



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Gépészmérnöki Kar

Műszaki Mechanikai Tanszék

Időkésésés instabil rendszerek stabilizálása véges spektrum hozzárendelés segítségével

Készítette: Molnár Tamás Gábor

Konzulens: Dr. Insperger Tamás

Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	1
1. fejezet: Matematikai háttér.....	2
2. fejezet: Az inverz inga stabilizálás problémái.....	5
2.1 Az inverz inga mozgásegyenlete	5
2.2 Az inverz inga stabilizálása PD és PDA szabályozó segítségével	7
3. fejezet: A véges spektrum hozzárendelés módszere	11
3.1 Pólusáthelyezés.....	11
3.2 Stabilizálás véges spektrum hozzárendelés segítségével.....	12
3.3 Paraméter eltérésekkel szembeni robusztusság	14
3.4 A szabályozás megvalósítási nehézségei.....	15
3.4.1 A megvalósítási pontatlanságokkal szembeni robusztusság.....	16
3.4.2 A megvalósítási szabállyal szembeni robusztusság	18
3.4.3 A megvalósítási nehézségek leküzdése	19
3.5 Vizsgálat frekvencia tartományban	20
4. fejezet: Inverz inga szabályozás véges spektrum hozzárendelés segítségével.....	23
4.1 Stabilitási térképek	23
4.1.1 Ideális stabilitás.....	24
4.1.2 Elméleti stabilitás.....	26
4.1.3 Robusztus stabilitás.....	28
4.2 Érzékenység a belső modell pontatlanságaira	29
4.3 Numerikus szimuláció	30
4.3.1 A rendszer és a szabályozó egyenletének diszkretizálása.....	30
4.3.2 Állapot kiegészítés	31
4.3.3 Stabilitási térképek numerikus elkészítése.....	33
4.3.4 A mozgásegyenlet numerikus megoldása	37
4.4 Leggyorsabb beállítás vizsgálata	37
4.5 Kritikus dimenziótlan rendszerparaméter	42
Összefoglalás.....	44
Irodalomjegyzék.....	45

Ábrajegyzék

2.1. ábra: Az inverz inga mechanikai modellje.....	5
2.2. ábra: Az időkéséses PDA szabályozóval ellátott rendszer stabilitási térképe és az egyes területek instabilitási foka $\tau = 1$ és $a = 0.5$ esetén (szürke: stabil terület).	9
3.1. ábra: A véges spektrum hozzárendeléses szabályozás hatásvázlata.	22
4.1. ábra: (a) A zárt szabályozási kör stabilitási térképe és a területek instabilitási foka; (b) a funkcionál-differenciaegyenlet stabilitási térképe és a területek instabilitási foka; (c) a kapcsolódó késleltetett differenciaegyenlet robusztus stabilitási határa; (d) a három ábra egymásra vetített képe; világos szürke: ideális stabilitás, sötétszürke: elméleti stabilitás, fekete: robusztus stabilitás; a (2.12) és (4.2) egyenletekre $a = 0.5$, $\tau = 1$, $\tilde{a} = a$, $\tilde{\tau} = \tau$ esetén.	26
4.2. ábra: (a) A zárt szabályozási kör stabilitási térképe és a területek instabilitási foka; (b) a funkcionál-differenciaegyenlet stabilitási térképe és a területek instabilitási foka; (c) a kapcsolódó késleltetett differenciaegyenlet robusztus stabilitási határa; (d) a három ábra egymásra vetített képe; világos szürke: ideális stabilitás, sötétszürke: elméleti stabilitás, fekete: robusztus stabilitás; a (2.12) és (4.2) egyenletekre $a = 0.5$, $\tau = 1$, $\tilde{a} = 1.2a$, $\tilde{\tau} = 1.2\tau$ esetén.	27
4.3. ábra: A (2.12) és (4.2) egyenletek stabilitási térkép sorozata az instabil gyökök számával $a = 0.5$, $\tau = 1$ esetén különböző belső modell paraméter becslésekkel.	29
4.4. ábra: Numerikusan megvalósított véges spektrum hozzárendelést alkalmazó inverz inga szabályozás stabilitási térképe.....	34
4.5. ábra: Numerikusan megvalósított véges spektrum hozzárendelést alkalmazó inverz inga szabályozás stabilitási térképei különböző belső modell paraméter becslések mellett.....	35
4.6. ábra: Numerikusan megvalósított véges spektrum hozzárendelést alkalmazó inverz inga szabályozás stabilitási térképe a funkcionál-differenciaegyenlet stabilitásra gyakorolt hatását megmutatva.	38
4.7. ábra: A numerikus szimuláció eredménye zérus, egyes és kettes instabilitási fok esetén.	39
4.8. ábra: A maximális abszolút értékű karakterisztikus multiplikátorok szintvonalas megjelenítése.	41
4.9. ábra: A leggyorsabb beállást mutató numerikus szimuláció eredménye.	41
4.10. ábra: A kritikus dimenziótlan rendszerparaméter értéke a paraméter becslések hibájának függvényében PD, PDA és FSA szabályozók esetén.	43

Bevezetés

A szabályozástechnikában fontos problémát jelent a szabályozási körben fellépő időkésés kezelése. Az időkésés abból ered, hogy a kimenet, illetve a rendszerállapotok méréséhez, a jelek feldolgozásához, szabályozókörben való terjedéséhez és a beavatkozás meghatározásához időre van szükség. Így egy adott rendszerállapothoz tartozó beavatkozás hatása késleltetve jut érvényre, ezáltal a nem fogja a tervezett rendszerállapotokat és kimenetet megvalósítani. Ezért az időkésés hatásával már a tervezés során számolni kell. Továbbá az időkésés destabilizáló hatással bír, és nem megfelelő szabályozó paraméterek esetén stabilitásvesztéshez vezethet. Túlzott mértékű időkésés esetén előfordulhat, hogy a rendszer stabil szabályozása nem is lehetséges.

Az időkésés problémájának kezelésére egy lehetséges megoldást jelent a véges spektrum hozzárendelés (Finite Spectrum Assignment, FSA), jelen dolgozat témája e szabályozási módszer bemutatása. Az FSA egy prediktív szabályozási eljárás, melynek lényege, hogy megjósolja az időkésés után érvényes rendszerállapotokat, és ezek visszacsatolása alapján számítja a beavatkozást. Így ideális esetben a bemeneti késleltetés hatása teljesen kiküszöbölhető. Mindez megoszló időkéséssel rendelkező szabályozóegyenlettel érhető el.

Az FSA módszerének előnye, hogy ideális esetben megvalósítja a pólusáthelyezést időkéséses rendszerekre, tehát előre definiált rendszerdinamika érhető el az időkésés mértékétől függetlenül. Hátránya azonban, hogy a predikció megvalósításához szükség van egy rendszerről alkotott belső modellre. Az FSA szabályozás pedig érzékeny a belső modell paramétereinek bizonytalanságára, ezért a rendszer paramétereit és az időkésést nem pontosan ismerve a stabilitás veszélybe kerülhet. Továbbá a szabályozó egyenlet megvalósítása is nehézségekbe ütközik, az implementálásához közelítő formulákra van szükség. E közelítés pedig megváltoztatja a zárt szabályozási kört leíró egyenletek típusát, és minőségi változásokat idéz elő a zárt kör stabilitását illetően. Így a szabályozó egyenlet gyakorlati megvalósítása külön vizsgálatot igényel.

Az FSA szabályozási eljárás alkalmas instabil rendszerek stabilizálására is. Ez a tulajdonság egy instabil csillapítatlan másodrendű rendszer, egy inverz inga stabilizálásának példáján is szemléltethető. Ehhez bemutatásra kerül az inga mozgásegyenlete, valamint e példán szemléltetve az FSA szabályozás stabilitásvizsgálata, az eljárás numerikus implementálása mintavételezéssel, és annak meghatározása, hogy milyen rendszerparaméter és időkésés értékek esetén lehetséges a stabilizálás.

1. fejezet:

Matematikai háttér

A dinamikai rendszerek leírása, matematikai modellezése differenciálegyenletek segítségével történhet, melyek mutatják, hogy a rendszer állapotának pillanatnyi megváltozása hogyan függ a pillanatnyi - vagy időkézés esetén éppen a korábbi - rendszerállapottól. Időkézést tartalmazó rendszerek gyakran fordulnak elő a szabályozástechnikában, ahol a késést a szabályzókörben végbemenő információ terjedés véges sebessége okozhatja.

Időkézés nélküli rendszerek esetén a rendszer működése közönséges differenciálegyenlet (ordinary differential equation, ODE) segítségével írható le. A dolgozatban vizsgált rendszerek állapota explicit módon nem függ az időtől, tehát a későbbi számítások autonóm egyenletekre korlátozódnak. Ezen egyenletek alakja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (1.1)$$

ahol $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ a rendszerállapot, n az állapotváltozók száma és $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Az egyenleteket, amelyekben az állapotváltozás mértéke különböző időpillanatokban érvényes állapotoktól is függ, funkcionál-differenciálegyenleteknek nevezzük. Ezen egyenleteknek három típusa van: késleltetett, neutrális és siettetett. A késleltetett funkcionál-differenciálegyenletek (retarded functional differential equation, RFDE) általános alakja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t + \theta)), \quad \theta \in [0, -\tau], \quad (1.2)$$

azaz az állapotváltozás a korábbi állapotoktól is függ ($\tau > 0$). A neutrális funkcionál-differenciálegyenletnél (neutral functional differential equation, NFDE) a korábbi állapotváltozás is befolyásolja a pillanatnyi állapotváltozást, azaz

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t + \theta), \dot{\mathbf{x}}(t + \theta)), \quad \theta \in [0, -\tau]. \quad (1.3)$$

A siettetett funkcionál-differenciálegyenlet esetén (advanced functional differential equation, AFDE) az állapotváltozást az állapot magasabb rendű deriváltjai is befolyásolják, például

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t + \theta), \dot{\mathbf{x}}(t + \theta), \ddot{\mathbf{x}}(t + \theta)), \quad \theta \in [0, -\tau], \quad (1.4)$$

mely átalakításával olyan alak is létrehozható, melyben az állapotváltozás a későbbi állapottól függ [1]. Mérnöki alkalmazásban ilyen egyenletek ritkán fordulnak elő, a továbbiakban csak az első két típussal foglalkozunk.

A differenciálegyenletek stabilitásvizsgálata során hasznos lehet a rendszer karakterisztikus egyenletének meghatározása. Ezt az $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{\lambda t}$ kifejezés differenciálegyenletbe való helyettesítésével kaphatjuk meg. A karakterisztikus egyenlet

megoldásai $\lambda_j \in \mathbb{C}$ a karakterisztikus exponensek (vagy karakterisztikus gyökök, pólusok). Közöséges differenciálegyenletek esetén a nullára rendezett karakterisztikus egyenlet bal oldalát karakterisztikus polinomnak nevezzük, mely véges sok λ_j gyökkel rendelkezik ($j = 1, 2, \dots, n$). Funkcionál-differenciálegyenletek esetén azonban az előbbi kifejezés nem feltétlen polinom, hanem egy általános karakterisztikus függvény, melyet gyakran $D(\lambda)$ -val jelölünk. Ekkor már végtelen sok λ_j karakterisztikus exponens létezik. Tehát a közöséges differenciálegyenletek véges spektrummal rendelkeznek, véges dimenziójúak, a funkcionál-differenciálegyenletek spektruma és dimenziója végtelen. Ezt az is mutatja, hogy egy ODE esetén elég véges számú kezdeti feltételt megadni az egyenlet megoldásához, míg egy RFDE, NFDE vagy AFDE vizsgálatánál egy teljes időintervallumban kell ismerni a kezdeti feltételeket.

Az egyenletek stabilitásának feltétele, hogy az összes karakterisztikus exponens negatív valós résszel rendelkezzen, vagyis a komplex sík jobb félsíkján helyezkedjen el. A stabilitásvizsgálat során azonban nem szükséges kiszámolni az összes karakterisztikus exponenst, hanem elegendő a kritikus - azaz a legnagyobb valós részű - karakterisztikus exponens valós részének előjelét meghatározni. Ezt pl. a Routh-Hurwitz-kritérium segítségével tehetjük meg, mely megadja az aszimptotikus stabilitás szükséges és elégséges feltételét. Stabilitásvesztés pedig alapvetően kétféleképp jöhet létre. Az első esetben csak egy kritikus karakterisztikus exponens adott. Ekkor az exponens valós szám, képzetes része zérus, a stabilitásvesztés során az exponens pozitívvá válik. A másik esetben egyszerre két kritikus exponens adott, melyek komplex konjugált párok, és ezek a komplex számsík jobb felére vándorolva válnak instabillá. A dolgozat során előbbi esetre statikus, az utóbbira dinamikus stabilitásvesztésként fogunk hivatkozni.

A végtelen dimenziós fázistér a funkcionál-differenciálegyenletek mindhárom típusára igaz, ám a végtelen sok exponens elhelyezkedése eltér. RFDE esetén mindig véges sok azon gyökök száma, melyek valós része egy meghatározott számnál nagyobb, így az instabil gyökök száma is csak véges lehet. Ezért a funkcionál-differenciálegyenletekkel leírt rendszerek közül ezen egyenletek a stabilizálása a legkönnyebben kivitelezhető. NFDE esetén háromféle gyök elhelyezkedés fordulhat elő: vagy véges sok exponens van egy tetszőleges függőleges egyenestől jobbra, vagy egy függőleges egyenes mentén felsorakoznak a gyökök, vagy végtelen sok exponens esik az egyenestől jobbra eső félsíkba. Az AFDE spektrumát tekintve pedig csak a végtelen sok jobb félsíkba eső gyök esete fordulhat elő. Az utóbbi

esetben az instabil karakterisztikus exponensek száma végtelen, így analóg szabályozással a stabilizálás reménytelen.

A stabilitásvizsgálat eredményeként egy ún. stabilitási térkép készíthető, amely a differenciálegyenlet együtthatói mint paraméterek által kifeszített síkon mutatja meg, mely paraméter értékeknél lesz a megoldás stabil, illetve instabil esetben hány pozitív valós részű karakterisztikus exponens létezik. Az instabil karakterisztikus exponensek számát nevezzük instabilitási foknak. Ha a rendszer legalább egy instabil karakterisztikus exponenssel bír, akkor mindenképp instabil viselkedést mutat, függetlenül az instabilitási fokának nagyságától. A stabilitási térkép a D-behelyettesítés módszerével (D-subdivision method) készíthető el. E módszer azon alapul, hogy a stabilitási térkép olyan tartományokra osztható, amelyeken belül az instabil karakterisztikus exponensek száma állandó. Az eltérő instabilitási fokú tartományokat az ún. D-görbék választják el egymástól. Ezen görbéket a $D(\lambda) = 0$ egyenlet segítségével kapjuk $\lambda = i\omega$ helyettesítéssel (ahol i az imaginárius egység, $\omega \geq 0$ pedig a stabilitásvesztéssel fellépő rezgések körfrekvenciája). Azaz amikor megszerkesztjük ezeket a görbéket, a karakterisztikus exponens valós részét nullának feltételezzük. Ennek oka, hogy az instabilitási fok változásakor exponensek vándorolnak át a komplex sík bal félsíkjáról a jobb félsíkjára, így át kell haladniuk az imaginárius tengelyen, ahol a valós részük zérus. Stabilitási határnak nevezzük azon D-görbéket, melyek a stabil - azaz zérus instabilitási fokú - területeket határolják. Az $\omega = 0$ stabilitási határ a statikus, $\omega \neq 0$ határ pedig a dinamikus stabilitásvesztéshez tartozik. A paramétertér egyes - D-görbék által határolt - tartományaiban az instabilitási fokot az ún. karakterisztikus exponens váltási irány (exponent crossing direction) módszer vagy a Stépán-formulák segítségével kaphatjuk meg [2]. A Stépán-formulák alapvetően RFDE, valamint egyes esetekben NFDE segítségével leírt rendszerekre alkalmazhatók. Ha a rendszer n rendje páros, azaz $n = 2m$,

$$N = m + (-1)^m \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} \operatorname{sgn} S(\rho_k), \quad (1.5)$$

ahol $R(\omega) = \operatorname{Re} D(i\omega)$, $S(\omega) = \operatorname{Im} D(i\omega)$, $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_r$ $R(\omega)$ pozitív valós gyökei és N az instabilitási fok. Ha n páratlan, azaz $n = 2m + 1$,

$$N = m + \frac{1}{2} + (-1)^m \left(\frac{1}{2} (-1)^s \operatorname{sgn} R(0) + \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^k \operatorname{sgn} R(\sigma_k) \right), \quad (1.6)$$

ahol $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_s$ $S(\omega)$ nemnegatív valós gyökei.

2. fejezet:

Az inverz inga stabilizálás problémái

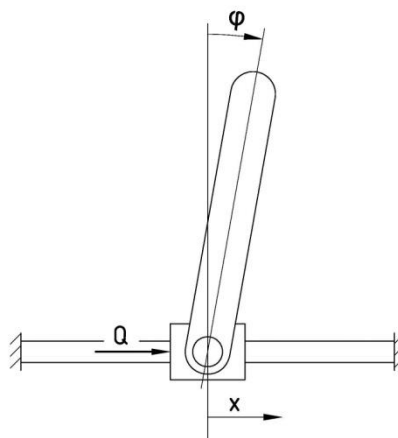
A véges spektrum hozzárendeléses szabályozási eljárás bemutatását, és a stabilitásvizsgálat menetét célszerű egy konkrét mechanikai rendszer példáján keresztül is megvizsgálni. Tipikus példa lehet egy inverz inga szabályozása. Az inverz inga önmagában instabil rendszer: a függőleges pozíció instabil egyensúlyi helyzet, azaz ha az inga abból kis zavarás hatására kitér, magától már nem fog visszatérni. A függőleges pozíció zavarások, külső behatások melletti megtartásához szabályozás szükséges.

Ma a szabályozástechnikában egyre nagyobb szerepet kap az instabil rendszerek szabályozása, stabilizálása. Ennek oka, hogy a mozgások igen gyors elindítása, a gyors állapot változtatások instabil helyzetből kiindulva hatékonyabban megvalósíthatók. Ezért az instabil rendszerek stabilizálása egy aktuális, fontos probléma. Az inverz inga példáján ennek a problémának a bemutatása is megtehető.

Az inverz inga stabilizálás tehát megfelelő példa a különböző szabályozási eljárások (PD, PDA és FSA szabályozás) és az instabil rendszerek stabilizálási módszereinek bemutatására.

2.1 Az inverz inga mozgásegyenlete

Az inverz inga mechanikai modellje a 2.1. ábrán látható. Az inga alsó pontja vízszintes irányban egy csúszkán mozgatható a Q szabályozó erő segítségével. Ha Q -t minden pillanatban megfelelően állítjuk be, az inga függőleges helyzetben tartható. Az inga hossza l , tömege m , a nehézségi gyorsulás értéke g . A súrlódás hatását ebben a modellben elhanyagoltuk.



2.1. ábra: Az inverz inga mechanikai modellje.

Az inga mozgásegyenletét a Lagrange-módszer segítségével vezethetjük le. A mozgás két szabadságfokú, általános koordinátáknak válasszuk az inga alsó pontjának vízszintes irányú x pozícióját és az inga függőlegessel bezárt φ szögét. Az általános koordinátákkal felírt másodfajú Lagrange-egyenletek:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = Q_1, \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U}{\partial x} = Q_2, \quad (2.2)$$

ahol T a kinetikus energia, U a potenciális energia, D a Rayleigh-féle disszipációs függvény, Q_1 és Q_2 általános erők. Az előbbi mennyiségek kifejezése a v súlyponti sebességgel és a θ súlypontra számított tehetetlenségi nyomatékkal az alábbi formában írható fel

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \theta \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \left[\left(\dot{x} + \frac{l}{2} \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \right)^2 + \left(\frac{l}{2} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m l \cos \varphi \cdot \dot{x} \dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$U = m g \frac{l}{2} \cos \varphi, \quad (2.4)$$

$$D = 0, \quad (2.5)$$

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = Q(\varphi, \dot{\varphi}). \quad (2.6)$$

A deriválásokat elvégezve, a deriváltakat a Lagrange-egyenletekbe visszaírva, és a kapott két egyenletet mátrixos formába rendezve

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} m l^2 & \frac{1}{2} m l \cos \varphi \\ \frac{1}{2} m l \cos \varphi & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} m g l \sin \varphi \\ -\frac{1}{2} m l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q(\varphi, \dot{\varphi}) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Az egyenletrendszerben x ciklikus koordináta, vagyis kiejthető az egyenletekből. Ehhez vonjuk ki a második egyenlet $l/2 \cos \varphi$ -szeresét az első egyenletből. Az x kiejtésével kapott egyenlet

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} m l^2 - \frac{1}{4} m l^2 \cos^2 \varphi \right) \ddot{\varphi} + \frac{1}{4} m l^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m g l \sin \varphi \\ = -\frac{1}{2} l \cos \varphi \cdot Q(\varphi, \dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Célunk az inga $\varphi = 0$ instabil egyensúlyi helyzetbe hozása és ott megtartása, egyensúlyozása. Így ha csak az egyensúlyi helyzet körüli kis szögelfordulásokat vizsgáljuk, azaz $|\varphi| < 5^\circ$, akkor a $\varphi = 0$ helyzet körül linearizált egyenlet jól leírja a rendszert. A

linearizálás során a $\sin\varphi \cong \varphi$, $\cos\varphi \cong 1$ közelítésekkel élünk, és a $\dot{\varphi}^2$ -es tagot elhanyagoljuk. Így a linearizált mozgásegyenlet

$$\frac{1}{12}ml^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}mgl\varphi = -\frac{1}{2}l\tilde{Q}(\varphi, \dot{\varphi}), \quad (2.9)$$

ahol $\tilde{Q}$ a linearizálás után kapott szabályozóerő kifejezés. Az egyenletet rendezve

$$\ddot{\varphi} = \frac{6g}{l}\varphi - \frac{6}{ml}\tilde{Q}(\varphi, \dot{\varphi}). \quad (2.10)$$

Hozzuk az inverz inga mozgásegyenletét a következő alakra

$$\ddot{\varphi}(t) = a\varphi(t) + u(t - \tau), \quad (2.11)$$

ahol $a = 6g/l$ rendszerparaméter, $u(t - \tau) = -6\tilde{Q}(\varphi, \dot{\varphi})/(ml)$ a beavatkozás. Az inga szög helyzetének szabályozásánál fellépő időkéstés τ jelöli. Az időkéstés hatását tehát a beavatkozásnál vesszük figyelembe. Ezután írjuk fel a rendszert állapotter modelltben. Válasszuk állapotváltozóknak az inga szögelfordulását és szögsebességét. A rendszer $y(t)$ kimenetének a szögelfordulást tekintjük. E mennyiségekkel a rendszer állapotter egyenletei

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t - \tau), \quad (2.12)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (2.13)$$

ahol $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$ az állapotváltozók vektora, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ a rendszermátrix, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a bemeneti mátrix, $\mathbf{C} = (1 \ 0)$ a kimeneti mátrix (jelen egy bemenetű - egy kimenetű esetben az $\mathbf{u}(t)$ és $\mathbf{y}(t)$ vektorok skalárrá, a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok vektorra egyszerűsödnek).

2.2 Az inverz inga stabilizálása PD és PDA szabályozó segítségével

Ha a beavatkozást arányos-derivatív (proportional-derivative, PD) szabályozó segítségével végezzük, a bemenet a következőképp definiálható

$$u(t) = -k_p\varphi(t - \tau) - k_d\dot{\varphi}(t - \tau), \quad (2.14)$$

ahol rendre k_p és k_d jelöli az arányos és derivatív szabályozó paramétereit. Ezekkel a linearizált mozgásegyenlet

$$\ddot{\varphi}(t) - a\varphi(t) = -k_p\varphi(t - \tau) - k_d\dot{\varphi}(t - \tau), \quad (2.15)$$

mely egy RFDE, hiszen a legmagasabb rendű derivált aktuális értéke alacsonyabb rendű deriváltak késleltetett értékétől is függ. Az egyenlet tehát végtelen spektrummal bír.

A beavatkozást meghatározhatjuk arányos-derivatív-gyorsulás (proportional-derivative-acceleration, PDA) szabályozót alkalmazva is, ekkor

$$u(t) = -k_p\varphi(t - \tau) - k_d\dot{\varphi}(t - \tau) - k_a\ddot{\varphi}(t - \tau), \quad (2.16)$$

ahol k_a a gyorsulás szabályozó paraméter. Ebben az esetben a mozgásegyenlet

$$\ddot{\varphi}(t) - a\varphi(t) = -k_p\varphi(t - \tau) - k_d\dot{\varphi}(t - \tau) - k_a\ddot{\varphi}(t - \tau). \quad (2.17)$$

Látható, hogy a PD szabályozás a PDA szabályozás $k_a = 0$ esete, így a tovább vizsgálatokat csak PDA szabályozón végezzük el, majd k_a helyébe nullát helyettesítve a PD szabályozó esete is megkapható. A (2.17) egyenlet típusa azonban már NFDE, mivel a legmagasabb rendű derivált (a szöggyorsulás) aktuális és késleltetett argumentummal is szerepel. Neutrális rendszerek esetén a stabilitás szükséges feltétele, hogy az egyenlethez tartozó késleltetett differenciaegyenlet (azaz a legmagasabb rendű deriváltakat tartalmazó tagokból alkotott kifejezés) stabil legyen. Jelen esetben ez a feltétel a $\varphi(t) = -k_a\varphi(t - \tau)$ egyenlet stabilitását jelenti. E differenciaegyenlet stabilitásának feltétele a $|k_a| < 1$ egyenlőtlenség teljesülése [3]. Ha ez nem teljesül, a (2.17) egyenlet instabil, még hozzá végtelen sok karakterisztikus exponenssel a komplex sík jobb félsíkján. Ezért a továbbiakban $|k_a| < 1$ szabályozó paramétert feltételezünk.

A rendszer stabilitási tartománya az ún. D-behelyettesítés módszerével határozható meg. A módszert alkalmazva a stabilitási határok egy rögzített k_a érték mellett a (k_p, k_d) síkon ábrázolhatók. Ehhez a (2.17) egyenletbe a $\varphi(t) = \varphi_0 e^{\lambda t}$ próbafüggvényt helyettesítve előállítjuk a rendszer karakterisztikus egyenletét

$$D(\lambda) = \lambda^2 - a + k_p e^{-\lambda\tau} + k_d \lambda e^{-\lambda\tau} + k_a \lambda^2 e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (2.18)$$

ahol $D(\lambda)$ a rendszer karakterisztikus függvénye. A D-behelyettesítés módszerét alkalmazva, azaz a $D(\lambda) = 0$ egyenletbe $\lambda = i\omega$ kifejezést helyettesítve és az egyenletet valós és képzetes részre bontva, az alábbi két egyenletet kapjuk

$$R(\omega) = -\omega^2 - a + k_p \cos(\omega\tau) + k_d \omega \sin(\omega\tau) - k_a \omega^2 \cos(\omega\tau) = 0, \quad (2.19)$$

$$S(\omega) = -k_p \sin(\omega\tau) + k_d \omega \cos(\omega\tau) + k_a \omega^2 \sin(\omega\tau) = 0. \quad (2.20)$$

Ebből k_p -t és k_d -t kifejezve megkapjuk az ω -val paraméterezett D-görbét. Az $\omega = 0$ -hoz tartozó D-görbe

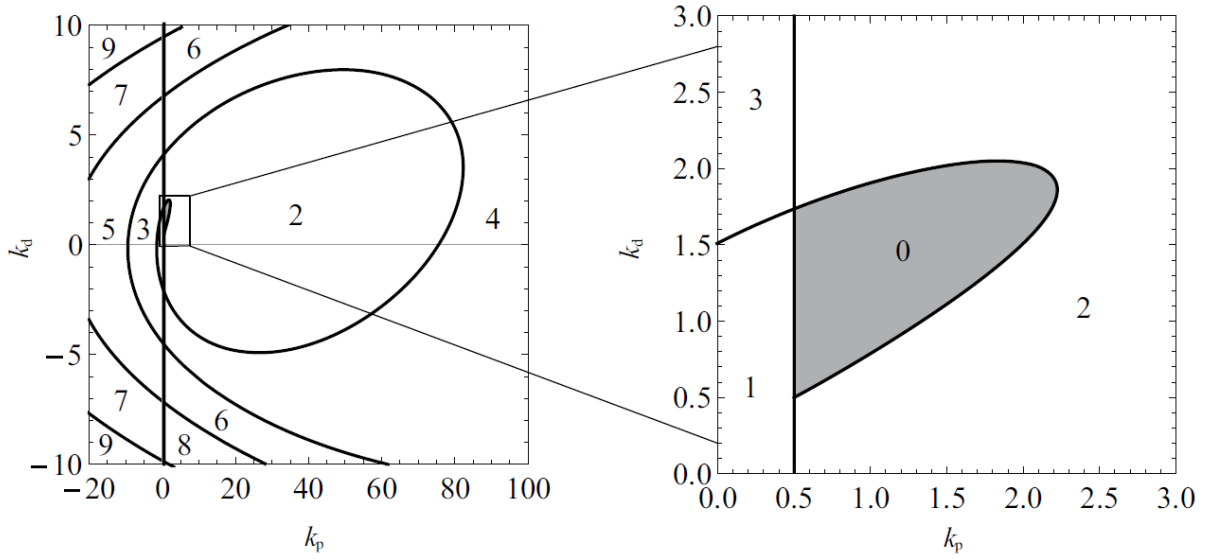
$$k_p = a, \quad k_d \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Az $\omega \neq 0$ -hoz tartozó D-görbe:

$$k_p = (\omega^2 + a)\cos(\omega\tau) + k_a \omega^2, \quad (2.22)$$

$$k_d = \frac{\omega^2 + a}{\omega} \sin(\omega\tau). \quad (2.23)$$

A D-görbét megrajzolva megkapjuk a jellegzetes spirál alakú határgörbét és banán alakú stabil területet a stabilitási térképen [3]. Az (1.5) egyenletben felírt Stépán-formulát használva pedig az egyes régiók instabil karakterisztikus exponenseinek száma is meghatározható (ld. 2.2. ábra).



2.2. ábra: Az időkéséses PDA szabályozóval ellátott rendszer stabilitási térképe és az egyes területek instabilitási foka $\tau = 1$ és $a = 0.5$ esetén (szürke: stabil terület).

Ha az a paraméter értékét növeljük, egyre nehezebb stabilizálni a rendszert, a stabil terület egyre jobban szűkül. A stabilitási térképen ez úgy jelenik meg, hogy a spirál alakú határgörbe egyre meredekebb érintővel indul. Végül az $a_{\text{krit,PDA}} = (2 + 2k_a)/\tau^2$ értéknél a kezdeti érintő függőlegessé válik, így a stabil terület teljesen eltűnik, a rendszer mindenképp instabil viselkedést fog mutatni [3]. A jelenséget úgy is felfoghatjuk, hogy ha egy rögzített a paraméterrel rendelkező instabil rendszert akarunk PDA szabályozóval stabilizálni, akkor a szabályozásnál fellépő időkésés nem haladhatja meg a $\tau_{\text{krit,PDA}} = \sqrt{(2 + 2k_a)/a}$ értéket. Tehát a rendszer maximális kritikus időkésése PDA szabályozó esetén ($k_a = 1$)

$$\tau_{\text{krit,PDA}} = \sqrt{\frac{4}{a}} = \frac{T_p}{\pi}, \quad (2.24)$$

míg PD szabályozó ($k_a = 0$) esetén

$$\tau_{\text{krit,PD}} = \sqrt{\frac{2}{a}} = \frac{T_p}{\pi\sqrt{2}}, \quad (2.25)$$

ahol $T_p = \pi\sqrt{\left(\frac{2l}{3g}\right)}$ az inga stabil egyensúlyi helyzet körüli kis lengéseinek periódusideje. Ha a szabályozási időkésés ezt az értéket meghaladja, az inga egyensúlyozása analóg PDA illetve PD szabályozó segítségével nem lehetséges. Továbbá minél rövidebb az inga, a kritikus időkésés értéke annál kisebb. Így rövid ingát nehezebb egyensúlyozni, a stabilizálás csak az időkésés csökkentése mellett lehetséges. Másrészt, ha az időkésést τ értékig tudjuk csak

csökkenteni, a rendszer csak egy kritikus $a > 0$ paraméter értékig stabilizálható, mely PDA, illetve PD szabályozó esetén a következő

$$a_{\text{krit,PDA}} = \frac{4}{\tau^2}, \quad (2.26)$$

$$a_{\text{krit,PD}} = \frac{2}{\tau^2}. \quad (2.27)$$

Ezen alakokból látható, hogy a stabilitást a és τ együtt határozza meg, ezért célszerű lehet egy $\hat{a} = a\tau^2$ dimenziótlan rendszerparamétert bevezetni. Ennek fő előnye, hogy a mozgásegyenlet dimenziótlanításával csökkenthető a rendszer vizsgálatánál figyelembe vett paraméterek száma. Jelen dolgozatban a dimenziótlanítás részleteit nem közöljük. A legfontosabb dimenziótlan paraméterek: $\hat{a} = a\tau^2$, $\hat{k}_p = k_p\tau^2$ és $\hat{k}_d = k_d\tau$, valamint k_a eleve dimenziótlan. Fontos megjegyezni azonban, hogy egységnyi időkézés, azaz $\tau = 1$ [s] esetén a megfelelő dimenziótlan és dimenzióval rendelkező paraméterek numerikus értéke azonos. Így a továbbiakban az egyszerűség kedvéért, ha $\tau = 1$ mellett végezzük vizsgálatokat, a mértékegységet nem fogjuk jelölni, hiszen a mennyiségek dimenziótlan megfelelőjét is egyúttal megkapjuk. A kapott eredményekből pedig ha szükséges, ki lehet számítani a dimenzióval rendelkező paramétereket nem egységnyi τ esetére.

A PD és PDA szabályozók megismerése fontos összehasonlítási alapot jelent. A később ismertetett megoszló időkézést tartalmazó FSA szabályozó bemutatásánál a PD szabályozó referenciaként szolgál. A PD szabályozó ugyanis nem más, mint az FSA egy speciális - az időkézést zérusnak feltételező, azt figyelembe nem vevő - esete.

3. fejezet:

A véges spektrum hozzárendelés módszere

A véges spektrum hozzárendelés, azaz az FSA szabályozó alkalmazása egy prediktív szabályozási eljárást jelent. Az eljárás lényege, hogy a rendszerre bocsátott beavatkozást a rendszer bizonyos módszer szerint megjósolt későbbi állapotát visszacsatolva határozzuk meg. Erre azért van szükség, mert a szabályozókörben levő visszacsatolás mindenképp valamekkora időkésést visz a rendszerbe, így a kiszámított beavatkozás hatása késleltetve jelentkezik. Ezért célszerű a beavatkozást úgy meghatározni, hogy a késleltetési idő elteltével kialakuló rendszerállapothoz illeszkedjen. Így ideális esetben az időkésés hatása teljesen kompenzálható, az időkésés mértékétől függetlenül bármely instabil rendszer stabilizálható előre megkívánt rendszerdinamika elérése mellett. Tehát az eljárás az időkéséses rendszer spektrumát úgy módosítja, hogy karakterisztikus exponensei közül véges sokat előre meghatározott értékre állít be, a többi végtelen sok gyököt pedig megszünteti. Az eljárás elnevezése tehát innen ered: a végtelen spektrumú szabályozott szakaszhoz véges spektrumú zárt szabályozási kört rendel. Az eljárás előnye, hogy instabil rendszerek stabilizálására is alkalmazható.

3.1 Pólusáthelyezés

A pólusáthelyezés az időkésés nélküli - tehát ODE segítségével leírható - rendszer esetében kialakuló véges sok karakterisztikus exponens hatékony kezelésére alkalmas módszert jelent, így a véges spektrum hozzárendeléses eljárás alapját jelenti.

Tekintsük egy időkésés nélküli lineáris rendszer állapotter modelljének főegyenletét

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (3.1)$$

ahol $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ az állapotváltozók, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ a bemenetek vektora, $\mathbf{A}$ $n \times n$ -es rendszermátrix, $\mathbf{B}$ $n \times m$ -es bemeneti mátrix. Megfelelő $\mathbf{u}(t)$ beavatkozás segítségével a véges sok karakterisztikus exponens a komplex számsíkon tetszőleges helyre átmozgatható, vagyis a rendszer a számunkra kedvező viselkedéssel fog működni. Erre szolgál az állapot visszacsatolás vagy pólusáthelyezés technikája, melynek lényege, hogy a beavatkozást az állapotváltozók visszacsatolásával határozzuk meg, azaz

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (3.2)$$

ahol $\mathbf{K}$ az $m \times n$ -es visszacsatoló mátrix. A gyakorlatban negatív visszacsatolást alkalmazunk, $\mathbf{K}$ elemei negatívak. Pólusáthelyezést alkalmazva a rendszer egyenlete a következő lesz

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x}(t). \quad (3.3)$$

Így a pólusokat a $D(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})) = 0$ egyenlet fogja meghatározni. Az egyenlet megoldásai $\mathbf{K}$ segítségével tetszőleges értékűre beállíthatók. Előre definiált pólusok esetén $\mathbf{K}$ meghatározása például az Ackermann-képlettel történhet.

A pólusáthelyezés alkalmazására példa lehet a korábban már ismertetett inverz inga stabilizálás analóg PD szabályozó segítségével. PD szabályozó esetén a beavatkozást a következő egyenlet adja

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (3.4)$$

ahol $\mathbf{K} = (-k_p \quad -k_d)$. Vagyis $\tau = 0$ szabályozási időkéésés esetén a korábban ismertetett PD szabályozás valójában pólusáthelyezés megvalósítását jelenti.

3.2 Stabilizálás véges spektrum hozzárendelés segítségével

Ha a pólusáthelyezésnél ismertetett rendszer szabályozókörében fellépő időkéésést is figyelembe vesszük, a rendszer (3.1) egyenlete az alábbi alakúra módosul:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t - \tau), \quad (3.5)$$

ahol τ az időkéésés mértéke. Megfigyelhető, hogy a rendszer bemeneti időkéésleltetéssel bír, emiatt azonban a stabilizálási probléma végtelen dimenzióssá válik, a karakterisztikus exponensek száma végtelen sok lesz, ahogy ezt már a matematikai bevezetőben is láthattuk.

A véges spektrum hozzárendelés alapgondolata az, hogy valósítsuk meg a pólusáthelyezést időkéésleltetett, végtelen dimenziós rendszerekre. Azaz határozzuk meg úgy a beavatkozást az állapotváltozók visszacsatolásával, hogy a teljes zárt szabályozási kör pólusai az általunk kijelölt helyekre essenek a komplex számsíkon. Ezt úgy érhetjük el, hogy nem az állapotváltozók értékét csatoljuk vissza, hanem azok egy időkéésésnyi idővel későbbi megjósolt (prediktált) értékét. Azaz az időkéésleltetett rendszerek stabilizálására a megoldást egy prediktív szabályozó eljárás jelenti. A predikcióhoz a rendszert egy belső modell segítségével jellemezzük, mely tartalmazza az általunk számított vagy mért modell paramétereket. A modell egyenlet a következő

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t - \tilde{\tau}), \quad (3.6)$$

ahol az inga stabilizálásának példája esetén $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a} & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, valamint $\tilde{a}$ és $\tilde{\tau}$ az a és τ paraméterek feltételezett értéke.

Az aktuális és korábbi beavatkozásokat, valamint a korábbi rendszerállapotokat ismerve a modell egyenlet megoldásával meghatározhatjuk az időkéésés utáni rendszerállapotok értékét. Vagyis az FSA szabályozás egy modell differenciálegyenlet megoldásával kapott megjósolt

rendszerállapotot használ fel. E prediktált rendszerállapotot visszacsatolva elérhető, hogy az időkézés miatt végtelen spektrummal rendelkező eredeti rendszerből egy véges spektrummal bíró szabályozási kört hozzunk létre. Véges sok karakterisztikus exponens pedig már hatékonyan kezelhető (lásd 3.1. alfejezet).

A prediktált érték meghatározása úgy történik, hogy a (3.6) modell egyenletet megoldjuk $\mathbf{x}(t - \tilde{\tau})$ kezdeti feltétellel, majd a kapott megoldást formálisan egy időkézésnyivel időben eltoljuk. Tehát az eredeti differenciálegyenlet megoldásával a kiszámoljuk, hogy milyen lenne a rendszer állapota $\tilde{\tau}$ idővel később. A (3.6) egyenlet megoldása $\mathbf{x}(t - \tilde{\tau})$ kezdeti feltétellel

$$\mathbf{x}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}(t-(t-\tilde{\tau}))}\mathbf{x}(t - \tilde{\tau}) + \int_{t-\tilde{\tau}}^t e^{\tilde{\mathbf{A}}(t-s)} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(s - \tilde{\tau})ds. \quad (3.7)$$

Bevezetve a $\theta = s - t$ változót

$$\mathbf{x}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\mathbf{x}(t - \tilde{\tau}) + \int_{-\tilde{\tau}}^0 e^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + \theta - \tilde{\tau})d\theta. \quad (3.8)$$

Így a prediktált érték

$$\mathbf{x}_p(t + \tilde{\tau}) = e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\mathbf{x}(t) + \int_{-\tilde{\tau}}^0 e^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + \theta)d\theta. \quad (3.9)$$

Az $\mathbf{u}(t)$ beavatkozás meghatározásánál ezt az értéket csatoljuk vissza és szorozzuk meg a $\mathbf{K}$ visszacsatoló mátrixszal, így az FSA szabályozó egyenlete [4]

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K} \int_{-\tilde{\tau}}^0 e^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + \theta)d\theta. \quad (3.10)$$

Látható, hogy a t időpillanatban érvényes beavatkozás meghatározásához szükséges a $[t - \tilde{\tau}, t]$ időintervallumban a bemenetek ismerete. Vagyis egy beavatkozás függ a korábbi beavatkozástól, ami pedig a még korábbitól, és így tovább. Azaz egy bemenet hatása végigkíséri a rendszer teljes működését. A (3.10) szabályozó egyenletből az is látszik, hogy a bemeneti időkézés kompenzálására megoszló időkézést tartalmazó szabályozót alkalmazunk. Továbbá az is megfigyelhető $\tilde{\tau} = 0$ esetén a (3.10) szabályozó egyenletből az integrál kiesik és a PD szabályozó esetét kapjuk vissza. Ezért a számítások, szimulációk elvégzésénél a PD szabályozó referenciát, ellenőrzési lehetőséget biztosít.

Ideális esetben, azaz, ha a belső modell tökéletesen leírja a valós rendszer működését, vagyis amikor $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$ és $\tilde{\tau} = \tau$, megvalósul a véges spektrum létrehozása és a pólusáthelyezés. Ennek igazolásához írjuk be a szabályozó (3.10) egyenletét a rendszer (3.5) főegyenletébe

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \left[\mathbf{K}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{K} \int_{-\tau}^0 e^{-\mathbf{A}\theta} \mathbf{B}\mathbf{u}(t - \tau + \theta)d\theta \right]. \quad (3.11)$$

Továbbá fejezzük ki az integrálban található $\mathbf{B}\mathbf{u}(t - \tau + \theta)$ függvényt a (3.5) főegyenletből, és írjuk be az előbbi egyenletbe

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{B}\mathbf{K} \int_{-\tau}^0 \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\theta} (\dot{\mathbf{x}}(t + \theta) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t + \theta)) d\theta. \quad (3.12)$$

A visszacsatolt rendszert leíró differenciálegyenlet ezen alakjából úgy látszik, mintha az állapotváltozás korábbi állapotváltozásoktól is függne, azaz látszólag neutrális egyenlettel van dolgunk. Azonban - mivel $\dot{\mathbf{x}}(t + \theta) = \mathbf{x}'(t + \theta) = d\mathbf{x}(t + \theta)/d\theta$ - az egyenletben szereplő integrál kifejezés kiszámítható

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{B}\mathbf{K}[\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\theta}\mathbf{x}(t + \theta)]_{-\tau}^0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (3.13)$$

Vagyis visszakaptuk a pólusáthelyezésnél felírt főegyenletet, a neutrális egyenlet közönséges differenciálegyenletté egyszerűsödik. Ismét a $\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})) = 0$ egyenletet kapjuk a rendszer karakterisztikus egyenleteként, a visszacsatolt rendszernek n darab pólusa lesz, a többi pólus automatikusan eltűnik.

Tehát predikció és állapot visszacsatolás révén az időkésés kompenzálható, a szabályozott rendszernek véges sok pólusa lesz, ami tetszőlegesen megválasztható. Így a pólusok tetszőlegesen nagy negatív valós részűre beállíthatók, ezáltal tetszőleges mértékű stabilitás, tetszőlegesen gyors beállítás érhető el. (Ez persze csak abban az esetben igaz, ha a $\mathbf{K}$ mátrix tagjainak, azaz a szabályozó paramétereknek nincs korlátozva az értéke). Ráadásul ez tetszőleges mértékű időkésés esetén elérhető, az időkésés értéke közömbös. Így a visszacsatolás időkésése okozta stabilitási problémákra a véges spektrum hozzárendeléses szabályozás megoldást jelent.

3.3 Paraméter eltérésekkel szembeni robusztusság

A szabályozó eljárás fő megvalósítási nehézsége abban rejlik, hogy a valóságban a rendszer $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ paramétereit és a τ időkésést nem ismerjük pontosan, általános esetben $\tilde{\mathbf{A}} \neq \mathbf{A}$, $\tilde{\mathbf{B}} \neq \mathbf{B}$ és $\tilde{\tau} \neq \tau$. Így a szabályozó (3.10) egyenletében található integrál kifejezést nem tudjuk leegyszerűsíteni.

Vizsgáljuk meg az egyenlet típusát a nem tökéletesen pontos belső modell esetre. Ha $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$ (amely feltételezés igaz az inverz inga stabilizálás esetén), a rendszert leíró egyenletekből $\mathbf{u}(t)$ az előbb leírtakhoz hasonló módon kiejthető és a (3.12) egyenlethez hasonlóan az alábbi összefüggést kapjuk

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{B}\mathbf{K} \int_{-\tilde{\tau}}^0 \mathbf{e}^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta} (\dot{\mathbf{x}}(t + \theta) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t + \theta)) d\theta. \quad (3.14)$$

mely a neutrális látszat ellenére igazából egy RFDE egyenlete, ahogy azt az alábbi átalakítás is mutatja

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\mathbf{x}(t - \tilde{\tau}) \\ & + \mathbf{B}\mathbf{K} \int_{-\tilde{\tau}}^0 e^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta} (\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\mathbf{x}(t + \theta)d\theta.\end{aligned}\quad (3.15)$$

$\tilde{\mathbf{B}} \neq \mathbf{B}$ esetben differenciáljuk a (3.10) szabályozóegyenletet

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}(t) = & \mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \int_{-\tilde{\tau}}^0 e^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta} \tilde{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{u}}(t + \theta)d\theta \\ = & \mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}[e^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + \theta)]_{-\tilde{\tau}}^0 - \mathbf{K} \int_{-\tilde{\tau}}^0 -\tilde{\mathbf{A}}e^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + \theta)d\theta,\end{aligned}\quad (3.16)$$

mivel $\dot{\mathbf{u}}(t + \theta) = \mathbf{u}'(t + \theta) = d\mathbf{u}(t + \theta)/d\theta$. Azaz a (3.5) egyenletet is felhasználva az alábbi egyenletrendszer segítségével is leírható a szabályozási kör

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t - \tau), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}(t) = & \mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\mathbf{B}\mathbf{u}(t - \tau) + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) - \mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t - \tilde{\tau}) \\ & + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \int_{-\tilde{\tau}}^0 e^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + \theta)d\theta,\end{aligned}\quad (3.18)$$

tehát a zárt kör működését ismét egy RFDE jellemzi.

Mindez azt jelenti, hogy ha a feltételezett és tényleges rendszerparaméterek közt - akár csupán infinitezimális mértékű - eltérés jelenik meg, akkor a zárt szabályozási kör spektruma megszűnik véges lenni, végtelen sok lesz a karakterisztikus exponensek száma. Ám ha az eltérések infinitezimálisak, akkor a véges sok beállított pólus mellett megjelenő végtelen sok többlet pólus a rendszer stabilitását nem befolyásolja (valós részük $-\infty$ -hez tart) [4]. Fontos megjegyezni azonban, hogy e paraméter eltérések a valóságban nem csupán infinitezimális mértékűek. Nagy eltérések esetén viszont a stabilitás veszélybe kerülhet. Ezért fontos, hogy a tervezett szabályozó a rendszermodell és a valós rendszer közötti paraméter eltérésekkel szemben robusztusan viselkedjen. A modellhibák miatt kapott végtelen spektrum esetében pedig már nem lehet tetszőlegesen nagy mértékű időkésés esetén is stabil szabályozást elérni, és tetszőlegesen gyors beállítás sem érhető el.

3.4 A szabályozás megvalósítási nehézségei

Vezessük be a következő jelölést

$$\mathbf{z}(t) = \int_{-\tilde{\tau}}^0 e^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + \theta)d\theta. \quad (3.19)$$

A szabályozó eljárás másik fő problémája a $\mathbf{z}(t)$ integrál kifejezés megvalósítása. Mivel a kifejezés nem pontosan ismert rendszerparaméterek és időkézés esetén analitikusan nem számítható ki, a megvalósítására két út áll rendelkezésre. Az első megoldás $\mathbf{z}(t)$ deriválásával differenciálegyenlet létrehozása a (3.16) egyenletben látottakhoz hasonló módon

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) - e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t - \tilde{\tau}) + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t). \quad (3.20)$$

Ez a megvalósítás azonban instabil rendszerek stabilizálására nem alkalmas. Ennek oka, hogy instabil zérus-pólus kiejtéssel jár, azaz úgy stabilizálnánk a rendszert, hogy kiejtenénk az instabil pólusait. Ez azonban csak akkor működik, ha a pólusokat pontosan ismerjük, ami a valóságban nem áll fenn (ezért is nevezzük a módszert instabil zérus-pólus kiejtésnek, csak ideális esetben lehetne végrehajtani) [5].

A gyakorlatban ezért ehelyett egy másik megvalósítási módszer terjedt el. Az eljárás a $\mathbf{z}(t)$ integrál kifejezés numerikus közelítésén alapul. A közelítés az alábbi kvadratúra szerint történik

$$\mathbf{z}(t) \cong \mathbf{z}_1(t) = \sum_{j=0}^{\tilde{r}} e^{\tilde{\mathbf{A}}\theta_{j,\tilde{r}}} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t - \theta_{j,\tilde{r}}) h_{j,\tilde{r}}, \quad (3.21)$$

ahol $\theta_{j,\tilde{r}} \in [0, \tilde{\tau}]$, $h_{j,\tilde{r}} \in \mathbb{R}$ és $\tilde{r} \in \mathbb{N}$ közelítéshez használt paraméterek, melyek mellett teljesül, hogy $\mathbf{z}_1(t) \rightarrow \mathbf{z}(t)$ ahogy $\tilde{r} \rightarrow \infty$ (lásd [6]). Ennek egy lehetséges változata az integrál egyenközü időlépéssel való közelítése

$$\mathbf{z}_1(t) = \sum_{j=0}^{\tilde{r}} e^{\tilde{\mathbf{A}}j\Delta t} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t - j\Delta t) \Delta t, \quad (3.22)$$

ahol $\tilde{r}$ jelöli azt, hogy a $[0, \tilde{\tau}]$ intervallumot hány részre osztottuk (azaz a közelítés finomságát), és $\Delta t = \tilde{\tau}/\tilde{r}$. Vagyis ebben az esetben $\theta_{j,\tilde{r}} = j\Delta t$ és $h_{j,\tilde{r}} = \Delta t$. A közelítéssel megvalósított szabályozó egyenlet pedig

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K} \sum_{j=0}^{\tilde{r}} e^{\tilde{\mathbf{A}}\theta_{j,\tilde{r}}} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t - \theta_{j,\tilde{r}}) h_{j,\tilde{r}}. \quad (3.23)$$

Látható, hogy a megoszló időkézéses tagot diszkrét időkézéses tagok összegével közelítettük.

3.4.1 A megvalósítási pontatlanságokkal szembeni robusztusság

A numerikus megvalósítás esetén is jelentkeznek hátrányos, alkalmazást korlátozó tulajdonságok. A megoszló időkézés pont időkézésekkel való közelítésének hatására ugyanis megváltozik a rendszer típusa. Ezúttal már nem ODE vagy RFDE írja le a rendszert a

paraméterek pontosságától függően, hanem mindenképp NFDE vezérli a zárt kör működését [7]. Ez belátható a (3.23) szabályozó egyenlet differenciálásával

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t - \tau), \quad (3.24)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \sum_{j=0}^{\tilde{\tau}} e^{\tilde{\mathbf{A}}\theta_{j,\tilde{\tau}}} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t - \theta_{j,\tilde{\tau}}) h_{j,\tilde{\tau}}. \quad (3.25)$$

Mivel a szabályozó egyenlet integrálját közelítettük, a (3.25) egyenlet jobb oldaláról a beavatkozájel deriváltja nem ejthető ki. Azaz a derivált mindenképp megjelenik késleltetett argumentummal, amely neutrális rendszert jelent. Így nem csupán a belső modell paramétereinek pontatlansága, hanem a szabályozó egyenlet numerikus közelítése is végtelen spektrumhoz vezet. Ahogy azt már a PDA szabályozónál láthattuk, az NFDE stabilitásának szükséges feltétele, hogy a hozzá tartozó késleltetett differenciaegyenlet önmagában is stabil legyen [5]. Jelen esetben e differenciaegyenlet a következő

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \sum_{j=0}^{\tilde{\tau}} e^{\tilde{\mathbf{A}}\theta_{j,\tilde{\tau}}} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t - \theta_{j,\tilde{\tau}}) h_{j,\tilde{\tau}}. \quad (3.27)$$

Az utóbbi egyenlet a $\theta_{j,\tilde{\tau}} = j\Delta t$ és $h_{j,\tilde{\tau}} = \Delta t$ egyenközű időlépés esetén

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \sum_{j=0}^{\tilde{\tau}} e^{\tilde{\mathbf{A}}j\Delta t} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t - j\Delta t) \Delta t. \quad (3.28)$$

A (3.26) egyenlet stabilitása triviálisan teljesül, és amennyiben $\tilde{\tau} \rightarrow \infty$, a (3.27) egyenlet karakterisztikus exponenseinek valós része tart az alábbi egyenlet karakterisztikus exponenseinek valós részéhez

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \int_{-\tilde{\tau}}^0 e^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + \theta) d\theta. \quad (3.29)$$

Tehát ha a szabályozó egyenletet numerikusan közelítjük, akkor az ideális belső modell esetén kapott (3.13) egyenlet vagy a valós belső modell esetén kapott (3.17) és (3.18) egyenletek stabilitása mellett szükségessé válik a (3.29) egyenlet stabilitása is. A (3.29) egyenletet a továbbiakban a rendszerhez tartozó funkcionál-differenciaegyenletnek nevezzük. Ez az egyenlet valójában egy RFDE, melyet az egyenlet differenciálása segítségével is beláthatunk

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{K}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) - \mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t - \tilde{\tau}) + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \int_{-\tilde{\tau}}^0 e^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + \theta) d\theta. \quad (3.30)$$

Összefoglalva elmondható, hogy a folytonos integrállal megvalósított szabályozás esetéhez képest a szabályozó egyenlet numerikus közelítése során megjelenik egy kiegészítő feltétel, amelynek teljesülnie kell a stabilitáshoz. Ez a feltétel pedig a (3.29) egyenlet stabilitása (ha a

közelítés kellően finom). Ha ez nem teljesül, a zárt kör stabilitásvesztésének a mechanizmusa a következőképp magyarázható. Tekintsük a (3.28) egyenlettel leírt egyenközü közelítést. Ezt alkalmazva a rendszer spektruma $\tilde{r}$ darab karakterisztikus multiplikátorral írható le. (Mivel a (3.28) egyenlet differenciaegyenlet, ezért a hozzá tartozó karakterisztikus egyenlet megoldásai karakterisztikus multiplikátorok, ezek stabilitásának feltétele, hogy az egység körön belül helyezkedjenek el a komplex síkon). Minden egyes karakterisztikus multiplikátorhoz végtelen sok karakterisztikus exponens tartozik, melyek függőleges egyenesek mentén sorakoznak fel a komplex síkon a következő módon

$$\lambda_{j,k} = \frac{1}{\Delta t} \ln|\mu_j| + i \frac{1}{\Delta t} (\omega_{0,j} + 2k\pi), \quad (3.31)$$

ahol μ_j a j -edik karakterisztikus multiplikátor ($j = 1, 2, \dots, \tilde{r}$), $\lambda_{j,k}$ a k -edik μ_j -hez tartozó karakterisztikus exponens ($k \in \mathbb{Z}$) és $\omega_{0,j} = \arctg(\text{Im}\mu_j/\text{Re}\mu_j) \in (-\pi, \pi]$. Tehát az exponensek elhelyezkedése az imaginárius tengely irányában periodikusan ismétlődik $2\pi/\Delta t$ eltolásokkal. A karakterisztikus exponensek valós része pedig $\tilde{r} \rightarrow \infty$ esetén tart a (3.29) egyenlet $\tilde{r}$ darab legnagyobb valós részű karakterisztikus exponensének valós részéhez. Ez azt jelenti, ha a (3.29) funkcionál-differenciaegyenletnek van egy instabil karakterisztikus exponense, akkor a (3.28) késleltetett differenciaegyenletnek végtelen sok instabil karakterisztikus exponense lesz azonos valós résszel. A neutrális egyenleteknek pedig az a sajátossága, hogy karakterisztikus exponenseinek valós része tart a hozzá tartozó késleltetett differenciaegyenlet exponenseinek valós részéhez ahogy az exponensek képzetes része növekszik. Emiatt jelent szükséges feltételt a neutrális egyenlethez tartozó késleltetett differenciaegyenlet stabilitása. Így a (3.29) funkcionál-differenciaegyenlet instabil karakterisztikus exponensének megjelenésével végtelen sok instabil exponens jelenik meg a zárt szabályozási kört leíró (3.24)-(3.25) NFDE spektrumában. Tehát hiába állítjuk be a véges spektrum hozzárendelés $\mathbf{K}$ mátrixával a visszacsatolt rendszer pólusait, a szabályozó egyenlet numerikus közelítése miatt megjelenik végtelen sok további pólus, amelyek között instabilak is találhatók, ha a (3.29) funkcionál-differenciaegyenlet önmagában instabil [8]. Tehát a zárt szabályozási kör instabil lesz, és ez tetszőlegesen nagy pontosságú numerikus közelítés esetén is így marad. A megjelenő többlet pólusok pedig jellemzően nagy képzetes résszel rendelkeznek, azaz a stabilitásvesztés ezen formája nagy frekvenciás mechanizmus.

3.4.2 A megvalósítási szabállyal szembeni robusztusság

A közelítő szabályozóegyenlet alkalmazása során nem csupán a közelítés finomsága, hanem annak módja ($\theta_{j,\tilde{r}}$ és $h_{j,\tilde{r}}$ megválasztása) is fontos lehet, ugyanis az egyes sémák

érzékenyek lehetnek $\theta_{j,\tilde{r}}$ infinitezimális változásaira [7]. Ha nem megfelelő közelítési módszert választunk, a (3.29) funkcionál-differenciaegyenlet stabilitásánál még szűkebb feltételnek is meg kell felelni ahhoz, hogy a zárt szabályozási kör stabil legyen. Ekkor ugyanis a szabályozásnak a $\theta_{j,\tilde{r}}$ időkézés paraméterek perturbálásával szemben is robusztusnak kell lennie. Ennek oka a következő. A (3.27) késleltetett differenciaegyenlet karakterisztikus egyenletének foksámát a $\theta_{j,\tilde{r}}$ paraméterek aránya határozza meg. Így a karakterisztikus multiplikátorok száma az $\theta_{j,\tilde{r}}$ időkézések arányában változhat, vagyis a $\theta_{j,\tilde{r}}$ paraméterek perturbálása befolyásolja a (3.27) egyenlet spektrumát. Egyes esetekben pedig előfordulhat, hogy e spektrumban megjelennek olyan többlet karakterisztikus exponensek, amelyek valós része már nem közelíti a (3.29) funkcionál-differenciaegyenlet karakterisztikus exponenseinek valós részét. Azaz a (3.29) egyenlet stabilitása már nem jelent elégséges feltételt a (3.27) egyenlet stabilitására [6]. A (3.27) késleltetett differenciaegyenlet $\theta_{j,\tilde{r}}$ paraméterek perturbálása melletti stabilitására szükséges elégséges feltétel az alábbi formában fogalmazható meg [6]

$$S = \int_0^{\tilde{\tau}} |\tilde{\mathbf{K}} e^{\tilde{\mathbf{A}}\theta} \tilde{\mathbf{B}}| d\theta < 1. \quad (3.32)$$

Csak a (3.13) egyenlet - vagy nem ideális belső modell esetén a (3.17)-(3.18) egyenletek - stabilitása és a (3.32) feltétel teljesülése, valamint kellően pontos numerikus közelítés esetén érhető el stabil működésű szabályozási kör a közelítésre alkalmazott szabály típusától függetlenül. Továbbá megjegyezhető, hogy a (3.28) egyenlettel leírt speciális esetben a fenti problémák nem jelentkeznek, hiszen a $\theta_{j,\tilde{r}}$ paraméterek aránya adott Δt esetén j , és tudjuk, hogy $j = 1, 2, \dots, \tilde{r}$, azaz a $\theta_{j,\tilde{r}}$ értékek perturbálásától függetlenül mindenképp $\tilde{r}$ multiplikátor jelenik meg.

3.4.3 A megvalósítási nehézségek leküzdése

A későbbi vizsgálatok könnyebb tárgyalása végett vezessünk be néhány fogalmat. Ideális stabilitásnak nevezzük azt az esetet, amikor az ideális belső modell esetén kapott (3.13) egyenlet vagy a valós belső modellel kapott (3.17)-(3.18) egyenletek stabilak. Az ideális stabilitás tehát azon zárt szabályozási kör stabilitását jelenti, ami akkor lenne érvényes, ha a szabályozási egyenlet közelítés nélkül is megvalósítható lenne. Elméleti stabilitásról beszélünk, ha a rendszer ideálisan stabil és a (3.29) funkcionál-differenciaegyenlet is stabil. Ekkor tehát a közelítő egyenlettel megvalósított szabályozással is stabil a rendszer, ha megfelelő közelítési szabályt alkalmazunk, vagy ha a $\theta_{j,\tilde{r}}$ paraméterek perturbálását nem

vesszük figyelembe. Végül robusztus stabilitásról beszélünk ha ezek mellett a (3.32) feltétel is teljesül. Robusztusan stabil rendszer tehát stabil a szabályozáshoz használt közelítés módjától függetlenül. Itt megemlíthető, hogy ezen robusztusságtól független a paraméter bizonytalanságokra nézett robusztusság. Míg az előbbi fogalom esetén az ideális, közelítés nélküli esettől való eltérés tetszőlegesen kicsiny is lehet, a paraméter bizonytalanságok terén véges nagyságú, nem tetszőlegesen kicsiny eltéréseket vizsgálunk a belső modell és a valós rendszer között.

Mint láthattuk, az elméleti és robusztus stabilitás teljesüléséhez a rendszer ideális stabilitása mellett további feltételek teljesülése szükséges. Ez megszorítást jelent a szabályozó alkalmazhatóságára vonatkozóan. A megszorítás megszüntetésére két lehetőség van: aluláteresztő szűrő vagy szakaszonként konstans beavatkozás alkalmazása. Ezek oka, hogy az instabilitást okozó nem kívánt karakterisztikus exponensek jellemzően nagy képzetes résszel, nagy frekvenciával jelennek meg. Ha aluláteresztő szűrőt használunk, a nagy képzetes részű exponensek valós része csökkenthető, a gyökök stabillá tehetők (lásd [7], [9]), hiszen a nagyfrekvenciás komponensek elnyomása aluláteresztő szűrővel hatékonyan megtehető. Szakaszonként konstans beavatkozás esetén pedig a bemenet értékét csak Δt időközönként változtatjuk, a köztes időtartamban állandó értéken tartjuk. Így Δt időközönként a rendszer viselkedése egy diszkrét rendszeréhez lesz hasonló. Az így megvalósított beavatkozás esetén ki sem alakulnak a problémát okozó tetszőlegesen nagy képzetes részű gyökök és tetszőlegesen nagy frekvenciájú rezgések, $1/(2\Delta t)$ a rendszerben kialakulni képes legnagyobb frekvencia [7]. A mérnöki gyakorlatban gyakran alkalmazott digitális szabályozó esetén pedig éppen ez az eset áll fenn, vagyis a beavatkozás szakaszonként konstans. Így a (3.27) késleltetett differenciaegyenlet instabilitása miatt megjelenő problémának csak elméleti jelentősége van, a gyakorlatban nem fordulnak elő.

3.5 Vizsgálat frekvencia tartományban

A véges spektrum hozzárendeléses szabályozási eljárást frekvencia tartományban is analizálhatjuk. Frekvencia tartományban a szabályozási kör hatásvázlata könnyen elkészíthető, mely által a rendszer szimulációja megvalósítható. A frekvencia tartományba való áttérést a rendszer és a szabályozó egyenletének Laplace-transzformációja segítségével tehetjük meg. Az s Laplace-operátor segítségével a (3.5) rendszeregyenlet Laplace-transzformáltját felírva és átalakítva

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}e^{-s\tau}\mathbf{U}(s), \quad (3.33)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}e^{-s\tau}\mathbf{U}(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0, \quad (3.34)$$

ahol $\mathbf{x}_0$ az állapotváltozók kezdeti értékeit tartalmazó vektor, $\mathbf{I}$ pedig $n \times n$ -es (vagyis $\mathbf{A}$ méretével egyező méretű) egységmátrix. Ugyanezt a (3.10) szabályozó egyenletre elvégezve

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\mathbf{X}(s) + \mathbf{K} \int_{-\tilde{\tau}}^0 e^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta} \tilde{\mathbf{B}}e^{s\theta} \mathbf{U}(s) d\theta, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\mathbf{X}(s) + \mathbf{K}(\mathbf{sI} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(s) - \mathbf{K}(\mathbf{sI} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}e^{-(\mathbf{sI} - \tilde{\mathbf{A}})\tilde{\tau}}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(s). \quad (3.36)$$

Kihasználhatjuk, hogy

$$(\mathbf{sI} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}} = e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}(\mathbf{sI} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}. \quad (3.37)$$

Ez utóbbi egyenlet teljesülése belátható, ha mindkét oldalát $(\mathbf{sI} - \tilde{\mathbf{A}})$ -val balról megszorozzuk és a jobb oldalon az $\tilde{\mathbf{A}}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}} = e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\tilde{\mathbf{A}}$ és $\mathbf{I}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}} = e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\mathbf{I}$ összefüggéseket kihasználjuk. A (3.37) egyenlet alapján a beavatkozójel kifejezése az alábbi alakra hozható

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{K} \left((\mathbf{sI} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(s) + e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}} \left(\mathbf{X}(s) - (\mathbf{sI} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}}e^{-s\tilde{\tau}}\mathbf{U}(s) \right) \right). \quad (3.38)$$

A (3.34) és (3.38) egyenletek segítségével a zárt szabályozási kör hatásvázlata felrajzolható, ezt láthatjuk a 3.1. ábrán. A hatásvázlat az $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ megkívánt állapotot hivatott megvalósítani.

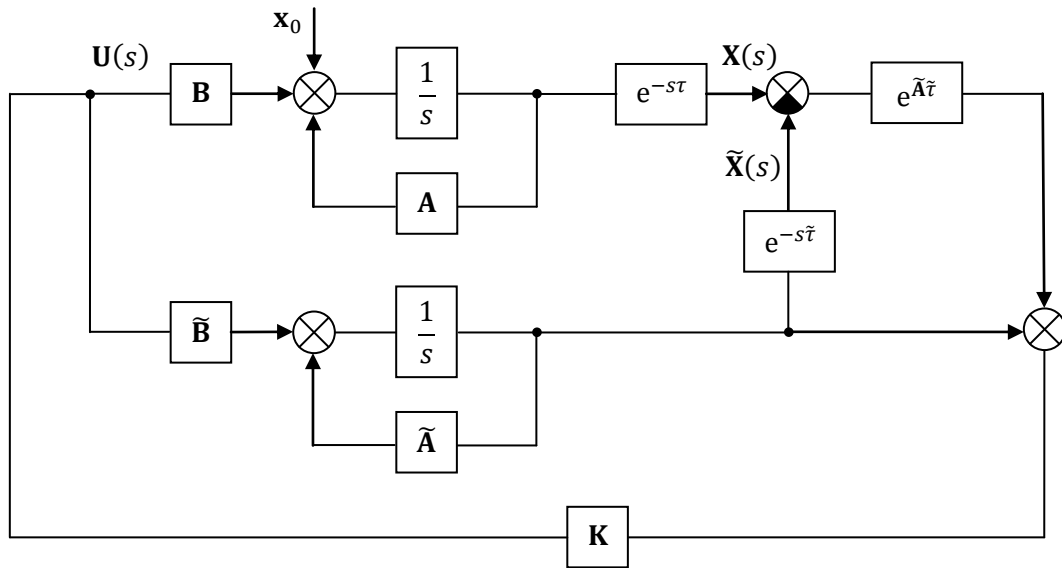
A 3.1. ábrán megfigyelhető, hogy kiszámításra kerülnek a rendszer $\mathbf{X}(s)$ és a becsült paraméterekkel felírt rendszermodell $\tilde{\mathbf{X}}(s)$ állapotváltozói. Továbbá az $e^{-s\tilde{\tau}}$ nélküli ág mutatja a predikció megvalósulását, és látható a $\mathbf{K}$ mátrixszal történő visszacsatolás is. E hatásvázlat a Smith-prediktort alkalmazó szabályozások hatásvázlatától csupán az $e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}$ tagban tér el, emiatt az FSA szabályozóra gyakran a Smith-prediktor egy módosított változataként hivatkoznak. Smith-prediktor esetén az előbb említett ágban $e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}$ helyett $\mathbf{I}$ szerepel [10]. Ennek oka, hogy a véges spektrum hozzárendelés a predikció során az időkéésényi idővel korábbi rendszerállapotot tekinti a belső modell kezdeti értékének, míg a Smith-prediktor egy $t = 0$ -ban zérus kezdeti feltétellel elindított modell alapján végzi a predikciót. Ezt mutatja a Smith-prediktor időtartományban felírt szabályozó egyenlete is [11]

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t - \tau) - \mathbf{K} \int_0^{t-\tilde{\tau}} e^{\tilde{\mathbf{A}}(t-\tilde{\tau}-\theta)} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(\theta) d\theta + \mathbf{K} \int_0^t e^{\tilde{\mathbf{A}}(t-\theta)} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(\theta) d\theta, \quad (3.39)$$

mely az alábbi rendszerhez illeszkedik

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (3.40)$$

A két szabályozási módszer között különbségként az is megjelenik, hogy a zárt szabályozási kör rendje FSA szabályozó alkalmazása esetén $n + m$ (lásd a (3.24)-(3.25) egyenleteket), míg Smith-prediktor alkalmazásával $2n$.



3.1. ábra: A véges spektrum hozzárendeléses szabályozás hatásvázlata.

Ha $\mathbf{U}(s)$ előállításához a (3.10), (3.19) és (3.20) egyenleteket egyaránt felhasználjuk, Laplace-transzformációval az alábbi két egyenletet kapjuk:

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\mathbf{X}(s) + \mathbf{K}\mathbf{Z}(s), \quad (3.41)$$

$$s\mathbf{Z}(s) = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(s) - e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}\tilde{\mathbf{B}}e^{-s\tilde{\tau}}\mathbf{U}(s) + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Z}(s). \quad (3.42)$$

Az utóbbi egyenletben kihasználtuk, hogy $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$, ami akkor teljesül, ha a $t = 0$ időpontig nincs beavatkozás. A (3.42) egyenletből a $\mathbf{Z}(s)$ változót kifejezve és a (3.41) egyenletbe beírva visszakapjuk a (3.38) egyenletet. Tehát összességében elmondhatjuk, hogy a fenti hatásvázlat valójában a $\mathbf{z}(t)$ integrálfelírás differenciálegyenletté alakításával valósítja meg a véges spektrum hozzárendelést. A 3.4. alfejezetben pedig már láthattuk, hogy ez instabil zérus pólus kiejtéssel jár, vagyis instabil rendszerek stabilizálására nem alkalmas. Ezért a 3.1. ábrán látható hatásvázlat helyett célszerűbb az integrál numerikus közelítésén alapuló megvalósítási formáknál maradni.

4. fejezet:

Inverz inga szabályozás véges spektrum hozzárendelés segítségével

Ebben a fejezetben a véges spektrum hozzárendeléses szabályozás alkalmazását láthatjuk egy konkrét mechanikai példán, mely egy inverz inga stabilizálásának problémája. Bemutatásra kerül, hogy a 3. fejezetben leírt szabályozási eljárás hogyan illeszthető a 2. fejezetben ismertetett rendszerhez. A fejezet egyúttal azt is igazolja, hogy a véges spektrum hozzárendeléses szabályozás alkalmas instabil rendszerek stabilizálására. Így a központi kérdés a stabilitásvizsgálat lesz, de más fontos szabályozási szempontok figyelembe vételére is láthatunk majd megoldást. Például megismerhetjük, hogyan lehet a szabályozási paraméterek behangolásával a leggyorsabb stabilizálást elérni.

4.1 Stabilitási térképek

Amint korábban láthattuk, a véges spektrum hozzárendeléses szabályozás esetén definiálható ideális, elméleti és robusztus stabilitás. A három esetben a stabilitási térkép megszerkesztésénél a (3.5) és (3.10), a (3.29), illetve a (3.32) egyenletekből indulunk ki. Az egyenletekbe az inga állapotter modelljénél (ld. 2.1. alfejezet) ismertetett $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ paramétereket és $\mathbf{x}(t)$ állapotvektort írjuk be. Emellett tudjuk, hogy $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} = (0 \ 1)^T$, és legyen $\mathbf{K} = (-k_p \ -k_d)$. Továbbá $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a} & 0 \end{pmatrix}$, ahol $\tilde{a}$ az $a = 6g/l$ kifejezés feltételezett értéke. Az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrix exponenciális értéke az $\alpha = \sqrt{a}$ paramétert bevezetve szimbolikus algebrai program segítségével kiszámítva a következő

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} \text{ch}(\alpha t) & \frac{1}{\alpha} \text{sh}(\alpha t) \\ \alpha \text{sh}(\alpha t) & \text{ch}(\alpha t) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

ahol sh és ch a sinh és a cosh függvényeket jelöli. Továbbá jelölje $\tilde{a}$ az α paraméter becült értékét. Mindezt a (3.10) szabályozó egyenletébe beírva

$$\begin{aligned} u(t) = & (-k_p \ -k_d) \begin{pmatrix} \text{ch}(\tilde{a}\tilde{\tau}) & \frac{1}{\tilde{a}} \text{sh}(\tilde{a}\tilde{\tau}) \\ \tilde{a} \text{sh}(\tilde{a}\tilde{\tau}) & \text{ch}(\tilde{a}\tilde{\tau}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} \\ & + (-k_p \ -k_d) \int_{-\tilde{\tau}}^0 \begin{pmatrix} \text{ch}(\tilde{a}\theta) & -\frac{1}{\tilde{a}} \text{sh}(\tilde{a}\theta) \\ -\tilde{a} \text{sh}(\tilde{a}\theta) & \text{ch}(\tilde{a}\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t + \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ez az egyenlet a (2.12) állapotter főegyenlettel egészül ki.

4.1.1 Ideális stabilitás

Az ideális stabilitás vizsgálatánál a (2.12) és (4.2) egyenletek stabilitását szükséges elemezni. Keressük ezen egyenletek megoldását exponenciális alakban

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{\lambda t}, \quad \dot{\varphi}(t) = \omega_0 e^{\lambda t}, \quad u(t) = u_0 e^{\lambda t}. \quad (4.3)$$

Ezeket behelyettesítve, a deriválásokat elvégezve és a szabályozó egyenletet egyszerűsítve

$$\lambda \varphi_0 e^{\lambda t} = \omega_0 e^{\lambda t}, \quad (4.4)$$

$$\lambda \omega_0 e^{\lambda t} = \alpha^2 \varphi_0 e^{\lambda t} + e^{-\lambda \tau} u_0 e^{\lambda t}, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} u_0 e^{\lambda t} = & \left(-k_p \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) - k_d \tilde{\alpha} \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) \right) \varphi_0 e^{\lambda t} + \left(-\frac{k_p}{\tilde{\alpha}} \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) - k_d \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) \right) \omega_0 e^{\lambda t} \\ & + \int_{-\tilde{\tau}}^0 \left(\frac{k_p}{\tilde{\alpha}} \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \theta) - k_d \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \theta) \right) u_0 e^{\lambda(t+\theta)} d\theta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Az integrálást elvégezve, az egyenleteket átrendezve és $e^{\lambda t}$ -vel leosztva az alábbi alakú egyenletrendszert kapjuk

$$\mathbf{M}(\lambda) \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \omega_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -\alpha^2 & \lambda & -e^{-\lambda \tau} \\ k_p \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) + k_d \tilde{\alpha} \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) & \frac{k_p}{\tilde{\alpha}} \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) + k_d \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) & f(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} f(\lambda) = & 1 + \frac{k_p}{2\tilde{\alpha}} \left(-\frac{1}{\lambda + \tilde{\alpha}} + \frac{1}{\lambda - \tilde{\alpha}} + \frac{e^{-(\lambda+\tilde{\alpha})\tilde{\tau}}}{\lambda + \tilde{\alpha}} - \frac{e^{-(\lambda-\tilde{\alpha})\tilde{\tau}}}{\lambda - \tilde{\alpha}} \right) \\ & + \frac{k_d}{2} \left(\frac{1}{\lambda + \tilde{\alpha}} + \frac{1}{\lambda - \tilde{\alpha}} - \frac{e^{-(\lambda+\tilde{\alpha})\tilde{\tau}}}{\lambda + \tilde{\alpha}} - \frac{e^{-(\lambda-\tilde{\alpha})\tilde{\tau}}}{\lambda - \tilde{\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Az előbbi egyenlet φ_0 , ω_0 és u_0 értékétől függetlenül teljesül, ha $\det(\mathbf{M}(\lambda)) = 0$.

Helyettesítsük a $D(\lambda) = \det(\mathbf{M}(\lambda)) = 0$ karakterisztikus egyenletbe a $\lambda = i\omega$ kifejezést. A kapott egyenletet egyszerűsítve, majd valós és képzetes részre bontva

$$\begin{aligned} R(\omega) = & -(\alpha^2 + \omega^2) + k_p \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\tilde{\alpha}^2 + \omega^2} - k_p \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\tilde{\alpha}^2 + \omega^2} \cos(\omega \tilde{\tau}) \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) \\ & - k_d \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\tilde{\alpha}^2 + \omega^2} \tilde{\alpha} \cos(\omega \tilde{\tau}) \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) - k_p \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\tilde{\alpha}^2 + \omega^2} \frac{\omega}{\tilde{\alpha}} \sin(\omega \tilde{\tau}) \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) \\ & - k_d \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\tilde{\alpha}^2 + \omega^2} \omega \sin(\omega \tilde{\tau}) \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) + k_p \frac{\omega}{\tilde{\alpha}} \sin(\omega \tau) \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) \\ & + k_d \omega \sin(\omega \tau) \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) + k_p \cos(\omega \tau) \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) + k_d \tilde{\alpha} \cos(\omega \tau) \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
S(\omega) = & k_d \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\tilde{\alpha}^2 + \omega^2} \omega - k_p \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\tilde{\alpha}^2 + \omega^2} \frac{\omega}{\tilde{\alpha}} \cos(\omega \tilde{\tau}) \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) \\
& - k_d \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\tilde{\alpha}^2 + \omega^2} \omega \cos(\omega \tilde{\tau}) \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) \\
& + k_p \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\tilde{\alpha}^2 + \omega^2} \sin(\omega \tilde{\tau}) \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) + k_d \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\tilde{\alpha}^2 + \omega^2} \tilde{\alpha} \sin(\omega \tilde{\tau}) \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) \\
& + k_p \frac{\omega}{\tilde{\alpha}} \cos(\omega \tau) \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) + k_d \omega \cos(\omega \tau) \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) - k_p \sin(\omega \tau) \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) \\
& - k_d \tilde{\alpha} \sin(\omega \tau) \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

A két egyenlet k_p -re és k_d -re lineáris egyenletrendszert jelent. Az egyenletrendszert $\omega = 0$ és $\omega \neq 0$ esetekre megoldva megkapjuk a zárt szabályozási kör D-görbéit, melyek a (k_p, k_d) síkon ábrázolhatók. Ezen D-görbék fogják megadni az ideális stabilitásra vonatkozó stabilitási határokat. Mivel a (2.12) és (4.2) egyenletek típusa RFDE, a stabilitási térképen az egyes területek instabilitási foka, és így a stabil terület holléte a Stépán-formulák [2] segítségével meghatározható.

Ideálisan paraméterezett belső modell esetén, azaz ha $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\tilde{\tau} = \tau$, a D-görbéket megadó (4.10)-(4.11) egyenletek az alábbi formára egyszerűsödnek

$$-(\alpha^2 + \omega^2) + k_p = 0, \tag{4.12}$$

$$k_d \omega = 0. \tag{4.13}$$

Így az $\omega = 0$ -hoz tartozó D-görbe

$$k_p = \alpha^2, \quad k_d \in \mathbb{R}, \tag{4.14}$$

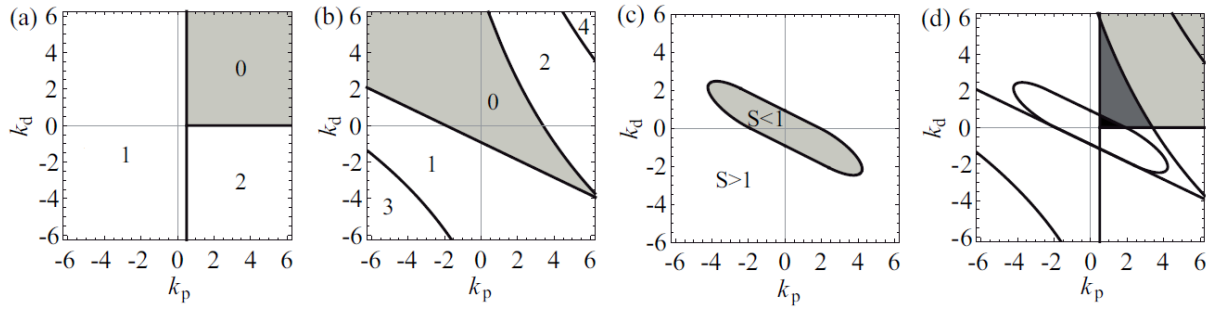
Míg az $\omega \neq 0$ -hoz tartozó D-görbe

$$k_d = 0, \quad k_p = \alpha^2 + \omega^2. \tag{4.15}$$

Ha a PDA szabályozó D-görbéinek (2.22)-(2.23) egyenleteibe $k_a = 0$ és $\tau = 0$ értékeket helyettesítünk, ugyanezeket a görbéket kapjuk. Tehát ez is azt mutatja, hogy az időkéséses rendszer szabályozása ideális FSA szabályozóval ekvivalens az időkésés nélküli rendszer PD szabályozásának esetével. Az ideális stabilitás határai, a stabil terület és az egyes tartományok instabilitási foka a 4.1. ábra (a) paneljén láthatók tökéletes belső modell esetére.

Valós belső modell esetén $\tilde{\alpha} \neq \alpha$, $\tilde{\tau} \neq \tau$, így a D-görbék (4.10), (4.11) egyenletein nem tudunk tovább egyszerűsíteni. Az $\omega = 0$ eset egyenest eredményez

$$k_d = \frac{\left(\frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}\right)^2 - \left(\left(\frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}\right)^2 - 1\right) \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau})}{\left(\left(\frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}\right)^2 - 1\right) \tilde{\alpha} \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau})} k_p - \frac{\alpha^2}{\left(\left(\frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}\right)^2 - 1\right) \tilde{\alpha} \operatorname{sh}(\tilde{\alpha} \tilde{\tau})}. \tag{4.16}$$



4.1. ábra: (a) A zárt szabályozási kör stabilitási térképe és a területek instabilitási foka;

(b) a funkcionál-differenciaegyenlet stabilitási térképe és a területek instabilitási foka;

(c) a kapcsolódó késleltetett differenciaegyenlet robusztus stabilitási határa;

(d) a három ábra egymásra vetített képe;

világos szürke: ideális stabilitás, sötétszürke: elméleti stabilitás, fekete: robusztus stabilitás;

a (2.12) és (4.2) egyenletekre $a = 0.5$, $\tau = 1$, $\tilde{a} = a$, $\tilde{\tau} = \tau$ esetén.

Az $\omega \neq 0$ esetben a határgörbékét most is a (4.10)-(4.11) egyenletrendszer megoldásával kapjuk, melyet szimbolikus algebrai programmal elvégezhetünk. Egy lehetséges paraméter érték sorozatra a stabilitási térkép a 4.2. ábra (a) paneljén látható.

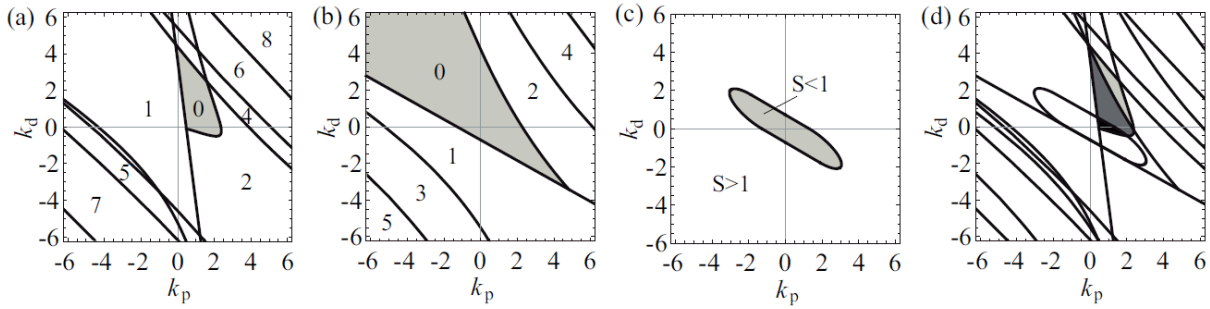
4.1.2 Elméleti stabilitás

Elméleti stabilitás esetén szükséges, hogy az ideális stabilitás feltételei teljesüljenek, valamint a kapcsolódó funkcionál-differenciaegyenlet is stabil kell legyen. Ha a (4.2) szabályozó egyenletbe az $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ kifejezést helyettesítjük, megkapjuk a (3.29) funkcionál-differenciaegyenlet inverz ingára érvényes alakját. Ebbe $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ kifejezést helyettesítve, az egyenletet átrendezve, és $u_0 e^{\lambda t}$ -vel leosztva a funkcionál-differenciaegyenletre vonatkozó karakterisztikus egyenletet kapjuk

$$f(\lambda) = 0, \quad (4.17)$$

ahol az $f(\lambda)$ kifejezést a (4.9) egyenlet adja meg. Ez $\lambda = i\omega$ esetén megadja a funkcionál-differenciaegyenlethez tartozó D-görbéket. A behelyettesítést elvégezve, a valós és képzetes részeket szétválasztva, és az egyenleteket egyszerűsítve az alábbi két egyenletet kapjuk

$$R(\omega) = 1 + \frac{\tilde{a}}{\tilde{a}^2 + \omega^2} \left(-\frac{k_p}{\tilde{a}} + \frac{k_p}{\tilde{a}} \cos(\omega \tilde{\tau}) \operatorname{ch}(\tilde{a} \tilde{\tau}) + k_d \cos(\omega \tilde{\tau}) \operatorname{sh}(\tilde{a} \tilde{\tau}) \right. \\ \left. + \frac{k_p \omega}{\tilde{a}^2} \sin(\omega \tilde{\tau}) \operatorname{sh}(\tilde{a} \tilde{\tau}) + \frac{k_d \omega}{\tilde{a}} \sin(\omega \tilde{\tau}) \operatorname{ch}(\tilde{a} \tilde{\tau}) \right) = 0, \quad (4.18)$$



4.2. ábra: (a) A zárt szabályozási kör stabilitási térképe és a területek instabilitási foka;

(b) a funkcionál-differenciaegyenlet stabilitási térképe és a területek instabilitási foka;

(c) a kapcsolódó késleltetett differenciaegyenlet robusztus stabilitási határa;

(d) a három ábra egymásra vetített képe;

világos szürke: ideális stabilitás, sötétszürke: elméleti stabilitás, fekete: robusztus stabilitás;

a (2.12) és (4.2) egyenletekre $a = 0.5$, $\tau = 1$, $\tilde{a} = 1.2a$, $\tilde{\tau} = 1.2\tau$ esetén.

$$S(\omega) = \frac{\omega}{\tilde{a}^2 + \omega^2} \left(-k_d + \frac{k_p}{\tilde{a}} \cos(\omega \tilde{\tau}) \text{sh}(\tilde{a} \tilde{\tau}) + k_d \cos(\omega \tilde{\tau}) \text{ch}(\tilde{a} \tilde{\tau}) - \frac{k_p}{\omega} \sin(\omega \tilde{\tau}) \text{ch}(\tilde{a} \tilde{\tau}) - \frac{k_d \tilde{a}}{\omega} \sin(\omega \tilde{\tau}) \text{sh}(\tilde{a} \tilde{\tau}) \right) = 0. \quad (4.19)$$

Az $\omega = 0$ eset az alábbi egyenes egyenletét adja

$$k_d = \frac{1 - \text{ch}(\tilde{a} \tilde{\tau})}{\tilde{a} \text{sh}(\tilde{a} \tilde{\tau})} k_p - \frac{\tilde{a}}{\text{sh}(\tilde{a} \tilde{\tau})}. \quad (4.20)$$

Az $\omega \neq 0$ eset az alábbi ω -val paraméterezett görbét eredményezi

$$k_p = \frac{\tilde{a}(\tilde{a}^2 + \omega^2)(\omega - \omega \cos(\omega \tilde{\tau}) \text{ch}(\tilde{a} \tilde{\tau}) + \tilde{a} \sin(\omega \tilde{\tau}) \text{sh}(\tilde{a} \tilde{\tau}))}{2\tilde{a}\omega - 2\tilde{a}\omega \cos(\omega \tilde{\tau}) \text{ch}(\tilde{a} \tilde{\tau}) + (\tilde{a}^2 - \omega^2) \sin(\omega \tilde{\tau}) \text{sh}(\tilde{a} \tilde{\tau})}, \quad (4.21)$$

$$k_d = \frac{(\tilde{a}^2 + \omega^2)(\tilde{a} \sin(\omega \tilde{\tau}) \text{ch}(\tilde{a} \tilde{\tau}) - \omega \cos(\omega \tilde{\tau}) \text{sh}(\tilde{a} \tilde{\tau}))}{2\tilde{a}\omega - 2\tilde{a}\omega \cos(\omega \tilde{\tau}) \text{ch}(\tilde{a} \tilde{\tau}) + (\tilde{a}^2 - \omega^2) \sin(\omega \tilde{\tau}) \text{sh}(\tilde{a} \tilde{\tau})}. \quad (4.22)$$

A görbék alapján a funkcionál-differenciaegyenlet stabilitási térképe megrajzolható, ezt láthatjuk a 4.1. és 4.2. ábrák (b) paneljén ideálisan paraméterezett és valós belső modell esetére. A $k_p = 0$, $k_d = 0$ pontban az egyenlet stabil, mert ilyenkor $u(t) \equiv 0$, tehát az origó a stabil terület részét képezi. Az egyes területek instabilitási fokának meghatározására a Stépán-formulák továbbra is alkalmazhatók, hiszen már beláttuk, hogy a funkcionál-differenciaegyenlet egy RFDE formájára is átírható.

Az ideális stabilitás ábráját és a funkcionál-differenciaegyenlet stabilitási térképét egymásra vetíthetjük. Az elméleti stabilitás területe végül a két stabil tartomány metszete lesz. Ez látható a 4.1. és 4.2. ábrák (d) paneljén is, a sötétszürke és fekete területeken (ezeken az

ábrákon már szerepelnek a robusztus stabilitás határgörbéi is). Az ábrán világos szürkével jelölt tartományon belül a rendszer ideálisan stabil, de a funkcionál-differenciaegyenlet instabil, így itt a zárt rendszer instabil a szabályozóegyenletben elkövetett tetszőlegesen kicsi megvalósítási hiba esetén is.

4.1.3 Robusztus stabilitás

Robusztus stabilitás esetén az ideális stabilitás kritériumai mellett teljesülnie kell még a (3.32) feltételnek, mely a funkcionál-differenciaegyenlet stabilitásánál szűkebb feltételt jelent. Az inverz ingára vonatkozó paramétereket behelyettesítve a (3.32) egyenlőtlenség a következő feltételt adja

$$S = \int_0^{\tilde{\tau}} \left| -\frac{1}{\tilde{\alpha}} \operatorname{sh}(\tilde{\alpha}\theta)k_p - \operatorname{ch}(\tilde{\alpha}\theta)k_d \right| d\theta < 1. \quad (4.23)$$

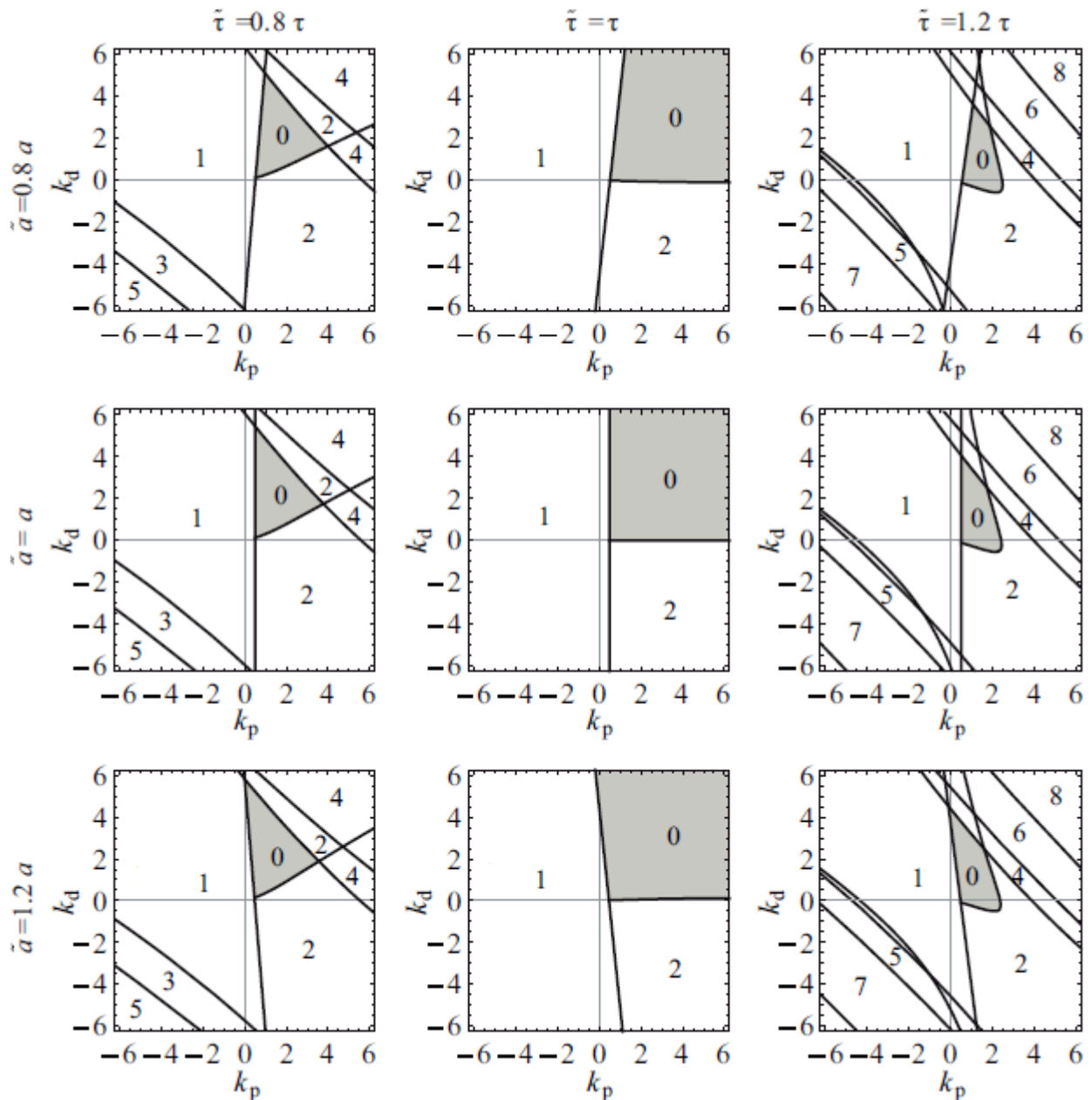
Vagyis jelen esetben a határgörbét az $S = 1$ görbe fogja jelenteni. A határok a (k_p, k_d) sík négy síknegyedére külön-külön szimbolikus algebrai program segítségével meghatározhatók. Ha a (4.23) egyenletben levő abszolút érték jelen belüli kifejezés a $\theta \in [0, \tilde{\tau}]$ intervallumon nem vált előjelet, a stabilitási határ egyenes lesz, előjel váltás esetén pedig ellipszis görbét kapunk eredményül. Az egyes görbék egymáshoz azonos érintővel csatlakoznak origót körülölelő zárt határt eredményezve. S értéke az origóban zérus, így a $S < 1$ terület a zárt görbén belülre esik. Az $S = 1$ határgörbét és az $S < 1$ területet a 4.1. és 4.2. ábrák (c) panelje mutatja ideális és valós belső modell esetére.

Végül a szabályozás robusztusan stabil területe a 4.1.1. pontban kapott ideálisan stabil terület és a most kiszámított $S < 1$ terület metszete lesz. Ezt 4.1. és 4.2. ábrák (d) paneljén feketével jelzett tartomány mutatja. Itt tehát a közelített szabályozóegyenlettel megvalósított zárt szabályozási kör robusztusan stabil a közelítéshez használt módszerre való tekintet nélkül. A sötétszürke tartományon a rendszer elméleti értelemben stabil, de nem robusztusan. Itt tehát a szabályozási kör instabillá válhat nem megfelelően megválasztott közelítési szabály, vagy a közelítéshez használt $\theta_{j,\tilde{r}}$ paraméter perturbációja esetén.

Szakaszonként állandó beavatkozást alkalmazó (digitális) szabályozó esetén azonban a kapcsolódó késleltetett differenciaegyenlet stabilitásának nincs szerepe, emiatt a funkcionál-differenciaegyenlet határgörbéit és az $S = 1$ határt nem kell figyelembe venni [7]. Így stabil területnek megmarad az eredeti, ideálisan stabil tartomány (ld. 4.1. és 4.2. ábrák (a) panelje), és nem kell a stabil területek metszetét képezni.

4.2 Érzékenység a belső modell pontatlanságaira

A stabilitási térkép különböző a és τ paraméter becslések mellett is megrajzolható. Így adott a és τ paraméterek mellett különböző $\tilde{a}$ és $\tilde{\tau}$ értékek feltételezésével térképsorozat készíthető, melyen a belső modell pontosságának hatása megfigyelhető. E térképsorozatra mutat példát a 4.3. ábra. Az ábra csupán az ideális stabilitás határait mutatja, az elméleti és robusztus stabilitás határgörbéi nincsenek ábrázolva.



4.3. ábra: A (2.12) és (4.2) egyenletek stabilitási térkép sorozata az instabil gyökök számával $a = 0.5, \tau = 1$ esetén különböző belső modell paraméter becslésekkel.

4.3 Numerikus szimuláció

Minden szabályozókör beállításához, behangolásához segítséget nyújt a kör működésének számítógépes szimulációja. Így ellenőrizhető, hogy a szabályozás megfelelően működik-e, megfigyelhetjük a kimeneti jelalakot, melyről további fontos szabályozási paraméterek (szabályozási idő, túllendülés) is megállapíthatók. Továbbá célszerű a stabilitásvizsgálatot numerikusan, számítógép segítségével is elvégezni. Ez az időben folytonos folyamatok diszkrétizálását vonja maga után. Így a stabilitásvizsgálat is egy adott, időben diszkrét esetre fog vonatkozni. Ám a gyakorlatban gyakran digitális szabályozót alkalmaznak a beavatkozó jel meghatározásához, így a diszkrétizálás a szabályozónál is mindenképp végbemegy. Ezért a numerikusan elkészített stabilitási térkép jól fog illeszkedni a valós szabályozáshoz, nem szükséges mindenképp az analitikus stabilitási határokat kiszámítani.

4.3.1 A rendszer és a szabályozó egyenletének diszkrétizálása

A véges spektrum hozzárendelés módszerének gyakorlati megvalósításához egy lehetséges megoldás a digitális szabályozó alkalmazása. A digitális szabályozót jelentheti maga a számítógép is. A számítógép által felhasznált adatok (a rendszerállapotok és beavatkozások korábbi értékei) csak bizonyos időpontokban állnak rendelkezésre, ezek az ún. szimulációs lépések. A szabályozáshoz szükséges beavatkozás meghatározása is csak ezekben az időpontokban történik. Legyen a szimulációs lépések közt eltelt idő Δt . A beavatkozást tehát Δt időközönként számítjuk ki, a köztes időpillanatban tartjuk az értékét. Tehát szakaszonként konstans beavatkozási függvény valósul meg. Így a korábban megismert (3.10) szabályozó egyenlet most már csak a diszkrét időpillanatokban érvényes, csak a szimulációs lépésekben adja meg a kapcsolatot a kiszámításra kerülő beavatkozás érték és a rendelkezésre álló rendszerállapot és korábbi beavatkozás adatok közt.

Írjuk fel a szabályozó egyenletet az alábbi formában

$$\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{e}^{-\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}} \int_{-\tilde{\tau}}^0 \mathbf{e}^{-\tilde{\mathbf{A}}\theta} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + \theta) d\theta, \quad (4.24)$$

ahol $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{K}\mathbf{e}^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}}$. Legyenek a szimulációs lépések a $t_i = i\Delta t$ időpontokban ($i = 1, 2, 3, \dots$). Alkalmazzuk az alábbi jelöléseket: $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(t_i)$, $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$. Továbbá alkalmazzunk szakaszonként konstans beavatkozó jelet, valamint közelítsük a szabályozó egyenletben megtalálható integrál kifejezést numerikus kvadraturával (ld. (3.22) egyenlet). Az így megvalósított beavatkozás a $t \in [t_i, t_{i+1})$ időintervallumon

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_i = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}_i + \tilde{\mathbf{F}}e^{-\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}} \sum_{j=1}^{\tilde{r}} e^{\tilde{\mathbf{A}}j\Delta t} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}_{i-j}\Delta t = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^{\tilde{r}} \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{u}_{i-j}, \quad (4.25)$$

ahol $\tilde{\mathbf{Q}}_j = \tilde{\mathbf{F}}e^{-\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\tau}} e^{\tilde{\mathbf{A}}j\Delta t} \tilde{\mathbf{B}}\Delta t$ és $\tilde{r} = \tilde{\tau}/\Delta t$.

A rendszert leíró differenciálegyenlet (állapottér főegyenlet) továbbra is minden időpillanatban érvényes, nem csupán a szimulációs lépéseknél. Használjuk fel a differenciálegyenletet a következő szimulációs lépésben megvalósuló állapot meghatározására úgy, hogy az aktuális állapotot ismertnek tekintjük. Írjuk fel az állapotter főegyenletet szakaszonként konstans beavatkozás esetén a következő alakban

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t_{i-r}) \quad t \in [t_i, t_{i+r}), \quad (4.26)$$

ahol $r = \tau/\Delta t$. Az egyenletet $\mathbf{x}(t_i)$ kezdeti feltétellel megoldva

$$\mathbf{x}(t_i + \Delta t) = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}(t_i) + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \theta)} \mathbf{B}\mathbf{u}(t_{i-r}) d\theta. \quad (4.27)$$

A korábbi rövid jelöléseket alkalmazva a következő szimulációs lépésben érvényes állapot kifejezése

$$\mathbf{x}_{i+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_i + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \theta)} \mathbf{B} d\theta \mathbf{u}_{i-r} = \mathbf{P}\mathbf{x}_i + \mathbf{R}\mathbf{u}_{i-r}, \quad (4.28)$$

ahol $\mathbf{P} = e^{\mathbf{A}\Delta t}$ és $\mathbf{R} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \theta)} \mathbf{B} d\theta$. Az $\tilde{\mathbf{F}}$, $\tilde{\mathbf{Q}}_j$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}$ mátrixok egy adott szabályozási körre és szimulációs időlépésre előre meghatározhatók, nem függenek i -től. Így a következő egyenletek segítségével minden szimulációs lépés alkalmával a beavatkozás és a következő szimulációs lépésnél érvényes állapot meghatározható az aktuális állapot és a korábbi beavatkozások alapján. Így a rendszerre érvényes kezdeti feltételek és a beavatkozás $[-\max(\tau, \tilde{\tau}), 0]$ intervallumon felvett kezdeti - például zérus - értékeit ismerve a szabályozási kör numerikus szimulációja elvégezhető. Az ehhez szükséges két egyenlet tehát

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{P}\mathbf{x}_i + \mathbf{R}\mathbf{u}_{i-r}, \quad (4.29)$$

$$\mathbf{u}_i = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^{\tilde{r}} \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{u}_{i-j}. \quad (4.30)$$

4.3.2 Állapot kiegészítés

Tegyük fel, hogy a szabályozási kör időkésését pontosan ismerjük, vagyis $\tilde{\tau} = \tau$, azaz $\tilde{r} = r$. Vegyük fel az állapotvektorba az $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{u}_{i-1}$, $\mathbf{u}_{i-2}, \dots, \mathbf{u}_{i-r}$ értékeket. Ezt nevezzük állapot kiegészítésnek (state augmentation). Az állapot kiegészítés előnye, hogy adott szimulációs lépés bővített állapotvektora egyszerűen kiszámítható, csupán az előző lépés

bővített állapotvektorát meg kell szorozni egy mátrixszal. A numerikus szimulációt leíró (4.29)-(4.30) egyenletek alapján ez a mátrix-szorzásos összefüggés felépíthető

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i+1} \\ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_{i-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{i-r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{R} \\ \tilde{\mathbf{F}} & \tilde{\mathbf{Q}}_1 & \cdots & \tilde{\mathbf{Q}}_{r-1} & \tilde{\mathbf{Q}}_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{u}_{i-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{i-r+1} \\ \mathbf{u}_{i-r} \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

ahol $\mathbf{I}$ az $m \times m$ -es egységmátrix, $\mathbf{0}$ az $n \times m$ -es, illetve $m \times m$ -es nullmátrix (m a bemenetek száma). Vagyis a szimulációt meghatározó egyenlet az alábbi egyszerű alakú

$$\mathbf{y}_{i+1} = \Phi \mathbf{y}_i, \quad (4.32)$$

ahol $\mathbf{y}_i$ a bővített állapotvektor i . szimulációs lépésben felvett értéke, Φ pedig a szimulációs paramétereket és rendszerjellemzőket tartalmazó mátrix. Ez az egyenlet egy szemi-diszkrétizált rendszert jelenít meg, hiszen az eredeti folytonos rendszert mintavételessel közelítettük és az időkést r részre bontottuk. A Φ mátrix időtől független jellemző, a értéke előre meghatározható. A kezdeti $\mathbf{y}_0$ értéket ismerve pedig a numerikus szimuláció során lépésről lépésre kiszámítható $\mathbf{y}$ aktuális értéke.

Ha az időkést nem ismerjük pontosan Φ és $\mathbf{y}$ felépítése kétféle lehet. Φ és $\mathbf{y}$ méretét mindig a $\max(r, \tilde{r})$ érték határozza meg. Ha $r > \tilde{r}$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i+1} \\ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_{i-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{i-r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{R} \\ \tilde{\mathbf{F}} & \tilde{\mathbf{Q}}_1 & \cdots & \tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{r}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{u}_{i-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{i-\tilde{r}} \\ \mathbf{u}_{i-\tilde{r}-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{i-r+1} \\ \mathbf{u}_{i-r} \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Ha $r < \tilde{r}$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i+1} \\ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_{i-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{i-\tilde{r}+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{R} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{F}} & \tilde{\mathbf{Q}}_1 & \cdots & \tilde{\mathbf{Q}}_{r-1} & \tilde{\mathbf{Q}}_r & \cdots & \tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{r}-1} & \tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{r}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{u}_{i-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{i-r+1} \\ \mathbf{u}_{i-r} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{i-\tilde{r}+1} \\ \mathbf{u}_{i-\tilde{r}} \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

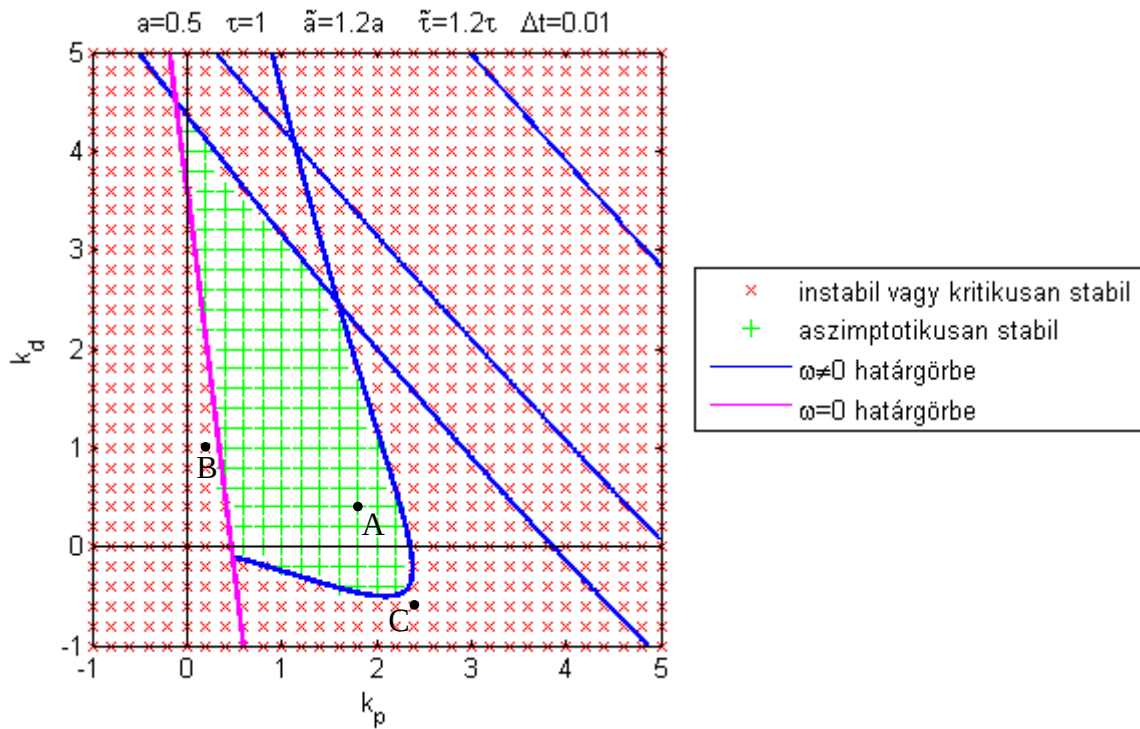
Ha n állapotváltozó és m bemenet van, akkor Φ mérete tehát $(\max(r, \tilde{r}) \cdot m + n) \times (\max(r, \tilde{r}) \cdot m + n)$, $\mathbf{y}$ mérete pedig $(\max(r, \tilde{r}) \cdot m + n) \times 1$. Ebből jól látható, hogy ahogy egyre finomítjuk a numerikus közelítést, azaz ahogy $\Delta t \rightarrow 0$ és $r \rightarrow \infty$, $\tilde{r} \rightarrow \infty$, úgy válik a mátrix mérete végtelen nagygyá, vagyis a probléma végtelen dimenziós természete megmutatkozik.

4.3.3 Stabilitási térképek numerikus elkészítése

Az állapot kiegészítés alkalmazásának másik fő előnye, hogy a zárt szabályozási kör stabilitási térképe könnyen elkészíthető. A rendszer stabilitását ugyanis Φ sajátértékei fogják megszabni. Ezeket a sajátértékeket karakterisztikus multiplikátoroknak nevezzük. A karakterisztikus multiplikátorok stabilitást meghatározó szerepének belátásához tekintsük az $\mathbf{y}_{i+1} = \Phi \mathbf{y}_i$ egyenletet. Ez $\mathbf{y}$ minden elemére egy-egy mértani sorozatot jelent. Ha Φ -t a sajátvektorainak koordináta rendszerébe transzformáljuk, akkor diagonális mátrixszá válik, főátlójában a sajátértékei állnak, minden más eleme zérus. Így az ebben a koordináta rendszerben felírt $\mathbf{y}_{i+1} = \Phi \mathbf{y}_i$ egyenlet $y_{i+1,j} = \mu_j y_{i,j}$ alakú skalár egyenletekre bomlik (y_j az $\mathbf{y}$ vektor j . eleme a sajátvektorok által meghatározott koordináta rendszerben, μ_j pedig Φ j . sajátértéke, azaz a j . karakterisztikus multiplikátor, $j = 1, 2, \dots, \max(r, \tilde{r}) \cdot m + n$). Ezen skalár egyenletekből pedig látszik, hogy $\mathbf{y}$ mindegyik elemére egy-egy mértani sorozatot kapunk. A rendszer csak akkor lehet stabil, ha e mértani sorozatok konvergensek. A konvergencia feltétele pedig, hogy a sorozatok kvóciensének abszolút értéke egynél nem lehet nagyobb. Ha a stabilitási határt is kizárjuk, azaz kritikus stabilitást nem engedünk meg, akkor a kvóciens abszolút értéke egynél kisebb kell legyen minden egyes mértani sorozatra. Tehát az aszimptotikus stabilitás feltétele

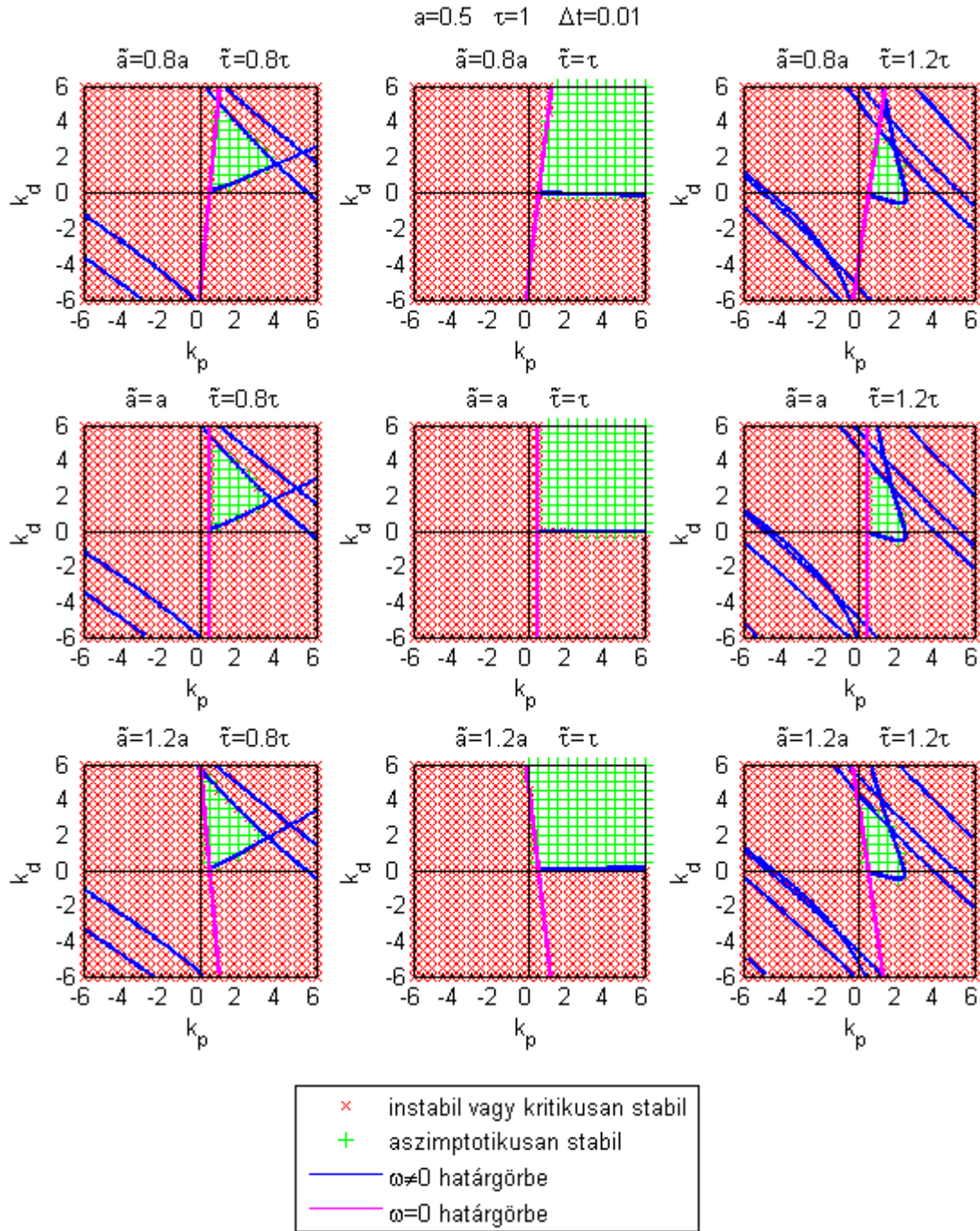
$$\max(|\mu_j|) < 1. \quad (4.35)$$

Mivel a numerikus szimulációt eleve számítógéppel végezzük, numerikusan a stabilitásvizsgálatot is gyorsan elvégezhetjük. A karakterisztikus multiplikátorok értékei függenek a k_p , k_d szabályozó paraméterektől. Így a sajátértékeket különböző k_p , k_d értékpárookra kiszámíthatjuk, és eldönthetjük, a szabályozás stabil rendszert eredményez-e. Ezáltal a (k_p, k_d) síkon a stabilitási térkép pontról pontra megrajzolható. Tehát a stabilitási térképet bizonyos felbontással, diszkrét k_p és k_d értékek mellett elkészíthetjük. A 4.2. ábra (a) paneljén bemutatott térkép numerikusan készített változata a 4.4. ábrán látható. A térképen megtalálhatók a folytonos szabályozáshoz tartozó analitikus D-görbék is. Észrevehető, hogy a kapcsolódó funkcionál-differenciaegyenlet stabilitási tartománya és a robusztus stabilitásra vonatkozó $S < 1$ feltétel sem befolyásolja a numerikusan megvalósított szabályozás stabilitását (ld. 4.1.3. pont). A 4.3. ábrán látottakhoz hasonlóan a numerikus stabilitásvizsgálat többszöri futtatásával megvizsgálható, hogy milyen hatással van a stabilitásra a rendszerparaméterek becslésének pontatlansága. Például a 4.5. ábrán megfigyelhető, hogyan változik a stabil terület, ha rögzített τ és a paraméterek mellett a becsléseket -20%, 0% és +20% hibával végezzük. A középső térkép mutatja az ideális esetet.



4.4. ábra: Numerikusan megvalósított véges spektrum hozzárendelést alkalmazó inverz inga szabályozás stabilitási térképe.

Numerikus közelítéssel az elméleti stabilitás tartománya is kiszámítható. Vagyis a 4.2. ábra (a) és (b) paneljének egymásra vetített képe (ld. 4.2. ábra (d) panelje az $S = 1$ határ nélkül) is létrehozható szemi-diszkretizációval. E térkép megmutatja, miként csökken a teljes zárt szabályozási körre vonatkozó stabil tartomány instabil funkcionál-differenciaegyenlet esetén. A funkcionál-differenciaegyenlet instabilitása két - általunk már megvizsgált - esetben nem befolyásolja a zárt kör stabilitását. E két eset a $\mathbf{z}(t)$ integrálkifejezés folytonos, átalakítás nélküli megvalósítása (elméleti, ideális eset) és a numerikus közelítéssel történő megvalósítás szakaszonként konstans beavatkozás alkalmazásával. Azonban folytonos rendszer és időkézés esetén a $\mathbf{z}(t)$ integrálkifejezés numerikus közelítésével a funkcionál-differenciaegyenlet stabilitása is szükséges a stabil zárt szabályozási kör megvalósításához. Ilyenkor a beavatkozás szakaszonként konstans, ám a rendszer folytonos, nem diszkretizálunk. A stabilitási térkép numerikus módszerrel történő elkészítése esetén azonban szükséges valamekkora szimulációs időlépés alkalmazásával a folytonos rendszert diszkrét rendszerrel közelíteni. Ezért a fent említett térkép numerikus elkészítéséhez két különböző mértékű időlépést alkalmazunk: a folytonos rendszer közelítésére egy igen kicsiny Δt_1 időlépést, a szakaszonként konstans beavatkozás megvalósításához a korábbi Δt -nek megfelelő mértékű Δt_2 időlépést, $\Delta t_1 \ll \Delta t_2$.



4.5. ábra: Numerikusan megvalósított véges spektrum hozzárendelést alkalmazó inverz inga szabályozás stabilitási térképei különböző belső modell paraméter becslések mellett.

Alkalmazzuk az alábbi jelöléseket: $p = \Delta t_2 / \Delta t_1$, $r_1 = \tau / \Delta t_1$, $r_2 = \tau / \Delta t_2$, $\tilde{r}_1 = \tilde{\tau} / \Delta t_1$, $\tilde{r}_2 = \tilde{\tau} / \Delta t_2$. A rendszerállapotok következő, Δt_1 időtartammal későbbi időlépésben érvényes értékét az alábbi egyenlet szerint a (4.29) egyenlethez hasonlóan számíthatjuk

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{x}_k + \mathbf{R}\mathbf{u}_{k-r_1}, \quad (4.36)$$

ahol $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\Delta t_1)$, $\mathbf{P} = e^{\mathbf{A}\Delta t_1}$ és $\mathbf{R} = \int_0^{\Delta t_1} e^{\mathbf{A}(\Delta t_1-\theta)} \mathbf{B} d\theta$. A beavatkozás értékeket - melyek csak Δt_2 időtartamonként változnak - a Δt_1 -nek megfelelő szimulációs lépésekben az alábbi egyenlet adja meg:

$$\mathbf{u}_k = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}_k + \sum_{j=1}^{\tilde{r}_2} \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{u}_{k-jp}, \quad (4.37)$$

ahol $\tilde{\mathbf{Q}}_j = \tilde{\mathbf{F}}e^{-\tilde{\mathbf{A}}\tilde{t}}e^{\tilde{\mathbf{A}}j\Delta t_2}\tilde{\mathbf{B}}\Delta t_2$ és $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{K}e^{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{t}}$. A (4.36) és (4.37) egyenletek alapján ismét felépíthető egy $\mathbf{y}_{k+1} = \Phi\mathbf{y}_k$ alakú, állapot kiegészítéssel létrehozott egyenlet. Ha $r_1 > \tilde{r}_1$, a fent említett egyenlet

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-r_1+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & & & \cdots & & & & \mathbf{0} & \mathbf{R} \\ \tilde{\mathbf{F}} & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{Q}}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{Q}}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{r}_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & & & & & & & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & & & & & & & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-p} \\ \mathbf{u}_{k-p-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-2p} \\ \mathbf{u}_{k-2p-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-\tilde{r}_1} \\ \mathbf{u}_{k-\tilde{r}_1-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-r_1+1} \\ \mathbf{u}_{k-r_1} \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Ha $r_1 < \tilde{r}_1$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-\tilde{r}_1+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & & & \cdots & & & & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{F}} & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{Q}}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{Q}}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{Q}}_{r_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{r}_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & & & & & & & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & & & & & & & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-p} \\ \mathbf{u}_{k-p-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-2p} \\ \mathbf{u}_{k-2p-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-r_1} \\ \mathbf{u}_{k-r_1-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-\tilde{r}_1+1} \\ \mathbf{u}_{k-\tilde{r}_1} \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Tehát ha n állapotváltozó és m bemenet van, akkor Φ mérete $(\max(r_1, \tilde{r}_1) \cdot m + n) \times (\max(r_1, \tilde{r}_1) \cdot m + n)$, $\mathbf{y}$ mérete pedig $(\max(r_1, \tilde{r}_1) \cdot m + n) \times 1$.

A stabilitási térképek elkészítésének menete a szakaszonként konstans beavatkozás eseténél leírtakkal azonos - Φ sajátértékeinek vizsgálata szükséges. A funkcionál-differenciaegyenlet hatását is figyelembe vevő térkép numerikusan készített változata a 4.6.

ábrán látható. A térképen megtalálhatók a folytonos zárt szabályozási kör és a funkcionál-differenciaegyenlet D-görbéi. Továbbá érdemes megfigyelni, hogy a robusztus stabilitáshoz tartozó határ továbbra sem jelenik meg, hiszen egyenközű időlépéses numerikus kvadraturát alkalmaztunk. Ez esetben pedig már a 3.4.2. fejezetben beláttuk, hogy a szabályozó egyenlet diszkrét közelítésénél szereplő $\theta_{j,\tilde{r}}$ diszkrétizálási paraméter perturbációja nem fordulhat elő. A robusztus stabilitási határok csak a (4.37) szabály módosítása esetén érvényesülhetnek.

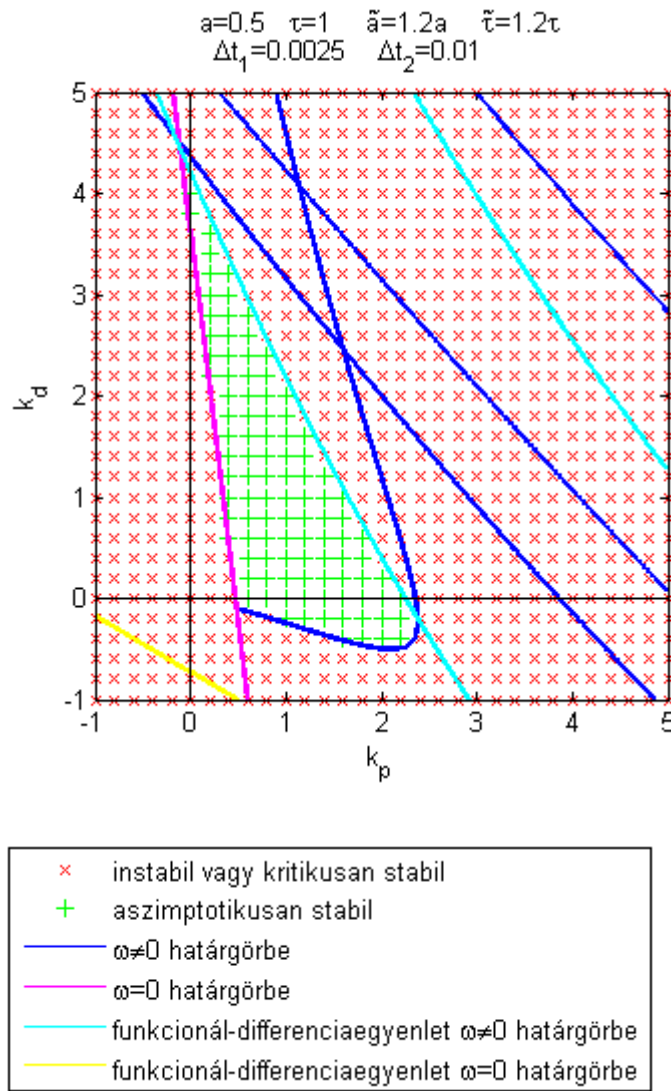
4.3.4 A mozgásegyenlet numerikus megoldása

Az $\mathbf{y}_{i+1} = \Phi \mathbf{y}_i$ egyenlet alapján a mozgásegyenlet megoldása az $\mathbf{y}_0$ kezdeti érték ismeretében a numerikus szimuláció során lépésről lépésre meghatározható. Így a rendszerállapotok és a szabályozási kör kimenete a szimulációs lépéseknek megfelelő időpontokban kiszámíthatók, az inga szög helyzetének időbeli lefutása ábrázolható. Az $\mathbf{y}_0$ vektor tartalmazza az inga kezdeti szög helyzetét és szögsebességét, valamint a beavatkozás $[-\max(\tau, \tilde{\tau}), 0]$ időintervallumon érvényes értékeit. Utóbbira az $\mathbf{u}(t) \equiv 0$ feltételt írhatjuk fel, ha azt az esetet tekintjük, hogy a $t = 0$ időpillanatban lép működésbe a szabályozókör - a későbbi példákban és ábrákban ez az eset jelenik meg.

A 4.7. ábrán egy stabil, egy egy instabil gyökkel rendelkező és egy két instabil gyökkel rendelkező szabályozás kimeneti időfüggvénye látható. E példákban megjelenő rendszer stabilitási térképe megtalálható a 4.4. ábrán, mely A, B és C pontjaihoz tartoznak a fent említett időfüggvények. Megfigyelhető, hogy ha a stabil területről az $\omega = 0$ határgörbén keresztül lépünk ki, a rendszer kimenete exponenciálisan „száll el”, míg az $\omega \neq 0$ határgörbét átlépve ez oszcillálva történik (előbbi esetben egy, utóbbi esetben két instabil pólus keletkezik). Instabil esetben persze kilépünk a kis szögelfordulások tartományából, és az ingára felírt mozgásegyenlet nem lesz érvényes, de a kapott görbék jellegükben tükrözik az instabil rendszerben lezajló folyamatokat.

4.4 Leggyorsabb beállítás vizsgálata

A rendszer karakterisztikus egyenletét ismerve meg lehet vizsgálni azt is, hogy a kitérített inverz inga milyen szabályozó paraméterekkel stabilizálható leggyorsabban, legrövidebb idő alatt. A leggyorsabb beállítás akkor valósul meg, ha a karakterisztikus exponensek valós részeinek maximuma a lehető legkisebb értéket veszi fel. Azaz a kimenet lecsengésének gyorsasága a karakterisztikus exponensek valós részének nagyságától függ.

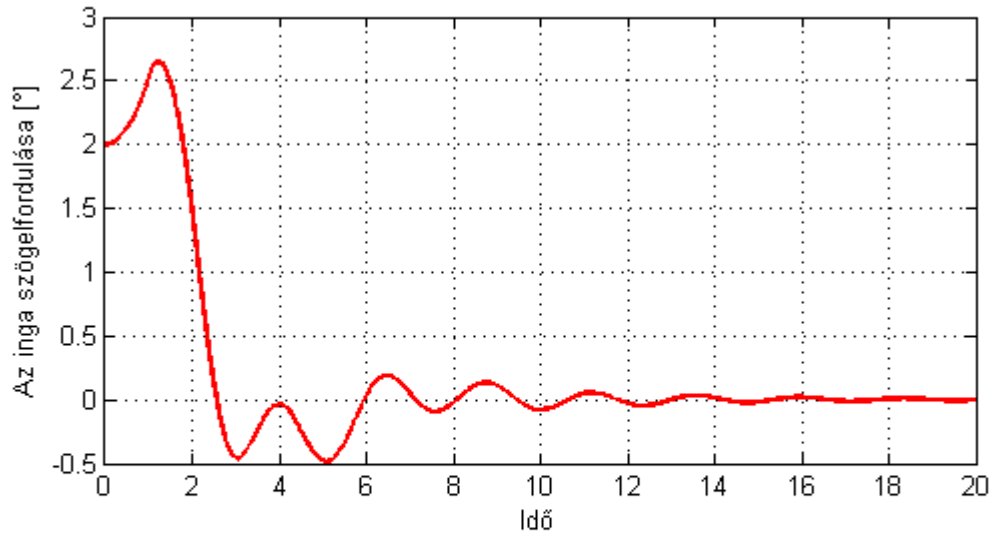


4.6. ábra: Numerikusan megvalósított véges spektrum hozzárendelést alkalmazó inverz inga szabályozás stabilitási térképe a funkcionál-differenciaegyenlet stabilitásra gyakorolt hatását megmutatva.

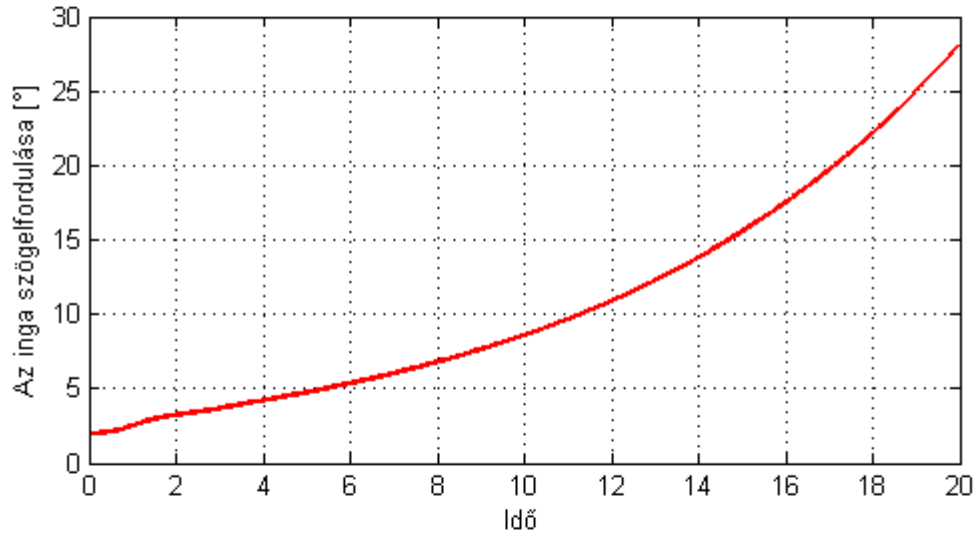
A leggyorsabb lecsengéshez tartozó szabályozó paraméterek meghatározásához a karakterisztikus egyenletbe $\lambda = \gamma \pm i\omega$ kifejezést kell helyettesíteni, és a határgörbéket a γ paraméterrel együtt meghatározni. Ekkor ezek a görbék már nem a stabilitási határt, hanem az adott γ értékhez tartozó határokat jelölik. Ezen határgörbék átlépése azt jelenti, hogy egy valós pólus vagy két komplex pólus valós része átlépi a γ értéket. Ezért meg kell vizsgálni, melyik az a legkisebb γ érték, melynél még marad olyan terület, ahol minden pólus valós része γ alatt van ($\gamma = 0$ esetén ez volt a stabil terület). Ez a legkisebb γ érték fogja meghatározni a leggyorsabb beállítás szabályozási idejét, és a hozzá tartozó szabályozó paraméterek segítségével érhető el a legkisebb beállási idő.

$$a=0.5 \quad \tau=1 \quad \tilde{a}=1.2a \quad \tilde{\tau}=1.2\tau \quad \Delta t=0.01 \quad \phi_0=2[^\circ] \quad \omega_0=0$$

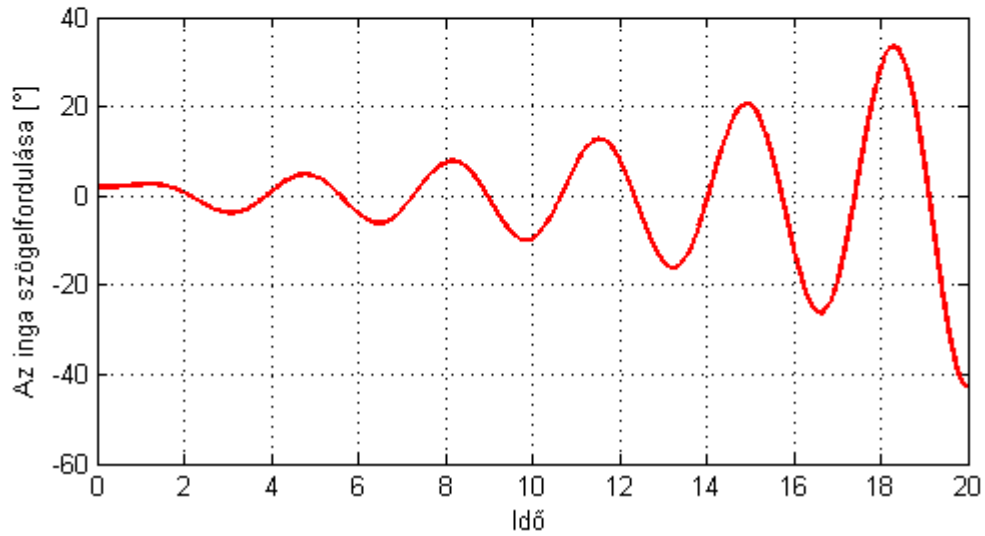
$$A \quad k_p=1.8 \quad k_d=0.4$$



$$B \quad k_p=0.2 \quad k_d=1$$



$$C \quad k_p=2.4 \quad k_d=-0.6$$



4.7. ábra: A numerikus szimuláció eredménye zérus, egyes és kettes instabilitási fok esetén.

A szabályozó paraméterek meghatározása azonban analitikusan meglehetősen bonyolult lenne, ezért célszerű numerikus vizsgálatot végezni. Az állapot kiegészítésnél kiszámított karakterisztikus multiplikátorok értéke ugyanis szintén felhasználható annak eldöntésére, hogy a (k_p, k_d) sík mely pontjához tartozik a leggyorsabb beállítás. Ebben az esetben azt a pontot kell keresnünk, ahol a karakterisztikus multiplikátorok abszolút értékének maximuma a legkisebb. Korábban már láthattuk, hogy az állapot kiegészítésnél megvalósított $\mathbf{y}_{i+1} = \Phi \mathbf{y}_i$ egyenlet skalár mértani sorozatokat takar, melyek kvóciensei a karakterisztikus multiplikátorok. A karakterisztikus multiplikátorok közül a legnagyobb abszolút értékű fogja a leglassabban konvergáló (instabil esetben a leggyorsabban divergáló) mértani sorozatot eredményezni. Így ha a rendszer stabil, a leggyorsabb lecsengést ezen karakterisztikus multiplikátor legkisebb értéke mellett kapjuk.

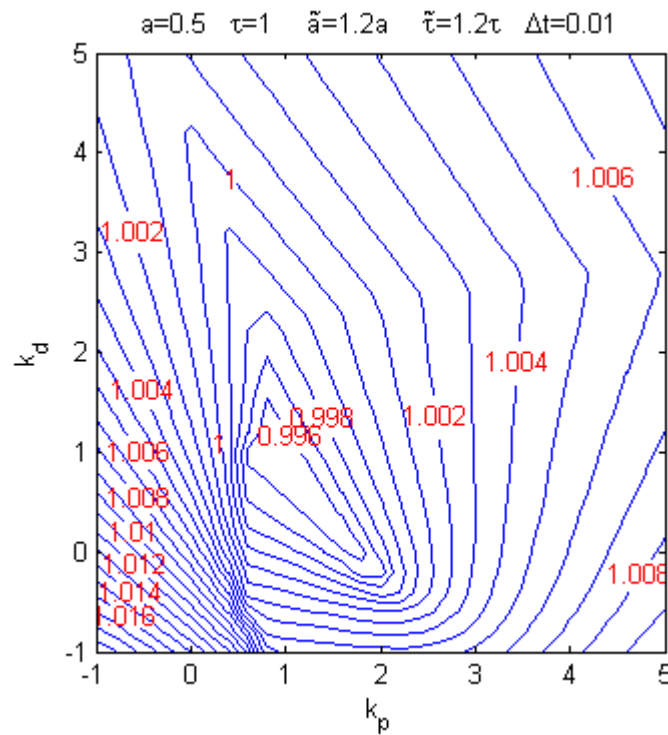
Tehát a leggyorsabb beállítás meghatározásához azt a pontot keressük a (k_p, k_d) síkon, ahol $\max(|\mu_j|)$ minimális. A $\max(|\mu_j|)$ értékeket már a stabilitás vizsgálatnál pontról pontra előállítottuk. Ezáltal lehetséges akár ezek szintvonalas ábrázolása is: minél „mélyebb” szinten van egy pont, annál gyorsabb lesz a beállítás. Továbbá ezek a szintvonalak fogják közelíteni az adott γ értékhez tartozó határgörbéket. A stabilitási határt pedig az a szintvonal jelöli, amelyen a $\max(|\mu_j|)$ egységnyi. A 4.4. ábrához tartozó szintvonalas térkép a 4.8. ábrán látható. Az példában a leggyorsabb beállást eredményező szabályozás kimeneti jelalakját pedig a 4.9. ábra mutatja.

A leggyorsabb beállású pont maximális abszolút értékű karakterisztikus multiplikátora alapján ún. fajlagos csökkenési arány (decay ratio) számítható az alábbi összefüggés szerint:

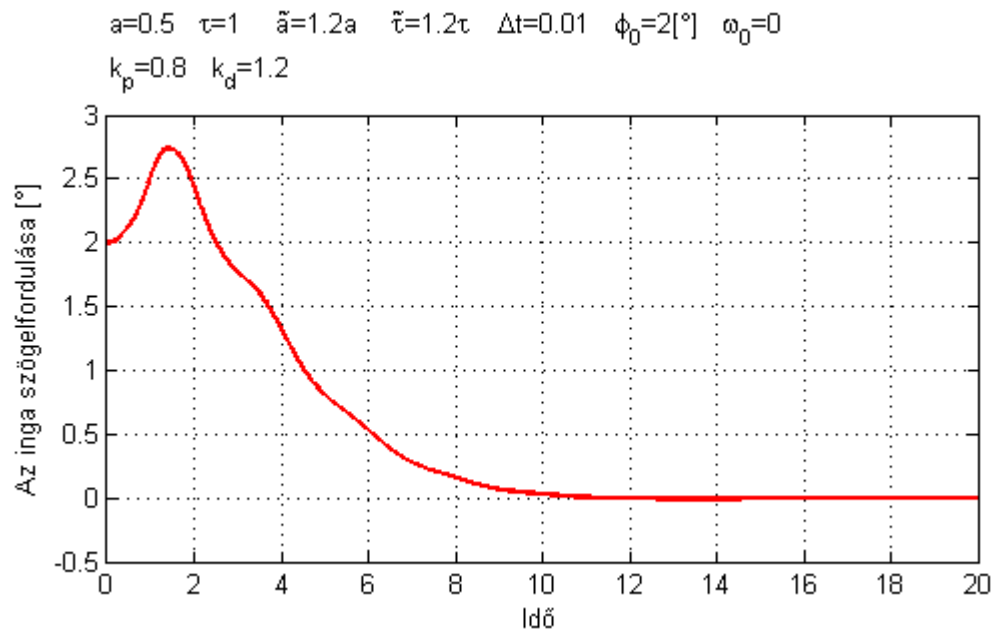
$$\mu = \left(\max(|\mu_j|) \right)^{\frac{\tau}{\Delta t}}. \quad (4.40)$$

A fajlagos csökkenési arány tehát azt mutatja meg, hogy közelítőleg hányad részére csökken a kimenet értéke τ idő elteltével (azaz a dimenziótlan vizsgálatok esetén 1 [s] alatt). A kialakuló lengések több komponensből tevődnek össze, több mértani sorozat alapján alakulnak ki. Így a lecsengés gyorsaságánál nemcsak a legnagyobb abszolút értékű karakterisztikus multiplikátor számít, hanem az összes többi is, ám mindenképp a legnagyobb(ak) értéke a domináns a szabályozás gyorsaságának szempontjából. Ezért fajlagos csökkenési arány valóban csak egy közelítést fog jelenteni, ám ez mindenképpen jól használható a leggyorsabb lecsengést biztosító szabályozó paraméterek megtalálásához, a szabályozó behangolásához. A 4.9. ábrán bemutatott példán a leggyorsabb beállítás $k_p = 0.8$ és $k_d = 1.2$ szabályozó paraméter értékek

mellett valósul meg, ekkor $\max(|\mu_j|) = 0.9952$. Azaz a fajlagos csökkenési arány a jelen példánál $0.9952^{100} = 0.6181$.



4.8. ábra: A maximális abszolút értékű karakterisztikus multiplikátorok szintvonalas megjelenítése.



4.9. ábra: A leggyorsabb beállást mutató numerikus szimuláció eredménye.

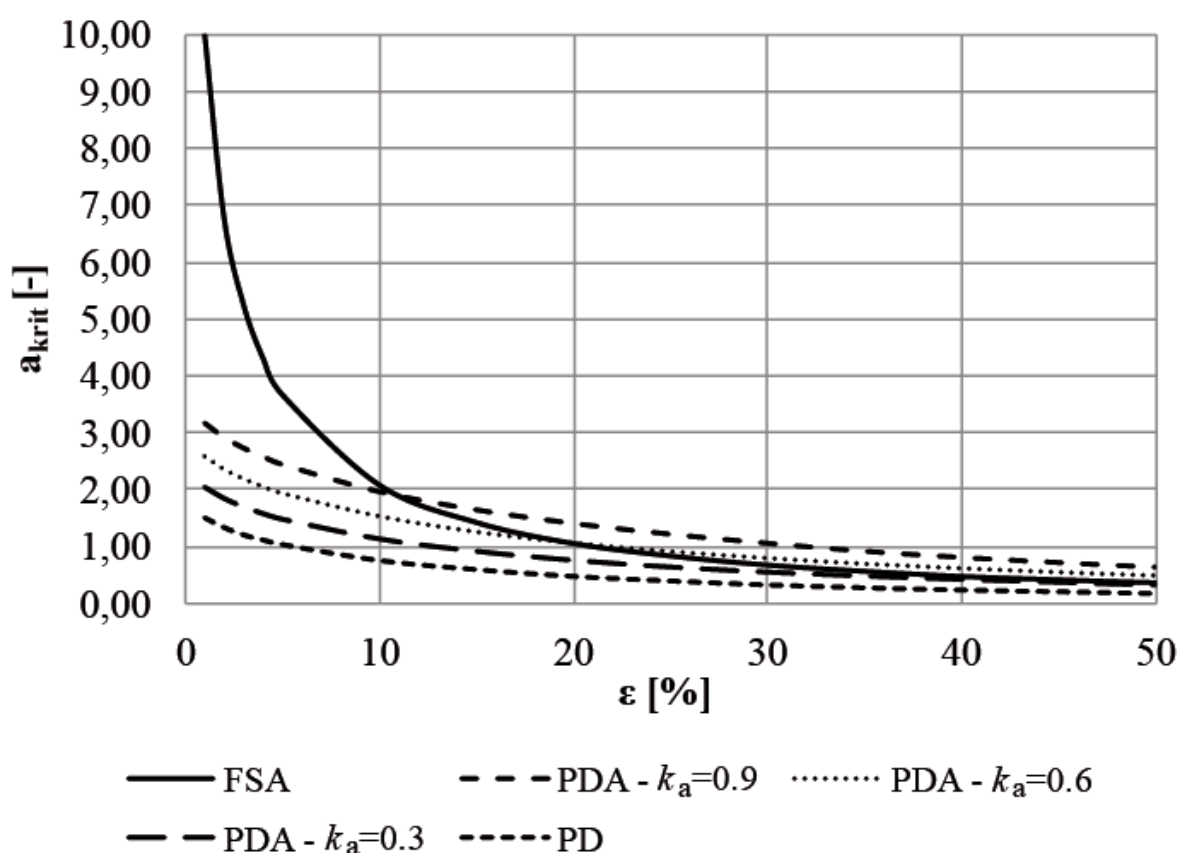
4.5 Kritikus dimenziótlan rendszerparaméter

PD és PDA szabályozó esetén már láthattuk, hogy a szabályozás nem alkalmas tetszőlegesen nagy időkésés vagy tetszőlegesen rövid inga stabilizálására (ld. 2.2 alfejezet). Ez FSA szabályozás esetén sincs másképp, ha az időkésést és a rendszerparamétert nem tökéletesen pontosan ismerjük. Így $\tau = 1$ egységnyi időkésést feltételezve meghatározható az a_{krit} kritikus dimenziótlan rendszerparaméter, melynél az inga még éppen stabilizálható. Az a_{krit} értéke függ a paraméter becslések pontosságától ($\tilde{a}$ és $\tilde{\tau}$ értékétől) és a numerikus megvalósítás esetén a Δt lépésköztől is. Az sem közömbös, hogy az időkésést és a rendszerparamétert túl- vagy alábecsüljük. A paraméterbecslés hibáját az $\varepsilon_a = |\tilde{a} - a|/a$ és $\varepsilon_\tau = |\tilde{\tau} - \tau|/\tau$ mennyiségekkel jellemezhetjük. Az adott ε_a és ε_τ értékekhez tartozó kritikus paramétert jelöljük $a_{\text{krit,FSA}}$ -val. Ha $a < a_{\text{krit,FSA}}$, létezik egy (k_p, k_d) értékpár mely biztosítja a rendszer stabilitását bármilyen $(1 - \varepsilon_a)a \leq \tilde{a} \leq (1 + \varepsilon_a)a$ és $(1 - \varepsilon_\tau)\tau \leq \tilde{\tau} \leq (1 + \varepsilon_\tau)\tau$ értékekre. Ha $a > a_{\text{krit,FSA}}$, akkor nem található ilyen értékpár.

A 4.10. ábra bemutatja $a_{\text{krit,FSA}}$ értékét az $\varepsilon = \varepsilon_a = \varepsilon_\tau$ modell hiba függvényében. A diagram a következőképp készült. Az ε_a , ε_τ és a értékeket rögzítettük és a 4.3. ábrán láthatóhoz hasonló 3×3 -as stabilitási térkép sorozatot készítettünk. Amennyiben volt legalább egyetlen pont, amely mind a 9 térképen stabilnak bizonyult, az a paraméter értékét a belső modell paramétereinek hibájával szemben robusztusan stabilnak tekintettük. Ha a -t robusztusan stabilnak találtuk, megemeltük értékét 0.01-gyel, és megismételtük a stabilitási térképek elkészítését. A vizsgálatokat addig folytattuk, amíg el nem értük a kritikus értéket. Tehát a kritikus paraméter meghatározása 0.01 pontossággal történt. Az a paraméter értékét kritikusnak tekintettük, ha $a = a_{\text{krit,FSA}}$ még robusztusan stabil volt a belső modell hibájával szemben, de $a = a_{\text{krit,FSA}} + 0.01$ már nem. Hasonló vizsgálat a PDA és PD szabályozók esetén is elvégezhető, a kritikus paraméter értéke meghatározható. Ezen szabályozók esetén ugyan nincs rendszerről alkotott belső modell, de maguk a szabályozás megtervezésénél feltételezett rendszerparaméter értékek valamilyen bizonytalansággal terheltek. Az eredmények tehát a 4.10. ábrán láthatók.

Az a_{krit} paraméter jól jellemzi a szabályozó alkalmazhatóságát, általa a különböző szabályozási eljárások összehasonlíthatók a stabilizálás képességének szempontjából. Megfigyelhető, hogy $a_{\text{krit,FSA}}$ a belső modell hibájának növekedésével rohamosan csökken. Ideális esetben, amikor minden modell paraméter tökéletesen pontos, és a szabályozó egyenletben nincs numerikus közelítés, $a_{\text{krit,FSA}} \rightarrow \infty$, tehát az időkésés hatása teljesen

megszűnik. Továbbá PD szabályozót alkalmazva, a rendszer paramétereit ismerve, $\tau = 1$ esetén $a_{\text{krit,PD}} = 2$. PDA esetén pedig $a_{\text{krit,PDA}} = 2 + 2k_a$, azaz maximálisan $a_{\text{krit,PDA}} = 4$. FSA szabályozóval pontos paraméter becslések mellett a kritikus érték 2-nél és 4-nél lényegesen nagyobb is lehet. Tehát a véges spektrum hozzárendeléses szabályozás alapvetően jobb stabilizálási tulajdonsággal bír, mint a PD vagy PDA szabályozó. Nagy modell hibák esetén azonban a PD és PDA szabályozók hatékonyabbnak bizonyulhatnak. Például $\varepsilon > 11\%$ esetén a $k_a = 0.9$ paraméterrel megvalósított PDA szabályozó már nagyobb kritikus paraméterrel bír, mint az FSA szabályozó. Ez is jól mutatja, hogy a véges spektrum hozzárendelés érzékenyebb a modell paraméterek változásaira, mint a késleltetett állapot visszacsatolást alkalmazó szabályozások.



4.10. ábra: A kritikus dimenziótlan rendszerparaméter értéke a paraméter becslések hibájának függvényében PD, PDA és FSA szabályozók esetén.

Összefoglalás

A dolgozat során a szabályozástechnika egy fontos témájával, a szabályozási körben fellépő időkésés okozta problémákkal foglalkoztunk. Láthattuk, hogy az időkésés a zárt szabályozási kör stabilitásvesztését okozhatja, illetve túlzott mértékű időkésés esetén nem hozható létre stabil szabályozás. Továbbá azt is megfigyelhettük, hogy az időkéséssel bíró rendszerek szabályozása végtelen dimenziós probléma: a rendszeregyenlet megoldásához végtelen sok kezdeti értékre van szükség, illetve a rendszer végtelen sok karakterisztikus exponenssel bír.

Az időkésés problémájára megoldásul a véges spektrum hozzárendeléses szabályozási eljárás lehetőségét vizsgáltuk. Ezen eljárás a bemeneti időkésés hatását megoszoló időkéséses tagot tartalmazó szabályozó egyenlet segítségével kompenzálja. Láthattuk, hogy az eljárás predikció és a megjósolt állapotok visszacsatolása révén ideális esetben előre megtervezett dinamikával működő rendszert képes létrehozni. Azaz az időkésés miatt eredetileg végtelen spektrummal rendelkező rendszer pólusaiból véges sokat előre tervezett értékre állít be, a többit automatikusan megszünteti. Valamint azt is megismerhettük, hogy az eljárás alkalmazhatóságánál a fő nehézséget a paraméterekre való érzékenység jelenti. Ahhoz, hogy az eljárás hatékonyan működjön, szükséges, hogy a predikciónál felhasznált mért vagy becsült rendszerparaméter és időkésés értékek a valós értékeket pontosan közelítsék.

Továbbá megvizsgáltuk, hogy a szabályozó egyenlet megoszoló időkésést tartalmazó integrálkifejezésének megvalósítása milyen problémákba ütközik. Azaz elemeztük azt is, hogy a különböző stratégiával és pontossággal történő megvalósítás robusztus stabilitása miképp biztosítható. Valamint kitértünk a diszkretizálással kapott, szakaszonként konstans beavatkozást megvalósító numerikus szabályozási eljárás alkalmazására is.

Emellett a módszer instabil rendszerek stabilizálására való alkalmazhatóságáról is meggyőződünk az inverz inga szabályozásának példáján keresztül. E példában részletesen ismertetésre került a szabályozóegyenlethez tartozó stabilitási térképek elkészítése folytonos esetben és különböző időlépések melletti numerikus közelítés esetén. Továbbá megvizsgáltuk az inga leggyorsabb stabilizálásának megvalósítását és kritikus dimenziótlan rendszerparaméterének értékét. Utóbbi alapján az eljárást a hagyományos PD és PDA szabályozóval is összehasonlítottuk, és beláttuk, hogy időkéséssel bíró rendszerek stabilizálása esetén a pontos belső modell segítségével végrehajtott FSA szabályozás hatékonyabb, stabilizálás szempontjából kedvezőbb tulajdonságokkal rendelkezik.

Irodalomjegyzék

- [1] T. Insperger, G. Stepan and J. Turi, "Delayed feedback of sampled higher derivatives," *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 368, pp. 469-482, 2010.
- [2] G. Stepan, *Retarded Dynamical Systems*, Longman, Harlow, 1989.
- [3] T. Insperger, J. Milton and G. Stepan, "Acceleration feedback improves balancing against reflex delay," *Journal of the Royal Society Interface*, vol. 10, no. 79, pp. 1742-5662, 2013.
- [4] A. Z. Manitius and A. W. Olbrot, "Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vols. AC-24, no. 4, pp. 541-553, 1979.
- [5] S. Mondié, M. Dambrine and O. Santos, "Approximation of Control Laws with Distributed Delays: a Necessary Condition for Stability," *Kybernetika*, vol. 38, no. 5, pp. 541-551, 2002.
- [6] W. Michiels, S. Mondie and D. Roose, "Robust stabilization of time-delay systems with distributed delay control laws: Necessary and sufficient conditions for a safe implementation," *Tech. Rep. TWReport 363, Department of Computer Science, Katholieke*, 2003.
- [7] W. Michiels és S.-I. Niculescu, *Stability and Stabilization of Time Delay Systems - An Eigenvalue Based Approach*, SIAM, 2007.
- [8] K. Engelborghs, M. Dambrine and D. Roose, "Limitations of a Class of Stabilization Methods for Delay Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 2, pp. 336-339, 2001.
- [9] S. Mondié and W. Michiels, "Finite Spectrum Assignment of Unstable Time-Delay Systems With a Safe Implementation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 12, pp. 2207-2212, 2003.
- [10] Z. J. Palmor, Time-delay compensation-Smith predictor and its modifications. in *The Control Handbook*, Chapter 10, pages 224-237, CRC and IEEE Press, New York, 1996.
- [11] D. Hajdu and T. Insperger, "Time domain analysis of the smith predictor in case of parameter uncertainties: A case study," in *Proceedings of the ASME 2013 IDETC/CIE, 9th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics*

and Control, Portland, OR, USA, DETC2013-12324.

- [12] D. L. Kleinman, "Optimal Control of Linear Systems with Time-Delay and Observation Noise," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 14, no. 5, pp. 524-527, 1969.
- [13] T. Insperger and G. Stepan, *Semi-Discretization for Time Delay Systems - Stability and Engineering Applications*, Springer, 2011.