



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Gépészmérnöki Kar

Autókövetéses modell vizsgálata digitális szabályozás esetén

Készítette: Molnár Tamás Gábor

Konzulensek: Dr. Insperger Tamás

BME, Műszaki Mechanikai Tanszék

Dr. Orosz Gábor

University of Michigan, Department of Mechanical Engineering

Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	1
1. fejezet: A vizsgált autókövetéses modell ismertetése	2
2. fejezet: Digitális szabályozás	6
2.1 Diszkrét állapotter modell	7
2.2 Rendszerstabilitás	9
2.3 Húrstabilitás.....	12
3. fejezet: A járművek közötti kommunikáció hibáinak hatása	19
3.1 Csomagkiesés vizsgálata determinisztikus esetben.....	19
3.1.1 Minden második csomag elvesztése	19
3.1.2 Minden harmadik csomag elvesztése.....	25
3.1.3 Minden negyedik csomag elvesztése	29
3.1.4 A csomagkiesés hatása.....	32
3.2 Véletlenszerű csomagkiesés vizsgálata	34
3.3 Csomagkiesés vizsgálata determinisztikus esetben	37
Összefoglalás.....	43
Irodalomjegyzék.....	44

Ábrajegyzék

1.1. ábra: A vizsgált autókövetéses modell [1].	2
1.2. ábra: Az előírt sebesség a követési távolság függvényében.	4
2.1. ábra: A (2.1)-(2.2) rendszer időkésésének időfüggvénye.	7
2.2. ábra: A (2.1)-(2.2) egyenletek rendszerstabilitásra vonatkozó stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.	11
2.3. ábra: Az erősítés frekvenciafüggvényének jellege a hústabilitás $\omega = 0$ határán (bal) és az ehhez tartozó instabil esetben (jobb).	13
2.4. ábra: Az erősítés frekvenciafüggvényének jellege a hústabilitás $\omega > 0$ határán (bal) és az ehhez tartozó instabil esetben (jobb).	14
2.5. ábra: Az erősítés frekvenciafüggvényének jellege a (2.27)-(2.28) feltételek teljesülése mellett, de a hústabilitás szempontjából instabil esetben.	14
2.6. ábra: A (2.1)-(2.2) egyenletek rendszer- és hústabilitást is figyelembe vevő stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.	16
3.1. ábra: A (3.1)-(3.2) rendszer időkésésének időfüggvénye.	20
3.2. ábra: A (3.1)-(3.2) egyenletek rendszerstabilitásra vonatkozó stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.	23
3.3. ábra: A (3.1)-(3.2) egyenletek rendszer- és hústabilitást is figyelembe vevő stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.	24
3.4. ábra: A (3.22)-(3.23) rendszer időkésésének időfüggvénye.	26
3.5. ábra: A (3.22)-(3.23) egyenletek rendszerstabilitásra vonatkozó stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.	27
3.6. ábra: A (3.22)-(3.23) egyenletek rendszer- és hústabilitást is figyelembe vevő stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.	28
3.7. ábra: A (3.37)-(3.38) rendszer időkésésének időfüggvénye.	30
3.8. ábra: A (3.37)-(3.38) egyenletek rendszerstabilitásra vonatkozó stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.	30
3.9. ábra: A (3.37)-(3.38) egyenletek rendszer- és hústabilitást is figyelembe vevő stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.	31
3.10. ábra: A stabilitási határok alakulása a csomagkiesés gyakoriságának változásával $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén (sötétszürke: a rendszer- és hústabil területek metszete).	33

3.11. ábra: Véletlenszerű csomagkiesés esetén kapott rendszerstabilitási térképek $N = 100$ -ra három egyedi esetben és 100 eset metszetét képezve (szürke: rendszerstabil terület, piros: stabilitási határ csomagvesztés nélkül és minden második csomag elvesztésekor).....	35
3.12. ábra: Véletlenszerű csomagkiesés esetén kapott rendszerstabilitási térképek $N = 200$ -ra három egyedi esetben és 100 eset metszetét képezve (szürke: rendszerstabil terület, piros: stabilitási határ csomagvesztés nélkül és minden második csomag elvesztésekor).....	36
3.13. ábra: Véletlenszerű csomagkiesés esetén kapott rendszerstabilitási térképek $N = 500$ -ra három egyedi esetben és 100 eset metszetét képezve (szürke: rendszerstabil terület, piros: stabilitási határ csomagvesztés nélkül és minden második csomag elvesztésekor).....	37
3.14. ábra: A (3.50)-(3.51) rendszer időkésésének időfüggvénye.	38
3.15. ábra: A (3.50)-(3.51) egyenletek rendszerstabilitásra vonatkozó stabilitási térképe $n = 2$, $V'(h *) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.	41
3.16. ábra: A (3.50)-(3.51) egyenletek rendszer- és hústabilitást is figyelembe vevő stabilitási térképe $n = 2$, $V'(h *) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.	42

Bevezetés

Járművek automatikus sebesség szabályozása kulcsfontosságú probléma az önjáró autók kifejlesztésénél. Ezen téma részét képezi egy egyenes vonalban haladó kocsisor tagjainak sebesség szabályozása úgy, hogy az egyes járművek a megengedett sebességhatárokon belül, megfelelő követési távolságok mellett együtt haladjanak. A szabályozás megtervezésénél cél, hogy a szabályozott jármű mozgása stabil legyen, valamint a sort vezető autó hirtelen gyorsulása (fékezése) ne vezessen túlzott beavatkozáshoz és ezáltal forgalmi torlódás kialakulásához. Ilyen rendszer tervezésénél tehát kétféle értelemben vett stabilitást kell figyelembe venni, melyek az ún. rendszer- és húrstabilitás (plant and string stability).

A szabályozást segíti, hogy a járművek kommunikálnak egymással, ezáltal rendelkezésre állnak a kocsisor tagjainak mért sebesség adatai és a mért követési távolságok. Ám a mérés és kommunikáció időszükséglete miatt a rendszer időkéséssel terhelt, mely destabilizáló hatással bír. A dolgozat során egy egyszerű, két autóból álló modell kerül bemutatásra. A vizsgálatok során digitális szabályozás esetét feltételezzük, azaz a mért sebesség és követési távolság értékeket mintavételező és tartó szerv segítségével dolgozzák fel. A mintavételezési idő megszokott értéke a jelenlegi, járművekben alkalmazható rövidtávú kommunikációs eszközök esetén 100 msec [1]. E mintavételezési idő a rendszer időkésésének mértékét meghatározza. Az időkésés destabilizáló hatását jól mutatja, hogy a 100 msec-os mintavételezési idő elég nagy lehet ahhoz, hogy bizonyos esetekben instabilitáshoz vezessen. E probléma főként akkor jelentkezik, ha a járművek közötti kommunikáció során küldött adat csomagok késve vagy egyáltalán nem érnek célba. Ekkor két vagy több mintavételezési időlépés alatt ugyanazon adatok alapján szükséges a beavatkozást kiszámítani, azaz a rendszer időkésése növekszik. Ha az időkésés egy kritikus értéket meghalad, a stabilitás már nem biztosítható. Ezért a dolgozatban megvizsgáljuk a rendszer- és húrstabilitás feltételeit hibátlan és adatvesztéssel terhelt kommunikáció esetén. Az analízis során elkészítjük a szabályozáshoz használt két szabályozó paraméter síkján a rendszer stabilitási térképeit. Továbbá különböző mértékű csomagkésés és különböző gyakorisággal bekövetkező csomagvesztés esetén meghatározzuk a rendszer kritikus időkésését is.

1. fejezet:

A vizsgált autókövetéses modell ismertetése

A dolgozat során gépjárművek automatikus sebességszabályozásának problémáját vizsgáljuk. A sebességszabályozás célja, hogy egy kocsisor tagjainak mozgását úgy irányítsuk, hogy a sor biztonságosan kövessék a legelől haladó járművet. A ma elérhető kommunikációs eszközök segítségével lehetséges, hogy a sor egy adott tagja számára ne csupán az előtte levő jármű mozgását leíró mennyiségek álljanak rendelkezésre, hanem akár több autó állapotáról is érkezhetnek adatok. Így az egyes járművek mozgása több elől haladó autó állapotát figyelembe véve is szabályozható. A dolgozatban azonban csupán azt az esetet vizsgáljuk, amikor csak a közvetlenül a szabályozott jármű előtt haladó autó adatai állnak rendelkezésre. Így a kocsisor egy adott tagjának szabályozásának megtervezésénél elég csupán egy két autóból álló rendszermodellt tekinteni.

A vizsgált modell tehát egy vezető és egy követő autóból áll (lásd 1.1. ábra). Az járművek egyenes vonalban haladnak egymás mögött. Jelölje a vezető autó legelső pontjának pozícióját $x_0(t)$, a követőének $x_1(t)$, legyen az elől haladó kocsi hossza L , a követési távolság pedig $h(t)$. E mennyiségek közt az alábbi összefüggés írható fel

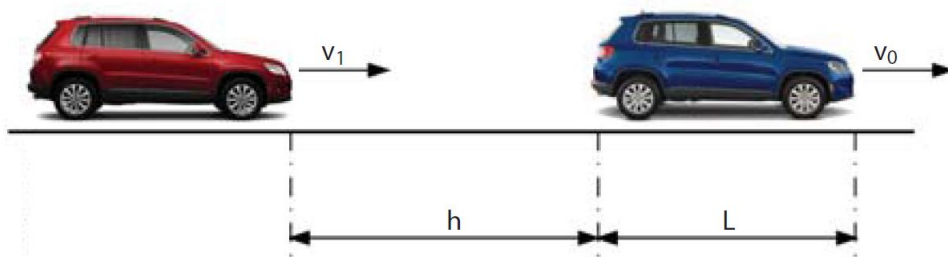
$$x_0(t) = x_1(t) + h(t) + L. \quad (1.1)$$

Az egyenletet idő szerint deriválva és átrendezve

$$\dot{h}(t) = v_0(t) - v_1(t), \quad (1.2)$$

ahol $v_0(t)$ és $v_1(t)$ rendre a vezető és a követő autó sebességét jelöli.

A vezető autó mozgását nem befolyásoljuk, azaz a $v_0(t)$ sebességet gerjesztésként foghatjuk fel, a követő autó esetében azonban szabályozzuk a jármű mozgását. A szabályozással szemben követelmény, hogy a követő autó sebessége a követési távolságtól függően a megengedett határok között változzon. Az előírt ideális sebességet a követési távolság függvényében jelöljük $V(h)$ -val.



1.1. ábra: A vizsgált autókövetéses modell [1].

Ha a követési távolság egy h_{min} érték alá csökken, az autónak meg kell állnia, ha pedig egy h_{max} értéket meghalad, az autó maximális sebességgel haladhat. A két határ között a sebességet folyamatosan növelhetjük. Így a $V(h)$ függvényt az alábbi módon írhatjuk elő

$$V(h) = \begin{cases} 0, & \text{ha } h < h_{min}, \\ F(h), & \text{ha } h_{min} \leq h \leq h_{max}, \\ v_{max}, & \text{ha } h_{max} < h, \end{cases} \quad (1.3)$$

ahol v_{max} az adott útvonalon megengedett maximális sebesség, $F(h)$ pedig egy monoton növekvő folytonos függvény, melyre $F(h_{min}) = 0$ és $F(h_{max}) = v_{max}$. Ahhoz, hogy ideális sebességű mozgás esetén ne legyenek az autó gyorsulásában ugrásszerű változások, szükséges, hogy $V(h)$ a h_{min} és h_{max} határoknál sima átmenettel bírjon. Ehhez például előírhatjuk az $F(h)$ függvényt a következő módon [2]

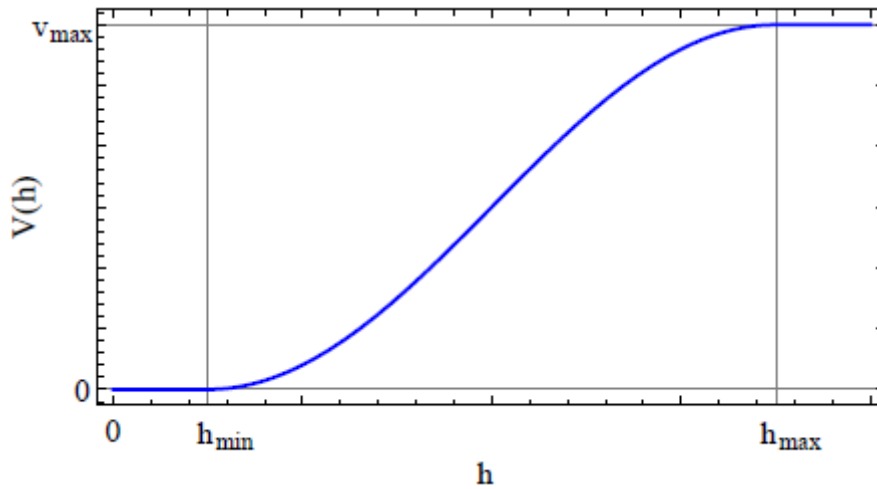
$$F(h) = \frac{v_{max}}{2} \left(1 - \cos \left(\pi \frac{h - h_{min}}{h_{max} - h_{min}} \right) \right). \quad (1.4)$$

Az ez alapján kapott $V(h)$ függvényt a 1.2. ábra mutatja.

A szabályozás során két feltételnek is eleget kell tenni. Egyrészt szükséges, hogy a $v_1(t)$ sebesség tartson a $v_0(t)$ sebességhez, másrészt $v_1(t)$ -nek a $V(h(t))$ ideális sebességhez is igazodnia kell. Ezért ha $v_0(t)$ nem az ideális $V(h(t))$ sebességnek felel meg, a két feltétel között súlyozni kell. Így a szabályozás során a beavatkozást a $v_1(t)$ sebesség $v_0(t)$ és $V(h(t))$ sebességektől való eltérése szerint határozhatjuk meg. Ezeket az eltéréseket arányosan visszacsatolva egy ún. PV szabályozóhoz jutunk, melyhez tartozó szabályozó egyenlet

$$\dot{v}_1(t) = \alpha (V(h(t)) - v_1(t)) + \beta (v_0(t) - v_1(t)), \quad (1.5)$$

ahol $\dot{v}_1(t)$ a követő autó gyorsulása, α és β pedig a szabályozó paraméterek. Az előbb említett két feltétel fontosságát tehát α és β megválasztásával súlyozhatjuk. A PV elnevezésben a P betű azt jelöli, hogy az (1.5) szabályozóegyenletet jobb oldalán szerepel $v_1(t)$ arányos visszacsatolásban (proportional - P), V betű pedig a az ideális $V(h(t))$ sebességből származó tagra utal (velocity - V). Az α és β paraméterek jelen modellben tartalmazzák a követő autó dinamikai jellemzőit (méreteit, tehetetlenségi paramétereit, stb.). Így tehát a rendszer szabályozása során az (1.2) kinematikai egyenletből és az (1.5) szabályozóegyenletből indulunk ki.



1.2. ábra: Az előírt sebesség a követési távolság függvényében.

Mivel $V(h)$ nemlineáris függvény, az egyszerűbb vizsgálatok végett célszerű a rendszert linearizálni. Ehhez szükséges megkeresni a rendszer egyensúlyi állapotát. Az egyensúlyi követési távolságot h^* -gal, az egyensúlyi sebességet v^* -gal jelölve az alábbi függvények - melyekre az (1.2) és az (1.5) egyenletek triviálisan teljesülnek - megadják az egyensúlyi állapotot

$$h(t) \equiv h^*, \quad (1.6)$$

$$v_0(t) \equiv v_1(t) \equiv V(h^*) = v^*. \quad (1.7)$$

Ezentúl csupán az egyensúlyi helyzet körüli kis változásokat vizsgáljuk, azaz a $h(t)$, $v_0(t)$ és $v_1(t)$ függvények az alábbi módon felbonthatók

$$h(t) = h^* + \tilde{h}(t), \quad (1.8)$$

$$v_0(t) = v^* + \tilde{v}_0(t), \quad (1.9)$$

$$v_1(t) = v^* + \tilde{v}_1(t), \quad (1.10)$$

ahol $\tilde{h}(t)$, $\tilde{v}_0(t)$ és $\tilde{v}_1(t)$ jelölik az egyensúlyi helyzet körüli kis ingadozásokat. A $V(h)$ függvényt h^* körül Taylor-sorba fejte és a magasabb rendű tagokat elhanyagolva közelíthetjük

$$V(h(t)) \cong V(h^*) + V'(h^*)\tilde{h}(t). \quad (1.11)$$

Az (1.8)-(1.11) egyenleteket az (1.2) és (1.5) egyenletekbe helyettesítve az alábbi lineáris rendszerhez jutunk

$$\dot{\tilde{h}}(t) = \tilde{v}_0(t) - \tilde{v}_1(t), \quad (1.12)$$

$$\dot{\tilde{v}}_1(t) = \alpha \left(V'(h^*)\tilde{h}(t) - \tilde{v}_1(t) \right) + \beta \left(\tilde{v}_0(t) - \tilde{v}_1(t) \right). \quad (1.13)$$

A szabályozót tehát ehhez a rendszerhez szeretnénk megtervezni. Az α és β szabályozó paraméterek megválasztásánál két fontos kritériumot kell teljesíteni. Egyrészt biztosítani kell,

hogy a követő autó mozgása stabil maradjon állandó $v_0(t) \equiv v^*$ vezető autó sebesség esetén. Ehhez az (1.12) és (1.13) egyenletek $\tilde{v}_0(t) \equiv 0$ esetre vonatkozó stabilitása szükséges, melyet rendszerstabilitásnak nevezünk. Másrészt szükséges, hogy a kocsisor haladásakor a forgalmi torlódások kialakulását elkerüljük. Ezek akkor jöhetnek létre, ha az elől haladó autó fékez, és erre a követő autó túlzott mértékben reagál. Ilyenkor a követő autó a szükségesnél jobban lelassít, melynek hatására az őt követő autó még jobban, és így tovább, míg végül kialakul a torlódás. Ennek elkerüléséhez szükséges, hogy ha a vezető autó sebessége hirtelen változik, akkor ez a változás a kocsisor autóinak sebességeit nézve lecsengjen. Vagyis ezt matematikailag úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a $\tilde{v}_0(t)$ változásra mint bemenetre a $\tilde{v}_1(t)$ válasz csak kisebb mértékű lehet. Azaz a rendszer erősítése 1 alatt kell legyen, és ezt a teljes frekvenciatartományra előírjuk. Vagyis a rendszernek ezt a fajta, ún. hústabilitását a rendszer frekvenciamenetének elemzésével vizsgálhatjuk. Mivel a frekvenciameneten alapuló vizsgálatok arra épülnek, hogy tetszőleges bemenet felbontható harmonikus komponensekre, a $\tilde{v}_0(t)$ ingadozást is harmonikus függvény alakjában írjuk fel

$$\tilde{v}_0(t) = v_0^{amp} \sin(\omega t), \quad (1.14)$$

ahol v_0^{amp} az ingadozás amplitúdója, ω pedig a körfrekvenciája. A $\tilde{v}_0(t)$ fázisát zérusnak feltételezzük. A fázis a hústabilitás szempontjából közömbös, ugyanis a hústabilitásra nézve csupán a rendszer erősítésének van hatása, fázistolásának nincs. Tehát a gerjesztést egyensúlyi helyzet körül kialakuló szinuszos lengésnek feltételezzük

$$v_0(t) = v^* + v_0^{amp} \sin(\omega t). \quad (1.15)$$

A későbbi fejezetek konkrét példáin a $h^* = 20$ [m], $v^* = 15$ [m/s] egyensúlyi helyzetet feltételezve végezzük a számításokat. A $V(h)$ függvény előírásánál $h_{min} = 5$ [m], $h_{max} = 35$ [m] és $v_{max} = 30$ [m/s] értékeket írunk elő. Ezekkel $V'(h^*) = \max [V'(h)] = \pi/2$ [1/s].

2. fejezet:

Digitális szabályozás

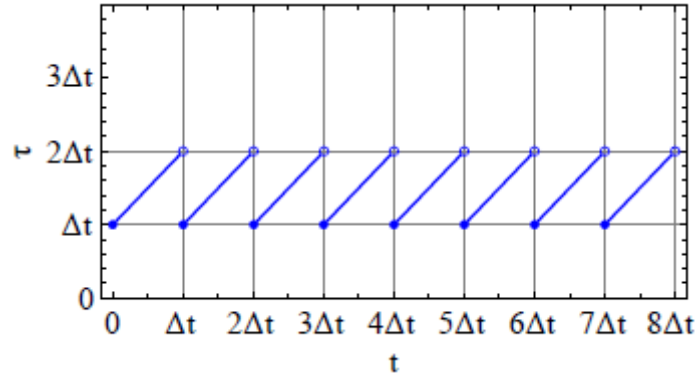
Mindeztáig nem vettük figyelembe, hogy a szabályozás során a sebességek és a követési távolság méréséhez, a mért adatok feldolgozásához és az adatok továbbításához (vagyis a járművek közötti kommunikációhoz) valamekkora idő szükséges. Ezért a mért értékek alapján számított beavatkozás nem az aktuális, hanem az időkésésnyi idővel korábbi rendszerállapothoz fog illeszkedni. Emiatt azonban a rendszer stabilitásának mértéke csökkenhet, rosszul megválasztott szabályozó paraméterek esetén a szabályozás instabillá válhat. Túlzott mértékű időkésés esetén pedig előfordulhat, hogy nem is létezik olyan szabályozó paraméter kombináció, mellyel stabilan lehetne szabályozni a rendszert. Ezért az időkésés hatását a szabályozó tervezése során figyelembe kell venni.

A továbbiakban azt feltételezzük, hogy a $h(t)$, $v_0(t)$ és $v_1(t)$ mennyiségek mérése csak diszkrét időpillanatokban történik, ezen időpillanatok között pedig a mért értékeket nulladrendű tartószerv segítségével állandó értéken tartjuk. Vagyis digitális szabályozó esetét feltételezzük (a kvantálás hatásától eltekintve). Habár az egyes mennyiségek mérése és a járművek közötti kommunikáció különböző mintavételezési frekvenciák mellett történhet, most azt feltételezzük, hogy a jelek szinkronizálva vannak, azaz minden mennyiség esetében az időkésés azonos. Így a szabályozási kört az alábbi egyenletrendszer írja le

$$\dot{\tilde{h}}(t) = \tilde{v}_0(t) - \tilde{v}_1(t), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}}_1(t) &= \alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right) + \beta \left(\tilde{v}_0(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right), \\ t &\in [t_k, t_{k+1}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

ahol $t_k = k\Delta t$ a k . mintavételezési időpont, $k \in \mathbb{N}$, Δt a mintavételezési idő. Vagyis a $t \in [t_k, t_{k+1})$ időintervallumban a t_{k-1} időpillanatban rendelkezésre álló adatokat használjuk fel a beavatkozás kiszámításához. Így a beavatkozás szakaszonként konstans, a rendszer időkésése pedig Δt és $2\Delta t$ között periodikusan változik (lásd 2.1. ábra). A jelenlegi, járművek közötti kommunikációt biztosító eszközöknél a mintavételezési idő tipikus értéke 100 msec [1], így a fejezet konkrét példájánál és ábrájánál $\Delta t = 0.1$ [s]-mal megvalósított mintavételezést feltételezzük.



2.1. ábra: A (2.1)-(2.2) rendszer időkésésének időfüggvénye.

2.1 Diszkrét állapotter modell

A rendszer stabilitásának vizsgálatához készítsük el a rendszer diszkrét állapotter modelljét. Ehhez oldjuk meg a (2.1)-(2.2) differenciálegyenlet rendszert a $\tilde{h}(t_k)$, $\tilde{v}_1(t_k)$ kezdeti feltételekkel. A (2.2) egyenlet jobb oldala konstans, így integrálva az alábbi kifejezést kapjuk

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1(t) &= \tilde{v}_1(t_k) + \int_{t_k}^t \dot{\tilde{v}}_1(\theta) d\theta \\ &= \tilde{v}_1(t_k) + \left[\alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right) + \beta (\tilde{v}_0(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1})) \right] \cdot (t - t_k), \\ &\quad t \in [t_k, t_{k+1}).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Az (1.14) és (2.3) egyenletet a (2.1) egyenletbe helyettesítve és integrálva

$$\begin{aligned}\tilde{h}(t) &= \tilde{h}(t_k) + \int_{t_k}^t \dot{\tilde{h}}(\theta) d\theta \\ &= \tilde{h}(t_k) + \left(-\frac{1}{\omega} v_0^{amp} \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} v_0^{amp} \cos(\omega t_k) \right) - \tilde{v}_1(t_k) \cdot (t - t_k) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right) + \beta (\tilde{v}_0(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1})) \right] \cdot (t - t_k)^2, \\ &\quad t \in [t_k, t_{k+1}).\end{aligned}\tag{2.4}$$

A rendszer diszkrét állapotter modellje a t_k és t_{k+1} időpillanatokban érvényes rendszerállapotok között teremti meg a kapcsolatot. Ezért az állapotter egyenlet meghatározásához vegyük a (2.3)-(2.4) egyenletekben leírt időfüggvények értékét a $t = t_{k+1}$ időpillanatban

$$\begin{aligned}\tilde{h}(t_{k+1}) &= \tilde{h}(t_k) + \left(-\frac{1}{\omega} v_0^{amp} \cos(\omega t_{k+1}) + \frac{1}{\omega} v_0^{amp} \cos(\omega t_k) \right) - \tilde{v}_1(t_k) \Delta t \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right) + \beta \left(\tilde{v}_0(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right) \right] \Delta t^2, \\ t &\in [t_k, t_{k+1}),\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1(t_{k+1}) &= \tilde{v}_1(t_k) \\ &\quad + \left[\alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right) + \beta \left(\tilde{v}_0(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right) \right] \Delta t, \\ t &\in [t_k, t_{k+1}).\end{aligned}\tag{2.6}$$

A későbbi számítások egyszerűsítése végett célszerű a koszinuszos tagokat kiejteni, azaz trigonometrikus azonosságok segítségével szinuszos alakra hozni. Ezt az alábbi átalakítással tehetjük meg

$$\begin{aligned}\cos(\omega(k+1)\Delta t) - \cos(\omega k \Delta t) \\ &= \cos\left(\omega\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) \cos\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) - \sin\left(\omega\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) \sin\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) \\ &\quad - \cos\left(\omega\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) \cos\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) - \sin\left(\omega\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) \sin\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) \\ &= -2\sin\left(\omega\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) \sin\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Így a $\tilde{h}(t_k) = \tilde{h}(k)$, $\tilde{v}_1(t_k) = \tilde{v}_1(k)$ rövid jelöléseket alkalmazva az alábbi differenciaegyenletekhez jutunk

$$\begin{aligned}\tilde{h}(k+1) &= \tilde{h}(k) + \frac{2}{\omega} v_0^{amp} \sin\left(\omega\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) \sin\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) - \tilde{v}_1(k) \Delta t \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(k-1) - \tilde{v}_1(k-1) \right) \right. \\ &\quad \left. + \beta \left(v_0^{amp} \sin(\omega(k-1)\Delta t) - \tilde{v}_1(k-1) \right) \right] \Delta t^2, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1(k+1) &= \tilde{v}_1(k) \\ &\quad + \left[\alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(k-1) - \tilde{v}_1(k-1) \right) \right. \\ &\quad \left. + \beta \left(v_0^{amp} \sin(\omega(k-1)\Delta t) - \tilde{v}_1(k-1) \right) \right] \Delta t, \quad t \in [t_k, t_{k+1}).\end{aligned}\tag{2.9}$$

A differenciaegyenletek segítségével a rendszer (2.10) diszkrét állapotter főegyenlete felírható. A főegyenletet az $y(k) = \tilde{v}_1(k)$ kimenetet feltételezve a (2.11) kimeneti egyenlettel egészíthetjük ki.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 u(k-1) + \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{1}{2}\right),\tag{2.10}$$

$$y(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k),\tag{2.11}$$

ahol $\mathbf{x}(k)$ az állapotvektor, $u(k)$ pedig a bemenet értéke a k . mintavételezési időpillanatban, $\mathbf{A}_1$ a rendszermátrix, $\mathbf{B}_1$ és $\mathbf{B}_2$ a bemeneti vektorok. Az $u\left(k + \frac{1}{2}\right)$ tag csupán matematikai átalakítások eredménye, melyek a későbbi számítások megkönnyítését szolgálják, $\left(k + \frac{1}{2}\right)$. mintavételezési időpontról nem beszélhetünk. Az egyes tagok értékét a (2.12) egyenlet adja meg.

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} \tilde{h}(k) \\ \tilde{v}_1(k) \\ \tilde{h}(k-1) \\ \tilde{v}_1(k-1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t & -\frac{1}{2}\alpha V'(h^*)\Delta t^2 & \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\Delta t^2 \\ 0 & 1 & \alpha V'(h^*)\Delta t & -(\alpha + \beta)\Delta t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\beta\Delta t^2 \\ \beta\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\omega} \sin\left(\omega \frac{1}{2}\Delta t\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0),$$

$$u(k) = v_0^{amp} \sin(\omega k \Delta t). \quad (2.12)$$

2.2 Rendszerstabilitás

A rendszerstabilitás a követő autó stabil mozgását jelenti zérus gerjesztés esetén. Ekkor tehát $u(k) \equiv 0$, azaz a diszkrét rendszer működését az alábbi leképezés írja le

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k). \quad (2.13)$$

A (2.13) egyenlet stabilitását az $\mathbf{A}_1$ leképezési mátrix sajátértékei határozzák meg. A stabilitás feltétele, hogy e sajátértékek, melyeket karakterisztikus multiplikátoroknak is nevezünk, a komplex számsíkon az egység körön belül helyezkedjenek el. Azaz a karakterisztikus multiplikátorok abszolút értéke 1-nél nagyobb nem lehet. Ennek oka a következő. Ha az $\mathbf{A}_1$ mátrixot a sajátvektorainak koordináta rendszerében írjuk fel, diagonális mátrixot kapunk az átlóban a sajátértékekkel. Ekkor pedig a (2.13) leképezés $\mathbf{x}(k)$ méretével egyező darabszámú skalár mértani sorozatra bomlik szét, melyek kvóciensei az $\mathbf{A}_1$ mátrix sajátértékei. Ahhoz pedig, hogy e mértani sorozatok konvergensek legyenek, szükséges, hogy a kvóciensek abszolút értéke ne haladja meg az 1-et. A karakterisztikus multiplikátorok meghatározására az alábbi karakterisztikus egyenlet szolgál

$$\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{A}_1) = 0. \quad (2.14)$$

Az $\mathbf{A}_1$ mátrix (2.12) egyenlet szerinti értékét behelyettesítve

$$\mu \left[\mu^3 - 2\mu^2 + \left(\frac{1}{2} \alpha V'(h^*) \Delta t^2 + (\alpha + \beta) \Delta t + 1 \right) \mu + \left(\frac{1}{2} \alpha V'(h^*) \Delta t^2 - (\alpha + \beta) \Delta t \right) \right] = 0. \quad (2.15)$$

Az egyenletet μ -re megoldva kapjuk meg a karakterisztikus multiplikátorok értékét.

A rendszerstabilitás határát azon esetek jelentik, amikor egy vagy két karakterisztikus multiplikátor pontosan az egységkörre esik, a többi a körön belül helyezkedik el. Így a stabilitásvesztés háromféleképp jöhet létre: egyetlen valós sajátérték az $1 + 0i$ pontban (i az imaginárius egység), egyetlen valós sajátérték a $-1 + 0i$ pontban, illetve komplex konjugált sajátérték pár az egységkörön. Vizsgáljuk meg e három esetet külön-külön. A (2.15) karakterisztikus egyenletbe $\mu = 1$ -et helyettesítve az alábbi megoldást kapjuk

$$\alpha = 0. \quad (2.16)$$

A karakterisztikus egyenletbe $\mu = -1$ helyettesítése pedig az alábbi egyenes egyenletéhez vezet

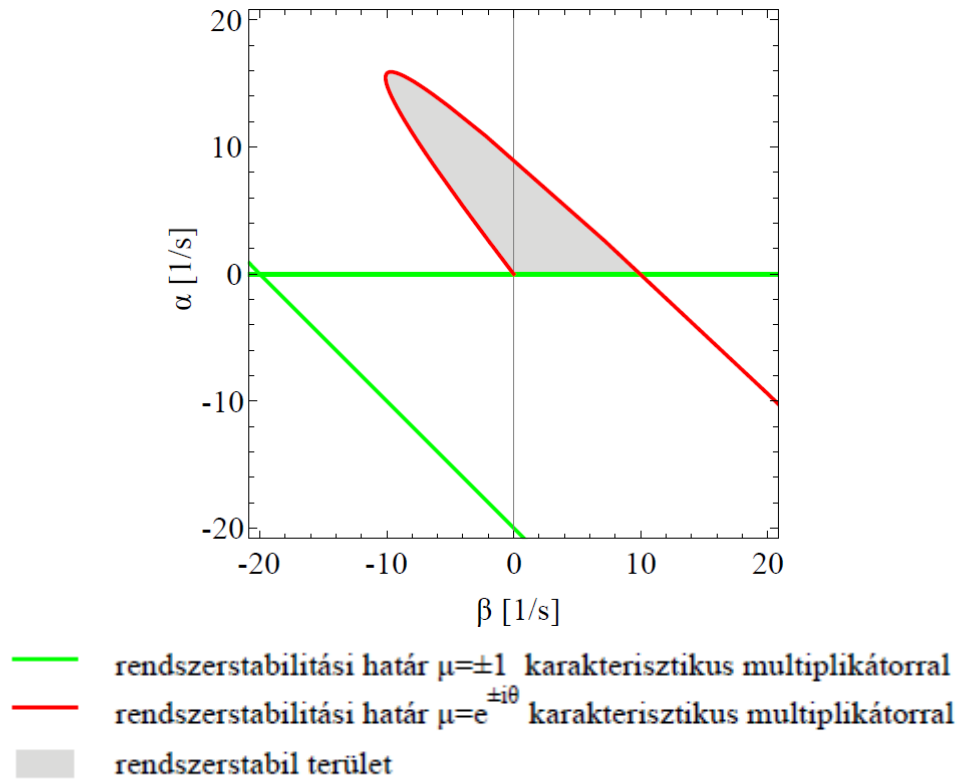
$$\alpha = -\frac{2}{\Delta t} - \beta. \quad (2.17)$$

Komplex konjugált sajátérték pár esetén a karakterisztikus multiplikátorok $\mu = e^{\pm i\theta}$ alakban írhatók fel ($\theta \in (0, \pi)$). Ezt a karakterisztikus egyenletbe helyettesítve, a kapott egyenletet valós és képzetes részekre bontva, pozitív és negatív exponens esetén is az alábbi kifejezéseket kapjuk

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) - 2\cos(2\theta) + \left(\frac{1}{2} \alpha V'(h^*) \Delta t^2 + (\alpha + \beta) \Delta t + 1 \right) \cos\theta \\ + \left(\frac{1}{2} \alpha V'(h^*) \Delta t^2 - (\alpha + \beta) \Delta t \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\sin(3\theta) - 2\sin(2\theta) + \left(\frac{1}{2} \alpha V'(h^*) \Delta t^2 + (\alpha + \beta) \Delta t + 1 \right) \sin\theta = 0. \quad (2.19)$$

A (2.18)-(2.19) egyenleteket α -ra és β -ra szimbolikus algebrai programmal megoldva egy θ -val paraméterezett görbét kapunk. E stabilitási határt átlépve a rendszer öngerjesztett rezgés kialakulása mellett válik instabillá. A kapott $\mu = 1$, $\mu = -1$ és $\mu = e^{\pm i\theta}$ stabilitási határokat a (β, α) paramétersíkon ábrázolhatjuk, erre mutat példát a 2.2. ábra. A stabil terület holléte meghatározható, ha a (β, α) paramétersíkon a stabilitási határgörbék által elválasztott területeken egy-egy pontban az $\mathbf{A}_1$ mátrix sajátértékeit kiszámítjuk.



2.2. ábra: A (2.1)-(2.2) egyenletek rendszerstabilitásra vonatkozó stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.

Itt megjegyezhetjük, hogy a stabilitási határok meghatározhatók más módszerrel is. A stabilitási határok kiszámítása érdekében alkalmazhatjuk a Möbius transzformációt, mely az alábbi összefüggéssel a komplex számsík egység körét a negatív félsíkra képi le

$$\mu = \frac{\eta + 1}{\eta - 1}. \quad (2.20)$$

A transzformációt elvégezve a (2.15) egyenlet ($\mu \neq 0$ feltételezéssel) az alábbi alakra hozható

$$\begin{aligned}
 (\eta + 1)^3 - 2(\eta + 1)^2(\eta - 1) + \left(\frac{1}{2}\alpha V'(h^*)\Delta t^2 + (\alpha + \beta)\Delta t + 1\right)(\eta + 1)(\eta - 1)^2 \\
 + \left(\frac{1}{2}\alpha V'(h^*)\Delta t^2 - (\alpha + \beta)\Delta t\right)(\eta - 1)^3 = 0
 \end{aligned} \quad (2.21)$$

A (2.21) egyenlet gyökeit immár a negatív félsíkon kell keresnünk. Ennek pedig a szükséges és elégséges feltétele a Routh-Hurwitz kritérium segítségével is meghatározható. A $\mu = 1$ megoldásnak az az eset felel meg, amikor az η síkon az egyik gyök tart a $\pm\infty$ -hez. Azaz a stabilitásvesztés során a megoldás tart a $-\infty$ -hez, majd hirtelen megjelenik a $+\infty$ -ben. A $\mu = -1$ -hez tartozó stabilitásvesztés esetében egy valós megoldás halad át az imaginárius tengelyen, azaz a határon $\eta = 0$. Míg a $\mu = e^{\pm i\theta}$ esethez az imaginárius tengelyen elhelyezkedő $\eta = \pm i\vartheta$ komplex konjugált gyökpár tartozik ($\vartheta \in (0, \infty)$). Egyes bonyolultabb

számításoknál, ha a karakterisztikus egyenletbe $\mu = e^{\pm i\theta}$ helyett a (2.20) egyenletet és a $\eta = \pm i\theta$ kifejezést helyettesítjük, a kapott kifejezések egyszerűbbé válhatnak, így ezen alternatív számítási módszer hasznosnak bizonyulhat.

A rendszerstabilitás határait ábrázolva megfigyelhető, hogyan módosul a stabil terület a Δt mintavételezési idő változtatásával. Ha Δt értékét növeljük, a rendszer időkésése is növekszik, és a stabil terület nagysága csökken. A rendszerstabilitás esetén azonban mindig akad valamekkora stabil terület, a stabil régió teljesen nem tűnik el. Ez belátható az alábbi módon. Számítsuk ki a $\mu = e^{\pm i\theta}$ határgörbe érintőjének meredekségét az origóban. Ezt az alábbi határérték adja meg

$$\left. \frac{d\alpha}{d\beta} \right|_{(0,0)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{d\alpha}{d\theta}}{\frac{d\beta}{d\theta}} = -\frac{2}{2 - 3V'(h^*)\Delta t}. \quad (2.22)$$

Látható, hogy véges Δt esetén a határgörbe zérus meredekséggel soha nem indulhat, így mindig lesz valamekkora stabil terület, melyet a $\mu = e^{\pm i\theta}$ határgörbe és az $\alpha = 0$ egyenes közrefog. Mindazonáltal, ha Δt túlságosan nagy, a stabil terület olyan kicsivé zsugorodhat, hogy már nem tudjuk az α és β paramétereket a megfelelően beállítani. A későbbi fejezetekben azonban látni fogjuk, hogy a kritikus mintavételezési időt alapvetően nem a rendszerstabilitás, hanem a hústabilitás határozza meg.

2.3 Hústabilitás

A hústabilitást a $\tilde{v}_0(t)$ gerjesztésre adott $\tilde{v}_1(t)$ válasz amplitúdója határozza meg. Amennyiben ez kisebb, mint $\tilde{v}_0(t)$ amplitúdója, a rendszer stabil. Azaz a hústabilitás feltétele, hogy a rendszer erősítése a teljes frekvenciatartományban 1 alatt legyen. Vagyis a hústabilitás vizsgálatához a rendszer frekvenciamenetét szükséges elemezni. Ehhez vezessük be a $\Gamma(z)$ impulzusátviteli függvényt, melyet a (2.10)-(2.11) egyenletek Z transzformációja segítségével kaphatunk meg (a transzformációnál használt komplex változót z jelöli). A Z transzformált alak

$$z\mathbf{X}(z) = \mathbf{A}_1\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}_1z^{-1}U(z) + \mathbf{B}_2z^{1/2}U(z), \quad (2.23)$$

$$Y(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z), \quad (2.24)$$

ahol $U(z)$ az $u(k)$ bemenet, $\mathbf{X}(z)$ az $\mathbf{x}(k)$ állapotvektor, $Y(z)$ az $y(k)$ kimenet Z transzformáltja. Így az impulzusátviteli függvény

$$\Gamma(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1}(\mathbf{B}_1z^{-1} + \mathbf{B}_2z^{1/2}), \quad (2.25)$$

ahol $\mathbf{I}$ a 4×4 -es egységmátrix. Vegyük észre, hogy megjelenik egy $z^{1/2}$ tényezőt tartalmazó tag, ami a (2.10) egyenlet $\mathbf{B}_2 u \left(k + \frac{1}{2} \right)$ tagjából származik.

A $\Gamma(z)$ függvénybe $z = e^{i\omega\Delta t}$ kifejezést helyettesítve megkaphatjuk a rendszer frekvenciaátviteli függvényét, ami leírja a frekvenciamenetet. A hűrstabilitás vizsgálatánál csak a szabályozási kör erősítésének mértékére, vagyis frekvenciaátviteli függvény abszolút értékére vagyunk kíváncsiak. Vezessük be az alábbi rövid jelölést: $\Gamma(\omega) = |\Gamma(e^{i\omega\Delta t})|$. A $\Gamma(\omega)$ erősítési függvény sajátossága, hogy 1 értékről indul zérus meredekségű érintővel, azaz $\Gamma(0) = 1$ és $\Gamma'(0) = 0$, ahol a $\Gamma'(\omega)$ jelöli a $\Gamma(\omega)$ függvény ω szerinti deriváltját. A $\Gamma(0) = 1$ tulajdonság miatt a rendszer $\omega = 0$ körfrekvencia mellett már eleve a hűrstabilitás határán van. A stabilitás elvesztését így az fogja meghatározni, hogy a $\Gamma(\omega)$ görbe második deriváltja milyen előjelű $\omega = 0$ -ban. Ha $\Gamma''(0) < 0$, a $\Gamma(\omega)$ függvény 0-ban konkáv, így ω növelésével $\Gamma(\omega)$ csökkenni fog. Vagyis $\Gamma''(0) < 0$ adja a hűrstabilitás feltételét. Az ennek megfelelő, $\omega = 0$ hűrstabilitási határt tehát az alábbi egyenlet definiálja

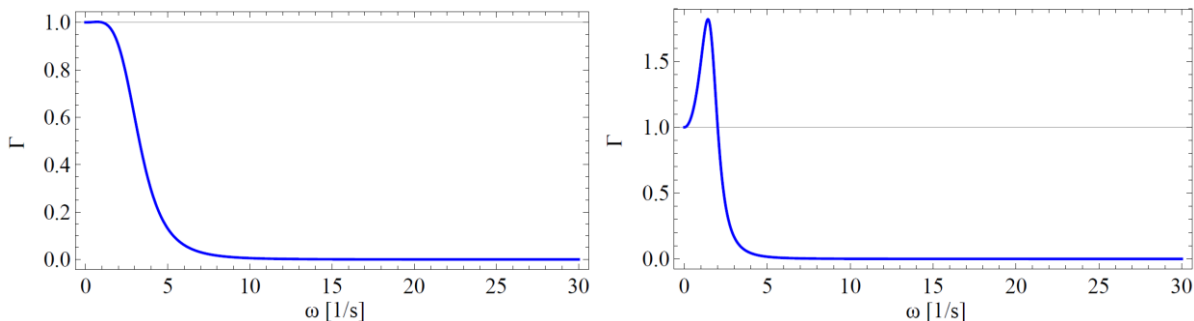
$$\Gamma''(0) = 0. \quad (2.26)$$

A frekvenciamenet jellegét az $\omega = 0$ hűrstabilitási határon és instabil esetben a 2.3. ábra mutatja. Ha a hűrstabilitás $\omega = 0$ -ban teljesül, $\Gamma(\omega)$ értéke 1 alá csökken. Ezért $\omega > 0$ esetén a hűrstabilitás elvesztése úgy történhet, hogy $\Gamma(\omega)$ ismét keresztezi az 1-es értékhez tartozó vízszintes egyenest. A stabilitás határán pedig az egyenest $\Gamma(\omega)$ csupán érinti, azaz az $\omega > 0$ hűrstabilitási határ az alábbi egyenletekkel adható meg

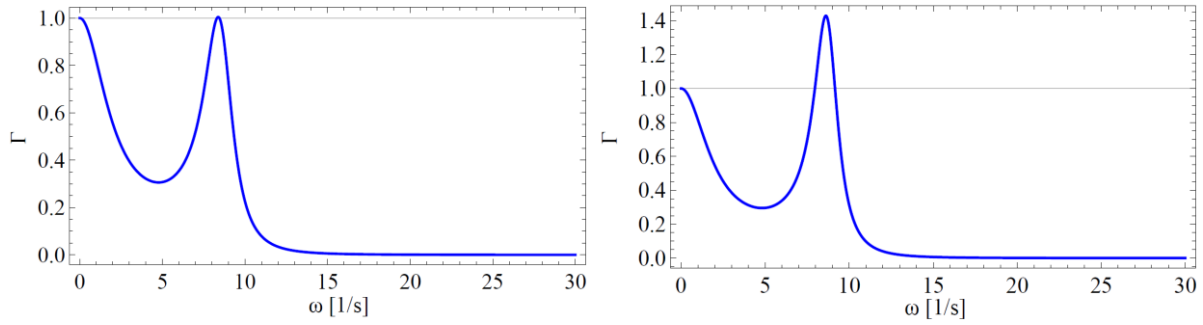
$$\Gamma(\omega) = 1, \quad (2.27)$$

$$\Gamma'(\omega) = 0. \quad (2.28)$$

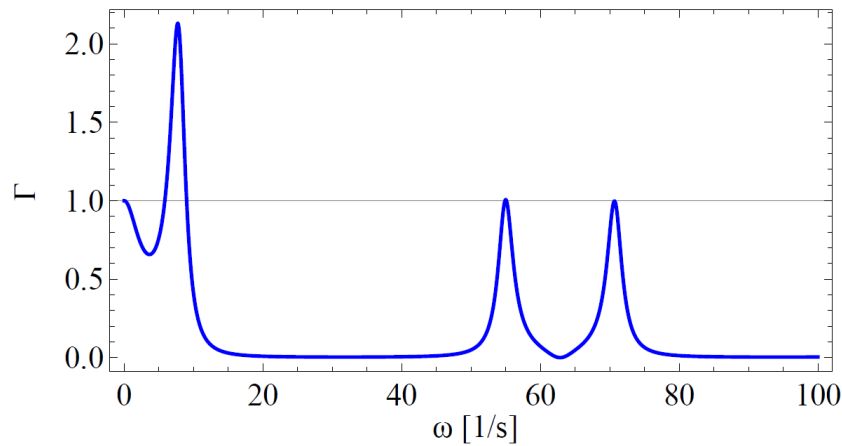
A frekvenciamenet jellegét az $\omega > 0$ hűrstabilitási határon és instabil esetben a 2.4. ábra mutatja.



2.3. ábra: Az erősítés frekvenciafüggvényének jellege a hűrstabilitás $\omega = 0$ határán (bal) és az ehhez tartozó instabil esetben (jobb).



2.4. ábra: Az erősítés frekvenciafüggvényének jellege a hűrstabilitás $\omega > 0$ határán (bal) és az ehhez tartozó instabil esetben (jobb).



2.5. ábra: Az erősítés frekvenciafüggvényének jellege a (2.27)-(2.28) feltételek teljesülése mellett, de a hűrstabilitás szempontjából instabil esetben.

Továbbá szükséges megjegyezni, hogy a (2.27)-(2.28) egyenletek csak szükséges, de nem elégséges feltételt fogalmaznak meg a hűrstabilitási határra nézve. Előfordulhat ugyanis olyan eset, hogy e feltételek teljesülnek, a rendszer mégis instabil, erre mutat példát a 2.5. ábra. Ezért ezen feltételek alkalmazása után ellenőrizni kell, hogy mely esetekben teljesülnek valóban a hűrstabilitás feltételei.

Sokszor $\Gamma(\omega)$ négyzetének kiszámítása egyszerűbb matematikai formulákhoz vezet, ugyanis nem tartalmaz gyökös kifejezéseket. Ezért célszerű a (2.26)-(2.28) feltételeket $\Gamma^2(\omega)$ segítségével átírni. Mivel $\Gamma(\omega) > 0$, $\Gamma(0) = 1$ és $\Gamma'(0) = 0$, az alábbi egyenletekhez jutunk

$$(\Gamma^2)''(0) = 0, \quad (2.29)$$

$$\Gamma^2(\omega) = 1, \quad (2.30)$$

$$(\Gamma^2)'(\omega) = 0. \quad (2.31)$$

A még egyszerűbb matematikai formulák elérése végett, célszerű a törtfüggvényeket is kiküszöbölni. Ennek érdekében bevezethetjük a $Q(\omega) = \text{Num}(\Gamma^2(\omega)) - \text{Den}(\Gamma^2(\omega))$ függvényt, melyben $\text{Num}(\Gamma^2(\omega))$ jelöli $\Gamma^2(\omega)$ számlálóját, $\text{Den}(\Gamma^2(\omega))$ pedig $\Gamma^2(\omega)$

nevezőjét. Így a (2.29)-(2.31) egyenletekkel egyenértékű feltételek $Q(\omega)$ segítségével felírva a következők

$$Q^{(4)}(0) = 0, \quad (2.32)$$

$$Q(\omega) = 0, \quad (2.33)$$

$$Q'(\omega) = 0. \quad (2.34)$$

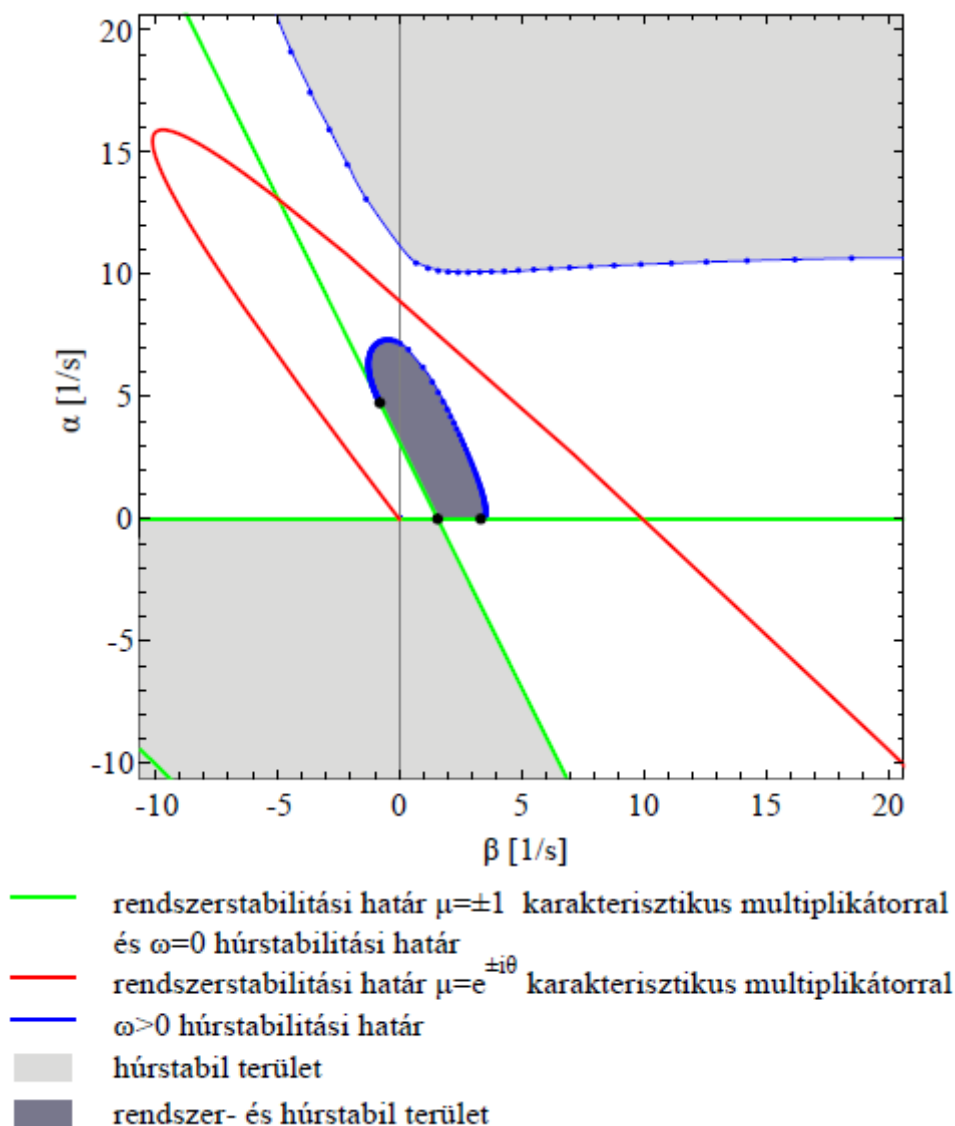
A (2.32) egyenletben azért van szükség ilyen magas rendű deriváltra mert $Q(\omega)$ első három deriváltja $\omega = 0$ esetén mindenképpen zérus. Matematikailag tehát a legpraktikusabb e $Q(\omega)$ függvény segítségével elvégezni a hústabilitásra vonatkozó vizsgálatokat.

A (2.12) és (2.25) egyenletekkel definiált rendszer esetén a (2.32) feltétel az alábbi egyenesek egyenletét adja megoldásul

$$\alpha = 0, \quad (2.35)$$

$$\alpha = \frac{2(V'(h^*) - \beta)}{1 - \frac{1}{6}(V'(h^*))^2 \Delta t^2}, \quad (2.36)$$

melyek a hústabilitás $\omega = 0$ határgörbéi. A (2.33)-(2.34) egyenleteket megoldva pedig a hústabilitás $\omega > 0$ határgörbéihez jutunk. Ezen egyenletek analitikus megoldása még e legegyszerűbb rendszermodell esetén sem számítható hatékonyan, ezért célszerű az egyenleteket diszkrét ω értékekre numerikusan megoldani. Így a hústabilitási görbéknek csak véges számú pontját kapjuk meg, ám a numerikus megoldási módszer rendelkezik egy további fontos előnyös tulajdonsággal. A kapott véges sok pontban ugyanis egyenként ellenőrizhető a frekvenciamenet, és a 2.5. ábrán bemutatott esetek kiszűrhetők. Vagyis azok a görbék, melyek csak szükséges, de nem elégséges feltételt jelentenek a hústabilitásra nézve - azaz nem jelentenek igazi hústabilitási határt - eltüntethetők a stabilitási térképről. Végül a stabilitási határok megjelenítése végett a kiszámított határpontokra görbét illeszthetünk. A kapott stabilitási térkép egyes tartományaiban egy-egy pontban az erősítés frekvenciafüggvényét kirajzolva meghatározhatók a stabil területek. Az előbbi lépések alapján elkészített stabilitási térképre mutat példát a 2.6. ábra. Az ábrán megtalálhatók a 2.2. fejezetben kiszámított és 2.2. ábrán megjelenített rendszerstabilitási határok is. A szabályozó paraméterek beállításánál a paramétersík azon pontjai közül szükséges választani, melyek a rendszer és a hústabilitás stabil területeinek metszetén helyezkednek el.



2.6. ábra: A (2.1)-(2.2) egyenletek rendszer- és hústabilitást is figyelembe vevő stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.

A mintavételezési idő növelésének hústabilitásra gyakorolt hatását is megvizsgálhatjuk. Ha a Δt időlépést növeljük, a rendszerstabilitási határokon belül található hústabil terület zsugorodni kezd. Ezt az is mutatja, hogy az $\omega > 0$ hústabilitási határ 2.6. ábrán feketével jelölt két kiinduló pontja az $\omega = 0$ egyenesek mentén egyre közelebb mozog egymáshoz ahogy Δt növekszik. Amikor Δt elér egy kritikus értéket a kiindulási pontok találkoznak és egybeesnek a harmadik feketével jelölt ponttal, mely az $\omega = 0$ hústabilitási határgörbék metszéspontja. Azaz definiálható egy Δt_{krit} kritikus mintavételezési idő, melynél a stabil terület egyetlen ponttá zsugorodik. A $\Delta t > \Delta t_{\text{krit}}$ esetben pedig már nem található olyan terület, melyen a rendszer- és a hústabilitás egyszerre teljesülne. Ezért fontos a Δt_{krit} ismerete. A Δt_{krit} meghatározásához csak a fent említett három jellegzetes pont koordinátáit

kell kiszámítani, és meg kell vizsgálni, hogy adott $V'(h^*)$ paraméter mellett milyen Δt értéknél esnek egybe a pontok. A $Q(\omega)$ bevezetésénél végzett átalakításoknak köszönhetően a kritikus mintavételezési idő analitikusan kiszámítható. A (2.35)-(2.36) egyenletek alapján az $\omega = 0$ hústabilitási határok metszéspontja a $(V'(h^*), 0)$ pont. A másik két jellegzetes pont pedig az következőképp határozható meg. Ezekben a pontokban egyszerre teljesülnek a 2.3. és 2.4. ábra bal oldalán bemutatott esetek. Vagyis olyan, mintha a 2.4. ábra $\omega > 0$ érintési pontja (ahol $\Gamma'(\omega) = 0$) elmozdulna $\omega = 0$ -ba, ahol pedig $\Gamma''(\omega) = 0$ is teljesül. Ezért végül egy olyan speciális esethez jutunk, hogy $\Gamma(\omega)$ magasabb deriváltja is zérusok $\omega = 0$ esetén. Ez pedig magában foglalja, hogy $Q(\omega)$ esetén is még a negyediknél is magasabb rendű deriváltakat kell vizsgálni. Végül a két keresett pontot a $Q^{(4)}(0) = 0$ feltétel mellett a $Q^{(6)}(0) = 0$, illetve a $Q^{(8)}(0) = 0$ feltételek adják meg. Érdekességként megemlíthetjük, hogy $Q(\omega)$ páratlan számú deriváltjai $\omega = 0$ -ban mindenképp zérus értékűek, ezért kell a páros deriváltakat vizsgálni. A $Q^{(8)}(0) = 0$ feltételnek eleget tevő pont koordinátái $(1/(3\Delta t), 0)$. Ezeket $(V'(h^*), 0)$ koordinátákkal összevetve megkapjuk a kritikus mintavételezési időt. A $\Delta t = \Delta t_{\text{krit}}$ esetet feltételezve pedig leellenőrizhető, hogy a harmadik jellegzetes pont (azaz a $Q^{(6)}(0) = 0$ feltételnek eleget tevő pont) is valóban egybeesik a másik kettővel. A kritikus mintavételezési idő értéke tehát

$$\Delta t_{\text{krit}} = \frac{1}{3V'(h^*)}. \quad (2.37)$$

A szokásos $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] esetben $\Delta t_{\text{krit}} = 212$ [ms], vagyis a 100 [ms]-os mintavételezési idő még kellően kicsinek bizonyul (lásd 2.6. ábra).

Referenciaként célszerű megvizsgálni a diszkrét szabályozási körnek megfeleltethető folytonos rendszer kritikus időkésését. A (2.1)-(2.2) diszkrét rendszerhez tartozó folytonos rendszer

$$\ddot{h}(t) = \tilde{v}_0(t) - \tilde{v}_1(t), \quad (2.38)$$

$$\dot{\tilde{v}}_1(t) = \alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(t - \tau) - \tilde{v}_1(t - \tau) \right) + \beta \left(\tilde{v}_0(t - \tau) - \tilde{v}_1(t - \tau) \right), \quad (2.39)$$

ahol τ a folytonos rendszer időkésése. A [3] cikkben már e rendszer kritikus időkésését meghatározták, az eredmény

$$\tau_{\text{krit}} = \frac{1}{2V'(h^*)}. \quad (2.40)$$

Vagyis a diszkrét rendszer kritikus mintavételezési ideje 2/3-szorosa a folytonos rendszer kritikus időkésésének. Már említettük, hogy a mintavételes rendszer időkésése Δt és $2\Delta t$

között periodikusan változik. Így az átlagos időkésés $\bar{\tau} = 3/2 \Delta t$, melynek kritikus értéke a (2.37) egyenlet alapján

$$\bar{\tau}_{\text{krit}} = \frac{3}{2} \Delta t_{\text{krit}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3V'(h^*)} = \frac{1}{2V'(h^*)} = \tau_{\text{krit}}, \quad (2.41)$$

ami azt jelenti, hogy a kritikus időkésés szempontjából a folytonos és a diszkrét rendszer egymásnak tökéletesen megfeleltethető. A mintavételes esetben persze a rendszer- és hűrstabilitás határai kis mértékben eltérnek a [3] cikkben bemutatott folytonos rendszerétől, de a kritikus esetben, ugyanazon átlagos időkésés mellett ugyanúgy egyetlen ponttá zsugorodik a stabil terület.

3. fejezet:

A járművek közötti kommunikáció hibáinak hatása

A kocsisor tagjai közötti kommunikáció során előfordulhat, hogy hibák lépnek fel, és az elküldött adat csomagok késve vagy egyáltalán nem érkeznek célba. Így a szabályozás során a beavatkozás meghatározásakor kénytelenek vagyunk a legutóbb megérkezett adatokra hagyatkozni, és azokat mindaddig felhasználni, amíg új adat nem érkezik. Emiatt azonban a rendszer időkésése növekszik. Az időkésés átlagos értéke függ a csomagkiesés gyakoriságától, illetve a csomagok késésének mértékétől. A rendszer időkésésének növekedésével egyúttal a stabilitás is csökken. Ezért a csomagkiesés, illetve csomagkésés a rendszer stabilitásának szempontjából jelentős hatással bír. E fejezet során a fent említett kommunikációs hibák rendszer- és hűrstabilitásra gyakorolt hatását vizsgáljuk meg.

3.1 Csomagkiesés vizsgálata determinisztikus esetben

A kommunikációs hibák hatását különböző csomagkiesés előfordulási gyakoriságok mellett megvizsgálhatjuk. Először néhány egyszerű esetet mutatunk be, amikor a csomagkiesés előre meghatározott módon, időben periodikusan ismétlődik. Azaz a rendszer időkésésének változását determinisztikus folyamatnak feltételezzük. Ám megjegyezhetjük, hogy a valóság ennél sokkal bonyolultabb, a csomagkiesés nem determinisztikus, hanem időben véletlenszerűen következik be. Az egyszerűbb determinisztikus eseteket ismerve azonban becslést lehet adni arra, milyen mértékű kommunikációs zavarok azok, amelyek még a stabilitást nem veszélyeztetik.

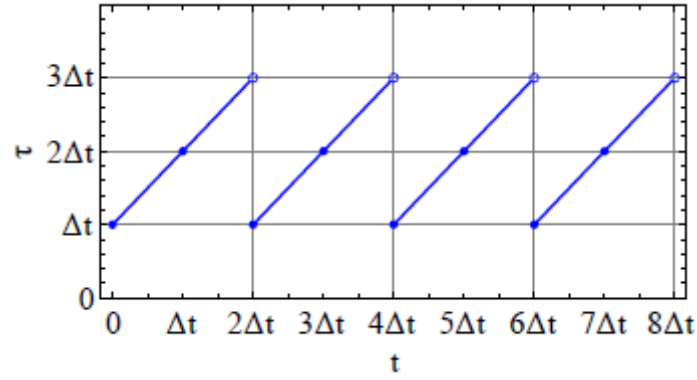
3.1.1 Minden második csomag elvesztése

Tekintsük először azt az esetet, amikor minden második adatcsomag, melyet a kommunikáció során elküldenek, nem éri el a megadott célt. Így a beérkező adatcsomagokat két időlépésen keresztül használjuk fel a beavatkozás meghatározásánál. Vagyis a rendszer működését az alábbi egyenletek írják le.

$$\dot{\tilde{h}}(t) = \tilde{v}_0(t) - \tilde{v}_1(t), \quad (3.1)$$

$$\dot{\tilde{v}}_1(t) = \alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right) + \beta \left(\tilde{v}_0(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right), \quad t \in [t_k, t_{k+2}). \quad (3.2)$$

Ebben az esetben az időkésés Δt és $3\Delta t$ között változik periodikusan (lásd 3.1. ábra). A változás periódusa, azaz az ún. főperiódus $T = 2\Delta t$. Érdeemes megjegyezni, hogy ez az eset nem ekvivalens azzal az esettel, amikor nincs csomagkiesés, de kétszeres mintavételezési időt alkalmazunk. Ekkor ugyanis az időkésés $2\Delta t$ és $4\Delta t$ között változik.



3.1. ábra: A (3.1)-(3.2) rendszer időkésésének időfüggvénye.

Periodikusan változó időkéséssel bíró rendszerek stabilitásának vizsgálatakor mindig a teljes főperiódusra érvényes leképezés stabilitását kell meghatározni [4]. Azaz jelen esetben már nem a k . és $(k + 1)$. mintavételezési időpontok között kell felírni a diszkrét leképezést, hanem a k . és $(k + 2)$. időlépések között. Ez megtehető úgy, hogy egymás után alkalmazunk két leképezést: először azt, ami t_k -ból t_{k+1} -be visz, majd pedig azt, amely t_{k+1} -ből t_{k+2} -be. Ennek előnye az, hogy az első leképezés egy olyan rendszert ír le, melynek az időkésése Δt és $2\Delta t$ között változik, ezt pedig már az előző fejezetben megvizsgáltuk. E leképezést tehát a következő egyenlet adja meg.

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 u(k - 1) + \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad (3.3)$$

ahol az egyes mennyiségek értékét a (2.12) egyenlet definiálja. Itt $\mathbf{x}(k)$ 4 elemű vektor, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$ és $\mathbf{B}_2$ 4×4 -es mátrixok. Azonban a (3.1)-(3.2) egyenletekhez tartozó leképezésnél maximális időkésés $3\Delta t$, így ezt a leképezést - ahogy később is látni fogjuk - 6 elemű állapotvektor és 6×6 -os mátrixok segítségével írhatjuk le. Ezért bővítsük a (2.12) egyenletben leírt mennyiségek méretét a következő módon

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} \tilde{h}(k) \\ \tilde{v}_1(k) \\ \tilde{h}(k-1) \\ \tilde{v}_1(k-1) \\ \tilde{h}(k-2) \\ \tilde{v}_1(k-2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\beta\Delta t^2 \\ \beta\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\omega} \sin\left(\omega \frac{1}{2}\Delta t\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t & -\frac{1}{2}\alpha V'(h^*)\Delta t^2 & \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\Delta t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha V'(h^*)\Delta t & -(\alpha + \beta)\Delta t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$u(k) = v_0^{amp} \sin(\omega k \Delta t). \quad (3.4)$$

A t_{k+1} -ből t_{k+2} -be történő leképezés egy $2\Delta t$ és $3\Delta t$ között periodikusan változó időközű rendszer működését írja le. E leképezés a következő módszerrel határozható meg. Oldjuk meg a (3.1)-(3.2) egyenleteket a $\tilde{h}(t_{k+1})$, $\tilde{v}_1(t_{k+1})$ kezdeti feltételekkel, és vegyük a megoldásokat a $t = t_{k+2}$ időpillanatban. A korábban is alkalmazott rövid jelölésekkel az alábbi egyenletekhez jutunk

$$\begin{aligned} \tilde{h}(k+2) = & \tilde{h}(k+1) - \frac{1}{\omega} v_0^{amp} \cos(\omega(k+2)\Delta t) + \frac{1}{\omega} v_0^{amp} \cos(\omega(k+1)\Delta t) \\ & - \tilde{v}_1(k+1)\Delta t - \frac{1}{2} \left[\alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(k-1) - \tilde{v}_1(k-1) \right) \right. \\ & \left. + \beta \left(v_0^{amp} \sin(\omega(k-1)\Delta t) - \tilde{v}_1(k-1) \right) \right] \Delta t^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(k+2) = & \tilde{v}_1(k+1) \\ & + \left[\alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(k-1) - \tilde{v}_1(k-1) \right) \right. \\ & \left. + \beta \left(v_0^{amp} \sin(\omega(k-1)\Delta t) - \tilde{v}_1(k-1) \right) \right] \Delta t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Célszerű ismét a koszinuszos tagokat átalakítani, melyet a következőképp tehetünk meg

$$\begin{aligned} & \cos(\omega(k+2)\Delta t) - \cos(\omega(k+1)\Delta t) \\ = & \cos\left(\omega\left(k+\frac{3}{2}\right)\Delta t\right) \cos\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) - \sin\left(\omega\left(k+\frac{3}{2}\right)\Delta t\right) \sin\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) \\ - & \cos\left(\omega\left(k+\frac{3}{2}\right)\Delta t\right) \cos\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) - \sin\left(\omega\left(k+\frac{3}{2}\right)\Delta t\right) \sin\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) \\ = & -2\sin\left(\omega\left(k+\frac{3}{2}\right)\Delta t\right) \sin\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ezt a (3.5) egyenletbe helyettesítve végül az alábbi diszkrét állapotter modellt kapjuk a $2\Delta t$ és $3\Delta t$ között változó időközű rendszer esetére

$$\mathbf{x}(k+2) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{B}_1 u(k-1) + \mathbf{B}_2 u\left(k+\frac{3}{2}\right), \quad (3.8)$$

ahol az $\mathbf{x}(k)$, $u(k)$, $\mathbf{B}_1$ és $\mathbf{B}_2$ mennyiségeket a (3.4) egyenlet definiálja, valamint

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \alpha V'(h^*) \Delta t^2 & \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \Delta t^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha V'(h^*) \Delta t & -(\alpha + \beta) \Delta t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Látható, hogy az $\mathbf{A}_2$ mátrix hasonlóan épül fel, mint az $\mathbf{A}_1$, ám a beavatkozáshoz tartozó, szabályozó paramétereket tartalmazó tagok átugranak másik oszlopba. Ez mutatja azt, hogy a beavatkozás számításához egy időlépéssel korábbi adatot szükséges felhasználni a

csomagkiesés miatt. Ugyanakkor az időkésés növekedése során, azaz az átugrás miatt növekszik a mátrix mérete. Ezért volt szükséges az $\mathbf{A}_1$ mátrixot is 6×6 -os alakra hozni. A teljes leképezésnél a mátrixok méretét az határozza meg, hogy a főperiódus alatt mennyi az időkésés maximális értéke.

A (3.3) és (3.8) egyenleteket összevetve végül megkapjuk a Δt és $3\Delta t$ között periodikusan változó időkésésű rendszer állapotter főegyenletét, melyet ismét az $y(k) = \tilde{v}_1(k)$ kimeneti egyenlettel egészíthetünk ki. Azaz

$$\mathbf{x}(k+2) = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1) u(k-1) + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{1}{2}\right) + \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{3}{2}\right), \quad (3.10)$$

$$y(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k), \quad (3.11)$$

ahol

$$\mathbf{C} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0). \quad (3.12)$$

A rendszert leíró diszkrét leképezést ismerve a rendszer- és húrstabilitás vizsgálata a 2.2.-2.3. fejezetekben ismertett módszerekkel elvégezhető. A (3.10) egyenletbe $u(k) \equiv 0$ bemenetet helyettesítve végül az alábbi karakterisztikus egyenlethez jutunk

$$\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) = 0. \quad (3.13)$$

A rendszerstabilitás határait a karakterisztikus egyenletbe $\mu = 1$, $\mu = -1$ és $\mu = e^{\pm i\theta}$ értékeket helyettesítve kaphatjuk meg. A $\mu = 1$ stabilitási határ

$$\alpha = 0. \quad (3.14)$$

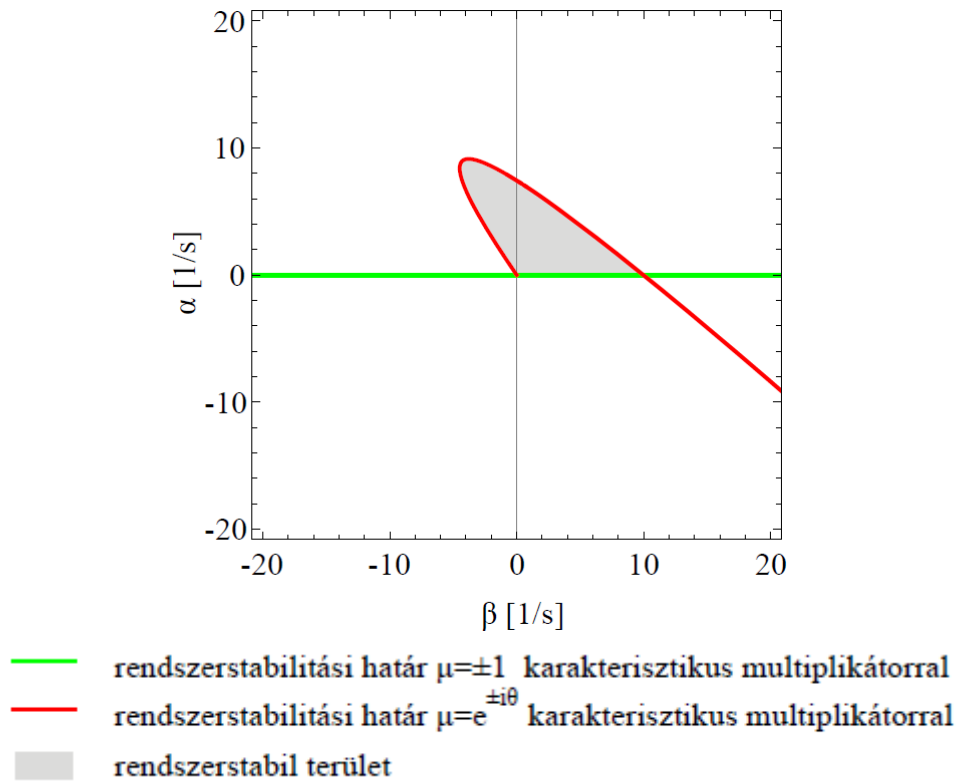
A $\mu = -1$ rendszerstabilitási határ

$$\alpha = -\frac{2}{V'(h^*)\Delta t^2}. \quad (3.15)$$

A $\mu = e^{\pm i\theta}$ esetben a karakterisztikus egyenletet valós és képzetes részekre bontva egy θ -val paraméterezett görbéhez jutunk. A rendszerstabilitás határai és a stabil terület megfigyelhetők a 3.2. ábrán. A stabil terület holléte az $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$ mátrix sajátértékeinek a paramétersík diszkrét pontjaiban való kiszámításával határozható meg. A $\mu = e^{\pm i\theta}$ határgörbe origóban számított meredeksége

$$\left. \frac{d\alpha}{d\beta} \right|_{(0,0)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{d\alpha}{d\theta}}{\frac{d\beta}{d\theta}} = -\frac{2}{2 - 4V'(h^*)\Delta t}, \quad (3.16)$$

mely véges Δt esetén soha nem lehet zérus, így Δt növelésével a stabil terület teljesen soha nem fog eltűnni. Vagyis kritikus mintavételezési időről pusztán a rendszerstabilitást tekintve most sem beszélhetünk.



3.2. ábra: A (3.1)-(3.2) egyenletek rendszerstabilitásra vonatkozó stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.

A hústabilitás vizsgálatához a (3.10)-(3.11) diszkrét állapotter egyenletek Z transzformációja szükséges. A transzformációt elvégezve az alábbi impulzusátviteli függvényhez jutunk

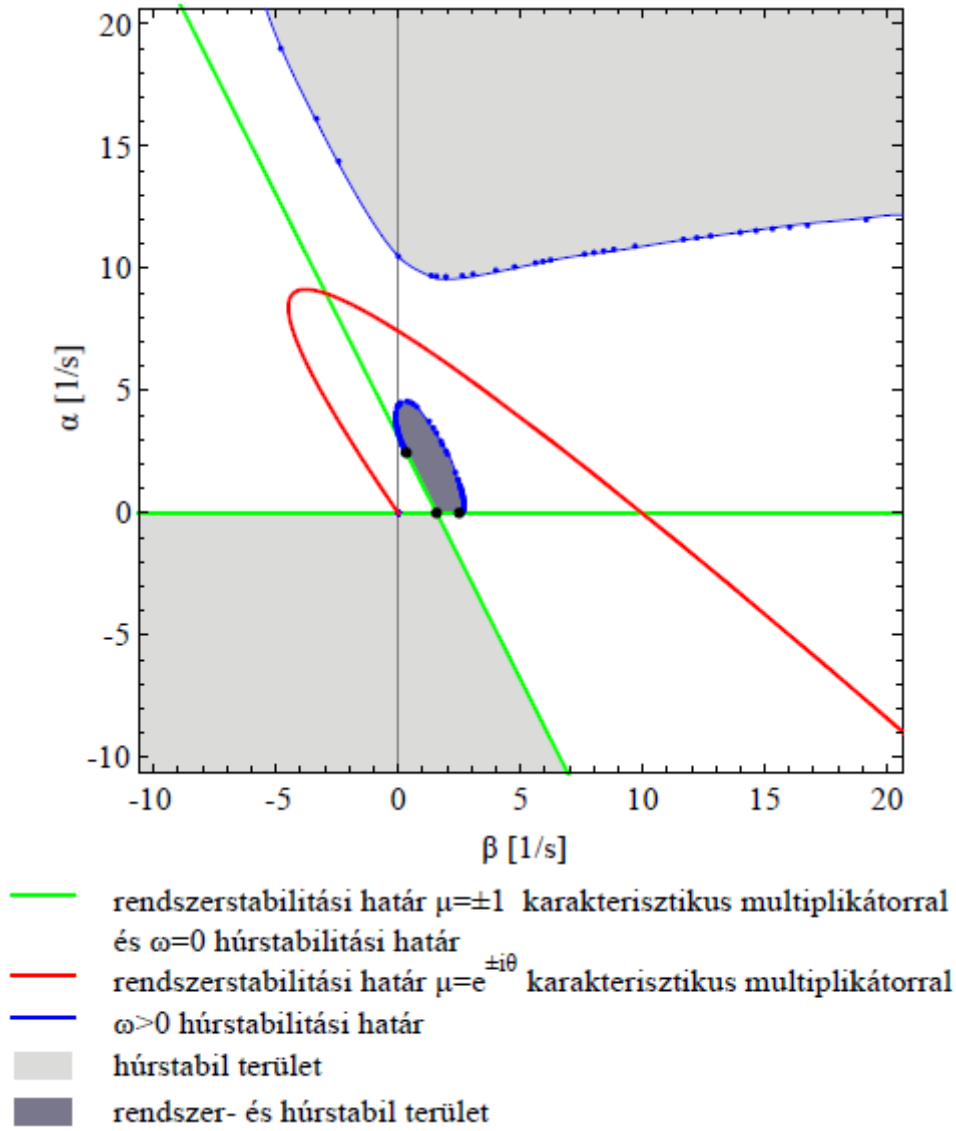
$$\Gamma(z) = \mathbf{C}(z^2\mathbf{I} - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{-1} \left((\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1)z^{-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2z^{1/2} + \mathbf{B}_2z^{3/2} \right), \quad (3.17)$$

ahol $\mathbf{I}$ a 6×6 -os egységmátrix. Az impulzusátviteli függvénybe $z = e^{i\omega\Delta t}$ kifejezést helyettesítve, majd a függvény abszolút értékét képezve megkapjuk a $\Gamma(\omega)$ erősítési függvényt. Ebből a korábban is bemutatott átalakításokat elvégezve kiszámíthatjuk a $Q(\omega)$ függvényt, melynek segítségével a hústabilitás határai a (2.32)-(2.34) egyenletek szerint meghatározhatók. Az $\omega = 0$ hústabilitási határok

$$\alpha = 0, \quad (3.18)$$

$$\alpha = \frac{2(V'(h^*) - \beta)}{1 + \frac{1}{3}(V'(h^*))^2 \Delta t^2}. \quad (3.19)$$

Az $\omega > 0$ hústabilitási határokat ismét diszkrét ω értékekre numerikusan határozzuk meg és pontról pontra ellenőrizzük. A kapott hústabilitási határok a rendszerstabilitás határaival együtt a 3.3. ábrán láthatók. A hústabil területek holléte ellenőrizhető, ha a paramétersík különböző régióinak egy-egy pontjában a $\Gamma(\omega)$ lefutását kirajzoljuk.



3.3. ábra: A (3.1)-(3.2) egyenletek rendszer- és húrstabilitást is figyelembe vevő stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.

Az $\omega > 0$ húrstabilitási határgörbék kiindulópontjai alapján a kritikus mintavételezési idő meghatározható. E pontokat ismét a $Q^{(6)}(0) = 0$, illetve a $Q^{(8)}(0) = 0$ feltételek adják meg. A kapott két pont és a (3.18)-(3.19) egyenesek metszéspontja $\Delta t = \Delta t_{\text{krit}}$ esetén egybeesik, azaz ekkor a stabil terület megszűnik. A három pont egybeesése az alábbi kritikus mintavételezési idő mellett következik be

$$\Delta t_{\text{krit}} = \frac{1}{4V'(h^*)}. \quad (3.20)$$

A $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] esetben $\Delta t_{\text{krit}} = 159$ [ms], vagyis a 100 [ms]-os mintavételezési idő még akkor is elegendően kicsi, ha a kommunikáció során minden második elküldött

adatsomag elvész. Mivel a rendszer időkésése Δt és $3\Delta t$ között periodikusan változik, az átlagos időkésés $\bar{\tau} = 2\Delta t$, melynek a (3.20) egyenlet szerinti kritikus értéke

$$\bar{\tau}_{\text{krit}} = 2\Delta t_{\text{krit}} = \frac{1}{2V'(h^*)} = \tau_{\text{krit}}. \quad (3.21)$$

Azaz ismét arra az eredményre jutottunk, hogy a diszkrét rendszer átlagos időkésésének kritikus értéke pontosan megegyezik a megfelelő folytonos rendszer kritikus időkésésének értékével.

3.1.2 Minden harmadik csomag elvesztése

Abban az esetben, amikor a kommunikáció során minden harmadik elküldött adatsomag elvész, a rendszer működését a következő egyenletek írják le

$$\dot{\tilde{h}}(t) = \tilde{v}_0(t) - \tilde{v}_1(t), \quad (3.22)$$

$$\dot{\tilde{v}}_1(t) = \alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right) + \beta \left(\tilde{v}_0(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right), \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

$$\dot{\tilde{v}}_1(t) = \alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(t_k) - \tilde{v}_1(t_k) \right) + \beta \left(\tilde{v}_0(t_k) - \tilde{v}_1(t_k) \right), \quad t \in [t_{k+1}, t_{k+3}). \quad (3.23)$$

Tehát a rendszer időkésése a következőképp alakul. Az első csomag megérkezése után az időkésés Δt és $2\Delta t$ között változik. A második csomag érkezésével az időkésés lecsökken és újra Δt -ről kezd el növekedni $2\Delta t$ -ig. Majd a harmadik csomag kiesésével az időkésés tovább növekszik, $2\Delta t$ -ről $3\Delta t$ -re (ld. 3.4. ábra). Azaz a főperiódus $T = 3\Delta t$, a rendszert leíró diszkrét leképezés pedig három, korábban már ismerttetett leképezés egymás utáni alkalmazására bontható fel. Egymás után kétszer kell felírni a Δt és $2\Delta t$ között változó időkésésű rendszer (3.3) egyenletét, majd a $2\Delta t$ és $3\Delta t$ között változó időkésésű rendszert leíró (3.8) egyenlet következik. Azaz a (3.22)-(3.23) rendszer a mintavételezési időpontokban az alábbi egyenletekkel jellemezhető

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 u(k-1) + \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad (3.24)$$

$$\mathbf{x}(k+2) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{B}_1 u(k) + \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{3}{2}\right), \quad (3.25)$$

$$\mathbf{x}(k+3) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(k+2) + \mathbf{B}_1 u(k) + \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{5}{2}\right), \quad (3.26)$$

ahol az egyenletekben szereplő mennyiségeket a (3.4) és (3.9) egyenletek definiálják. A rendszer maximális időkésése $3\Delta t$, ezért a rendszert ismét 6 elemű vektorok és 6×6 -os mátrixok segítségével jellemezhetjük. A három leképezés eltérő sorrendben való felírása a rendszer stabilitásának szempontjából változást nem jelent, a (3.24)-(3.26) egyenleteket más,

tetszőleges sorrendben is felírhattuk volna. A (3.24)-(3.25) egyenleteket a (3.26) egyenletbe helyettesítve az állapottér főegyenlet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+3) = & \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 u(k-1) + (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1) u(k) \\ & + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{1}{2}\right) + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{3}{2}\right) + \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{5}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

A főegyenlet a (3.11) kimeneti egyenlettel egészül ki.

A rendszerstabilitás vizsgálatához szükséges karakterisztikus egyenlet a (3.27) egyenlet alapján

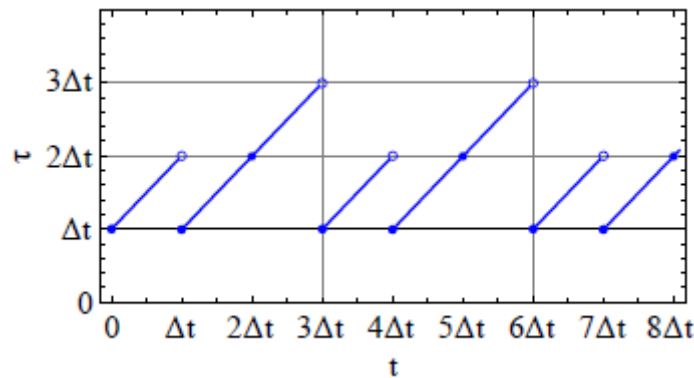
$$\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1) = 0. \quad (3.28)$$

A rendszerstabilitási határok meghatározásakor a karakterisztikus egyenletbe $\mu = 1$ értékeket helyettesítve két megoldást kapunk, ezek

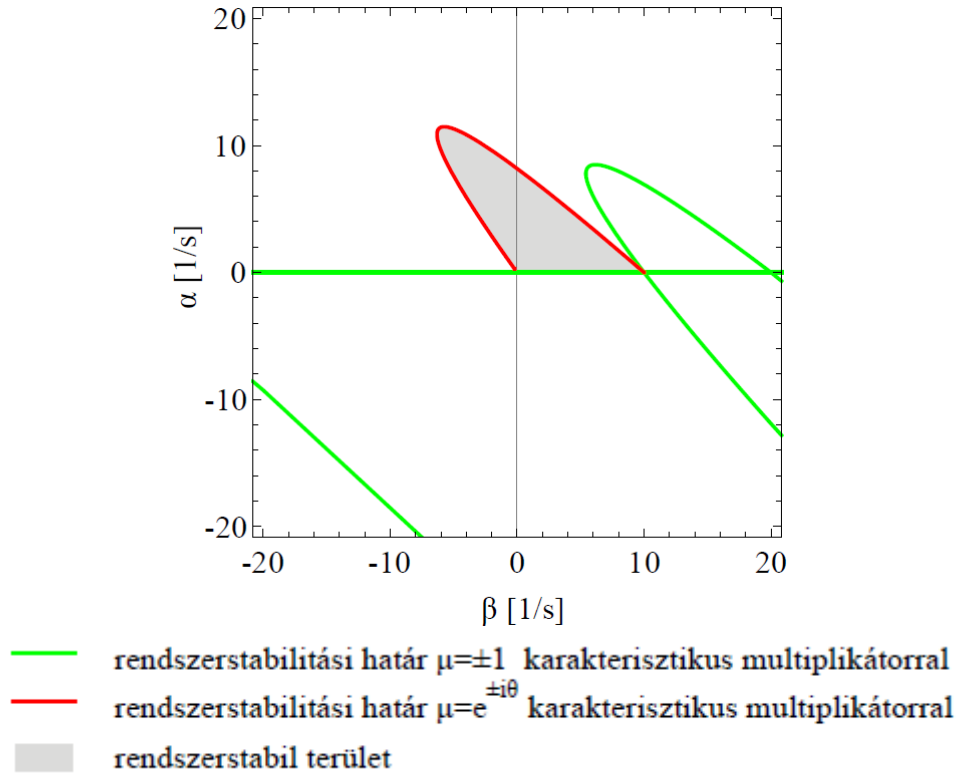
$$\alpha = 0, \quad (3.29)$$

$$\alpha = -\frac{3 + \beta \Delta t}{\Delta t \left(1 + \frac{1}{2} V'(h^*) \Delta t\right)}, \quad (3.30)$$

melyek egyenes határgörbékét jelentenek. A $\mu = -1$ rendszerstabilitási határ azonban már nem egyenes, hanem ellipszis határgörbét kapunk. A $\mu = e^{\pm i\theta}$ határgörbe pedig a (2.20) Möbius transzformációval, $\eta = \pm i\theta$ helyettesítéssel és a kapott egyenlet valós és képzetes részekre bontásával határozható meg. A stabilitási határokat és a stabil területet a 3.5. ábra mutatja. A stabil területet az $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1$ mátrix sajátértékeinek egy-egy pontban való kiszámításával kereshetjük meg.



3.4. ábra: A (3.22)-(3.23) rendszer időkéésésének időfüggvénye.



3.5. ábra: A (3.22)-(3.23) egyenletek rendszerstabilitásra vonatkozó stabilitási térképe

$V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.

A hústabilitás vizsgálatához szükséges, a (3.27) egyenlet Z transzformációjával kapott impulzusátviteli függvény

$$\begin{aligned} \Gamma(z) = & \mathbf{C}(z^3 \mathbf{I} - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1)^{-1} (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 z^{-1} + (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1) + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2 z^{1/2} \\ & + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 z^{3/2} + \mathbf{B}_2 z^{5/2}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

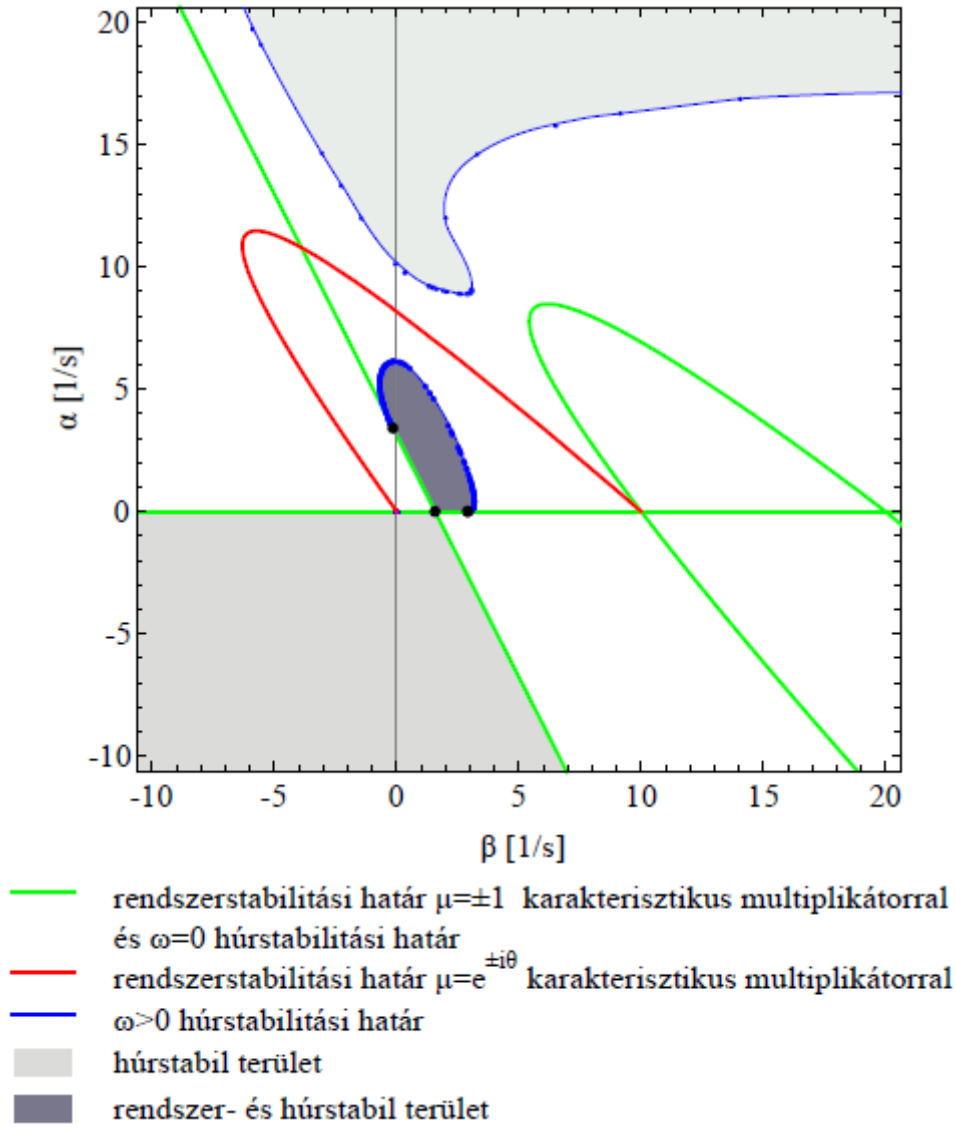
A $Q(\omega)$ függvényt kiszámítva és a (2.34) egyenletet felírva az $\omega = 0$ hústabilitási határok

$$\alpha = 0, \quad (3.32)$$

$$\alpha = -\frac{3 + \beta \Delta t}{\Delta t \left(1 + \frac{1}{2} V'(h^*) \Delta t\right)}, \quad (3.33)$$

$$\alpha = \frac{2(V'(h^*) - \beta)}{1 + \frac{1}{2} (V'(h^*))^2 \Delta t^2}. \quad (3.34)$$

Az $\omega > 0$ hústabilitási határokat pedig a (2.32)-(2.33) egyenletek alapján ismét diszkrét ω értékekre határozzuk meg és minden pontban ellenőrizzük. A kapott stabilitási térképet a rendszerstabilitás határgörbéivel a 3.6. ábra mutatja, melyen a hústabil területeket a $\Gamma(\omega)$ görbe kirajzolása alapján kerestük meg.



3.6. ábra: A (3.22)-(3.23) egyenletek rendszer- és húrstabilitást is figyelembe vevő stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.

A kritikus időkésés a stabilitási térkép három jellegzetes pontjának egybeesését vizsgálva ismét meghatározható. Pontokat a (3.32) és (3.34), a $Q^{(6)}(0) = 0$, illetve a $Q^{(8)}(0) = 0$ feltételek határozzák meg. Ez alapján kritikus mintavételezési idő értéke

$$\Delta t_{\text{krit}} = \frac{0.2903}{V'(h^*)}, \quad (3.35)$$

amely a $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] esetben $\Delta t_{\text{krit}} = 185$ [ms]. A rendszer átlagos időkésése a 3.4. ábrán bemutatott időfüggvény esetén $\bar{\tau} = 11/6 \Delta t$. A (3.35) egyenlet alapján az átlagos időkésés kritikus értéke

$$\bar{\tau}_{\text{krit}} = \frac{11}{6} \Delta t_{\text{krit}} = \frac{0.5322}{V'(h^*)} = 1.064 \tau_{\text{krit}}. \quad (3.36)$$

Azaz ebben az esetben már nem egyezik a folytonos és azonos átlagos időkéssel rendelkező diszkrét rendszer kritikus időkése. Az eltérés azonban viszonylag kicsiny, csupán 6%.

3.1.3 Minden negyedik csomag elvesztése

Végül vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a kommunikáció során minden negyedik elküldött adatcsomag nem éri el a célt. Ekkor a rendszer működését a következő egyenletek írják le

$$\check{h}(t) = \check{v}_0(t) - \check{v}_1(t), \quad (3.37)$$

$$\check{v}_1(t) = \alpha \left(V'(h^*) \check{h}(t_{k-1}) - \check{v}_1(t_{k-1}) \right) + \beta \left(\check{v}_0(t_{k-1}) - \check{v}_1(t_{k-1}) \right), \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

$$\check{v}_1(t) = \alpha \left(V'(h^*) \check{h}(t_k) - \check{v}_1(t_k) \right) + \beta \left(\check{v}_0(t_k) - \check{v}_1(t_k) \right), \quad t \in [t_{k+1}, t_{k+2}),$$

$$\check{v}_1(t) = \alpha \left(V'(h^*) \check{h}(t_{k+1}) - \check{v}_1(t_{k+1}) \right) + \beta \left(\check{v}_0(t_{k+1}) - \check{v}_1(t_{k+1}) \right), \quad t \in [t_{k+2}, t_{k+4}). \quad (3.38)$$

A rendszer főperiódusa $T = 4\Delta t$. Az időkése egy periódus alatt háromszor növekszik Δt -ről $2\Delta t$ -re, majd a periódus végén tovább növekszik $2\Delta t$ -ről $3\Delta t$ -re (ld. 3.7. ábra). Vagyis egymás után háromszor kell alkalmazni a (3.3) majd egyszer a (3.8) egyenletnek megfelelő leképezést. Mivel az időkése maximális értéke még mindig csak $3\Delta t$, továbbra is 6×6 -os mátrixokkal dolgozhatunk. Tehát a stabilitásvizsgálathoz szükséges leképezések

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 u(k-1) + \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad (3.39)$$

$$\mathbf{x}(k+2) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{B}_1 u(k) + \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{3}{2}\right), \quad (3.40)$$

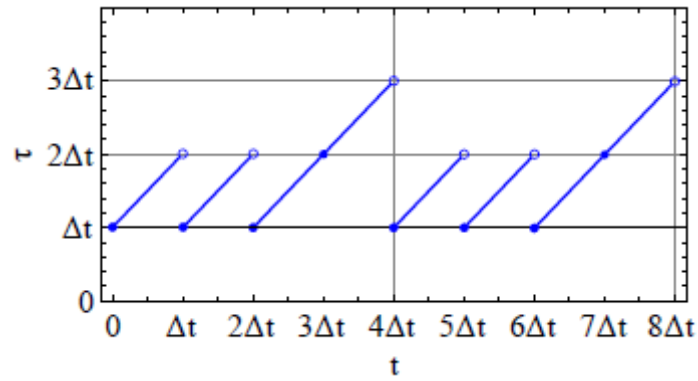
$$\mathbf{x}(k+3) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k+2) + \mathbf{B}_1 u(k+1) + \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{5}{2}\right), \quad (3.41)$$

$$\mathbf{x}(k+4) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(k+3) + \mathbf{B}_1 u(k+1) + \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{7}{2}\right), \quad (3.42)$$

melyek által az állapottér főegyenlet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+4) = & \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 u(k-1) + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 u(k) \\ & + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{1}{2}\right) + (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1) u(k+1) \\ & + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{3}{2}\right) + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{5}{2}\right) + \mathbf{B}_2 u\left(k + \frac{7}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

A főegyenlet ebben az esetben is a (3.11) kimeneti egyenlettel egészül ki.

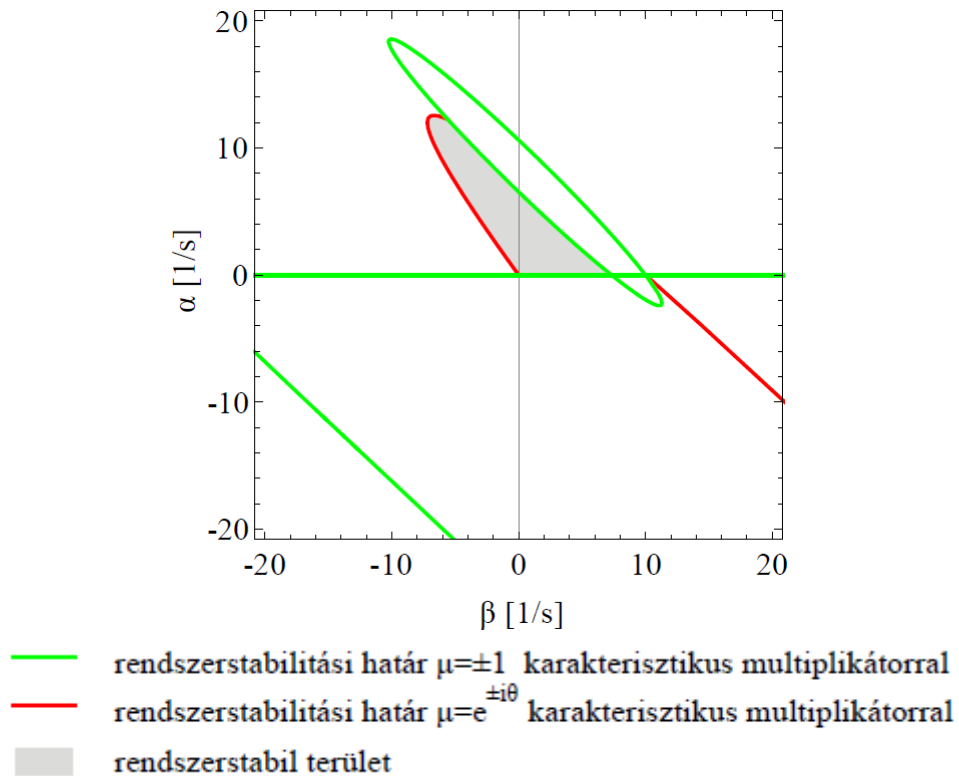


3.7. ábra: A (3.37)-(3.38) rendszer időkésésének időfüggvénye.

A rendszerstabilitás vizsgálatához szükséges karakterisztikus egyenlet

$$\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1) = 0. \quad (3.44)$$

A rendszerstabilitás $\mu = 1$ hataraként továbbra is megkapjuk az $\alpha = 0$ egyenest. A $\mu = -1$ esetben az eredmény egy ellipszis és egy egyenes határgörbe. A $\mu = e^{\pm i\theta}$ görbét pedig Möbius transzformációval és $\eta = \pm i\theta$ helyettesítéssel kapjuk meg. A stabilitási határok megfigyelhetők a 3.8. ábrán. Azt, hogy helyesek-e a határgörbék, leellenőrizhetjük az $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1$ mátrix sajátértékeinek egy-egy pontban való kiszámításával, illetve így a stabil területet is megkereshetjük.



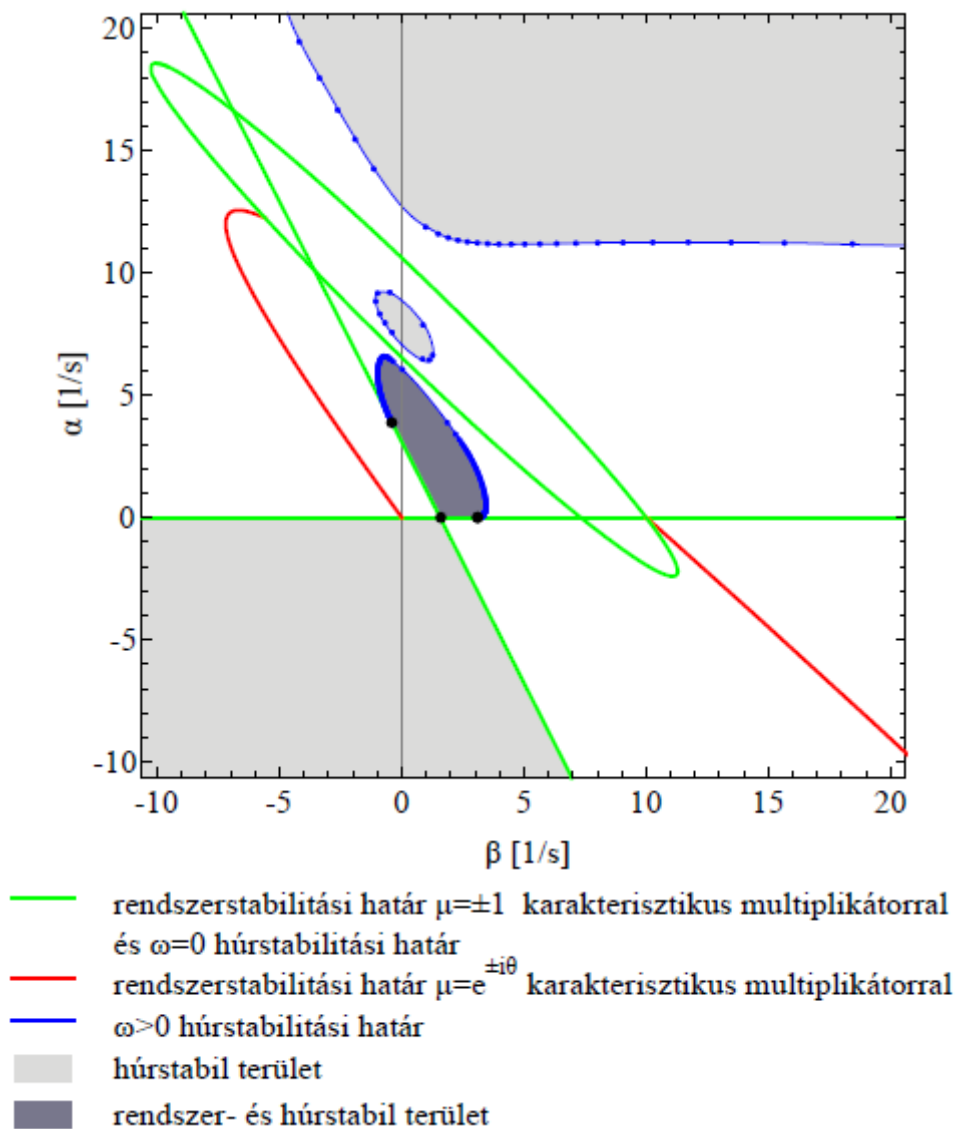
3.8. ábra: A (3.37)-(3.38) egyenletek rendszerstabilitásra vonatkozó stabilitási térképe

$V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.

A hústabilitás vizsgálatához szükséges, a (3.43) egyenlet Z transzformációjával kapott impulzusátviteli függvény

$$\Gamma(z) = \mathbf{C}(z^4 \mathbf{I} - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1)^{-1} (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 z^{-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2 z^{1/2} + (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1)z + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2 z^{3/2} + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 z^{5/2} + \mathbf{B}_2 z^{7/2}). \quad (3.45)$$

A $Q(\omega)$ függvényt felhasználva a (2.32) egyenlet segítségével kiszámíthatók az $\omega = 0$ hústabilitási határok. Eredményül a $\mu = 1$ rendszerstabilitási határokat és egy egyenest kapunk. Az $\omega > 0$ hústabilitási határokat a (2.33)-(2.34) egyenletek által véges sok pontban meghatározzuk és ellenőrizzük. A rendszer- és hústabilitás határait a 3.9. ábra mutatja. A hústabil területek $\Gamma(\omega)$ lefutásának kirajzolásával kereshetők meg.



3.9. ábra: A (3.37)-(3.38) egyenletek rendszer- és hústabilitást is figyelembe vevő stabilitási térképe $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.

Végül a stabilitási térkép jellegzetes pontjainak helyzetét tanulmányozva kiszámítható a kritikus mintavételezési idő. A három pont az alábbi Δt értékre esik egybe

$$\Delta t_{\text{krit}} = \frac{0.3103}{V'(h^*)}, \quad (3.46)$$

amely a $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] esetben $\Delta t_{\text{krit}} = 198$ [ms]. A rendszer átlagos időkésése a 3.7. ábra szerinti esetben $\bar{\tau} = 7/4 \Delta t$. Vagyis az átlagos időkésés kritikus értéke

$$\bar{\tau}_{\text{krit}} = \frac{7}{4} \Delta t_{\text{krit}} = \frac{0.5430}{V'(h^*)} = 1.086 \tau_{\text{krit}}. \quad (3.47)$$

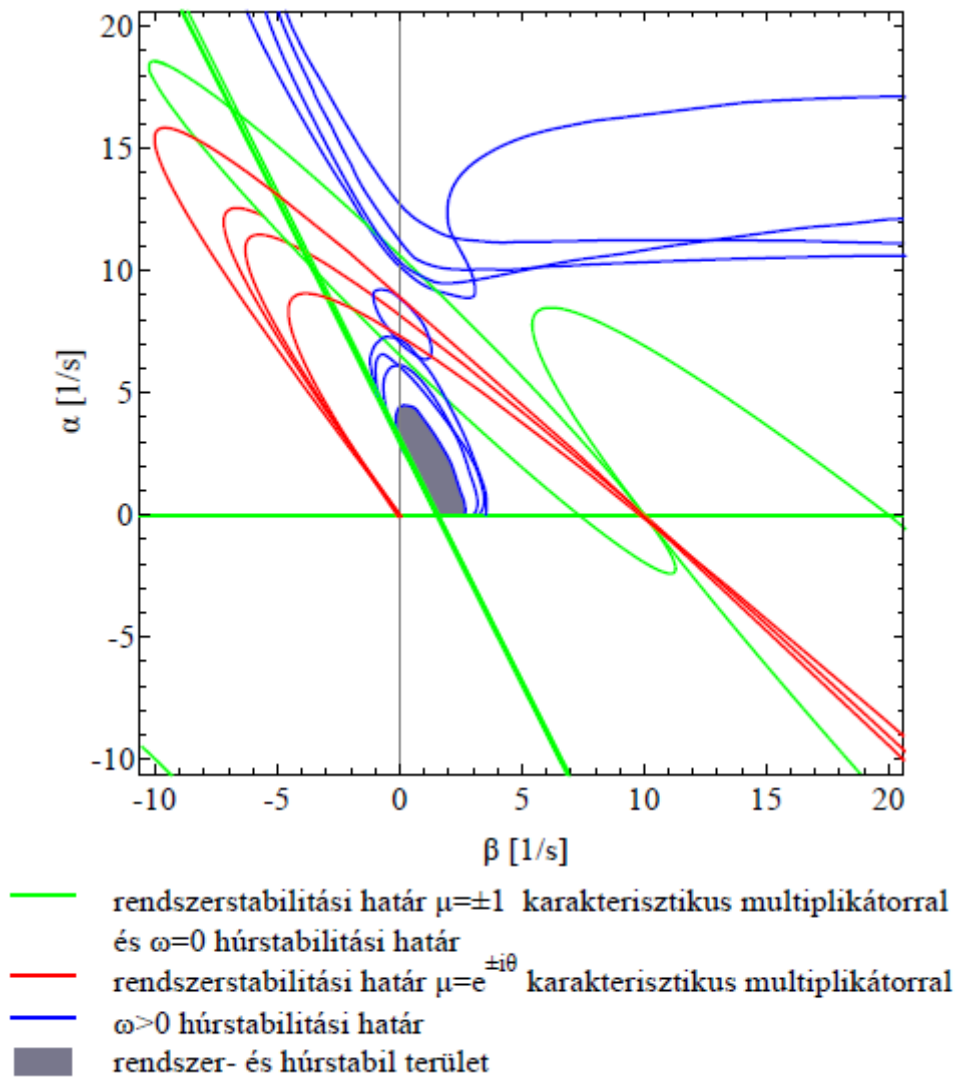
Azaz a folytonos és az ugyanakkora átlagos időkéséssel rendelkező diszkrét rendszer kritikus időkésése között az eltérés kb. 9%.

3.1.4 A csomagkiesés hatása

Az eddigi fejezetek folyamán csupán azokat az eseteket vizsgáltuk, amikor a rendszer főperiódusa maximum $T = 4\Delta t$, az időkésés maximális értéke pedig $3\Delta t$. Azonban a legegyszerűbb csomagkiesési eseteket ismerve következtetéseket vonhatunk le a rendszer viselkedéséről. Láthattuk, hogy a rendszer stabilitását alapvetően az időkésés átlagos értéke határozza meg. Ahogy az átlagos időkésés növekszik, mind a rendszer- mind a húrstabil terület mérete csökkenő tendenciát mutat. Ám előfordulnak a stabilitási térképen olyan pontok is, melyek egy adott átlagos időkésésnél instabilak, magasabb időkésésnél azonban stabillá válnak. Tehát a nagyobb átlagos időkéséssel bíró rendszer stabil területe nem feltétlen esik teljes egészében a kisebb időkéséssel bíró rendszer stabil területén belülre. A stabil területek csökkenésének folyamatát megfigyelhetjük a 3.10. ábrán, ahol a csomagkiesés nélküli és az eddig megismert csomagkieséses esetek stabilitási határait együtt ábrázoltuk.

A rendszer kritikus mintavételezési idejéről megállapíthattuk, hogy mértékét a húrstabilitás határozza meg, a stabil terület teljes eltűnésében a rendszerstabilitás nem játszik szerepet. A kritikus átlagos időkésés értékére pedig alapvetően jó becslést jelenthet a megfelelő (2.38)-(2.39) folytonos rendszer kritikus időkésése. A kritikus átlagos időkésést ismerve pedig - ha az időkésés időbeli változása is ismert - a kritikus mintavételezési idő könnyen kiszámítható. Az előbbi megfontolások alapján a (2.40) egyenletet felhasználva $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] esetén a kritikus átlagos időkésés $\bar{\tau}_{\text{krit}} = 318$ [ms]. Ha biztosítani akarjuk, hogy a $\Delta t = 100$ [ms] ne haladja meg a kritikus értéket, akkor az időkésés átlaga nem lehet nagyobb, mint $3.18\Delta t$. Tehát ha például csak minden ötödik elküldött csomag érkezik meg, azaz ha az időkésés átlagos értéke $3.5\Delta t$, akkor várhatóan már nem találunk stabil szabályozást biztosító (α, β) paraméter kombinációt. A csomagok 4/5-ének elvesztése elég nagy kommunikációs hibát

jelent, így úgy tűnhet, hogy a kritikus időkésés elérése nem gyakran fordul elő. Ám szükséges megemlíteni, hogy ezidáig csak a csomagkiesés hatásával foglalkoztunk. Azonban az is előfordulhat, hogy az elküldött adatok késve érkeznek meg. A csomagkésés pedig tovább növeli az időkésést, így előfordulhat, hogy a 100 [ms]-os mintavételezés már nem bizonyul kellően sűrűnek (lásd 3.3. fejezet). Ezért fontos biztosítani, hogy a kommunikáció során adatvesztés és csomagkésés a lehető legkisebb mértékben forduljon elő.



3.10. ábra: A stabilitási határok alakulása a csomagkiesés gyakoriságának változásával $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén (sötétszürke: a rendszer- és húrstabil területek metszete).

3.2 Véletlenszerű csomagkiesés vizsgálata

A kommunikációs hibák hatását véletlenszerűen bekövetkező adatvesztés esetén is megvizsgálhatjuk [5], [6], [7]. A vizsgálatok során néhány egyszerűsítő feltételezéssel élünk. Továbbra is csak a csomagkiesés esetét tekintjük, a csomagkésés esetét kizárjuk. Emellett az időkésés maximális értékét $3\Delta t$ -nek feltételezzük (erre azért van szükség, hogy a számításokat megkönnyítsük, és csak 6×6 -os mátrixokkal dolgozhassunk). Tehát két eset váltakozik véletlenszerűen: vagy megérkezik a csomag, vagy elvész, de a következő már megérkezik, azaz egymás után két adatcsomag nem esik ki. Továbbá csak a rendszerstabilitás határgörbéit vizsgáljuk, a hűrstabilitás esetére nem térünk ki.

Az analízis során továbbra is a rendszert leíró leképezési mátrix sajátértékeit számítjuk ki. A leképezési mátrix a főperiódusra írható fel, így ez a módszer azt feltételezi, hogy a rendszer rendelkezik főperiódussal, azaz időkésése periodikusan változik. Ez véletlenszerű csomagkiesés esetén nem igaz, de nagy periódust feltételezve jó közelítésnek bizonyulhat. Ezért feltételeztük, hogy a rendszer főperiódusa $T = (N + 1)\Delta t$, ahol N egy kellően nagy szám, pl. $N = 500$. (Azt is feltesszük, hogy a periódus megérkező csomaggal kezdődik, így van 1 érkező csomag és N véletlen eset). E rendszer leírására egy periódus alatt az $\mathbf{A}_2$ és az $\mathbf{A}_1$ mátrixokkal leírt leképezések alkalmazhatók véletlenszerű sorrendben, betartva azt, hogy $\mathbf{A}_2$ kétszer egymás után nem szerepelhet (ez csomagkésés esetét jelentené). A mátrixokat összeszorozva megkapjuk a T főperiódusra vonatkozó Φ leképezési mátrixot. Például $N = 10$ esetén, ha a második, negyedik és nyolcadik időlépésben veszik el a csomag, $\Phi = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$. A Φ mátrix segítségével felírható a rendszer karakterisztikus egyenlete

$$\det(\mu\mathbf{I} - \Phi) = 0. \quad (3.48)$$

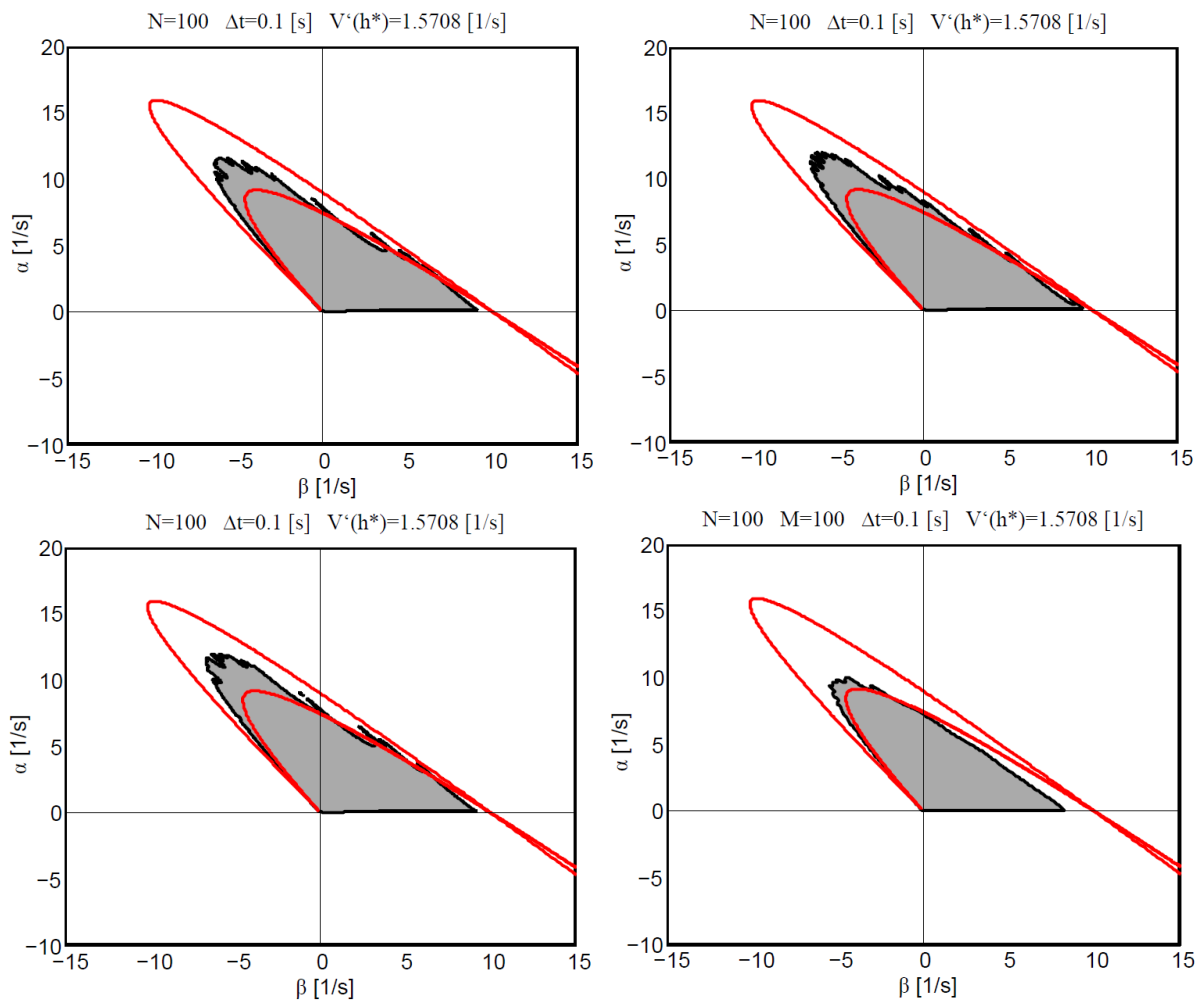
Ez alapján a Φ által leírt rendszer stabilitási térképe numerikusan elkészíthető. Ehhez a (β, α) paramétersík véges sok pontjában ki kell számítani Φ sajátértékeit. A sajátértékeket ismerve minden egyes pont stabilitása eldönthető az alábbi feltétel segítségével

$$\max(|\text{eig}(\Phi)|) < 1, \quad (3.49)$$

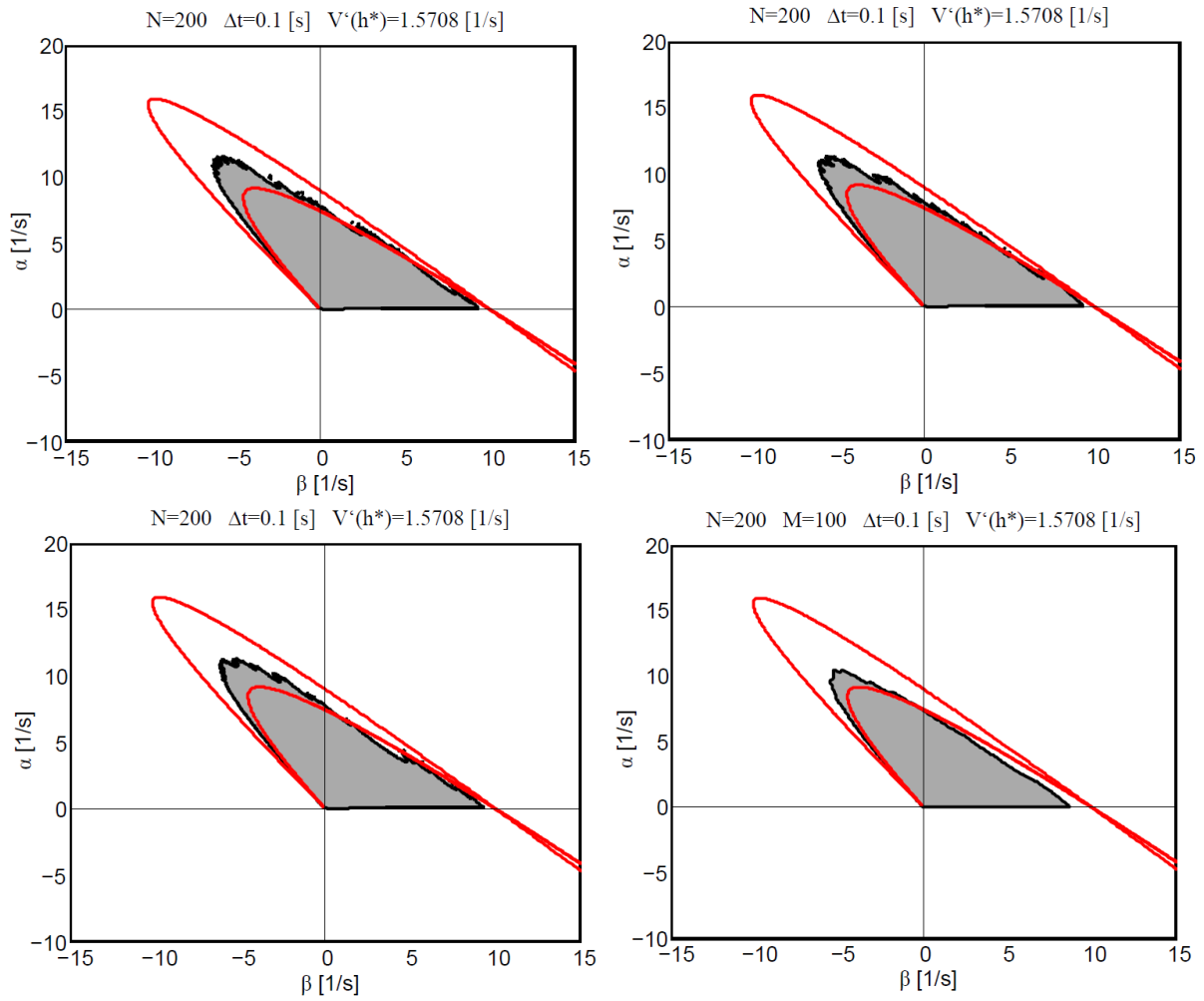
azaz stabil pontban az összes sajátérték abszolút értéke 1-nél kisebb kell legyen. Mivel a Φ leképezést az $\mathbf{A}_2$ és $\mathbf{A}_1$ mátrixok véletlen sorrendű összeszorozásával kaptuk, sajátértékei minden egyes numerikus vizsgálat alkalmával változnak, így minden egyes számítás végeredményeként egy kicsit más stabilitási térképet kapunk. A célunk az, hogy közös stabil területet találjunk. Ezért a számításokat M -szer megismételjük, és azt fogadjuk el stabil területként, amely $M = 100$ eset stabilitási térképét egymásra vetítve is stabilnak bizonyul. A

különböző N értékek esetén numerikusan elkészített stabilitási térképeket a 3.11-3.13. ábrákon láthatjuk. Ezeken egy adott N értéknél bemutatjuk 3 egyedi eset stabilitási térképét, és a 100 eset metszeteként kapott stabilitási térképet. Az ábrákon pirossal feltüntettük a csomagkiesés nélküli, azaz a lehető legkedvezőbb eset rendszerstabilitási határát, illetve a minden második csomag kieséséhez tartozó rendszerstabilitási határt, mely pedig a várhatóan a legrosszabb eset lenne $3\Delta t$ maximális időkésésnél. Ám az ábrák alapján kiderül, hogy a stabilitási határgörbe sem a legszűkebb határt jelenti.

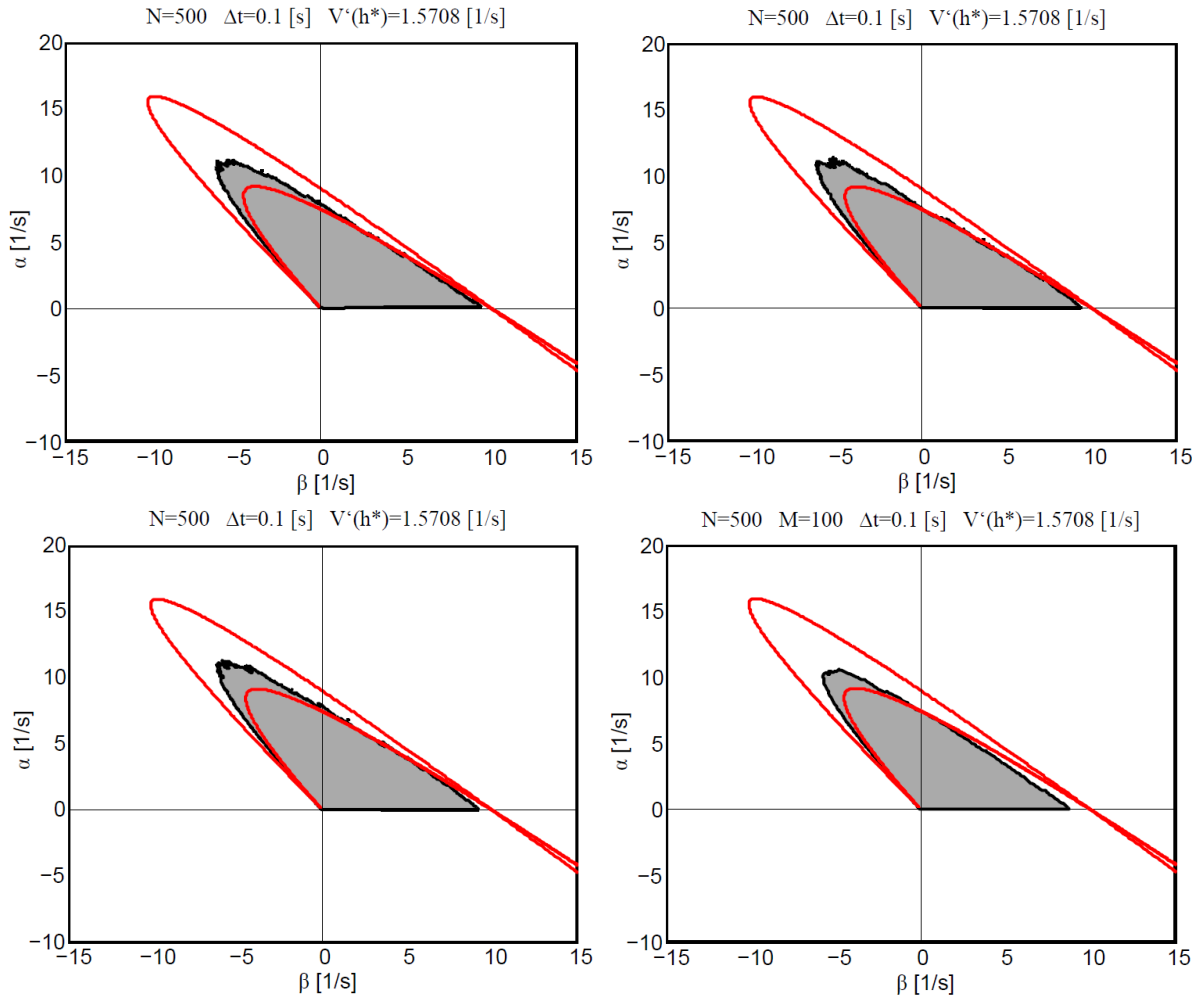
A fent említett numerikus módszer emellett arra is lehetőséget biztosított, hogy a 2.2., 3.2., 3.5. és 3.8. ábrákon látható rendszerstabilitási térképeket leellenőrizzük.



3.11. ábra: Véletlenszerű csomagkiesés esetén kapott rendszerstabilitási térképek $N = 100$ -ra három egyedi esetben és 100 eset metszetét képezve (szürke: rendszerstabil terület, piros: stabilitási határ csomagvesztés nélkül és minden második csomag elvesztésekor).



3.12. ábra: Véletlenszerű csomagkiesés esetén kapott rendszerstabilitási térképek $N = 200$ -ra három egyedi esetben és 100 eset metszetét képezve (szürke: rendszerstabil terület, piros: stabilitási határ csomagvesztés nélkül és minden második csomag elvesztésekor).



3.13. ábra: Véletlenszerű csomagkiesés esetén kapott rendszerstabilitási térképek $N = 500$ -ra három egyedi esetben és 100 eset metszetét képezve (szürke: rendszerstabil terület, piros: stabilitási határ csomagvesztés nélkül és minden második csomag elvesztésekor).

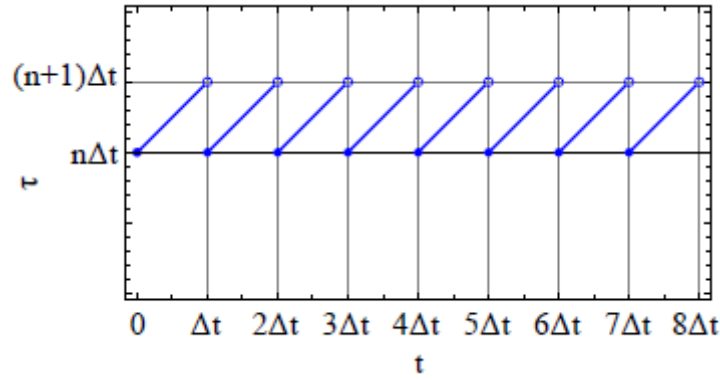
3.3 Csomagkésés vizsgálata determinisztikus esetben

A járművek közötti kommunikáció során az is előfordulhat, hogy az elküldött adatcsomagok néhány mintavételezési időnyi késéssel érkeznek célba. E fejezetben a csomagkésés hatását vizsgáljuk meg abban az egyszerű esetben, amikor minden adatcsomag ugyanannyit késik. Azaz tekintsük a következő rendszert

$$\dot{\tilde{h}}(t) = \tilde{v}_0(t) - \tilde{v}_1(t), \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}}_1(t) &= \alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right) + \beta \left(\tilde{v}_0(t_{k-1}) - \tilde{v}_1(t_{k-1}) \right), \\ t &\in [t_{k+n-1}, t_{k+n}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

E rendszer esetén minden adatcsomag $(n - 1)$ időlépést késik $(n = 1, 2, \dots)$. Azaz az időkésés $n\Delta t$ és $(n + 1)\Delta t$ között periodikusan változik $T = \Delta t$ főperiódussal (lásd 3.14. ábra).



3.14. ábra: A (3.50)-(3.51) rendszer időkésésének időfüggvénye.

Az $n = 1$ esetben visszkapjuk (2.1)-(2.2) egyenletekkel leírt, kommunikációs hiba nélküli rendszert.

Írjuk fel a rendszer diszkrét állapotter modelljét. Ehhez oldjuk meg a (3.50)-(3.51) egyenleteket a $\tilde{h}(t_{k+n-1})$, $\tilde{v}_1(t_{k+n-1})$ kezdeti feltételekkel és vegyük a megoldásokat a $t = t_{k+n}$ időpillanatban. Így az alábbi differenciaegyenletekhez jutunk

$$\begin{aligned} \tilde{h}(k+n) &= \tilde{h}(k+n-1) - \frac{1}{\omega} v_0^{amp} \cos(\omega(k+n)\Delta t) \\ &\quad + \frac{1}{\omega} v_0^{amp} \cos(\omega(k+n-1)\Delta t) - \tilde{v}_1(k+n-1)\Delta t \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(k-1) - \tilde{v}_1(k-1) \right) \right. \\ &\quad \left. + \beta (v_0^{amp} \sin(\omega(k-1)\Delta t) - \tilde{v}_1(k-1)) \right] \Delta t^2, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(k+n) &= \tilde{v}_1(k+n-1) \\ &\quad + \left[\alpha \left(V'(h^*) \tilde{h}(k-1) - \tilde{v}_1(k-1) \right) \right. \\ &\quad \left. + \beta (v_0^{amp} \sin(\omega(k-1)\Delta t) - \tilde{v}_1(k-1)) \right] \Delta t. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Trigonometrikus azonosságok segítségével alakítsuk át a koszinuszos tagokat

$$\begin{aligned} &\cos(\omega(k+n)\Delta t) - \cos(\omega(k+n-1)\Delta t) \\ &= \cos\left(\omega\left(k+n-\frac{1}{2}\right)\Delta t\right) \cos\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) - \sin\left(\omega\left(k+n-\frac{1}{2}\right)\Delta t\right) \sin\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) \\ &\quad - \cos\left(\omega\left(k+n-\frac{1}{2}\right)\Delta t\right) \cos\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) - \sin\left(\omega\left(k+n-\frac{1}{2}\right)\Delta t\right) \sin\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) \\ &= -2\sin\left(\omega\left(k+n-\frac{1}{2}\right)\Delta t\right) \sin\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

A (3.54) egyenletet a (3.52) egyenletbe helyettesítve végül a (3.55) állapotter főegyenlethez jutunk. Ehhez az $y(k) = \tilde{v}_1(k)$ kimenetet feltételezve a (3.56) kimeneti egyenlet tartozik.

$$\mathbf{x}(k+n) = \mathbf{A}_n \mathbf{x}(k+n-1) + \mathbf{B}_{1n} u(k-1) + \mathbf{B}_{2n} u\left(k+n-\frac{1}{2}\right), \quad (3.55)$$

$$y(k) = \mathbf{C}_n \mathbf{x}(k+n-1), \quad (3.56)$$

ahol $\mathbf{A}_n$ $2(n+1) \times 2(n+1)$ -es mátrix, $\mathbf{x}(k+n-1)$, $\mathbf{B}_{1n}$, $\mathbf{B}_{2n}$, és $\mathbf{C}_n$ $2(n+1)$ elemű vektorok, $u(k)$ pedig skalár. E mennyiségeket az alábbi egyenlet definiálja

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2}\alpha V'(h^*)\Delta t^2 & \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\Delta t^2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha V'(h^*)\Delta t & -(\alpha + \beta)\Delta t \\ 1 & & \cdots & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{1n} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\beta\Delta t^2 \\ \beta\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2n} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\omega}\sin\left(\omega\frac{1}{2}\Delta t\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_n = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0),$$

$$\mathbf{x}(k+n-1) = \begin{pmatrix} \tilde{h}(k+n-1) \\ \tilde{v}_1(k+n-1) \\ \tilde{h}(k+n-2) \\ \tilde{v}_1(k+n-2) \\ \vdots \\ \tilde{h}(k-1) \\ \tilde{v}_1(k-1) \end{pmatrix}, \quad u(k) = v_0^{amp} \sin(\omega k \Delta t). \quad (3.57)$$

Mivel a rendszer maximális $(n+1)\Delta t$ időkésése n növelésével folyamatosan növekszik, a rendszer diszkrét állapottér modelljében szereplő vektorok és mátrixok mérete is nő.

A rendszer- és húrstabilitás az előző fejezetekben ismertett módon vizsgálható. A vizsgálatokat különböző n értékek mellett elvégezve számos szabályosság fedezhető fel. E szabályokat nem bizonyítottuk, de nagy n értékek (pl. $n = 60$) esetén is teljesültek. A $\mu = 1$ rendszerstabilitási határ mindig

$$\alpha = 0, \quad (3.58)$$

míg a $\mu = -1$ határ n paritása szerint kétféle lehet

$$\alpha = -\beta + (-1)^n \frac{2}{\Delta t}. \quad (3.59)$$

A $\mu = e^{\pm i\theta}$ esetben kapott görbe egy, az n növelésével egyre több fordulatot tevő, az $\alpha = -\beta \pm 2/\Delta t$ egyenesek közt haladó spirál. Érintőjének origóban számított meredeksége

$$\left. \frac{d\alpha}{d\beta} \right|_{(0,0)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{d\alpha}{d\theta}}{\frac{d\beta}{d\theta}} = - \frac{2}{2 - (2n+1)V'(h^*)\Delta t}. \quad (3.60)$$

Véges Δt esetén tehát az érintő soha nem lehet zérus meredekségű, a stabil terület teljesen soha nem fog eltűnni, rendszerstabilitásra nézve kritikus mintavételezési idő nem létezik.

Az $\omega = 0$ húrstabilitási határok minden n -re azonosak

$$\alpha = 0, \quad (3.61)$$

$$\alpha = \frac{2(V'(h^*) - \beta)}{1 - \frac{1}{6}(V'(h^*))^2 \Delta t^2}. \quad (3.62)$$

Az $\omega > 0$ húrstabilitási határok kiindulópontjainak és az előbbi két egyenes metszéspontjának az egybeesése alapján a kritikus mintavételezési idő

$$\Delta t_{krit} = \frac{1}{(2n+1)V'(h^*)}. \quad (3.63)$$

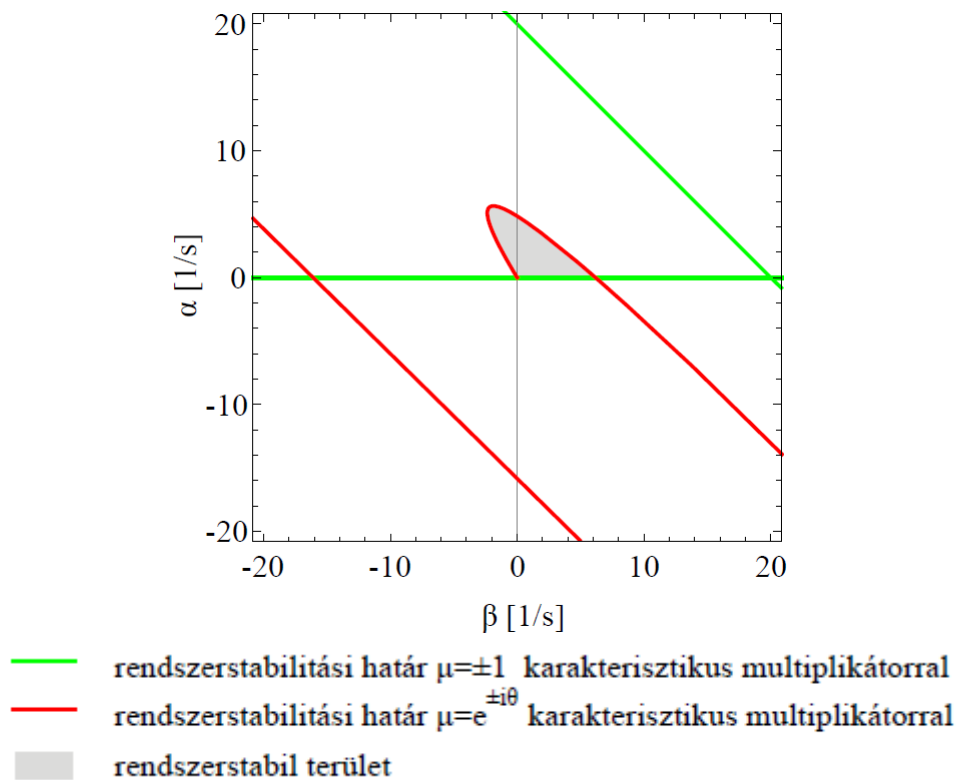
Mivel a rendszer időkése $n\Delta t$ és $(n+1)\Delta t$ között periodikusan változik, az átlagos időkése $\bar{\tau} = (n+1/2)\Delta t$, melynek kritikus értéke

$$\bar{\tau}_{krit} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta t_{krit} = \frac{1}{2V'(h^*)} = \tau_{krit}. \quad (3.64)$$

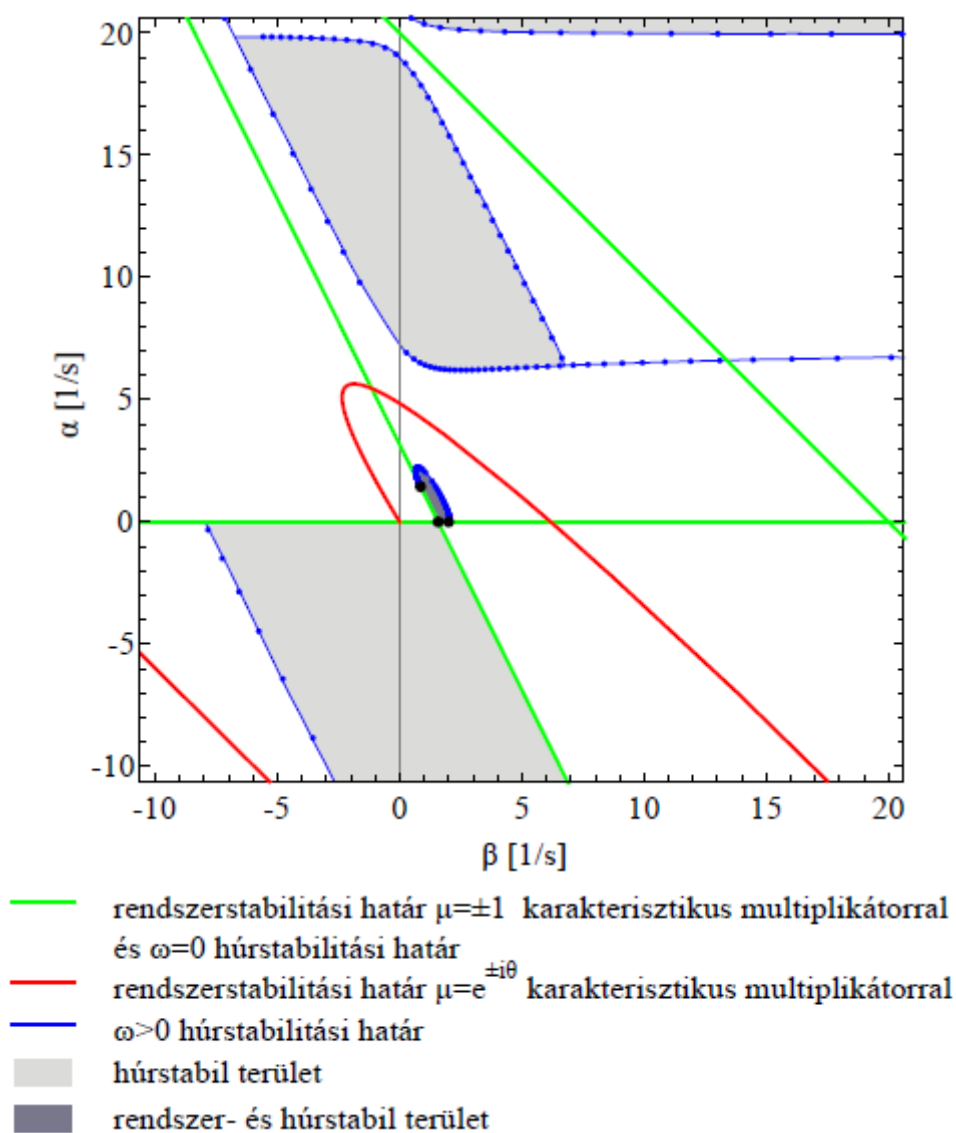
Azaz ha minden csomag ugyanannyit késik, az átlagos időkése kritikus értéke pontosan megegyezik a megfelelő folytonos rendszer kritikus időkéseének értékével. A $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] esetben $n = 3$ esetén $\Delta t_{krit} = 91$ [ms]. Tehát ha minden csomag legalább 2 időlépésnyit késik, akkor már a 100 [ms]-os mintavételezési idővel nem tudunk stabil szabályozást biztosítani. Így a csomagkésésről is elmondható, hogy mértékét fontos minél inkább visszaszorítani a rendszer stabilitásának megőrzése végett. A stabilitási határookra egy lehetséges példa $n = 2$ esetén (azaz amikor még van stabil terület) megfigyelhető a 3.15. és a 3.16. ábrán.

Végül elmondhatjuk, hogy a csomagkésés és csomagkése mértékének csökkentése mellett más lehetőségek is rendelkezésre állnak a stabil szabályozás biztosításához. Fontos tényező lehet, ha a szabályozott jármű sebessége minden időlépésnél biztosan rendelkezésre áll. Eddig ugyanis azt feltételeztük, hogy mind a vezető jármű sebessége, mind a követő jármű sebessége, mind pedig a követési távolság azonos időkéssel ismert. Így feltételezhető, hogy ezen adatokat nem terheli sem a csomagkésés, sem a csomagkése hatása (nem „várják be” a többi adatot). Tehát ha legalább e sebesség értékek minden időlépésnél rendelkezésre állnak, akkor a rendszer stabilitásának mértéke jelentősen növekedhet. A stabilitás növelésére egy másik megoldást jelenthet a követési távolság becslése. Ugyanis, ha a vezető jármű

sebességéről és a követési távolságról néhány időlépésen keresztül nem is érkeznek adatok, a követési távolság a legutóbb rendelkezésre álló sebesség adatok alapján a köztes időlépésekben is becsülhető. Ezáltal stabilabb rendszer érhető el, mint ha a beavatkozás meghatározásakor a követési távolság értékét a köztes időlépésekben állandó értéken tartottnak tekintenénk. Az előbb említett megoldási lehetőségekre azonban a jelen dolgozatban már nem térünk ki.



3.15. ábra: A (3.50)-(3.51) egyenletek rendszerstabilitásra vonatkozó stabilitási térképe
 $n = 2$, $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.



3.16. ábra: A (3.50)-(3.51) egyenletek rendszer- és húrstabilitást is figyelembe vevő stabilitási térképe $n = 2$, $V'(h^*) = \pi/2$ [1/s] és $\Delta t = 0.1$ [s] esetén.

Összefoglalás

A dolgozat során egy egyenes vonalban haladó kocsisor sebességszabályozásával és stabilitásvizsgálatával foglalkoztunk. A vizsgált rendszerben a kocsisor tagjai a közvetlenül előttük haladó autóval kommunikációt folytatnak, és az egyes tagok gyorsulása a kommunikáció során kapott adatokat figyelembe véve kerül meghatározásra. A sebességszabályozás célja, hogy az autók követési távolságtól függő, megkívánt sebességgel együtt haladjanak forgalmi torlódás kialakulása nélkül. A dolgozatban digitális szabályozást feltételeztünk.

A fent említett rendszer stabilitásvizsgálata során megvizsgáltuk a rendszer- és a húrstabilitást feltételeit. A szabályozásnál használt két szabályozó paraméter síkján stabilitási térképeket készítettünk, melyek alapján a stabil szabályozást biztosító szabályozó megválasztható. Továbbá kiszámítottuk a rendszer kritikus mintavételezési idejét, amelynél nagyobb mintavételezési idő esetén stabil szabályozás semmilyen szabályozó paraméter kombinációval nem érhető el. Azt is beláttuk, hogy e kritikus mintavételezési időt alapvetően a húrstabilitás határozza meg.

Továbbá elemeztük a járművek közötti kommunikáció során véletlenszerűen vagy periodikusan fellépő adatvesztés, illetve periodikusan bekövetkező csomagkésés stabilitásra gyakorolt hatását. Ezen események a rendszer átlagos időkésését növelik, mely által a stabilitás mértéke csökken. Az átlagos időkésés kritikus értéke a megfelelő folytonos rendszer kritikus időkésésével közelíthető. Ahogy az átlagos időkésés növekszik, úgy csökken a kritikus mintavételezési idő értéke. Így egyes esetekben előfordulhat, hogy a megszokott 100 milliszekundumos mintavételezési idő esetén már nem találunk stabil területet. Ezért fontos, hogy a kommunikáció során bekövetkező csomagkésések és csomagkiesések előfordulását minél jobban visszaszorítsuk.

Irodalomjegyzék

- [1] W. B. Qin and G. Orosz, "Digital effects and delays in connected vehicles: linear stability and simulations," in *Proceedings of the ASME Dynamic Systems and Control (DSC) Conference (2013)*.
- [2] J. I. Ge, S. S. Avedisov and G. Orosz, "Stability of connected vehicle platoons with delay acceleration feedback," in *Proceedings of the ASME Dynamic Systems and Control (DSC) Conference (2013)*.
- [3] L. Zhang and G. Orosz, "Designing network motifs in connected vehicle systems: delay effects and stability," in *Proceedings of the ASME Dynamic Systems and Control (DSC) Conference (2013)*.
- [4] T. Insperger and G. Stepan, *Semi-Discretization for Time Delay Systems - Stability and Engineering Applications*, Springer, 2011.
- [5] W. B. Qin, M. M. Gomez and G. Orosz, "Stability analysis of connected cruise control with stochastic delays," in *Proceedings of the American Control Conference (ACC, 2014 - submitted)*.
- [6] M. M. Gomez, W. B. Qin, G. Orosz and R. M. Murray, "Exact stability analysis of discrete-time linear systems with stochastic delays," in *Proceedings of the American Control Conference (ACC, 2014 - submitted)*.
- [7] E. I. Verriest and W. Michiels, "Stability analysis of systems with stochastically varying delays," *Systems & Control Letters*, vol. 58, pp. 783-791, 2009.
- [8] G. Orosz, R. E. Wilson, R. Szalai and G. Stepan, "Exciting traffic jams: Nonlinear phenomena behind traffic jam formation on highways," *Physical Review*, vol. 80, no. 046205, 2009.