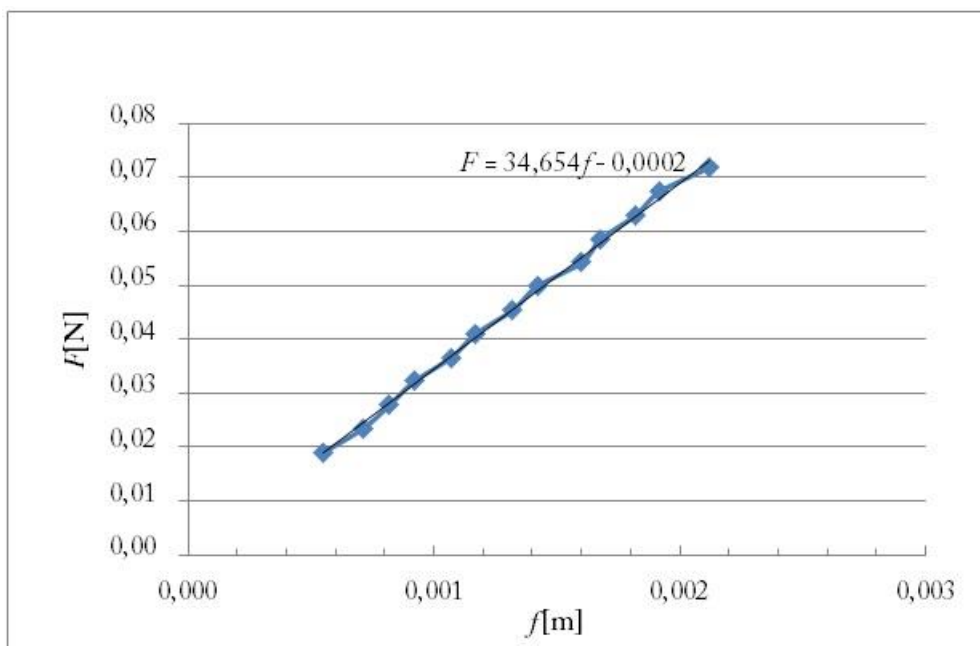
$$IE = \frac{L^3}{2c_{11}} \quad (4.3.12)$$

A (4.3.12) egyenletbe behelyettesítve a leírt szárhossz, illetve rugalmasság értékeket megkaphatjuk egy átlagos IE jellemző minden mért szárra. Ezen értékek összes vizsgált szárra vett átlagával egy általános IE hajlító merevséget kapunk, melynek értéke:

$$IE = 0,00048 \text{ Nm}^2$$

4.4 A szár karakterisztikája

A 4.3.2-es pontban ismertetett rugóállandó mátrix mellett fontos a szár rugalmasságának karakterisztikáját is meghatározni. Ehhez a 4.3.2-es ábrán már ismertetett mérési elrendezést használtuk, azzal a különbséggel, hogy egy adott szárat több (14 különböző) terheléssel mértünk le. Minden egyes mérésről fényképet készítettünk, amit később AutoCad programban a képeken látható milliméterpapír segítségével helyes léptékre hoztunk, így ezek után a programon belül pontosabb (0,01 mm felbontású) mérésre volt lehetőség. Ilyen pontossággal a milliméterpapírról szemmel nem lehetett volna az értékeket leolvasni.

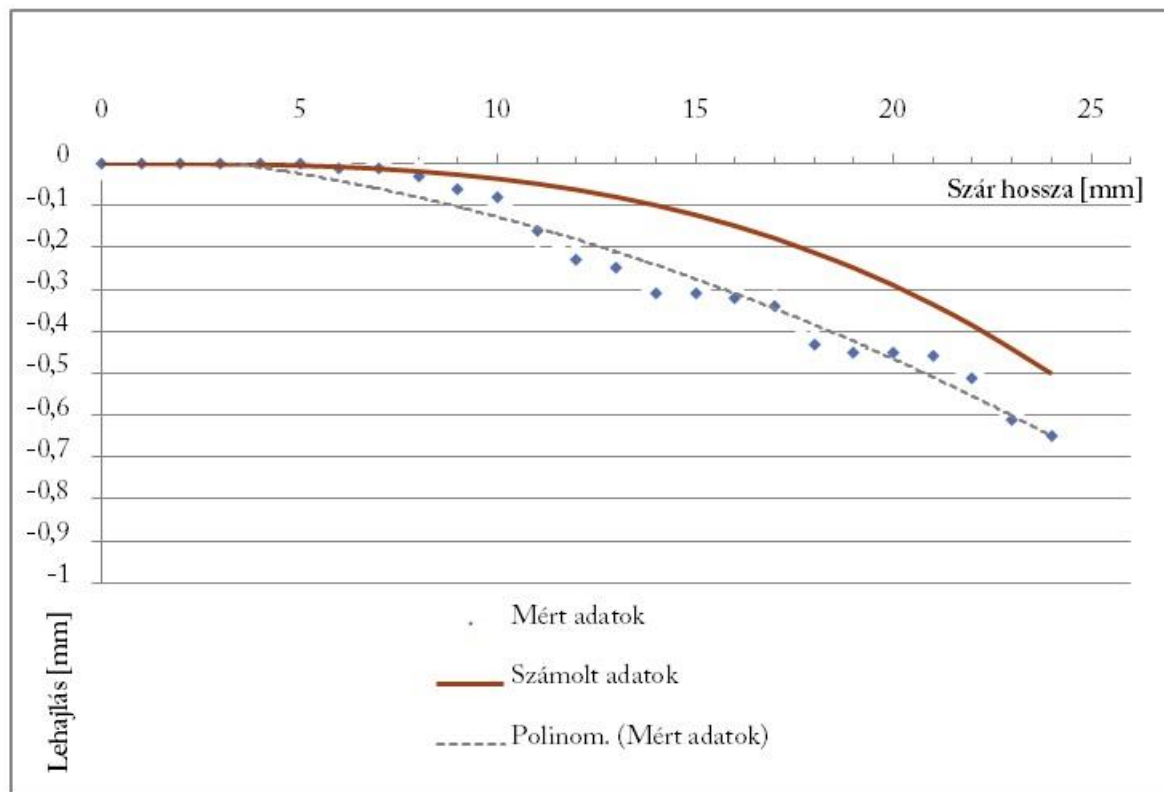


4.4.1 ábra A Golden alma szárának karakterisztikája

A 4.4.1 ábrán látható mérési eredményből levonhatjuk a következtetést, hogy az alma szárának karakterisztikája lineáris, illetve a nagyon kicsi (ebben az esetben 0,0002 értékű) nullpont eltolás elhanyagolható. Ezáltal egy origóból induló, adott meredekségű egyenest kapunk, ami alátámasztja a modelleknél alkalmazott képletek használatát. Az alma tulajdonságai nem csak az említett módon, azaz az érése közben változnak, hanem a leszedés után eltelt idő függvényében is. Ez az oka annak, hogy a 4.4.1 ábrán látható mérésnél eltérő rugómerevséget mértünk, mint az előző esetekben, hiszen a szár gyorsan szárad a leszedést követően, így változik a rugómerevsége.

4.5 A szár lehajlásának mérése, összevetés a számolt adatokkal

A következőkben egy ellenőrző mérést végeztünk, melyben összehasonlítottuk egy adott almaszár, adott terhelésnél felvett alakját az elméleti (számolt) alakkal. A mérést ismét a 4.3.2 ábrán látható mérési elrendezésben végeztük el, majd AutoCad programban a szárat egységnyi hosszúságú szakaszokra felbontva, azoknak függőleges (erő irányú) elmozdulását mértük le. Ezeket a mért adatokat, az ugyanilyen elven történő számolt adatokkal együtt diagramban ábrázoltuk, amit a 4.5.1-es ábra mutat:



4.5.1 ábra A szár lehajlásának elméleti, és mért eredménye

A 4.5.1 ábrán látható eltérés a mért és számított görbe között azért van, mert a számítás során homogén, állandó keresztmetszetű rúdnak tételeztük fel az alma szárát. Ezzel ellentétben, a valóságban a szár anyaga nem homogén, keresztmetszetének területe pedig a befogástól távolodva csökken, ami miatt a mért görbe a számított alatt helyezkedik el.

4.6 Csillapítás

A megfelelő rezonanciagörbék rajzolásához szükséges volt az alma csillapítását is kimérni. A modellek során lineáris, arányos csillapítást tételeztünk fel, a $\mathbf{K}$ általános csillapítási mátrix a (4.6.1) egyenlet alapján az $\mathbf{S}$ rugómerevség mátrixból egyszerűen számolható

$$\mathbf{K} = k_s \mathbf{S}, \quad (4.6.1)$$

ahol

$$k_s = \frac{2D_1}{\alpha_1}. \quad (4.6.2)$$

A D_1 relatív (modális) csillapítási tényező értékét egy, még az ágon lógó alma lengését vizsgálva, logaritmikus dekrementummal számoltuk ki. Az alma lengéséről videót készítettünk, amit később képkockáinkra bontottunk, majd AutoCad program segítségével az egyes képeken lemértük az alma statikus helyzetéhez képesti szögelfordulását. A szögelfordulás láthatóvá tételéhez egy fogpiszkálót szórtunk az alma aljába, ami a 4.6.1 ábrán is látható.



4.6.1 ábra Az alma csillapított lengésének képei

A 4.6.1 ábra az almának két kiragadott időpillanatbeli állapotát szemlélteti, amelyekről a szögeket lemérve a csillapítás számolható

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{A_0}{A_n}, \quad (4.6.3)$$

$$D_1 = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}, \quad (4.6.4)$$

ahol

Λ - a logaritmikus dekrementum,

n - a lengések száma,

A_0 – a nulladik lengés amplitúdója,

A_n – az n . lengés amplitúdója.

Több mérés alapján számított átlag amplitúdók, $n=2$ esetén

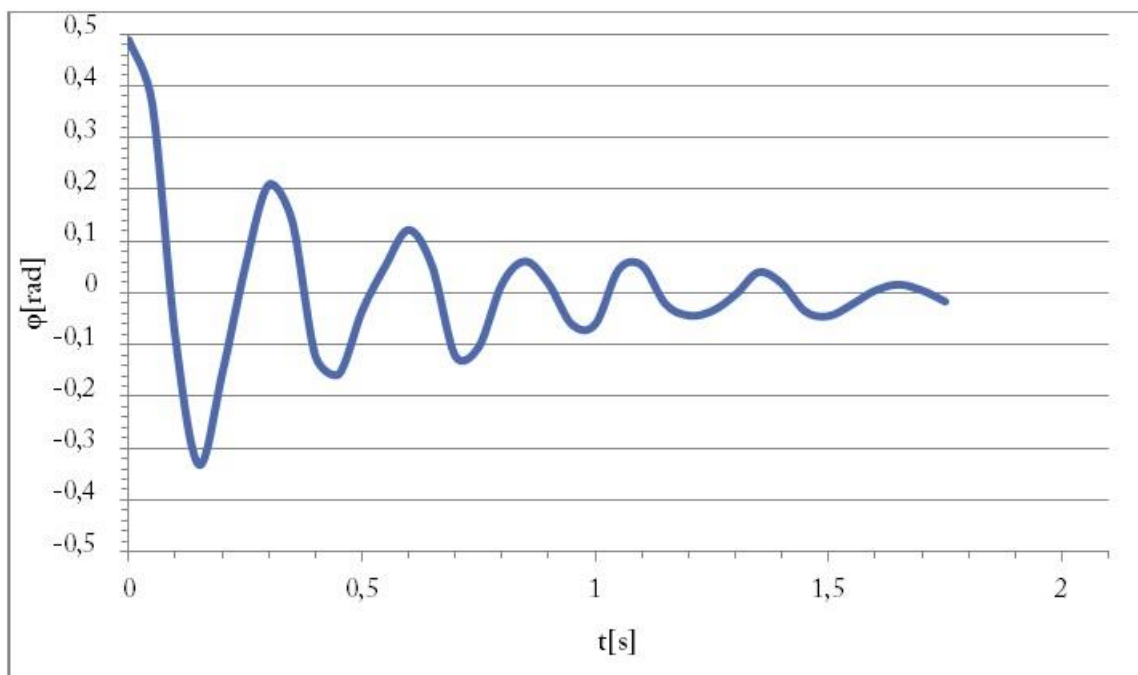
$$A_0 = 25^\circ,$$

$$A_2 = 8^\circ.$$

Ezek alapján a (4.6.3) és (4.6.4) egyenletek segítségével

$$D_1 = 0,09.$$

A mért eredményeket és az alma lengését szemlélteti a 4.6.2 ábra, ahol az alma testének szögkitérése van ábrázolva az idő függvényében:



4.6.2 ábra Az alma szögkitérése az idő függvényében

A 4.6.2 ábrán jól látható a csillapodó jelleg, illetve a lengések, amikben az eltérés a kamera felbontása, illetve a másodpercenként készített képek véges száma miatt adódik.

A 3. fejezetben taglalt modell estében a számolt sajátfrekvenciák ellenőrzéseként a 4.6.2 ábra alapján logaritmikus dekrementumot számolhatunk a (4.6.3) kifejezéssel. A görbe jellegéből

adódóan az első sajátfrekvenciát határozhatjuk meg, amely a logaritmikus dekrementum értékéből számolható. A rendszer sajátfrekvenciáit az alábbiak alapján származtathatjuk:

$$\Lambda = D\alpha T \quad (4.6.5)$$

ahol Λ logaritmikus dekrementum értékét több mérés alapján és a mérési eredmények átlagolásával határoztuk meg. A T periódusidő mérése is több pont alapján történt, amely értékeket a 4.6.1 táblázat tartalmazza. Az $f=\alpha/2\pi$ sajátfrekvencia a meghatározott sajátkörfrekvenciából számolható. A kapott érték láthatóan jól megegyezik a 3. fejezetben számolt első sajátfrekvenciával, amely egyúttal alátámasztja modellalkotásunk pontosságát is.

<i>n</i>	2	3	4	5	6	7	Átlag
<i>t</i> (s)	0,30	0,60	0,85	1,10	1,35	1,65	
<i>T</i> (s)	0,15	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,21

4.6.1 táblázat Periódusidő adatai

<i>n</i>	6	5	4
<i>A</i>₁	0,50	0,50	0,50
<i>A</i>_{<i>n</i>}+1	0,02	0,04	0,05
log. Dekr.	0,57	0,50	0,56
átlag		0,54	
<i>m</i>₁ (g)²	65,0		
<i>m</i>₂ (g)³	137,7		
<i>D</i>	0,09		

4.6.2 táblázat Számolási adatok

		korrigálás <i>m</i>₁/<i>m</i>₂
<i>T</i>₁ = <i>T m</i>₁/<i>m</i>₂ (s)	0,21	0,44
α (rad/s)	13,79	
<i>f</i> (Hz)	2,20	

4.6.3 táblázat Sajátfrekvencia értéke

² Azon alma tömege, amely alapján a 4.6.2 ábrán szemléltetett lecsengő jelleg mérve lett.

³ Számolásainkban szereplő alma tömege.

4.7 Az almaszár szakítószilárdsága

Az alma szárában a hajlításból adódó feszültségek összehasonlításához az alma szárának húzó szakítószilárdságát mértük le. Az adott almafa ágat befogva, az almát egyre nagyobb súllyal szakadásig terheltük.

A szakítószilárdság meghatározásához szükség volt az alma szárának, az ághoz megfelelően közel lévő keresztmetszetének d átmérőjére, ami mérések átlaga alapján:

$$d=4,7 \text{ mm}.$$

Az így kapott szakadási erőből, illetve almaszár átmérőből a (4.7.1) képlet alapján tudunk szakítószilárdságot számolni.

$$\sigma_M = \frac{F}{A} = \frac{mg}{\frac{d^2\pi}{4}}, \quad (4.7.1)$$

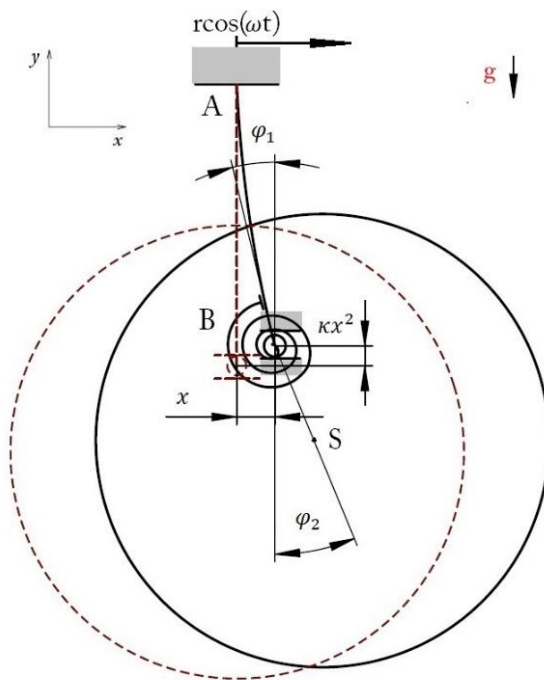
ahol m az alma tömegének és a terhelő tömegnek az összege:

$$m=150+1918 \text{ g}$$

Ezáltal a (4.7.1) egyenlet alapján az alma szárának szakítószilárdsága

$$\sigma_M = 1,169 \text{ MPa}.$$

5 Az almarázás útgerjesztéses modellje



5.1 ábra A kombinált inga és rugalmas rúd modellje útgerjesztéssel

5.1 Az általános erők meghatározása

A 3.4. alfejezetben tárgyalt optimális modellt láthatjuk az 5.1-es ábrán, azzal a különbséggel, hogy a befogási 'A' pontba egy útgerjesztést helyeztünk annak érdekében, hogy vizsgálni tudjuk a modell frekvenciagörbéit. A gerjesztés hatására felírt egyenletek megváltoznak, de a változások az **M** tömeg-, **S** merevségi és **K** csillapítási mátrixokat nem befolyásolják. A függvények első deriváltjaikból kifejezhetőek az általános erő komponensei.

A rendszer potenciális energiája

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - r \cos(\omega t) & \varphi_1 \end{bmatrix} \mathbf{S} \begin{bmatrix} x - r \cos(\omega t) \\ \varphi_1 \end{bmatrix} - mg(R - h) \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} s_t (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + mg\kappa (x - r \cos(\omega t))^2 \quad (5.1.1)$$

A 3.4-es alfejezeti levezetésekre hivatkozva a továbbiakban csak a gerjesztés által létrejött tagokat ismertetjük.

$$\frac{\partial U_r}{\partial x} = \dots + \left(\frac{s_{12}^2}{s_{22} + s_t} - s_{11} \right) r \cos(\omega t) - 2mg\kappa r \cos(\omega t) \quad (5.1.2)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial \varphi_2} = \dots - \frac{s_{12}s_t}{s_{22} + s_t} r \cos(\omega t) \quad (5.1.3)$$

Az (5.1.2) és (5.1.3) egyenletben látható gerjesztési tagokból megkapható általános erők

$$\mathbf{Q}_{c0} = \begin{bmatrix} s_{11} - \frac{s_{12}^2}{s_{22} + s_t} + 2mg\kappa \\ \frac{s_{12}s_t}{s_{22} + s_t} \end{bmatrix} r \cos(\omega t). \quad (5.1.4)$$

A disszipatív potenciál útgerjesztéssel

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x} + r\omega \sin(\omega t) & \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} \mathbf{K} \begin{bmatrix} \dot{x} + r\omega \sin(\omega t) \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.1.5)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.1.6)$$

amit kifejtve:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} k_{11} \dot{x}^2 + k_{11} r \omega \sin(\omega t) \dot{x} + k_{12} \dot{\varphi}_2 \dot{x} + k_{12} r \omega \sin(\omega t) \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} k_{22} \dot{\varphi}_2^2 + k_{11} r^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \quad (5.1.7)$$

A disszipatív potenciál deriváltjai

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} = k_{11} \dot{x} + k_{11} r \omega \sin(\omega t) + k_{12} \dot{\varphi}_2, \quad (5.1.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varphi}_2} = k_{12}\dot{x} + k_{12}r\omega \sin(\omega t) + k_{22}\dot{\varphi}_2. \quad (5.1.9)$$

Az (5.1.8) és (5.1.9) egyenletekből származó gerjesztés komponensei:

$$\mathbf{Q}_{s0} = \begin{bmatrix} -k_{11}\omega \\ -k_{12}\omega \end{bmatrix} r \sin(\omega t) \quad (5.1.10)$$

Így az (5.1.4) és (5.1.10) egyenletekből kifejezve az összes általános erőt:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \left(s_{11} - \frac{s_{12}^2}{s_{22} + s_t} + 2mg\kappa \right) r \cos(\omega t) \\ \left(\frac{s_{12}s_t}{s_{22} + s_t} \right) r \cos(\omega t) \\ -k_{11}\omega r \sin(\omega t) \\ -k_{12}\omega r \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (5.1.11)$$

5.2 A stacionárius megoldás meghatározása, frekvenciagörbék

A 3. fejezetben ismertett merevségi-, tömeg- és csillapítási mátrixok, illetve az 5.1-es pontban kifejezett általános erők felhasználásával az (5.1.11) mátrixegyenlet írható fel:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{S} & \omega \mathbf{K} \\ -\omega \mathbf{K} & -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{c0} \\ \mathbf{Q}_{s0} \end{bmatrix},$$

ahol

$$\mathbf{q}_p(t) = \mathbf{L} \cos(\omega t) + \mathbf{N} \sin(\omega t),$$

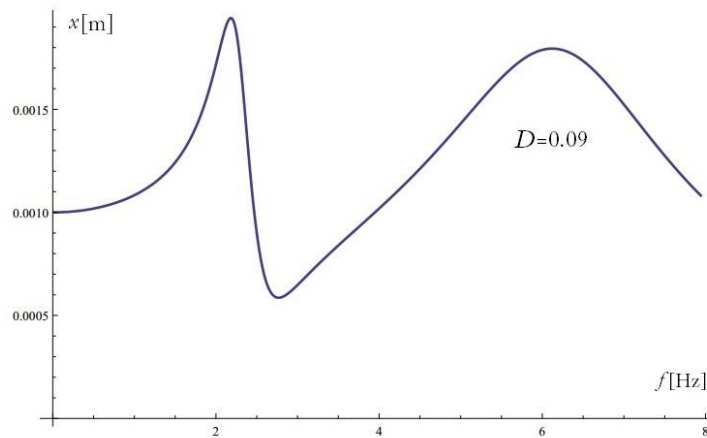
$$\mathbf{q}_p(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

Az (5.11) egyenlet kifejtésekor egy 4 ismeretlenes egyenletrendszer kapunk $\mathbf{L}$ és $\mathbf{N}$ vektorra nézve, ha adott a gerjesztés ω körfrekvenciája és r amplitúdója. Mivel a frekvenciagörbék ábrázolásához, adott r amplitúdó esetén ezeket az egyenleteket kell megoldani, melyekben a gerjesztés körfrekvenciáját kívánjuk a későbbiekben. Ezeket az egyenleteket bonyolultságuk miatt matematikai programmal oldottuk meg. A program egy előre, általunk választott $r=0,001$ [m] gerjesztési amplitúdót behelyettesítve és ω -t folyamatosan adott értékkel növelve számolja ki az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{N}$ vektorok értékeit, adott körfrekvencia esetén. Az így kapott diszkrét pontokat ábrázoltuk és kötöttük össze rezonancia diagramokban, melyek az 5.2-es és 5.3-as ábrán láthatóak.⁴

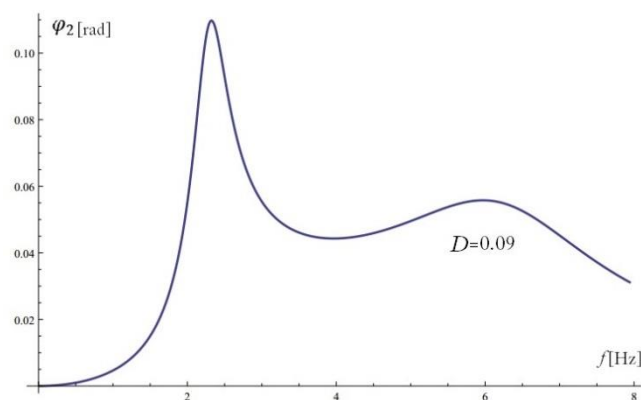
Az 5.2 és 5.3 ábrán látható rezonanciagörbéken megfigyelhető, hogy a lengési amplitúdók az első sajátkörfrekvencia esetén nagyobbak, de ez a vizsgálat nem elegendő annak az

⁴ $f = \omega/(2\pi)$

eldöntéséhez, hogy melyik frekvencián érdemes rázni az adott almafát, mivel a töben ébredő hajlítófeszültség frekvencia szerinti megoszlása eltérő eredményt mutathat.



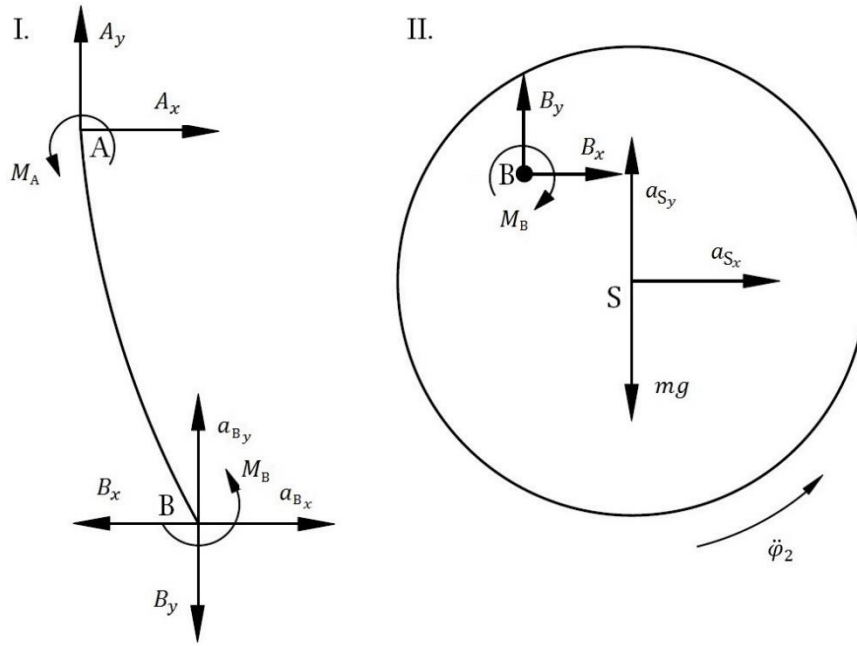
5.2 ábra Rezonanciagörbe x -re



5.3 ábra Rezonanciagörbe φ_2 -re

5.3 Hajlító nyomaték, feszültségi állapot

Tapasztalatok alapján az alma szára legkönnyebben az 5.1-es ábrán látható „A” pontban szakad el, így a hajlító nyomatékot illetve feszültséget erre a pontra kell kiszámolni, a gerjesztés frekvenciájának függvényében. Ebben a fejezetben tehát az 5.1 ábrán látható modell „A” pontjában ébredő hajlító nyomaték, valamint normálfeszültség meghatározása következik. Első lépésként a szabadtest ábrákat kell felrajzolnunk melyet az 5.4 ábra szemléltet.



5.4 ábra Szabadtest ábrák

A gömb súlyponti gyorsulásának kiszámítása

$$a_{By} = \frac{d^2 \kappa x^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} (2\kappa x \dot{x}) = 2\kappa x \ddot{x} + 2\kappa \dot{x}^2. \quad (5.3.1)$$

Az 5.4 ábrán látható „B” pont gyorsulása

$$\mathbf{a}_B = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ 2\kappa x \ddot{x} + 2\kappa \dot{x}^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3.2)$$

Az alma szöggyorsulása

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.3.3)$$

Az alma szögsebessége

$$\Omega = \dot{\varphi}_2. \quad (5.3.4)$$

B-S helyvektor

$$\mathbf{r}_{BS} = \begin{bmatrix} (R-h)\sin\varphi_2 \\ -(R-h)\cos\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3.5)$$

Ezekkel a súlypont gyorsulása

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{BS} - \Omega^2 \mathbf{r}_{BS}. \quad (5.3.6)$$

A súlypont gyorsulása tehát

$$a_{Sx} = \ddot{x} + (R-h) \cos\varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_2^2 (R-h) \sin\varphi_2, \quad (5.3.7)$$

$$a_{sy} = 2\kappa\dot{x}^2 + 2\kappa x\ddot{x} + (R - h) \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2 (R - h) \cos \varphi_2. \quad (5.3.8)$$

Rendszerre felírható dinamikai egyenletek:

$$ma_{sx} = B_x \quad (5.3.9)$$

$$ma_{sy} = B_y - mg \quad (5.3.10)$$

$$\theta_s \ddot{\varphi}_2 = -(R - h) \cos \varphi_2 B_x - (R - h) \sin \varphi_2 B_y - M_B \quad (5.3.11)$$

Ezekből kifejezve:

$$B_x = ma_{sx} \quad (5.3.12)$$

$$B_y = ma_{sy} + mg \quad (5.3.13)$$

A gömb tehetetlenségi nyomatéka

$$\theta_s = \frac{2}{5} mR^2. \quad (5.3.14)$$

A „B” pontban ébredő hajlító nyomaték

$$M_B = -(R - h) \cos \varphi_2 B_x - (R - h) \sin \varphi_2 B_y - \frac{2}{5} mR^2 \ddot{\varphi}_2. \quad (5.3.15)$$

Behelyettesítve az (5.3.12) és (5.3.13) egyenleteket az (5.3.15) egyenletbe:

$$M_B = -(R - h) \cos \varphi_2 ma_{sx} - (R - h) \sin \varphi_2 (ma_{sy} + mg) - \frac{2}{5} mR^2 \ddot{\varphi}_2. \quad (5.3.16)$$

Mivel az alma szárának tömege elhanyagolható, az „A” pontra felírt nyomatéki egyensúly:

$$M_A + M_B - B_x(L - \kappa x^2) - xB_y = 0, \quad (5.3.17)$$

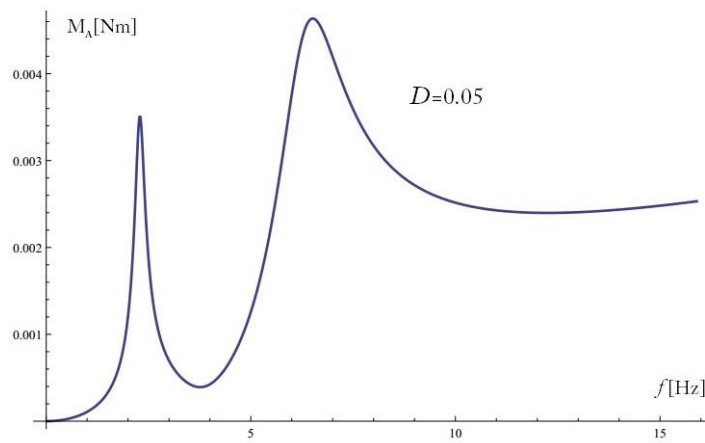
melyből az 5.4 ábrán látható „A” pontban ébredő hajlító nyomatékot kifejezve:

$$M_A = B_x(L - \kappa x^2) + xB_y - M_B, \quad (5.3.18)$$

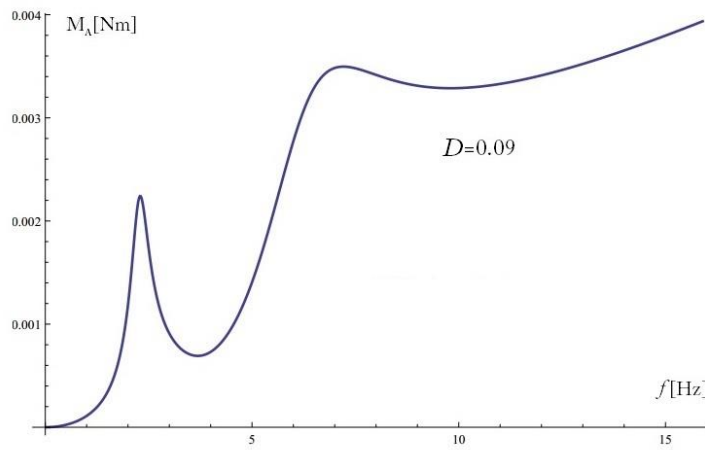
azaz

$$M_A = ma_{sx}(L - \kappa x^2) + x(ma_{sy} + mg) + (R - h) \cos \varphi_2 ma_{sx} + (R - h) \sin \varphi_2 (ma_{sy} + mg) + \frac{2}{5} mR^2 \ddot{\varphi}_2. \quad (5.3.19)$$

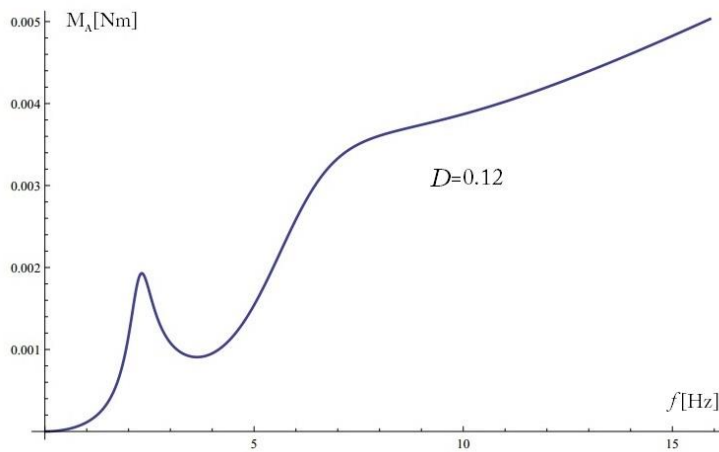
A nyomatékok nemlineáris tagokat is tartalmaz. Az elmozdulás és a szög időfüggvényeinek behelyettesítései után az f gerjesztési frekvencia függvényében a hajlító nyomaték változását matematikai szoftverrel ábrázoltuk. A megoldás szemléltetését a D (csillapítási tényező) különböző értékeire 5.5, 5.6, 5.7 ábra mutatja.



5.6 ábra Hajlító nyomaték, $D=0.05$



5.5 ábra Hajlító nyomaték, $D=0.09^5$



5.7 ábra Hajlító nyomaték, $D=0.12$

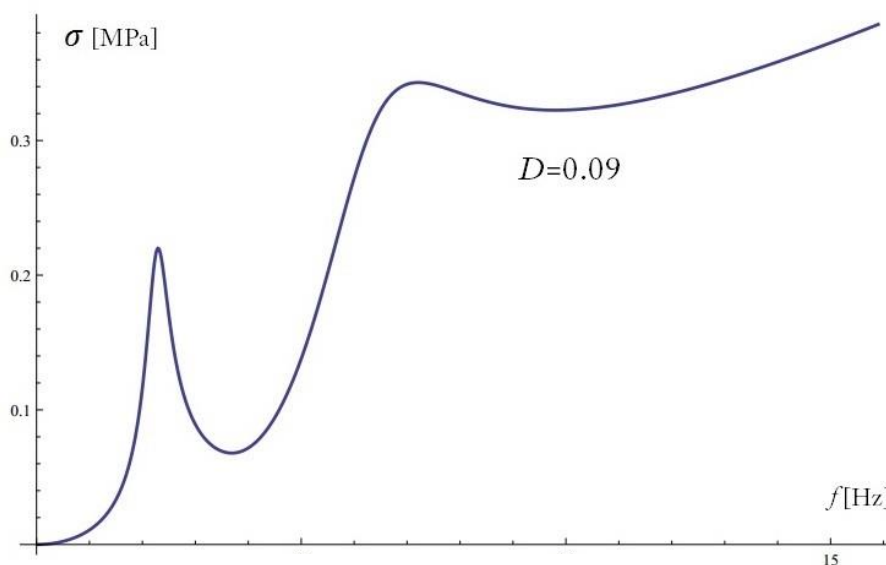
Az 5.5-5.7 ábrákon látható, hogy a csillapítás növekedésével egyre nagyobb hajlítófeszültség ébred a magasabb frekvenciákon a nagyobb sebességek miatt.

⁵ Legvalószínűbb csillapítási érték.

Az „A” pontban ébredő **feszültségi állapot** meghatározása:

$$\sigma_{hajl} = \frac{M_A d}{IE} \frac{1}{2} \quad (5.3.20)$$

Ahol keresztmetszet másodrendű nyomatéka értéke állandó kör keresztmetszetű homogén rúddal lett közelítve. A felhasznált adatok a 4. fejezetben kerülnek tárgyalásra. Az „A” pontban ébredő normál feszültséget a 5.8 ábra szemlélteti.



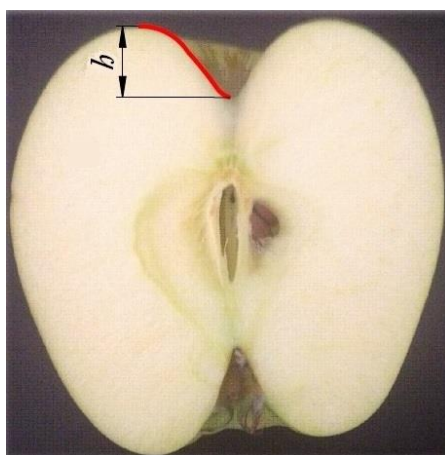
5.8 ábra Feszültségi állapot, $D=0.09$

Az 5.8 ábrán látható, hogy a második sajátfrekvenciánál az almaszár tövében megjelenő legnagyobb normál feszültség is kevesebb mint a 4.7 fejezetben kimért 1,169 MPa szakítószilárdság. Ebből adódik, hogy az alma szára több lengés után, a kifáradás miatt fog leszakadni. Ahhoz hogy meghatározzuk azt a lengésszámot, amelynél az alma leszakad, egy – az almaszárra jellemző – Wöhler görbét kellene vizsgálni. Ennek a görbének a meghatározására nem volt módunk, így az 5.8 ábra alapján vontunk le következtetéseket. Mivel a második sajátfrekvencián nagyobb normál feszültség ébred az alma tövében, és adott idő alatt ezen a frekvencián több lengést lehet létrehozni, így belátható, hogy a leggazdaságosabb az almákat a második sajátfrekvenciájukon rázni.

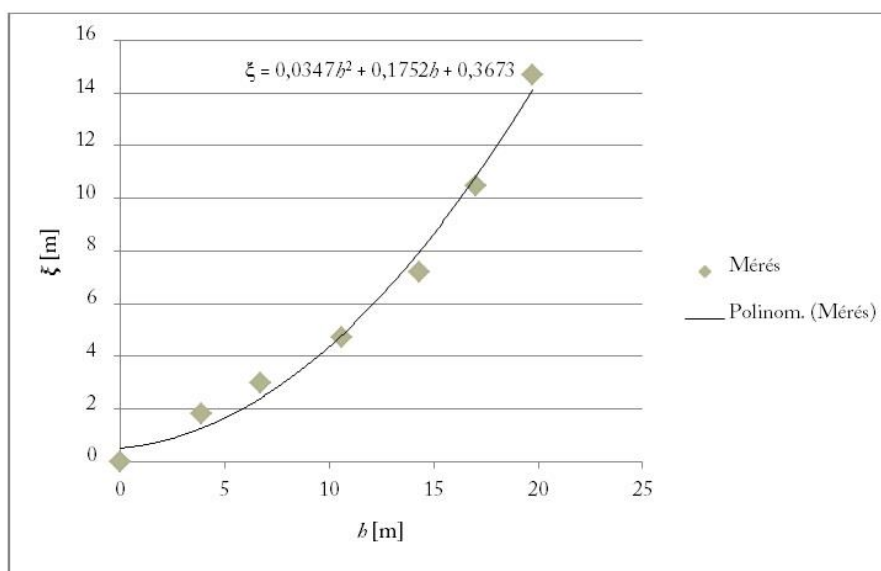
6 Nemlinearitás megjelenése

A rendszermodellek vizsgálata során felmerültek nemlineáris problémák is, melyeknek kidolgozása bonyolult és hosszadalmas így ezektől a dolgozatban eltekintettünk. A probléma felvetését követően egy előzetes elemzést végeztünk, mely az alma nagyobb szögű elfordulása során válik fontossá. A 2. fejezetben vizsgált modellekben már a megfelelő elrendezésben végeztük számolásainkat, ezen elrendezés alatt a szár, valamint az alma

kapcsolódását értjük. A nemlinearitási probléma ebben a pontban jelenik meg. Mint tudjuk az alma geometriája a gyümölcs és a szár csatlakozásánál ívelt formájú, ami a mozgás során a különböző nagyságú szögkitéréseknél a szár felfekvését eredményezik. Vizsgálati és tapasztalati eredmények alapján minél nagyobb a szár felfekvése, annál merevebbé válik. Ezek után utat nyithatunk a nemlineáris problémák vizsgálata felé, hogy hogyan is változtatja meg mindez a rendszer sajátfrekvenciáit, mozgásleírását. Vizsgálati eredményeink a grafikonokon láthatóak.



6.2 ábra Csatlakozó ív



6.3 ábra Geometriai kép

Az 6.1 ábrán látható a geometria közelítése mely az alma és szár csatlakozásánál megjelenik. A lengések közbeni szárrövidülést úgy határozhatjuk meg ha a (6.1) kifejezésben szereplő másodfokú függvénynek „h” függvényében keressük az ívhosszát.

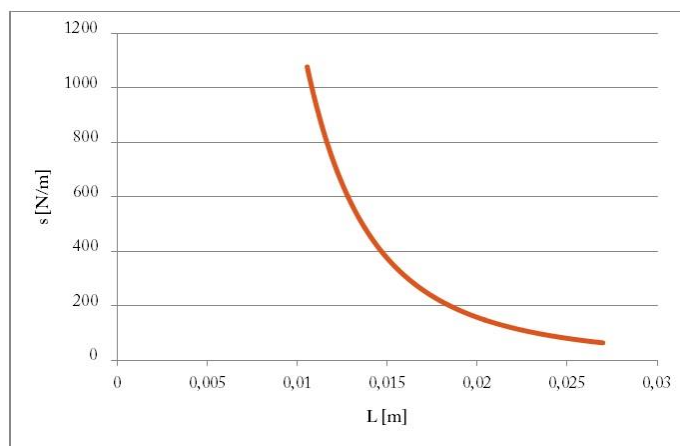
$$\xi = 0,0347h^2 + 0,1752h + 0,3673 \quad (6.1)$$

Ívhossz számítása

$$s = \int_0^h \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial h}\right)^2} dh \quad (6.2)$$

A szár új hossza ezek után

$$\zeta = L - s. \quad (6.3)$$



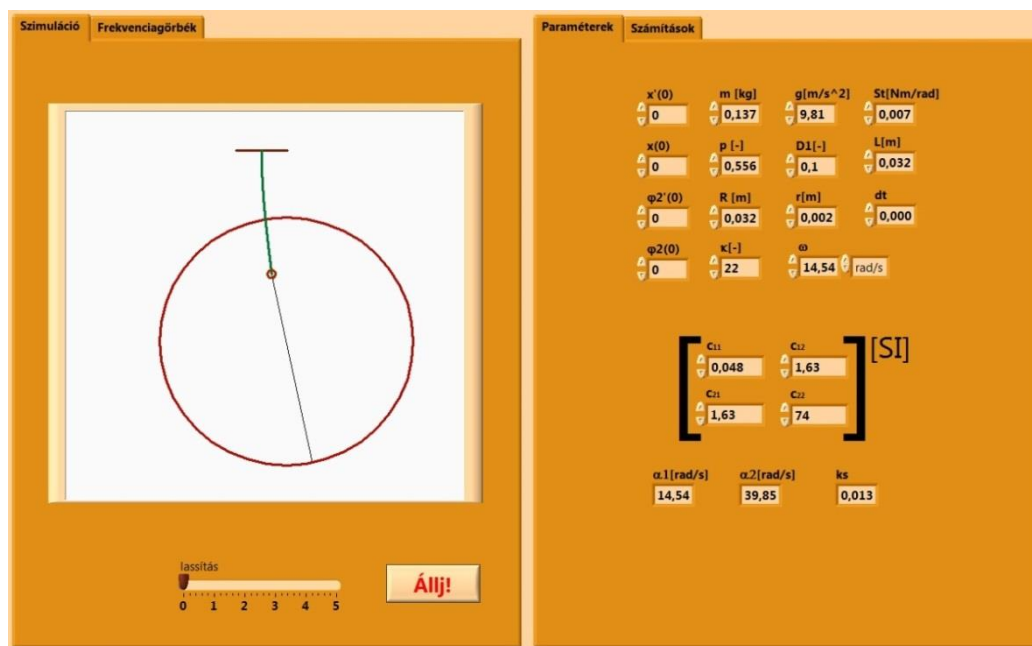
6.4. ábra Szármerevség változása a hossz függvényében⁶

7 Összefoglalás

Dolgozatunk célkitűzése annak a megállapítása volt, hogy az almát melyik sajátfrekvenciáján érdemes rázni ahhoz, hogy leghamarabb leszakadjon. Ezt a feladatot modellek felállításával és vizsgálatával kezdtük, eljutva egy általunk optimálisnak ítélt modellig. A továbbiakban ezt az optimális modellt vizsgáltuk részletesebben, és tértünk ki olyan fontos problémákra, mint a befogott tartó terhelésekor fellépő elmozdulások kapcsolata, amit a szilárdságtan elhanyagol, de esetünkben fontos volt ezzel is pontosítani a modellt. Ezek alapján vontuk le végül egy feszültség-frekvencia diagram segítségével azt a következtetést, hogy egy adott rázógépet az alma második sajátfrekvenciájára érdemes beállítani, hiszen itt nem csak nagyobb hajlító nyomatékok ébrednek a szár tövében, de adott idő alatt több hajlítás is történik, így a szár hamarabb kifárad.

Az így kapott eredményeket mérésekkel ellenőriztük, illetve szemléltettük egy LabViewban elkészített szimulációval is.

⁶ Ez egy keményedő rugó karakterisztika, mely a rezonanciagörbékét jobbra dönti.



7.1 ábra Szimuláció

A program megjeleníti az alma mozgását általunk beállítható paraméterek és gerjesztés mellett, illetve a frekvenciagörbét kirajzolja. A mozgás “lassításával” a nagyobb frekvencián történő gerjesztés esetén is jól láthatóvá válik a folyamat.

Munkánk során több olyan téma merült fel, amit nem volt lehetőségünk kidolgozni, így a későbbiekben ezek kifejtését tűztük ki célul. Ilyen probléma az alma 3-dimenziós mozgásának vizsgálata, melyek még pontosabb közelítést jelentenének. Ezeken kívül kihívást jelentő probléma a 6. fejezetben megemlített almaszár felfekvése miatt kialakuló nemlinearitás is. Ezeket a problémákat a későbbiekben terveink szerint megvizsgáljuk, kísérletekkel ellenőrizzük.

Irodalomjegyzék

- [1] [http://www.winebusiness.com/content/Image/g1_2\(3\).jpg](http://www.winebusiness.com/content/Image/g1_2(3).jpg)
- [2] Cooke JR, Rand RH, Vibratory Fruit Harvesting: A Linear Theory of Fruit-stem Dynamics, *Journal of Agricultural Engineering Research* **14**(3) (1969) 195-209.
- [3] Beléndez, Tarsicio; NEIPP, Cristian; Beléndez, Augusto. „Large and small defelection of a cantilever beam”. *European Journal of Physiscs*. Vol. 23, No. 3 (May 2002). ISSN 0143-0807, pp. 371-379 DOI: 10.1088/0143-0807/23/3/317
- [4] Dr. Csernák Gábor – Dr. Stépán Gábor, A műszaki rezgésstan alapjai (2012)

Melléklet

1 A 4. fejezetben ismertetett átlagos mért adatok táblázatos formája

alma	alma típus	<i>L</i> (mm)	<i>D</i> szélesség	<i>H</i> magasság	<i>h</i> - szár csatlakozás (mm)	tömeg (g)
1	golden	32,40	68,30	63,30	11,70	139,0
2	golden	37,00	67,00	67,00	13,40	134,3
3	golden	38,10	65,70	59,10	15,20	117,5
4	golden	31,20	64,00	68,60	13,30	129,8
5	golden	24,80	70,00	62,30	17,80	168,0
6	golden	34,10	67,50	65,30	15,95	137,6
7	idared	26,30	82,40	80,75	18,80	237,6
8	idared	30,30	80,50	71,00	17,40	214,5
9	idared	32,20	84,65	72,80	20,50	226,0
10	idared	25,25	82,20	72,15	16,10	205,8

M.1 táblázat Az alma geometriai és tehetetlenségi paramétereit

mérés	tömeg (kg)	erő (N)	lehajlás 1 (mm)	lehajlás 2 (mm)	lehajlás 3 (mm)	lehajlás 4 (mm)	lehajlás 5 (mm)	lehajlás 6 (mm)
1	0,002	0,01962	0,62	0,90	0,43	0,18	0,55	0,28
2	0,004	0,03924	1,37	1,79	0,91	0,39	0,97	0,53
3	0,006	0,05886	2,10	2,86	1,49	0,62	1,22	0,86
4	0,008	0,07848	3,09	4,03	2,27	0,98	1,55	1,26
5	0,010	0,09810	4,17	5,02	2,98	1,43	1,87	1,58
6	0,012	0,11772	5,37	x	3,54	1,69	2,25	1,86
7	0,014	0,13734	6,80	x	4,30	1,97	2,57	2,32
8	0,016	0,15696	8,35	x	x	2,34	3,00	2,67

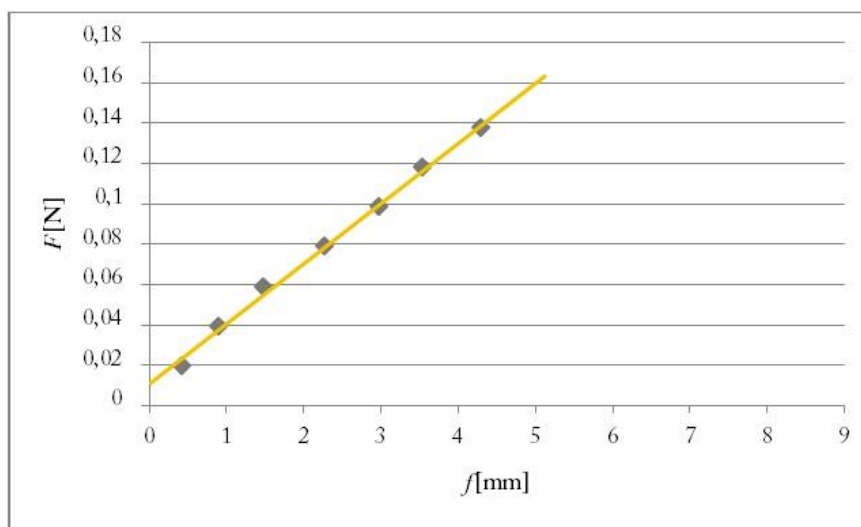
M.2 táblázat Az almaszárak erő irányú lehajlása, adott terhelés esetén

mérés	s ₁ (N/m)	s ₂ (N/m)	s ₃ (N/m)	s ₄ (N/m)	s ₅ (N/m)	s ₆ (N/m)
1	31,64516	21,80000	45,62791	109,0000	35,67273	70,07143
2	28,64234	21,92179	43,12088	100,6154	40,45361	74,03774
3	28,02857	20,58042	39,50336	94,93548	48,2459	68,44186
4	25,39806	19,47395	34,57269	80,08163	50,63226	62,28571
5	23,52518	19,54183	32,91946	68,60140	52,45989	62,08861
6	21,92179	x	33,25424	69,65680	52,3200	63,29032
7	20,19706	x	31,93953	69,71574	53,43969	59,19828
8	18,79760	x	x	67,07692	52,3200	58,78652

M.3 táblázat Rugómerevségek az M.2 táblázat adatai alapján

IE értékek, különböző szárakra és lehajlásokra (Nm²)						
mérés	1	2	3	4	5	6
1	0,00096122	0,00046507	0,00049838	0,00071515	0,00023405	0,00045974
2	0,00087001	0,00046766	0,00047099	0,00066014	0,00026542	0,00048576
3	0,00085137	0,00043905	0,00043148	0,00062287	0,00031654	0,00044905
4	0,00077147	0,00041544	0,00037763	0,00052542	0,00033220	0,00040866
5	0,00071458	0,00041689	0,00035957	0,00045009	0,00034419	0,00040736
6	0,00066587	x	0,00036322	0,00045702	0,00034327	0,00041525
7	0,00061349	x	0,00034886	0,00045740	0,00035062	0,00038840
8	0,00057098	x	x	0,00044009	0,00034327	0,00038570

M.4 táblázat Az M.2 táblázat adatai alapján számolt IE értékek



M.1 ábra Terhelés a lehajlás függvényében, M2 táblázat alapján