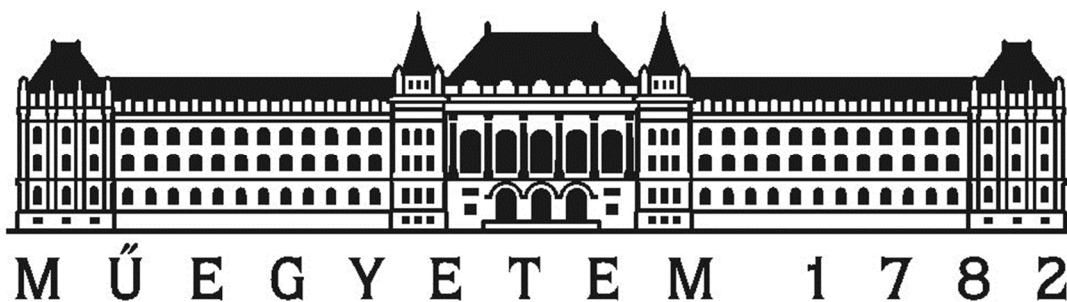




Kettős inga stabilizálása paraméteres gerjesztéssel

Készítette:
Csörgő András BSc III. évf.

Konzulens:
Dr. Insperger Tamás egyetemi docens,
Műszaki Mechanikai Tanszék

Budapest, 2013. 10. 23.

1. Bevezetés

A szakirodalomban gyakran körüljárt, sokat tárgyalt téma a különböző ingák instabil egyensúlyi helyzetük körüli stabilizálása. Mondhatni, hogy ez a téma az elmúlt évtizedekben a szabályozástechnika és az alkalmazott mechanika egyik klasszikus alapfeladatává vált, hiszen segítségével könnyen és látványosan letesztelhetők a legkülönbözőbb szabályozási stratégiák.

Jelen dolgozat az inga stabilizálás talán egy kevésbé ismert módszerét mutatja be, a paraméteres gerjesztést. A módszer lényege, hogy ha egy inverz inga felfüggesztési pontja megfelelő amplitúdóval illetve frekvenciával rezeg, akkor a felső instabil egyensúlyi helyzet is stabilá tehető. A dolgozat egy példát kíván mutatni arra, hogy hogyan tudjuk egy több szabadsági fokú lengőrendszer rezgését egy másik rezgéssel, a paraméteres gerjesztéssel kioltani. Maga az elv több más területen is alkalmazható lehet instabil folyamatok stabilizálására, mint például egyes forgácsoló megmunkálások közben keletkező rezgéseknél, vagy turbulens áramlások esetén. A dolgozat nagy mértékben épít az [1] cikkeire, melyben megtalálható az egyes inga azonos elvvel történő stabilizálása. Dolgozatom során az ott ismertetett módszertant alkalmazva végeztem el a kettős inga vizsgálatát.

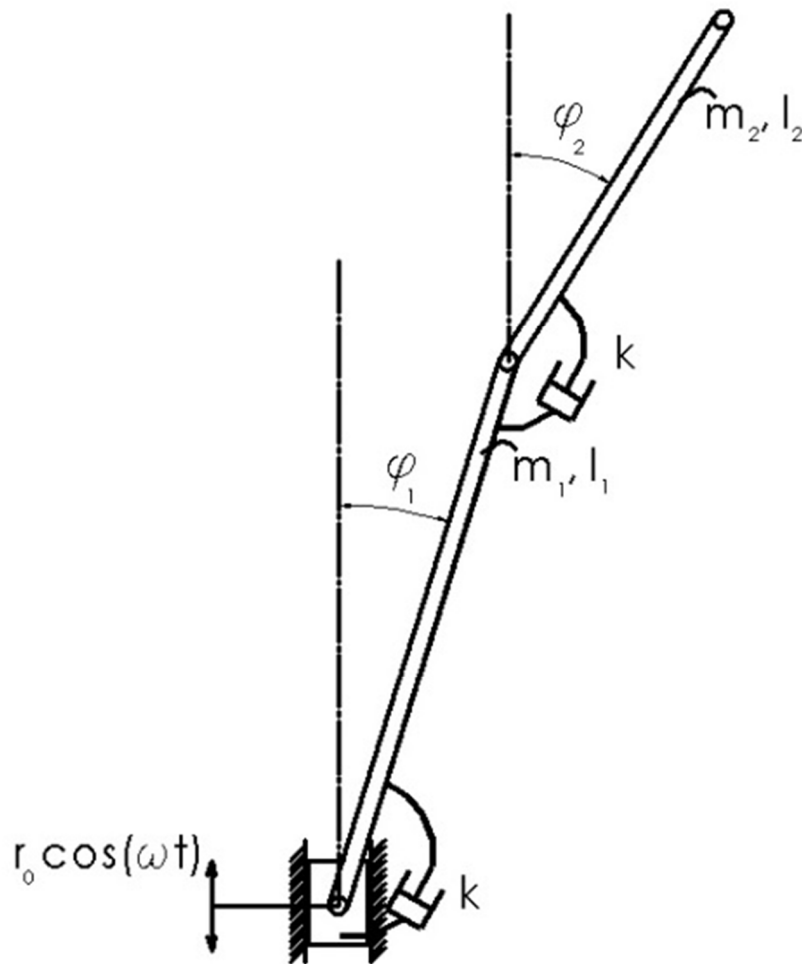
Először felállítottam a kettős inga mechanikai modelljét. A modell alapján ezután többféleképpen is meghatároztam a mozgás egyenleteit. Ezek, a rendszert leíró differenciálegyenletek periodikus időfüggő együtthatót tartalmaznak, így a legismertebb stabilitási kritériumok, mint például a Routh-Hurwitz-kritérium vagy a Nyquist-kritérium nem alkalmas a stabilitásvizsgálat elvégzéséhez. Az ilyen periodikus együtthatójú lineáris rendszerek stabilitása a Floquet-elmélet segítségével vizsgálható [4]. A Floquet-elméletet a kettős ingát reprezentáló rendszerre alkalmazva meghatároztam a gerjesztés két paraméterének, a frekvenciának és az amplitúdónak azon értékeit, melyek alkalmazása esetén a legfelső egyensúlyi helyzet stabilis lesz. Ezen pontokat a frekvencia-amplitúdó síkon ábrázolva kaptam a stabilitástérképet. A számítások során végig paraméterként kezeltem az inga geometriai adatait illetve az egyes ingarészek tömegeit, így bármilyen inga konfigurációra megállapítható a stabil tartomány. Az elméleti eredmények gyakorlatban való személtetéséhez megépítettem a vizsgált rendszert.

2. A mechanikai modell:

A kettős ingát reprezentáló modell két homogén, izotróp, állandó kör keresztmetszetű rúdból áll, melyek egymással, illetve a felfüggesztéssel is csuklóval kapcsolódnak. A csuklóokban ébredő kis súrlódást viszkózus csillapító elemmel vesszük figyelembe. A felfüggesztési pont gerjesztésének modellje egy függőlegesen megvezetett hasáb, amely a megvezetéssel súrlódásmentes kapcsolatban áll. Legyen az alsó ingarész az 1 jelű, a felső pedig 2 jelű. Az ingarészek paraméterei ennek megfelelően:

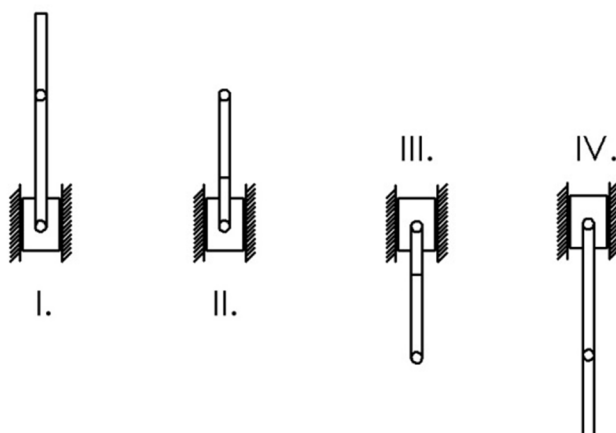
-1 jelű rúd: m_1 tömegű, l_1 hosszú

-2 jelű rúd: m_2 tömegű, l_2 hosszú



1. ábra: A mechanikai modell

A két szabadságfokú rendszer mozgásának leírásához választott két általános koordináta a két ingarész függőlegessel bezárt szöge: φ_1 és φ_2 . Az ismertett lengőrendszernek négy egyensúlyi helyzete van. Ezeket a 2. ábrán szemléltettem:



2. ábra: Az egyensúlyi helyzetek

Ezekben:

I.	II.	III.	IV.
$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0,$	$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi,$	$\varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0,$	$\varphi_1 = \pi, \varphi_2 = \pi,$

A fentebbi egyensúlyi helyzetek közül jól tudjuk, hogy gerjesztés nélkül csak a IV. jelzésű stabil. A továbbiakban II. illetve III. esettel nem foglalkozom, csak az I. legfelső instabil egyensúlyi helyzettel. A mechanikai modell tehát kész, írjuk fel a mozgásegyenleteket.

2.1. A mozgásegyenletek meghatározása a másodfajú Lagrange-egyenlettel

A másodfajú Lagrange-egyenlet n szabadsági fokú rendszer esetén a következő alakban adható meg:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial q_i} = Q_i^*; \quad i = 1 \dots n; \quad (1)$$

ahol T jelöli a rendszer teljes kinetikus energiáját, U a rendszer teljes potenciális energiáját, D a disszipatív energiát, q_i pedig az i -edik általános koordinátát, Q_i^* az általános erővektor i -edik komponense, n pedig a rendszer szabadságfokainak száma. Jelen esetben $n=2$, $q_1=\varphi_1$, $q_2=\varphi_2$.

A disszipatív potenciál:

A kettős inga csuklóiban a csapsúrlódás csillapításként hat a rendszerre. Ezt többféle modellel figyelembe lehet venni. A dolgozatomban a csillapításnak a stabilitás vizsgálatnál lesz jelentősége. Csillapítás nélküli esetben ugyanis a rendszer bár Ljapunov értelemben stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis, így a stabilitási vizsgálat azt mutatná, hogy a rendszer a stabilitás határán van. Tetszőlegesen kicsiny csillapítást feltételezve azonban a rendszer már aszimptotikusan stabilis lesz, így a stabilitási vizsgálat egyértelmű eredményt ad.

Így a csapsúrlódás egyszerű viszkózus csillapító elemmel is figyelembe vehető, bár valószínűsíthető hogy nem ez a modell írja le a valósághoz leghűbben a csillapító nyomaték és a szögsebesség kapcsolatát.

Tehát a disszipatív potenciál:

$$D = \frac{1}{2}k\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}k(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2 \quad (2)$$

A kinetikus energia:

Az egyenletek felírásához először határozzuk meg a rendszer teljes kinetikus energiáját:

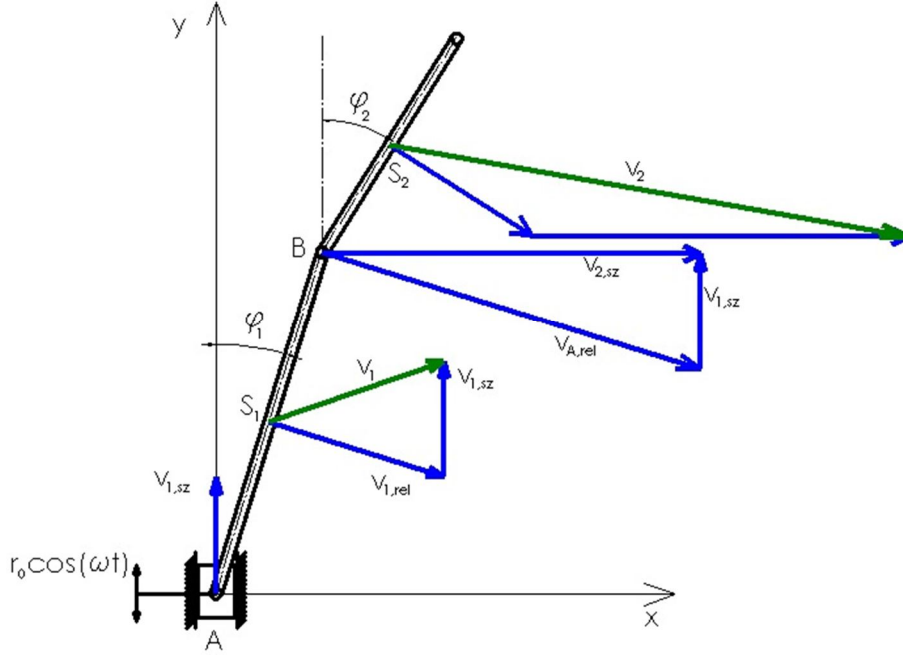
$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}\Theta_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}\Theta_2\omega_2^2 \quad (3)$$

A (3) kifejezésben szereplő első két tag az ingarészek haladó mozgásából származó kinetikus energia, míg az összeg másik két tagja az ingarészek forgó mozgásából származó kinetikus energia. Fontos megjegyezni, hogy a képletben szereplő v_1 , v_2 , ω_1 , ω_2 abszolút mennyiségek, azaz az álló környezethez képest mért sebesség illetve szögsebesség vektorok. Ezek meghatározásához relatív kinematika szükséges.

Mivel az ingarészek, illetve a felfüggesztés egymáshoz képest mozgó koordinátarendszert alkotnak, a szükséges súlyponti sebességvektorok az álló koordinátarendszerben a következők figyelembevételével határozhatók meg:

$$\underline{v}_{2,0} = \underline{v}_{1,0} + \underline{v}_{2,1} = \underline{v}_{sz} + \underline{v}_{rel} \quad (4)$$

ahol 0 jelöli az álló koordináta-rendszert, 1 azt a koordináta-rendszert, amelyhez képest 2 koordináta-rendszer mozog. Ezen sebességeket a 3. ábrán szemléltettem.



3. ábra: A sebességek szemléltetése

Így a szükséges sebességvektorok:

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_{1,sz} + \underline{v}_{1,rel} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r_0 \omega \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \\ -\frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \\ -r_0 \omega \sin(\omega t) - \frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_2 = \underline{v}_{2,sz} + \underline{v}_{2,rel} &= \begin{bmatrix} l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \\ -r_0 \omega \sin(\omega t) - l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \\ -\frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \\ -r_0 \omega \sin(\omega t) - l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\underline{\omega}_1 = \underline{\dot{\varphi}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\underline{\omega}_2 = \underline{\dot{\varphi}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

A tehetetlenségi nyomatékok az ingadarabok súlypontjára számítva:

$$\Theta_1 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 \quad (9)$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 \quad (10)$$

A fenti összefüggések alapján a rendszerünk teljes kinetikus energiája:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} \Theta_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_2 \omega_2^2 \\ &= \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 r_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2} m_1 l_1 r_0 \omega \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \sin(\omega t) + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{8} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 r_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &\quad + m_2 l_1 r_0 \omega \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \sin(\omega t) + \frac{1}{2} m_2 l_2 r_0 \omega \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \sin(\omega t) + \frac{1}{24} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \end{aligned} \quad (11)$$

A potenciális energia:

A másodfajú Lagrange egyenlet felírásához szükségünk van a két szabadságfokú rendszer teljes potenciális energiájára.

Ebben a mechanikai modellben nem szerepelnek rugók. Így potenciális energia csak helyzeti energiából származik:

$$\begin{aligned} U &= m_1 g r_0 \cos(\omega t) + m_1 g \frac{l_1}{2} \cos(\varphi_1) + m_2 g r_0 \cos(\omega t) + m_2 g l_1 \cos(\varphi_1) \\ &\quad + m_2 g \frac{l_2}{2} \cos(\varphi_2) \end{aligned} \quad (12)$$

A mozgásegyenletek:

A nem lineáris mozgásegyenletek a másodfajú Lagrange-egyenletből (1) egyenletbe behelyettesítve, és a deriválásokat elvégezve a következő formát öltik:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + k(2\varphi_1 - \varphi_2) + \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2\right) l_1 r_0 \omega^2 \sin \varphi_1 \cos(\omega t) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 [\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)] \\ &\quad - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2\right) g l_1 \sin \varphi_1 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

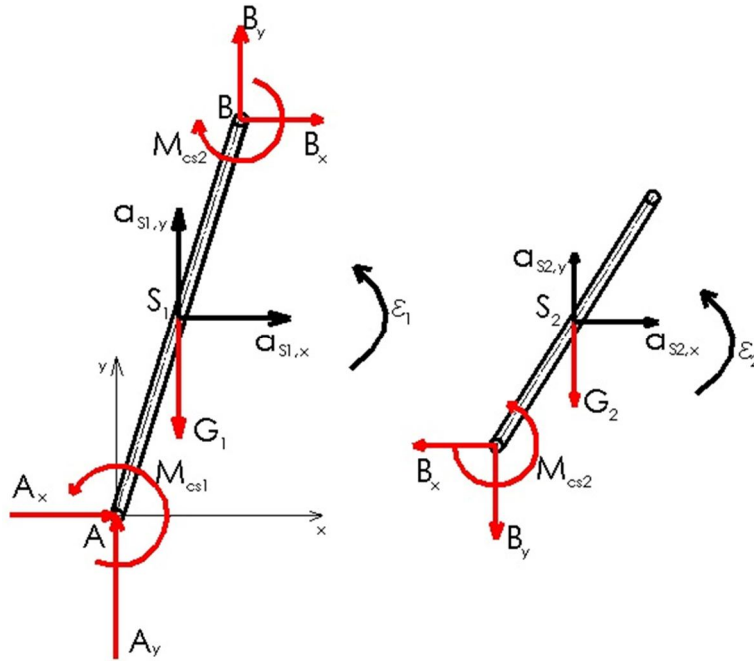
$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + k(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 [\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)] \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 l_2 r_0 \omega^2 \sin \varphi_2 \cos(\omega t) + \frac{1}{2} m_2 l_2 g \sin \varphi_2 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

.2. A mozgásegyenletek meghatározása a Newton-Euler-módszerrel:

A másodfajú Lagrange egyenlettel kapott megoldás ellenőrzéseként határozzuk meg a mozgás egyenleteit szabadtest ábra illetve a dinamika alaptételének felhasználásával is. A csillapítást a csuklóokban ébredő koncentrált erőpárral, M_{cs1} -el illetve M_{cs2} -vel vegyük figyelembe. Értékeik:

$$M_{cs1} = k\omega_1 \quad (15)$$

$$M_{cs2} = k(\omega_2 - \omega_1) \quad (16)$$



4. ábra: Szabadtestábrák a Newton–Euler-módszerhez

Felírhatjuk a dinamika alaptörvényét:

$$\dot{\underline{I}} = \sum \underline{F} \quad (17)$$

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \sum \underline{M}_S \quad (18)$$

ahol I az impulzus és π_S a súlypontra számított perdület.

A szabadtest ábrák alapján felírhatjuk a dinamika alaptörvényének vetületi egyenleteit:

az 1 jelű ingarészre:

$$x: \quad m_1 a_{S1,x} = A_x + B_x \quad (19)$$

$$y: \quad m_1 a_{s1,y} = A_y + B_y - G_1 \quad (20)$$

$$z: \quad \theta_1 \varepsilon_1 = \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 (B_y - A_y) + \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1 (A_x - B_x) + M_{cs1} - M_{cs2} \quad (21)$$

a 2 jelű ingarészre:

$$x: \quad m_2 a_{s2,x} = -B_x \quad (22)$$

$$y: \quad m_2 a_{s2,y} = -B_y - G_2 \quad (23)$$

$$z: \quad \theta_2 \varepsilon_2 = \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 B_y - \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 B_x + M_{cs2} \quad (24)$$

Az egyenletrendszer megoldásához szükségünk van a súlyponti gyorsulások felírására.

Az A pont gyorsulását ismerjük:

$$\underline{a}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{r}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_0 \omega^2 \cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Megadhatjuk továbbá az alábbi vektorokat:

$$\underline{r}_{AS1} = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 \\ \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} l_1 \sin \varphi_1 \\ l_1 \cos \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\underline{r}_{BS1} = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \sin \varphi_1 \\ \frac{l_2}{2} \cos \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Ezek felhasználásával a gyorsulások:

$$\underline{a}_{s1} = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon}_1 \times \underline{r}_{AS1} - \omega_1^2 \underline{r}_{AS1} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1 - \omega_1^2 \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 \\ r_0 \omega^2 \cos(\omega t) + \varepsilon_1 \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 - \omega_1^2 \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon}_1 \times \underline{r}_{AB} - \omega_1^2 \underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 l_1 \cos \varphi_1 - \omega_1^2 l_1 \sin \varphi_1 \\ r_0 \omega^2 \cos(\omega t) + \varepsilon_1 l_1 \sin \varphi_1 - \omega_1^2 l_1 \cos \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \underline{a}_{S2} &= \underline{a}_B + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{BS2} - \omega_2^2 \underline{r}_{BS2} = \\ &= \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 l_1 \cos \varphi_1 - \omega_1^2 l_1 \sin \varphi_1 - \varepsilon_2 \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - \omega_2^2 \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \\ r_0 \omega^2 \cos(\omega t) + \varepsilon_1 l_1 \sin \varphi_1 - \omega_1^2 l_1 \cos \varphi_1 + \varepsilon_2 \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 - \omega_2^2 \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

(19-24) egyenleteket $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ -re rendezve:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) l_1} \left(-\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) r_0 \omega^2 \sin \varphi_1 \cos(\omega t) - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g \sin \varphi_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_2}{2} l_2 \varepsilon_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{m_2}{2} l_2 \omega_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right) - \frac{k}{\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) l_1^2} (\omega_1 - \omega_2) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{3}{l_2} \left(-\frac{r_0}{2} \omega^2 \sin \varphi_2 \cos(\omega t) - \frac{l_1}{2} \varepsilon_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{l_1}{2} \omega_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{g}{2} \sin \varphi_2 \right) - \frac{3k}{m_2 l_2^2} \omega_2 \quad (33)$$

2.3. Linearizálás a felső egyensúlyi helyzet körül

Cauchy átírással hozzuk a következő alakra a csatolt (13)-(14) differenciálegyenletrendszert:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (34)$$

Ehhez vezessük be az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

vektort.

Értelmezzük a (34) egyenletet. A jobb és bal oldal közötti függvénykapcsolat ismert, így meghatározható az együtthatómátrix. A (34) egyenlet vetületei a (35) vektornak megfelelően:

$$\frac{d}{dt} \varphi_1 = f_1(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t) = \dot{\varphi}_1 \quad (36)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi_2 = f_2(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t) = \dot{\varphi}_2 \quad (37)$$

$$\frac{d}{dt} \dot{\varphi}_1 = f_3(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t) \quad (38)$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\varphi}_2 = f_4(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t) \quad (39)$$

Az f_1 illetve az f_2 függvények triviálisak, az f_3 és az f_4 függvényeket pedig előállíthatjuk a (13) és (14) egyenletekből álló egyenletrendszerből $\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2$ kifejezésével. Ezt a számítást Wolfram Mathematica segítségével végeztem el. A számítás menete az 7.1. számú mellékletben található.

A rendszernek a már ismertett 4 egyensúlyi helyzete közül a legfelső körüli linearizálást hajtunk végre. Az f_1, f_2, f_3, f_4 függvények ismeretében az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix a következőképpen határozható meg:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\varphi}_1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\varphi}_2} \right|_{\mathbf{x}_0} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\varphi}_1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\varphi}_2} \right|_{\mathbf{x}_0} \\ \left. \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_2} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial f_3}{\partial \dot{\varphi}_1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial f_3}{\partial \dot{\varphi}_2} \right|_{\mathbf{x}_0} \\ \left. \frac{\partial f_4}{\partial \varphi_1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial \varphi_2} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial \dot{\varphi}_1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial \dot{\varphi}_2} \right|_{\mathbf{x}_0} \end{bmatrix} \quad (40)$$

ahol $\mathbf{x}_0$ a legfelső egyensúlyi helyzetet jellemző vektor:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad (41)$$

A deriválásokat illetve a behelyettesítést elvégezve az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{6(m_1 + 2m_2)(g - r_0\omega^2\cos(\omega t))}{l_1(4m_1 + 3m_2)} & \frac{-9m_2g + 9m_2r_0\omega^2\cos(\omega t)}{l_1(4m_1 + 3m_2)} & \frac{-6k(3l_1 + 4l_2)}{l_1^2l_2(4m_1 + 3m_2)} & \frac{6k(3l_1 + 2l_2)}{l_1^2l_2(4m_1 + 3m_2)} \\ \frac{-9(m_1 + 2m_2)(g - r_0\omega^2\cos(\omega t))}{l_2(4m_1 + 3m_2)} & \frac{6(m_1 + 3m_2)(g - r_0\omega^2\cos(\omega t))}{l_2(4m_1 + 3m_2)} & \frac{12k(l_1m_1 + 3m_2(l_1 + l_2))}{l_2^2l_1m_2(4m_1 + 3m_2)} & \frac{-6k(3l_2m_2 + 2l_1(m_1 + 3m_2))}{l_2^2l_1m_2(4m_1 + 3m_2)} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Látható, hogy az együttható mátrix tényleg periodikus $T=2\pi/\omega$ periódussal.

A kettős inga legfelső instabil egyensúlyi helyzete körüli ($\varphi_1=0, \varphi_2=0$) mozgásokat leíró linearizált differenciálegyenleteket úgy is megkaphatjuk, ha az általános koordináták másod- vagy magasabb rendű tagjait elhanyagolhatóaknak tekintjük, illetve élünk a $\sin\varphi \approx \varphi$,

illetve $\cos\varphi \approx 1$ közelítéssel. A Lagrange egyenletből kapott nemlineáris egyenletek (13), (14) tehát a következő alakba írhatók:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}m_1 + m_2\right)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + k(2\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)l_1(r_0\omega^2 \cos(\omega t) - g)\varphi_1 \\ + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2 = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 + k(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}m_2l_2(r_0\omega^2 \cos(\omega t) - g)\varphi_2 = 0 \quad (44)$$

Az egyenleteket $\ddot{\varphi}_1$ -ra illetve $\ddot{\varphi}_2$ -ra rendezve látható, hogy megegyezik a Newton-Euler-módszerrel kapott mozgásegyenletekkel, csak jelöléseiben különbözik. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ megfelel $\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2$ -nak, ω_1, ω_2 pedig $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ -nak. :

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right)l_1} \left(-\frac{k}{l_1}(2\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)(r_0\omega^2 \cos(\omega t) - g)\varphi_1 - \frac{m_2}{2}l_2\ddot{\varphi}_2 \right) \quad (45)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{3}{l_2} \left(-\frac{k}{m_2l_2}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \frac{r_0}{2}\omega^2 (\cos(\omega t) - g)\varphi_2 - \frac{l_1}{2}\ddot{\varphi}_1 \right) \quad (46)$$

Megfigyelhető, hogy a mozgás egyenleteiben szerepel a $\cos(\omega t)$, mint az általános koordináta együttthatója. Ez azt jelenti, hogy az ismertett mechanikai modell nem írható le állandó együttthatós homogén differenciálegyenlet-rendszerrel. Ennek következtében nem használhatjuk közvetlenül a Routh-Hurwitz stabilitási kritériumot a stabilitás meghatározásakor. Helyette a Floquet-elmélet használható.

3. Stabilitásvizsgálat

A stabilitásvizsgálatot a Floquet-elmélet segítségével végezzük el [2,4]. Először az elméletet ismertetem a megfelelő szakirodalom alapján, majd az elmélet alkalmazását mutatom be a paraméteresen gerjesztett kettős inga esetén.

3.1. A Floquet-elmélet

Ebben a fejezetben az elmélet rövid összefoglalója található az [1] illetve [4] szakirodalom alapján.

A Floquet-elméletet Gaston Floquet dolgozta ki a 19. század végén [4]. Az elmélet lényege, hogy segítségével a periodikus együtthatójú lineáris differenciálegyenleteket átranzformálhatjuk hagyományos állandó együtthatós rendszerekké.

Tekintsük az alábbi általános lineáris rendszereket:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} \quad (47)$$

ahol $\mathbf{A}$ együttható mátrix periodikus, azaz:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T) \quad (48)$$

bármely $t > 0$ -ra. Itt $T = 2\pi/\omega$, ahol ω a paraméteres gerjesztés körfrekvenciája.

A (47) egyenlettel leírható rendszerek alapmátrixának nevezzük $\Phi(t)$ mátrixot, ha teljesül rá, hogy

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = \mathbf{A}(t) \Phi(t) \quad (49)$$

A következő állítások bizonyíthatóak:

- I. A (47) típusú differenciálegyenlet-rendszerek összes megoldása felírható $\Phi(t) \mathbf{c}$ szorzat formájában, ahol $\mathbf{c}$ konstans vektor, hiszen a (49) egyenlet csak akkor teljesülhet, ha az alapmátrix elemei maguk a megoldásfüggvények.
- II. Létezik egy olyan $\Phi_0(t)$ alapmátrix, hogy rendszer megoldásai $\Phi_0(t) \mathbf{x}_0$ alakúak, amiből következik, hogy $\Phi_0(0) = \mathbf{I}$ egységmátrix, hiszen $t=0$ -ban a megoldásnak meg kell egyeznie a kezdeti értékkel.

- III. Minden alaplátrix felírható $\Phi(t) C'$ szorzat formájában, ahol C' konstans mátrix, azaz az összes alaplátrix bármely alaplátrixból lineáris transzformációval képezhető.
- IV. Bármely $\Phi(t)$ alaplátrixra $\Phi(t + T)$ is alaplátrix.
- V. Létezik olyan C' konstans mátrix, amire $\Phi(t + T) = \Phi(t)C'$ ezt a C' mátrixot nevezzük (47) főmátrixának. C' tehát a III: pontban már említett transzformációs mátrix, ami egy alaplátrixot egy periódussal későbbi alaplátrixba transzformál. C' meghatározható a következőképpen: $C' = \Phi^{-1}(t) \Phi(t + T)$
- VI. $\Phi_0(t)$ -hez tartozó C főmátrix a következőképpen kapható meg:
- $$C = \Phi_0^{-1}(t) \Phi_0(t + T) = \Phi_0^{-1}(0) \Phi_0(0 + T) = \Phi_0(0)$$
- VII. A főmátrix sajátértékeit karakterisztikus multiplikátoroknak nevezzük ($\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$), ezek invariánsak a kezdeti feltételekre.
- VIII. A (47) rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis, ha az összes karakterisztikus multiplikátor abszolút értéke egynél kisebb, azaz:

$$|\mu_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (50)$$

Tehát ahhoz, hogy megállapítsuk a gerjesztett kettős inga stabilitástérképét, valahogyan elő kell állítanunk a rendszer főmátrixát. A főmátrix sajátértékeiből az előbbiek alapján már következtethetünk a stabilitásra. A probléma az, hogy általános esetben egy rendszer főmátrixát nem lehet analitikusan, zárt alakban meghatározni, azonban léteznek numerikus közelítő módszerek, amelyeket alkalmazhatunk.

3.2. A főmátrix közelítésének módszere:

A közelítés alapja az lesz, hogy a periodikus együttható mátrixot szakaszonként állandó értékkel közelítjük. A periódus felosztásának finomításával a közelítés pontosítható.

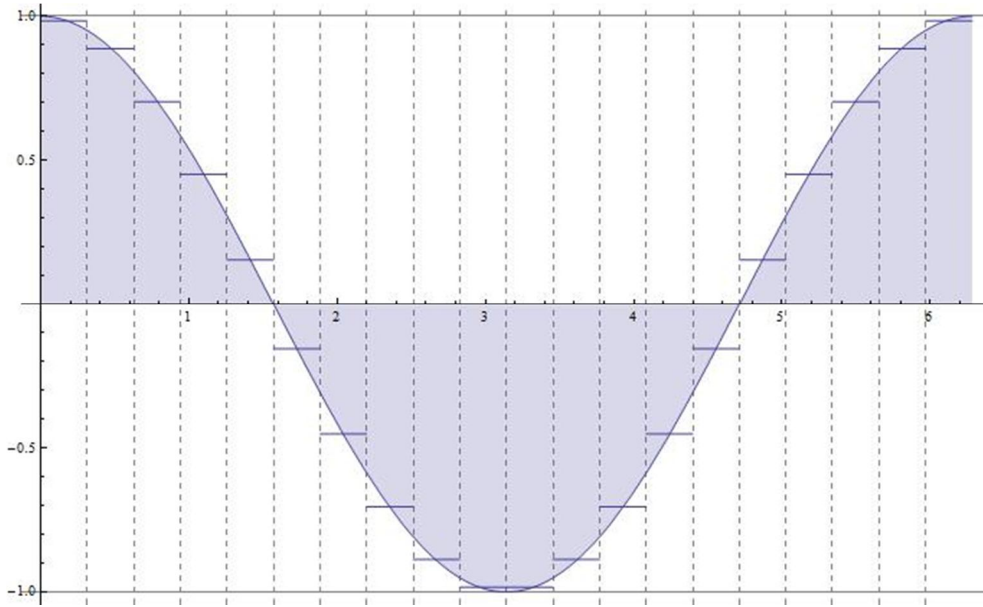
Osszuk fel n részre a T periódust. Ekkor

$$\Delta t = \frac{T}{n} \quad (51)$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{cases} \mathbf{A}_1 & \text{ha } 0 \leq t \leq \Delta t \\ \mathbf{A}_2 & \text{ha } \Delta t \leq t \leq 2\Delta t \\ \vdots & \\ \mathbf{A}_i & \text{ha } (i-1)\Delta t \leq t \leq i\Delta t \\ \vdots & \\ \mathbf{A}_n & \text{ha } (n-1)\Delta t \leq t \leq T \end{cases} \quad (52)$$

ahol

$$\mathbf{A}_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \mathbf{A}(s) ds \quad (53)$$



5. ábra: A periodikus együtthatómátrix közelítése

Tehát a periodikus együttható mátrixot helyettesítjük kis szakaszokon az integrálatlagával. A főmátrix ekkor a következőképpen közelíthető [5]:

$$\mathbf{C} = \exp(\mathbf{A}_n \Delta t) \exp(\mathbf{A}_{n-1} \Delta t) \dots \exp(\mathbf{A}_1 \Delta t), \quad (54)$$

ahol a mátrix exponenciálisa az exponenciális függvény sorfejtésével definiálható, azaz $\exp \mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 + \dots$ [3].

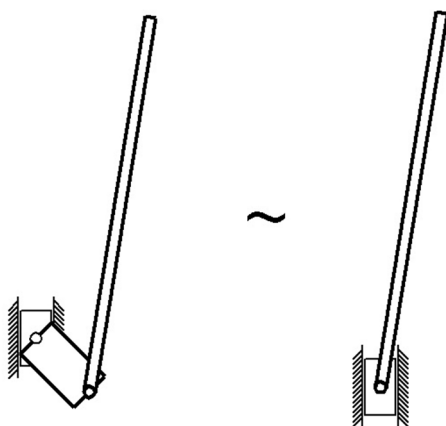
3.3. A numerikus keresés algoritmus

A 7.2. mellékletben található MATLAB kód végzi el a főmátrix numerikus közelítését. A program a periodikus együttható mátrix periódusát n részre osztja, és minden egyes frekvencia-amplitúdó párhoz kiszámítja a főmátrix közelítését a (54) egyenlet szerint.

Megvizsgálja, hogy a főmátrix sajátértékeinek abszolút értéke kisebb-e mint egy, ezáltal megkeresi azon gerjesztési paramétereket, amelyeket alkalmazva a kettős inga legfelső egyensúlyi helyzete stabilissá tehető. Ezeket a stabil tartományokat a kód grafikusán is ábrázolja. A különböző ingakonfigurációkkal végzett futtatások eredményei láthatók a 4. fejezetben található ábrákon.

Az elmélet ellenőrzéseként beállíthatjuk a paramétereket úgy, hogy az [1] cikkben leírt egyes inga esetét adja vissza. Ehhez logikus lenne m_2 illetve l_2 értékét zérusnak választani, azonban ezt nem tehetjük meg, mert több esetben is szerepelnek nevezőben (azaz a tömeg mátrix szinguláris lesz). A program nem futna le, nullával nem oszthatunk. Ehelyett válasszuk az alsó ingarész tömegét nagyságrendekkel nagyobbobbnak, mint a felső inga tömegét, illetve az alsó ingarész hosszát kicsinek és negatívnak. Így a koordinátarendszer origójától a negatív irány felé fog állni az alsó ingarész. A nagy tömege illetve kicsi és negatív hossza dinamikai értelemben egy felfüggesztéshez teszi hasonlóvá. Tehát:

$$m_1 \gg m_2, \quad l_1 < 0, \quad |l_1| \ll l_2 \quad (55)$$

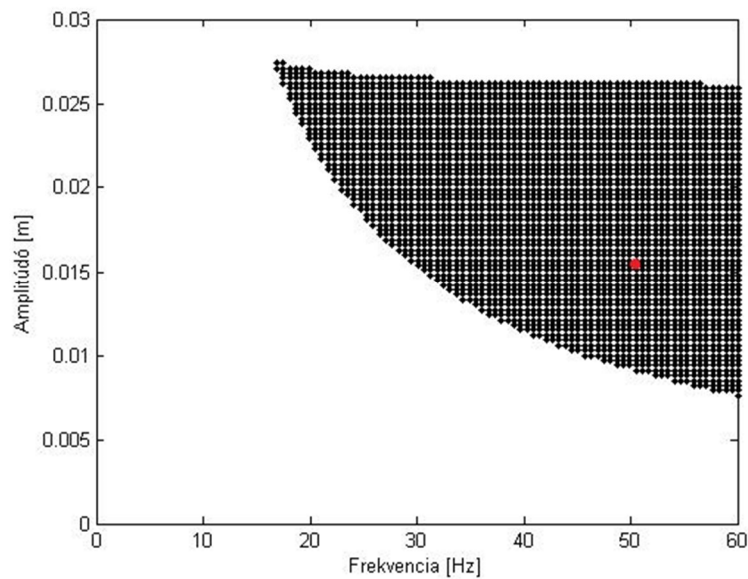


6. ábra: Az egyes inga előállítása

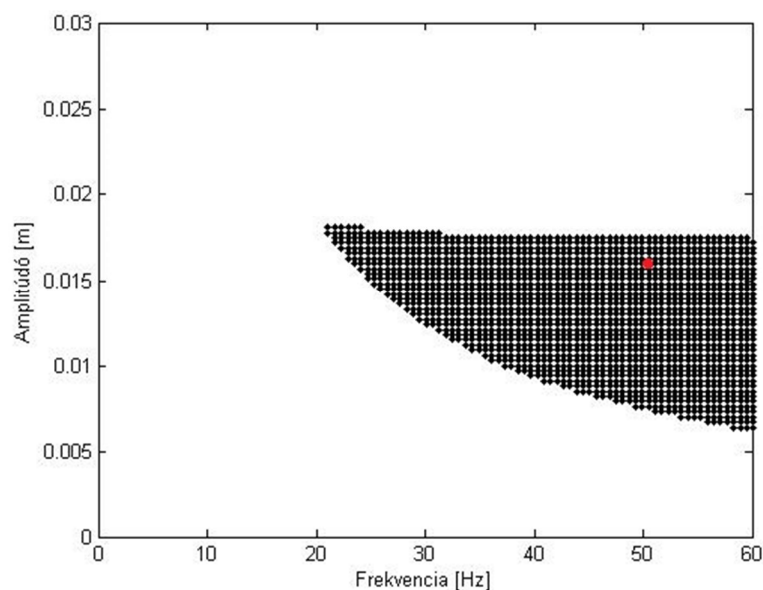
Szemléletből érezzük, hogy ez az elrendezés vissza kell hogy adja az egyes inga stabilitástérképét. Az 4. fejezetben látható, hogy a tényleg megkapjuk ugyanazt az stabilitástérképét. Így szemléletesen igazoltuk a modell helyességét.

4. Az egyes stabilitástérképek a különböző paraméterekkel történő futásra

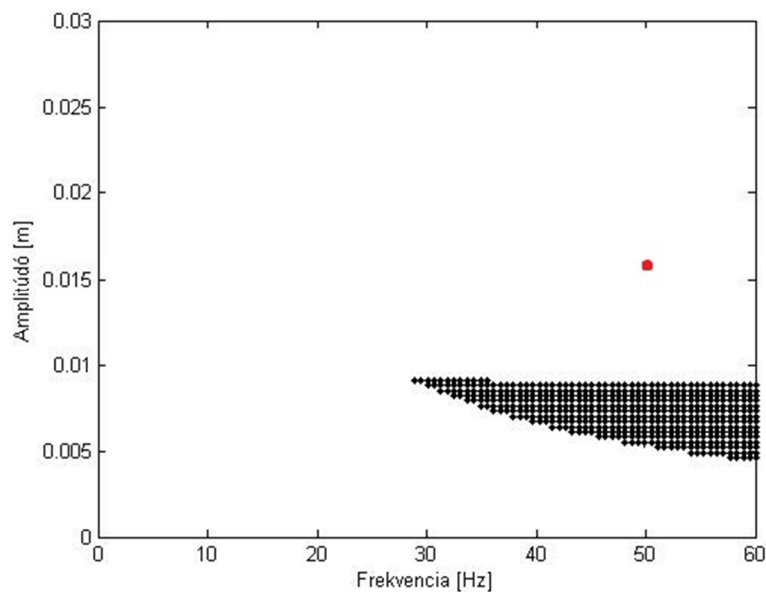
A következőkben azonos tömegű, azonos hosszúságú ingadarabokból álló kettős ingákra meghatározott stabilitástérképek láthatók. Az ábrákon piros ponttal jelöltem azt a pontot, ahol a gyakorlatban a gerjesztés megvalósult. A 10-10 cm hosszú kettős ingánál ez a pont kívül esik a stabil tartományon, ezért ezt a rendszert nem is építettük meg. A stabilitástérképének segítségével azonban jól látható, hogy az ingarészek hosszúságának csökkenésével a stabil sáv maximális amplitúdója csökken.



7. ábra: 30-30 cm hosszú kettős inga stabilitástérképe



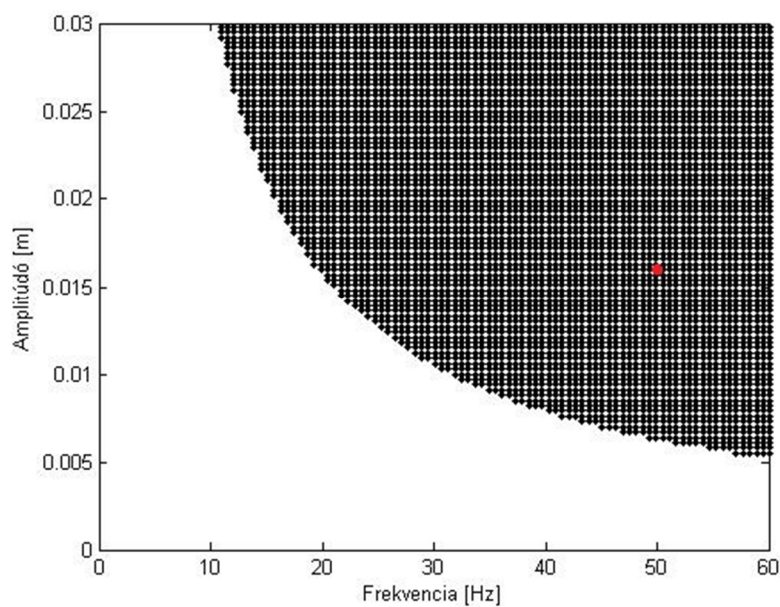
8. ábra: 20-20 cm hosszú kettős inga stabilitástérképe



9. ábra: 10-10 cm hosszú kettős inga stabilitástérképe

A következő ábra a kettős ingára megírt kód futásának eredménye olyan paraméterezéssel, ami visszaadja az egyes inga esetét, ezek:

$$m_1 = 10 \text{ kg}, \quad m_2 = 0,3 \text{ kg}, \quad l_1 = -0,2 \text{ m}, \quad l_2 = 0,3 \text{ m}$$



10. ábra: Az egyes inga stabilitástérképe

Az ábra közelítőleg megegyezik az [1] cikkben találhatóval.

5. A vizsgált rendszer gyakorlati megvalósítása

A gyakorlati megvalósítás első lépése a gerjesztést létrehozó szűrőfűrész kiválasztása volt. A fűrészsel szemben az alapvető követelményeket az addigra már kiszámolt stabilitástérképek támasztották, hiszen olyan fűrész kellett szereznünk, ami képes a stabil tartományban gerjeszteni. Persze a stabil tartomány nagyban függ az inga geometriai paramétereitől is. Az eredmények demonstrálása közbeni biztonság fokozása érdekében igyekeztünk a lehető legrövidebb ingadarabokat alkalmazni, ugyanakkor a különböző ingákra kiszámolt stabilitástérképek alapján megfigyelhető, hogy minél rövidebbek az ingák, annál alacsonyabb amplitúdó felé tolódik a stabil sáv felső határa. A fűrészsel szemben támasztott fő követelmények tehát a következők voltak:

- Lehető legnagyobb tartományban fokozatmentesen állítható frekvencia, legalább 50 Hz maximummal
- Aránylag rövid lökethossz, hogy minél kisebb ingákat tudjunk használni

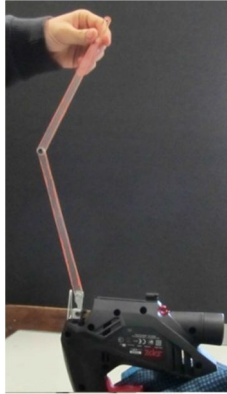
Ezeknek leginkább megfelelő választás: Skil 4281 AA típus, 800-3000 [1/min] állítható frekvenciával és 16 [mm] lökethosszal.



11. kép: Skil 4281 AA szűrőfűrész

Az ingadarabok először vékony plexitáblából készültek el. Az alsó ingarészt a fűrészlap befogásával összekötő alkatrészt acéllemezből munkáltuk ki. Később fából is készült egy kettős inga, de nem vált be, túl nagy terhelést jelentett a fűrésznek a nagy tömege miatt.

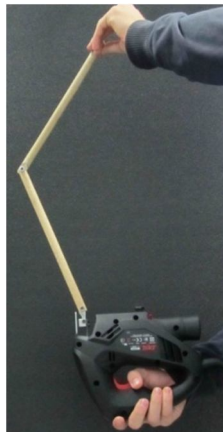
Az alábbi képeken az elkészült konfigurációk láthatók.



12. kép: 20-20 cm-es kettős inga



13. kép: Próbaképpen előállított 30 cm-es egyes inga

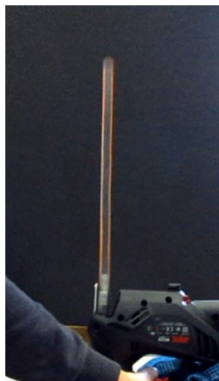


14. kép: A fából készült 30-30 cm-es kettős inga

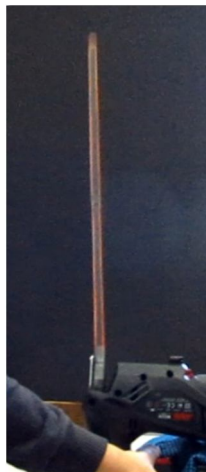
A következő táblázatban láthatóak az elkészült ingák. A kiemelt 1. illetve 3. sorban látható paraméterekkel rendelkezők váltak be. A 30-30 cm-es plexi ingának az alsó elemében a nagyobb tömeg miatt túlságosan nagy normál igénybevétel keletkezett, így magas frekvencián kihajlott. A fából készült kettős ingát pedig valószínűleg túl nagy tömege miatt nem tudtuk stabilizálni. Próbaképpen megvalósítottunk egy egyes ingát is, ez látható a 3. sorban.

Anyag	l_1	l_2
plexi	0,2 [m]	0,2 [m]
plexi	0,3 [m]	0,3 [m]
plexi	0,3 [m]	0 [m]
fa	0,3 [m]	0,3 [m]

Néhány kép ezekről működés közben:



15. ábra: 30 cm-es egyes inga működés közben



16. ábra: 20-20 cm-es kettős inga működés közben

6. Összegzés

Ebben a fejezetben az elért eredmények, illetve a témával kapcsolatos további lehetőségek ismertetéséről lesz szó.

6.1. Eredmények:

A dolgozat végére tehát sikeresen meg tudjuk határozni bármilyen hosszú és bármekkora tömegekkel leírt ingadarabokból álló kettős inga legfelső instabil egyensúlyi helyzetének stabilissá tételéhez szükséges gerjesztési paramétereket. Elő tudjuk állítani a hozzájuk tartozó stabilitástérképet. A számítás helyességét gyakorlatban is sikerült megmutatni. Továbbá sikeresen alkalmaztuk a Floquet-elméletet egy periodikus együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszer közelítő megoldásához. Megmutattuk egy két szabadságfokú rendszeren, hogy hogyan lehet harmonikus gerjesztéssel, rezgetéssel stabilizálni az egyébként instabil egyensúlyi helyzetet.

6.2. Kitekintés:

A dolgozat fontos kiindulópont lehet, érdekes kérdéseket vet fel. A továbbiakban, az itt alkalmazott módszerekkel meg lehet vizsgálni először egy tripla inga, később pedig általános n szabadságfokú inga stabilizálásához szükséges gerjesztési paramétereket. Ez utóbbi modell arra is alkalmas, hogy akár kötészerű rendszereket (pl. biciklilánc) reprezentáljon. Érdekes a már megismert módszert akár teljesen más mechanikai instabil rendszerekre alkalmazni.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. A kettős inga mechanikai modellje	2
2.1. A mozgásegyenletek meghatározása a másodfajú Lagrange egyenlettel	3
2.2. A mozgásegyenletek meghatározása a Newton—Euler-módszerrel	7
2.3. A felső egyensúlyi helyzet körüli linearizálás	9
3. Stabilitásvizsgálat	12
3.1. A Floquet-elmélet	12
3.2. A főmátrix közelítésének módszere	13
3.3. A numerikus keresés algoritmus	14
4. Az egyes stabilitástérképek a különböző ingakonfigurációk esetén	16
5. A kettős inga gyakorlati megvalósítása	18
6. Összegzés	21
6.1. Eredmények összefoglalása	21
6.2. Kitekintés	21
7. Mellékletek	23
7.1. A periodikus mátrix-együtthatót meghatározó Mathematica kód	23
7.2. A stabilitástérképet meghatározó MATLAB kód	24
8. Irodalomjegyzék	26

7. Mellékletek:

7.1. A mozgásegyenleteket illetve a rendszer együtthatómátrixát meghatározó

Mathematica kód:

```
v1={l1/2*f1'[t]*Cos[fi1[t]],-l1/2*f1'[t]*Sin[fi1[t]]-r0*w*Sin[t*w]};
```

```
v2={l1*f1'[t]*Cos[fi1[t]]+l2/2*fi2'[t]*Cos[fi2[t]],-l1*f1'[t]*Sin[fi1[t]]-r0*w*Sin[t*w]-  
l2/2*fi2'[t]*Sin[fi2[t]]};
```

```
T=m1/2*(v1.v1)+m2/2*(v2.v2)+1/24*m1*l1^2*f1'[t]^2+1/24*m2*l2^2*fi2'[t]^2;
```

```
U=m1*g*r0*Cos[w*t]+m1*g*l1/2*Cos[fi1[t]]+m2*g*r0*Cos[t*w]+m2*g*l1*Cos[fi1[t]]+m  
2*g*l2/2*Cos[fi2[t]];
```

```
Di=1/2*k*f1'[t]^2+1/2*k*(f1'[t]-fi2'[t])^2;
```

```
lagrangek={D[D[T,f1'[t]],t]-D[T,f1[t]]+D[Di,f1'[t]]+D[U,f1[t]]==0,D[D[T,fi2'[t]],t]-  
D[T,fi2[t]]+D[Di,fi2'[t]]+D[U,fi2[t]]==0};
```

```
egyszlag=FullSimplify[lagrangek];
```

```
list=Solve[egyszlag,{f1'[t],fi2'[t]}];
```

```
f3[t]:=list[[1,1]];
```

```
f4[t]:=list[[1,2]];
```

```
Egyhatmatrix={{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0,0,0,0}};
```

```
Egyhatmatrix[[3,1]]=FullSimplify[D[f3[t],f1[t]]/.{f1[t]==0,fi2[t]==0,f1'[t]==0,fi2'[t]==0};
```

```
Egyhatmatrix[[3,2]]=FullSimplify[D[f3[t],fi2[t]]/.{f1[t]==0,fi2[t]==0,f1'[t]==0,fi2'[t]==0};
```

```
Egyhatmatrix[[3,3]]=FullSimplify[D[f3[t],f1'[t]]/.{f1[t]==0,fi2[t]==0,f1'[t]==0,fi2'[t]==0};
```

```
Egyhatmatrix[[3,4]]=FullSimplify[D[f3[t],fi2'[t]]/.{f1[t]==0,fi2[t]==0,f1'[t]==0,fi2'[t]==0};
```

```
Egyhatmatrix[[4,1]]=FullSimplify[D[f4[t],f1[t]]/.{f1[t]==0,fi2[t]==0,f1'[t]==0,fi2'[t]==0};
```

```
Egyhatmatrix[[4,2]]=FullSimplify[D[f4[t],fi2[t]]]/.{fi1[t]==0,fi2[t]==0,fi1'[t]==0,fi2'[t]==0};
Egyhatmatrix[[4,3]]=FullSimplify[D[f4[t],fi1'[t]]]/.{fi1[t]==0,fi2[t]==0,fi1'[t]==0,fi2'[t]==0};
Egyhatmatrix[[4,4]]=FullSimplify[D[f4[t],fi2'[t]]]/.{fi1[t]==0,fi2[t]==0,fi1'[t]==0,fi2'[t]==0};
FullSimplify[MatrixForm[Egyhatmatrix]]
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \rightarrow \frac{6(m1+2m2)(g-r0w^2\cos[tw])}{l1(4m1+3m2)} & 0 \rightarrow \frac{-9gm2+9m2r0w^2\cos[tw]}{4l1m1+3l1m2} & 0 \rightarrow -\frac{6k(3l1+4l2)}{l1^2l2(4m1+3m2)} & 0 \rightarrow \frac{6k(3l1+2l2)}{l1^2l2(4m1+3m2)} \\ 0 \rightarrow -\frac{9(m1+2m2)(g-r0w^2\cos[tw])}{l2(4m1+3m2)} & 0 \rightarrow \frac{6(m1+3m2)(g-r0w^2\cos[tw])}{l2(4m1+3m2)} & 0 \rightarrow \frac{12k(l1m1+3(l1+l2)m2)}{l1l2^2m2(4m1+3m2)} & 0 \rightarrow -\frac{6k(3l2m2+2l1(m1+3m2))}{l1l2^2m2(4m1+3m2)} \end{bmatrix}$$

7.2. A stabilitástérképet meghatározó MATLAB kód:

```
clear
m1 = 0.2;
m2 = 0.2;
l1 = 0.3;
l2 = 0.3;
b = 0.001; % kicsi csillapítás
amplmax = 0.03;
frekvmax = 60;
A = [0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 1; 0,0,0,0; 0,0,0,0];
n = 20;
g = 9.81;

A(3,3)=-6*b*(3*l1+4*l2)/(l1^2*l2*(4*m1+3*m2));
A(3,4)=6*b*(3*l1+2*l2)/(l1^2*l2*(4*m1+3*m2));
A(4,3)=12*b*(l1*m1+3*m2*(l1+l2))/(l1*l2^2*m2*(4*m1+3*m2));
A(4,4)=-6*b*(3*l2*m2+2*l1*(m1+3*m2))/(l1*l2^2*m2*(4*m1+3*m2));

for i = 1:n
    int_cosfgv(i) = (sin(2*pi/n*(i+1))-sin(2*pi/n*i))/(2*pi/n);
end
step = 101;
k = 0;

for ir = 1:step
    r0 = 0.0001+(ir-1)*amplmax/(step-1);
    for ifr = 1:step
```

```

f = 0.1+(ifr-1)*frekvmax/(step-1);
dt = 1/f/n;
w = 2*pi*f;
Phi = eye(4);
for i = 1:n
    A(3,1)=(6*(m1+2*m2)*(g-r0*w^2*int_cosfgv(i)))/(l1*(4*m1+3*m2));
    A(3,2)=(-9*g*m2+9*m2*r0*w^2*int_cosfgv(i))/(4*l1*m1+3*l1*m2);
    A(4,1)=-((9*(m1+2*m2)*(g-r0*w^2*int_cosfgv(i)))/(l2*(4*m1+3*m2)));
    A(4,2) = (6*(m1+3*m2)*(g-r0*w^2*int_cosfgv(i)))/(l2*(4*m1+3*m2));
    Phi = expm(A*dt)*Phi; % mátrix exponenciális
end
eigm(ifr,ir) = max(abs(eig(Phi)));
rm(ifr,ir) = r0;
frm(ifr,ir) = f;
if max(abs(eig(Phi))) <= 1
    k = k+1;
    fs(k) = f;
    r0s(k) = r0;
end

end

ir
end

figure
plot(fs,r0s,'k.')
axis([0,frekvmax,0,amplmax])
xlabel('Frekvencia [Hz]')
ylabel('Amplitúdó [m]')

```

8. Irodalomjegyzék:

- [1] INSPERGER, T. – HORVÁTH R. (1999): Pendulum with harmonic variation of the suspension point, *Periodica Polytechnica - Mechanical Engineering*, **44** (2000), pp. 39-46.
- [2] FARKAS, M., (1994). *Periodic Motions*, Springer, New York.
- [3] HIRSCH, M. W., SMALE, S., (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, Berkeley.
- [4] FLOQUET, M. G. (1883) *Équations Différentielles Linéaires a Coefficients Périodiques*, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 12, pp. 47-89.
- [5] HSU C. S. (1974) On Approximating a General Linear Periodic System, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 45, 234-251