



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Gépészmérnöki Kar

Műszaki Mechanikai Tanszék

Hiperelasztikus testek végelelemes analízise elektromos tér esetén

Szerző: Sötér Gábor

BSc IV. évfolyam

2013.

Konzulens: Dr. Szabó László

Műszaki Mechanikai Tanszék

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS	1
1.1. A dolgozat előzményeinek összefoglalása	1
1.2. A dolgozat rövid tartalmi áttekintése	2
1.3. A dolgozatban alkalmazott jelölések	3
1.3.1. Fizikai mennyiségek	3
1.3.2. Matematikai operátorok, műveletek	3
1.3.3. Mértékegységek	4
2. SZAKIRODALMI ÁTTEKINTÉS	5
2.1. Az elektro-elasztikus anyagmodellek áttekintése	5
2.2. Alkalmazási lehetőségek	7
3. AZ ELMÉLETI ALAPOK ÁTTEKINTÉSE	9
3.1. Kontinuummechanikai összefoglaló	9
3.1.1. Referencia és pillanatnyi konfiguráció	9
3.1.2. Alakváltozási gradiens és deformációs tenzorok	10
3.1.3. Feszültségtenzorok	11
3.2. Hiperelasztikus testek anyagmodelljei	12
3.3. Az elektromos tér mezőegyenleteinek összefoglalása	14
3.3.1. Alapfogalmak bevezetése	14
3.3.2. Az elektrosztatika első és második egyenlete	15
3.4. Az elektro-elasztikus anyagmodellek bemutatása	15
3.4.1. Összenyomható elektro-elasztikus Neo-Hooke anyagtörvény	15
3.4.2. Összenyomhatatlan elektro-elasztikus Neo-Hooke anyagtörvény	16
3.5. Egyensúlyi egyenlet	16

4. VÉGESELEMES SZÁMÍTÁSI MODELL	19
4.1. A feladatra vonatkozó virtuális munka elv	19
4.2. A végeselemes alapegyenletek	20
4.3. A végeselemes modell és a számítási eljárás rövid ismertetése	22
5. MINTAPÉLDÁK	25
5.1. Egytengelyű nyújtás	25
5.1.1. Analitikus megoldások	26
5.1.2. Az analitikus és a végeselemes eredmények összehasonlítása	34
5.2. Vastag falú cső	36
5.2.1. Analitikus megoldás	37
5.2.2. Az analitikus és a végeselemes eredmények összehasonlítása	38
6. ÖSSZEFOGLALÁS	41
6.1. A dolgozat eredményeinek összefoglalása	41
6.2. Az eredmények továbbfejlesztésének lehetőségei	42
A MELLÉKLETEK	43
A1. A felhasznált anyagtörvény levezetett összefüggései	43
A1.1. Energiafüggvény deriváltjai	43
A1.2. Konstitutív érintő tenzorok a kezdeti konfiguráción	44
A1.3. Konstitutív érintő tenzorok a pillanatnyi konfiguráción	45
A1.4. Feszültségtenzor és elektromos eltolás vektor	48
IRODALOMJEGYZÉK	49

1. FEJEZET

BEVEZETÉS

1.1. A dolgozat előzményeinek összefoglalása

Mai világunk tudományos életének egyik legfejlődőbb és legizgalmasabb területe az intelligens anyagok kutatása. A legtöbb fejlesztés ugyan még korai szakaszban jár, ennek ellenére a kereskedelemben már találkozhatunk olyan termékekkel, melyeket látva fényes jövőt jósolhatunk ennek a területnek (gondoljunk csak az öngyógyító ill. öntisztító polimerekre vagy az emlékező fémekre).

Az intelligens anyagok közé soroljuk az elektroaktív polimereket, melyek elektromos feszültség hatására alakváltoznak, illetve mechanikai hatásra feszültséget állítanak elő. Ezen tulajdonságok teszik lehetővé, hogy gépészeti és mechatronikai rendszerekben egyaránt használhatók szenzorként és aktuátorként, továbbá vezérlésük számítógéppel, vagy más controllerrel megoldható.

Mivel ezen anyagok felhasználásának igénye az iparban rohamosan nő, szükséges olyan szimulációs programok fejlesztése, melyek megbízható eredményt adnak az anyagok viselkedéséről, ezáltal csökkentik a termék fejlesztési költségeit. A téma és a probléma új, ez lehet a magyarázata annak, hogy a kereskedelemben nem találkozunk olyan szoftverekkel, melyek képesek az elektroaktív anyagok anyagmodelleinek a kezelésére. A dolgozat elkészítésének fő motivációja tehát egy olyan nemlineáris végeselemes eljárás fejlesztése, mely megbízhatóan működik, s futás közben a számítás jól kézben tartható.

1.2. A dolgozat rövid tartalmi áttekintése

A dolgozat négy fő fejezetre tagolódik: *Szakirodalmi áttekintés*, *Elméleti alapok áttekintése*, *Végeselemes számítási modell*, *Mintapéldák*.

Először a téma szakirodalmának áttekintése történik, továbbá bemutatásra kerülnek azon alkalmazások, melyek értelmet adnak az elektroaktív anyagok kutatásának.

A következő fejezetben tisztázásra kerülnek az alapvető kontinuummechanikai és elektrosztatikai összefüggések, továbbá megtörténik az elektro-elasztikus anyagmodellek bevezetése, illetve a kapcsolt problémára felhasznált egyensúlyi egyenlet leírása.

A *Végeselemes számítási modell* fejezet először a virtuális munka elvének kapcsolt problémára történő felírására vonatkozik. Ezután bemutatásra kerülnek a nemlineáris végeselemes eljárásához felhasznált mennyiségek (merevségi mátrix, belső erővektor stb.), illetve az alkalmazott iterációs algoritmus.

A *Mintapéldák* fejezetben az előzőleg bemutatott végeselemes eljárás validálása található: egyszerű terhelési esetek analitikus és numerikus megoldásainak összehasonlítása igazolja a végeselem program megfelelő működését.

A dolgozathoz tartozik egy DVD melléklet, mely a megértést segítő és a kapcsolt jelenséget szemléltető dinamikus animációkat tartalmaz. Ha a dolgozat során egy fejezetrészhez tartozik ilyen animáció, akkor azt a *Wolfram Mathematica* jellegzetes ikonja és egy sorszám jelöli. Az animációk megtekintéséhez *Wolfram Mathematica 9* program szükséges.

1.3. A dolgozatban alkalmazott jelölések

1.3.1. Fizikai mennyiségek

F	Alakváltozási gradiens tenzor
C	Jobb oldali Cauchy Green-féle deformációs tenzor
b	Finger-féle deformációs tenzor
J	Az alakváltozási gradiens determinánsa
E	Elektromos térerősség vektor
D	Elektromos eltolási vektor
P	Polarizációs vektor
μ, λ	Lamé-féle állandók
c_1, c_2	Anyagtörvény konstansai
ε_0	A vákuum permittivitása
I	Másodrendű egységtenzor
K	Merevségi mátrix
l	A sebességgradiens
T	Első Piola-Kirchhoff-féle feszültségtenzor
S	Második Piola-Kirchhoff-féle feszültségtenzor
σ	Cauchy-féle feszültségtenzor
σ^{tot}	Teljes feszültségtenzor a pillanatnyi konfiguráción
T^{tot}	Teljes feszültségtenzor a kezdeti konfiguráción
u	Elmozdulás vektor
φ	Elektromos potenciál

1.3.2. Matematikai operátorok, műveletek

A következő táblázatok a dolgozatban alkalmazott legfontosabb műveleteket, matematikai mennyiségeket és definíciókat tartalmazzák.

$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$	
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$	
$(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})_{ij} = C_{ik} D_{kj}$	
$\mathbf{C} : \mathbf{D} = C_{ij} D_{ij}$	
$(\mathbf{C} \boxtimes \mathbf{D})_{ijkl} = C_{ik} D_{jl}$	
$(\mathbf{A} : \mathbf{D})_{ij} = A_{ijkl} D_{kl}$	
grad, Grad	Gradiens operátor
<i>div, Div</i>	Divergencia operátor
rot, Rot	Rotáció operátor

Itt $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat, $\mathbf{C}$ és $\mathbf{D}$ másodrendű, $\mathbf{A}$ negyedrendű tenzorokat jelent, továbbá a nagybetűvel kezdődő operátorok a kezdeti konfiguráción, míg a kisbetűvel kezdődő operátorok a pillanatnyi konfiguráción vannak értelmezve.

δ_{ij}	Kronecker delta
ε_{ijk}	Levi-Civita szimbólum
$()^T$	transzponált
$\det()$	determináns
$\text{tr}()$	trace (első skalárinvariáns)
$()^{-1}$	inverz

1.3.3. Mértékegységek

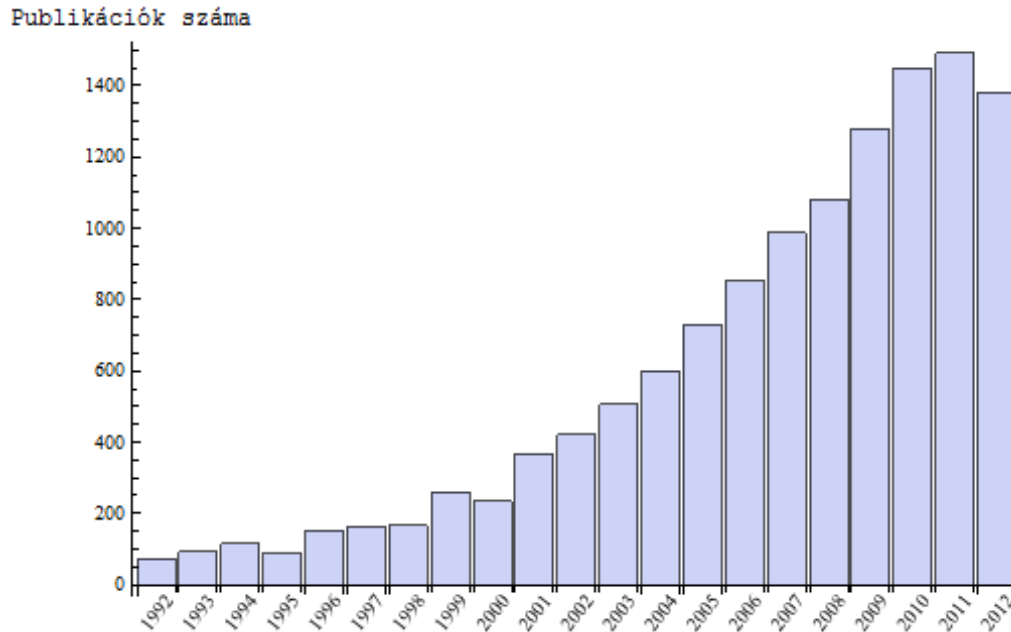
Fizikai mennyiség	Mértékegység neve	Jelölés
Elmozdulás	Méter	$[m]$
Erő	Newton	$[N]$
Töltésmennyiség	Coulomb	$[C]$
Mechanikai feszültség	Pascal	$[Pa]$
Elektromos feszültség	Volt	$[V]$

2. FEJEZET

SZAKIRODALMI ÁTTEKINTÉS

2.1. Az elektro-elasztikus anyagmodellek áttekintése

Az elektro-elasztikus témakörrel foglalkozó publikációk száma az 1900-as évek második felétől napjainkig exponenciális növekedést mutat (1. ábra). Elsők között Toupin írta le ezen anyagok viselkedését [33],[34],[35]. Nagy alakváltozásokkal foglalkozott, munkájában többek között az elektro- és magnetooptikai hatást, az elektro-elasztikus feszültségtenzor felépítését továbbá ezen problémák variációs és egyensúlyi egyenleteit vizsgálta. 1963-ban Jordan és Eringen foglalta össze a termo-magneto-elektro-elasztikus anyagokat leíró egyenleteket [8],[9]. Eringen további munkássága meghatározó volt ezen a területen: olyan energiafüggvényt írt le (illetve hozzájuk tartozó konstitutív egyenleteket), melynek változóiban egyaránt szerepeltek mechanikai és elektromos jellemzők [6], továbbá variációs egyenleteket fogalmazott meg. 1965-ben Eringen és Dixon elkészítették a Dixon-Eringen modellt, a vezetőképes polarizálható és felmágnesezhető testet, mely izotróp elektro-elasztikus tulajdonsággal rendelkezik [7]. A korai kutatók közé tartozott Mindlin, aki az elektro-elasztikus anyagok polarizációjával foglalkozott, továbbá az ioncserén alapuló elektroaktív kristályok mechanikáját írta le [61],[62].



1. ábra - A Google Tudós találati eredményei az "electroactive" kifejezésre

1989-ben jelent meg az első kapcsolt feladatokat összefoglaló könyv [5], mely számos problémakört érintett, így az elektro- ill. magneto-elasztikus anyagok, mágneses hatásra aktiválódó folyadékok, emlékező anyagok is említésre kerülnek. Rajagopal, Wineman és Ruzicka nem-lineáris elektroaktív anyagok és viszkózus elektorreológiai folyadékok matematikai leírásával foglalkozott, munkájukban felhasználták Eringen eredményeit, továbbfejlesztették azokat. Az általuk publikált anyagokban analitikus megoldásokat közölnek egyszerű terhelési esetekre [58], [59], [60]. Az elektro-elasztikus egyenletek, melyek a dolgozat elméleti alapjait képezik az új évezredben kerültek tisztázásra. Jelentős eredményeket ért el a Dorfmann-Ogden szerzőpáros [10],[11], akik újrafogalmazták azokat kontinuummechanikai és az elektromágneses teret leíró egyenletek, melyek nagy alakváltozásra érvényesek, továbbá olyan energiafüggvényt használtak, melyben az elektromos térerősség vektor és az alakváltozási gradiens szerepelt változóként. Ezt Dorfmann továbbfejlesztette: felírástól függően az energiafüggvény tartalmazhatja a polarizáció vagy az elektromos eltolás vektorát is [12]. Bustamante átdolgozta Dorfmann és Ogden elméletét, transzverzálisan izotróp anyagokra alkalmazta azt [20]. Később hárman együtt dolgoztak tovább, variációs egyenleteket fogalmaztak meg illetve az elektromos hatásból származó testre ható erőt és az ebből kialakuló Maxwell-feszültségi tenzort vizsgálták [21],[22]. Az anyag fizikai leírásának egy egészen új módja található Skatulla publikációjában, melyben már az

alakváltozási gradiens szintjén felbontják a problémát külön mechanikai és elektromos hatásra [63]. Az elektro-elasztikus anyagok végeselemes leírásának úttörői a nürnbergi egyetem kutatói Duc-Khoi Vu és Paul Steinmann. Számos publikációjukban foglalkoznak ezen témával, a dolgozat végeselemes tartalma is ezekre épül [37],[38],[39],[40],[41],[42].

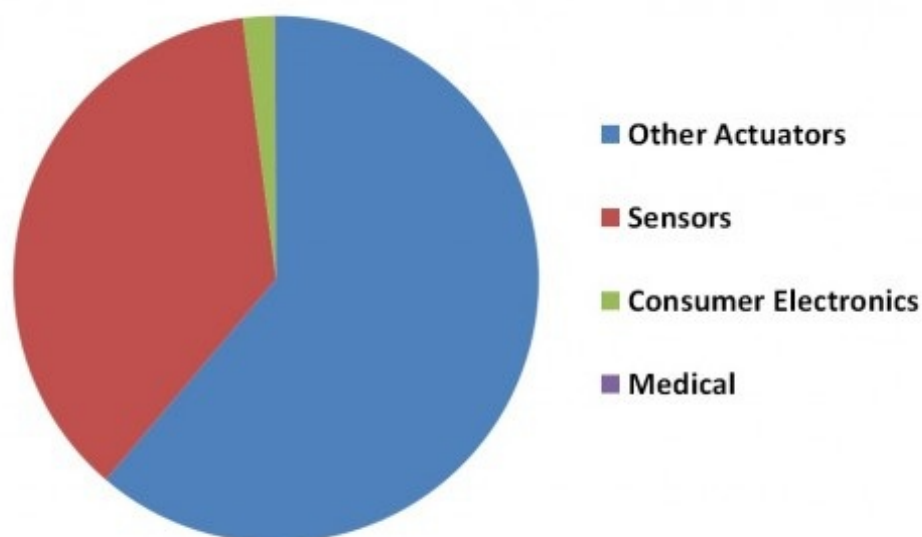
2.2. Alkalmazási lehetőségek

Elektroaktív anyagok igen sok területen alkalmazhatók, egyik legérdekesebb ezek közül az elektroaktív polimerből készült műizmok. 1999-ben Yoseph-Bar Cohen szkanderversenyt hirdetett meg a világ kutatói számára, ám ez a hagyományos megmérettetésektől távol állt: a gépnek, mely versenyez, elektroaktív műizmokból kell felépülnie [2]. Ez inspirálta az Artifical Muscle Inc. megalakulását, mely mára a világ egyik vezető kutatócsoportává nőtte ki magát ezen a tudományterületen. A csoport egy másik fejlesztése a ViviTouch nevű rendszer, mely a számítógépes játékipart célozza meg: olyan kontrollerek fejlesztése a cél, melyek nem csak beemeneti, hanem kimeneti perifériának is használhatók, a játékos visszajelzést kap a kontrollertől a játékmenet során.

Mai világunk egyik legfőbb célkitűzése a megújuló energiákat előállító berendezések tervezése. Ezen gépek egy csoportjába tartoznak a hullámenergiát hasznosító eszközök, melyek a tengerek és óceánok hullámaiból nyert energiát alakítják át elektromos árammá. Az SRI cég, mely a már említett Artifical Muscle Inc. tulajdonosa, ezen a területen is vezetőnek számít, ugyanis elkészítettek egy prototípust, mely működőképesnek bizonyult: alacsony hullámmellett is képesek voltak 12-13 Watt teljesítmény előállítására. A berendezés egy 40 centiméter átmérőjű, 12 méter magas henger tartalmazott, melynek belsejében két elektroaktív műizom foglalt helyet.

Az első kereskedelemben kapható terméket a japán Eamex vállalat állította elő, ez egy játék hal volt, mely utánozza az élő halak mozgását a testébe épített elektroaktív aktuátorok segítségével. Hasonló fejlesztéseket készít a svájci Empa cég, melynél nem csak a gyakorlati alkalmazások, hanem a szimuláció is fontos szerepet játszik [50],[51],[52].

A szakirodalomban megjelent cikkek egy táborá megkísérli az elektroaktív polimerek szabályozását leíró egyenleteket és modelleket előállítani [46],[47],[48].



2. ábra - Az elektroaktív anyagok főbb alkalmazási területeinek aránya 2013-ban [45]

Az elektroaktív anyagok legérdekesebb alkalmazási területe az orvosbiológia [49]. Olyan ötletekkel és fejlesztésekkel találkozhatunk, mint az intelligens gyógyszer, mely a táplálékrendszerbe kerülve automatikusan adagolja a hatóanyagot, vagy az elektroaktív anyagból készült katéter illetve kontaktlencse.

A szakirodalomban megjelenő gazdasági tanulmányok, előrejelzések biztosítják a világ kutatóit arról, hogy az elektroaktív anyagok tudománya ugyan még egy kiforratlan terület, a szórakoztató elektronikában, orvostechikában és az ipari alkalmazásokban egyaránt növekedés várható ezen termékek iránt [45].

3. FEJEZET

AZ ELMÉLETI ALAPOK ÁTTEKINTÉSE

3.1. Kontinuummechanikai összefoglaló

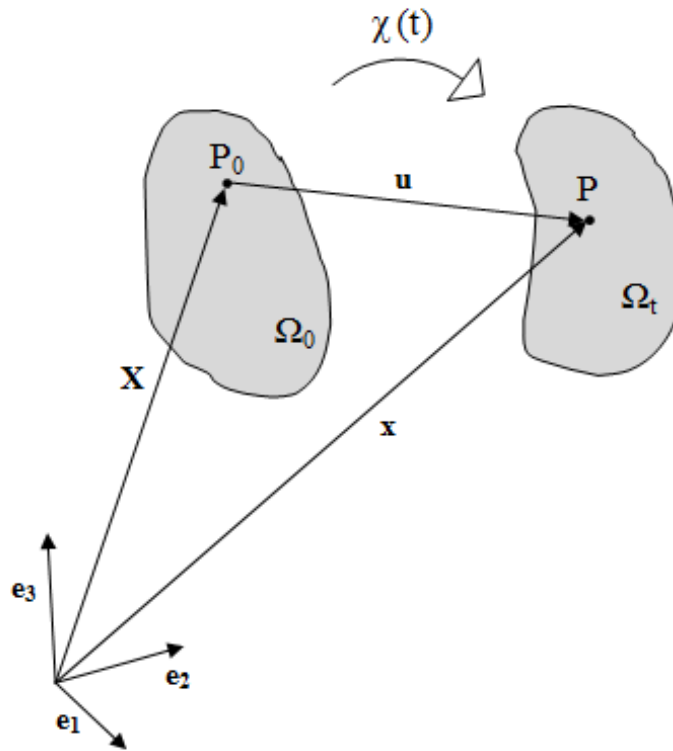
A fejezetben a dolgozat tématerületéhez kapcsolódó legfontosabb kontinuummechanika mennyiségek és alapegyenletek kerülnek bemutatásra. Az összefoglaló a következő irodalmakra támaszkodik: Holzapfel (2000), Bonet-Wood (2008) és Simo és Hughes (1987).

3.1.1. Referencia és pillanatnyi konfiguráció

A kontinuummechanika időbeli változásokat vizsgál. Az anyagi test $t = 0$ időpillanathoz tartozó állapota a kezdeti állapot (Ω_0). A kontinuummechanikai egyenletek megfogalmazásához szükség van egy olyan állapotra, amelyhez viszonyítva azok felírhatók, ennek neve referencia konfiguráció. A dolgozatban a kezdeti és referencia állapot megegyezik.

A test egy tetszőleges, $t > 0$ időpillanathoz tartozó állapota a pillanatnyi konfiguráció (Ω_t). Vizsgált test pontjait egy meghatározott időpillanatban azoknak helyvektorai határozzák meg. Ezen helyvektor jele a kezdeti konfiguráción $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$, a pillanatnyi konfiguráción $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. A pillanatnyi konfiguráción értelmezett helyvektor ekkor a $\boldsymbol{\varkappa}(\mathbf{X}, t)$ mozgásfüggvény segítségével egyértelműen felírható:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varkappa}(\mathbf{X}, t) \tag{3.1}$$



3.ábra - A kezdeti és pillanatnyi konfiguráció értelmezése

A test egy pontjának a kezdeti konfigurációban és a pillanatnyi konfigurációban értelmezett helyvektorának különbsége az elmozdulásvektor:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} . \quad (3.2)$$

3.1.2. Alakváltozási gradiens és deformációs tenzorok

A $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ mozgásfüggvény gradiense az

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.3)$$

alakváltozási gradiens, melynek determinánsa

$$J \equiv \det (\mathbf{F}) > 0. \quad (3.4)$$

Az alakváltozási gradiens segítségével a kezdeti és pillanatnyi konfiguráció összetartozó anyagi vonalelem és felületelem vektorai, valamint térfogatelemei az alábbiak szerint összerendelhetők:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}, \quad d\mathbf{a} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A}, \quad dv = J dV. \quad (3.5)$$

Itt a kisbetűvel jelzett geometriai mennyiségek a pillanatnyi, míg a nagybetűsek a referencia konfiguráción értendők.

Az alakváltozási gradiens segítségével megadható referencia konfiguráción értelmezett jobb oldali Cauchy-Green-féle deformációs tenzor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad (3.6)$$

illetve a pillanatnyi konfiguráción értelmezett a bal oldali Cauchy-Green-féle (Finger-féle) deformációs tenzor

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T. \quad (3.7)$$

3.1.3. Feszültségtenzorok

A pillanatnyi konfiguráción értelmezett $d\mathbf{f}$ erővektor és a $d\mathbf{a}$ felületelem vektor között a kapcsolatot a Cauchy-féle feszültségtenzor

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.8)$$

teremti meg.

Az első Piola-Kirchhoff-féle feszültségi tenzor ($\mathbf{T}$) a pillanatnyi konfiguráción értelmezett elemi erővektor ($d\mathbf{f}$) és a referencia konfiguráción értelmezett felületelem vektor ($d\mathbf{A}$) között teremt kapcsolatot

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T} \cdot d\mathbf{A}, \quad (3.9)$$

míg a második Piola-Kirchhoff-féle feszültségtenzor a

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.10)$$

összefüggés szerint van definiálva, ahol

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f}. \quad (3.11)$$

Ezen mennyiségek egymásba átszámolhatók a következő transzformációk segítségével:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^T = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (3.12)$$

illetve

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}. \quad (3.13)$$

3.2. Hiperelasztikus testek anyagmodelljei

A dolgozatban vizsgált testek anyagi viseelkedése hiperelasztikus modellekkel írhatók le. A következőkben röviden összefoglaljuk a hiperelasztikus testek anyagmodelljeire vonatkozó legfontosabb összefüggéseket.

A konstitutív egyenlet, esetünkben a feszültségtenzor és az alakváltozási tenzor közti kapcsolat megadható a kezdeti, a pillanatnyi konfigurációkon, valamint értelmezhető a két konfiguráció között az alábbiak szerint

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}, \quad \boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{b}, \quad \mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad (3.14)$$

ahol W az alakváltozási energia függvény.

Izotróp esetben a W függvény megadása történhet az alakváltozási tenzorok invariánsai segítségével (pl. $W(I_C, II_C, III_C)$), vagy a főnyúlásokkal ($W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$). Az előbbi esetben (3.14)₁ képlet általános alakja

$$\mathbf{S} = 2I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C}, \quad (3.15)$$

ahol I_i ($i = 1, 2, 3$) a jobb oldali Cauchy–Green-féle deformációs tenzor skalárinvariánsai:

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2), \quad I_3 = \det \mathbf{C}. \quad (3.16)$$

Szokásos még az alakváltozási energia függvényt felbontani egy térfogatváltozás mentes (isochoric vagy deviatoric rész) és egy volumetrikus részre

$$W = W_{iso}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) + W_{vol}(J), \quad (3.17)$$

ahol a $\bar{\lambda}_a$ főnyúlások a deviátoros alakváltozáshoz kapcsolhatók. Ekkor, első lépésként az

alakváltozási gradiens szorzat alakú felbontása kerül bevezetésre az

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{iso} \mathbf{F}_{vol}, \quad \mathbf{F}_{iso} = J^{-1/3} \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}_{vol} = J^{1/3} \mathbf{I} \quad (3.18)$$

formában, amely segítségével a módosított jobb oldali Cauchy–Green-féle deformációs tenzor a

$$\mathbf{C}_{iso} = \mathbf{F}_{iso}^T \mathbf{F}_{iso} = J^{-2/3} \mathbf{C}$$

képlet szerint adható meg. Így a $\mathbf{C}_{iso}$ tenzor sajátértékei: $\bar{\lambda}_a^2$.

A második Piola-Kirchhoff-féle feszültségi tenzor ekkor az

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2 \underbrace{\frac{\partial W_{vol}(J)}{\partial \mathbf{C}}}_{\mathbf{S}_{vol}} + 2 \underbrace{\frac{\partial W_{iso}(\mathbf{C}_{iso})}{\partial \mathbf{C}}}_{\mathbf{S}_{iso}} = \mathbf{S}_{vol} + \mathbf{S}_{iso}. \quad (3.19)$$

alakban adható meg, ahol az $\mathbf{S}_{vol}$ és $\mathbf{S}_{iso}$ feszültségtenzorok értelmezése:

$$\mathbf{S}_{vol} = 2 \frac{\partial W_{vol}(J)}{\partial \mathbf{C}} = J \underbrace{\frac{dW_{vol}(J)}{dJ}}_p \mathbf{C}^{-1} = Jp \mathbf{C}^{-1}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{S}_{iso} = 2 \frac{\partial W_{iso}(\mathbf{C}_{iso})}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \underbrace{\left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right)}_{\mathbb{P}} : \underbrace{2 \frac{\partial W_{iso}(\mathbf{C}_{iso})}{\partial \mathbf{C}_{iso}}}_{\bar{\mathbf{S}}} = J^{-2/3} \mathbb{P} : \bar{\mathbf{S}}. \quad (3.21)$$

Az utóbbiakban részletezett felbontáshoz kapcsolódóan néhány további összefüggést lehet megadni:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{J}{2} \mathbf{C}^{-1}, \quad \frac{\partial J^{-2/3}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{1}{3} J^{-2/3} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (J^{-2/3} \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \underbrace{\left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right)}_{\mathbb{P}^T} = J^{-2/3} \mathbb{P}^T \quad (3.23)$$

$$\text{dev} \bar{\mathbf{S}} = \mathbb{P} : \bar{\mathbf{S}} \quad (3.24)$$

$$\text{dev} \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C} = 0. \quad (3.25)$$

A linearizált variációs elvek felírásakor a fenti anyagegyenletek linearizálása is szükség van. Ez a növekményes alakban történő megadást jelenti az alábbi formában:

$$d\mathbf{S} = \mathbb{D} : d\mathbf{E}, \quad (3.26)$$

ahol $\mathbb{D}$ a negyedrendű rugalmassági érintő tenzor, melyet $\mathbf{S}$ -nek $\mathbf{E}$ szerinti deriváltja definiál

$$\mathbb{D} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}^2}. \quad (3.27)$$

A pillanatnyi konfiguráción (3.26)-nek a

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{c} : \mathbf{d}, \quad (3.28)$$

egyenlet felel meg, ahol $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ a Truesdell-féle feszültség-sebesség

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{l}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}^T + (\text{tr} \mathbf{l}) \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.29)$$

itt a $\mathbf{l}$ sebességgradiens.

3.3. Az elektromos tér mezőegyenleteinek összefoglalása

A fejezetben bemutatásra kerülnek az elektrosztatikus tér mezőegyenletei, összefüggései. A dolgozat nem érinti sem a dinamikus (időben változó) elektromos tér, sem a mágneses tér témakörét.

3.3.1. Alapfogalmak bevezetése

Az elektromos tér az annak intenzitását és irányát megadó vektorok segítségével jellemezhető. Két vektor egyértelműen definiálja az elektromos teret, míg az egyik csak a teret létrehozó hatással arányos, a másik a teret kitöltő közeg villamos tulajdonságait is figyelembe veszi. Az elektromos teret jellemző két vektor az elektromos térerősség ($\mathbf{E}$) és elektromos eltolási vektor ($\mathbf{D}$), köztük a kapcsolatot pedig az alábbi egyenlet teremti meg:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (3.30)$$

melyben ε_0 a vákuum permittivitását jelöli ($\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} [C^2 N^{-1} m^{-2}]$), $\mathbf{P}$ pedig a közeg polarizációja.

Az elektromos térerősség az elektromos potenciál (φ) gradiensének mínusz egyszerese:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{Grad}(\varphi) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{F}^T \cdot \text{grad}(\varphi). \quad (3.31)$$

A dolgozatban a $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ és $\mathbf{P}$ a kezdeti, míg a $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$ és $\mathbf{p}$ a pillanatnyi konfiguráción értelmezett

mennyiségek.

3.3.2. Az elektrosztatika első és második egyenlete

Sztatikus térben a Maxwell-egyenletek a következő alakban írhatók fel (a mágneses tér hatását figyelmen kívül hagyva):

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{rot}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Div}(\mathbf{D}) = \mathbf{div}(\mathbf{d}) = 0. \quad (3.32)$$

Elektro-elasztikus anyagtörvény modellezésénél elektromos oldalról ezen egyenleteknek kell teljesülnie.

3.4. Az elektro-elasztikus anyagmodellek bemutatása

Az elektro-elasztikus anyagok tudományos hátterében olyan energiafüggvények állnak, melyekben egyszerre vannak jelen a kontinuummechanikai illetve elektromos mennyiségek és anyagjellemzők.

A szakirodalomban található energiafüggvények mechanikai oldalról vagy az alakváltozási gradiensből ($\mathbf{F}$), vagy pedig a jobb oldali Cauchy-Green deformációs tenzortól ($\mathbf{C}$) függenek, az elektromos változó pedig egyaránt lehet az elektromos eltolási vektor ($\mathbf{D}$), a polarizációs vektor ($\mathbf{P}$), illetve az elektromos térerősség vektor ($\mathbf{E}$).

3.4.1. Összenyomható elektro-elasztikus Neo-Hooke anyagtörvény

Az elektro-elasztikus Neo-Hooke energiafüggvény Ω , a jobb oldali Cauchy-Green deformációs tenzor és az elektromos térerősség vektorának függvénye. Ez azt jelenti, hogy energiafüggvény $\mathbf{C}$ illetve $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$ invariánsainak függvénye:

$$\Omega = \Omega(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6), \quad (3.33)$$

ahol az invariánsok a következőképpen vannak definiálva:

$$I_1 = \mathbf{C} : \mathbf{I}, \quad I_2 = \mathbf{C} : \mathbf{C}, \quad I_3 = \det(\mathbf{C}), \quad (3.34)$$

$$I_4 = \mathbf{I} : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}), \quad I_5 = \mathbf{C} : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}), \quad I_6 = \mathbf{C}^2 : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}). \quad (3.35)$$

Látható, hogy míg az I_1, I_2, I_3 invariánsok a tisztán mechanikai, az I_4 a tisztán elektromos, az I_5 és I_6 invariánsok pedig a kapcsolt tagok az energiafüggvényben. Szokás az energiafüggvényt így is megadni

$$\Omega(\mathbf{C}, \mathbf{E}) = \Omega^{mech}(\mathbf{C}) + \Omega^{elect}(\mathbf{C}, \mathbf{E}). \quad (3.36)$$

Ekkor a $\Omega^{mech}(\mathbf{C})$ mechanikai, $\Omega^{elect}(\mathbf{C}, \mathbf{E})$ pedig az elektromos és kapcsolt részre vonatkozó elemeket tartalmazza.

A dolgozatban az

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{\mu}{2} [\mathbf{C} : \mathbf{I} - \ln(\det(\mathbf{C})) - 3] + \frac{\lambda}{8} [\ln(\det(\mathbf{C}))]^2 + c_1 \mathbf{I} : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) \\ & + c_2 \mathbf{C} : (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) - \frac{J \varepsilon_0}{2} \mathbf{C}^{-1} : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

energiafüggvény kerül bevezetésre [38], ahol μ és λ a Lamé-féle állandókat jelölik, míg a c_1 és c_2 paraméterek az anyag elektromos és kapcsolt tulajdonságait tartalmazzák. A fenti energiafüggvényben a mechanikai rész megfelel az összenyomható Neo-Hooke modellnek.

Az egyes feszültségtenzorok, illetve merevségi mátrix számításhoz szükséges mennyiségek a konstitutív egyenletek segítségével számíthatók:

$$\mathbf{D} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{S}^{tot} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{\Theta} = 4 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{C} \otimes \partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{\Pi} = -2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{\Gamma} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}}. \quad (3.38)$$

3.4.2. Összenyomhatatlan elektro-elasztikus Neo-Hooke anyagtörvény

Összenyomhatatlan anyagok térfogata nem változik, tehát teljesül a

$$J = 1 \quad (3.39)$$

feltétel. Felhasználva a (3.37) egyenletet az elektro-elasztikus Neo-Hooke anyagtörvény összenyomhatatlan esetre:

$$\Omega = \frac{\mu}{2} [\mathbf{C} : \mathbf{I} - 3] + c_1 \mathbf{I} : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) + c_2 \mathbf{C} : (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) - \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{C}^{-1} : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}). \quad (3.40)$$

3.5. Egyensúlyi egyenlet

Elektro-elasztikus problémáknál az egyensúlyi egyenlet [12]:

$$\operatorname{div} \left((\boldsymbol{\sigma}^{tot})^T \right) = \mathbf{0}, \quad (3.41)$$

ahol $\boldsymbol{\sigma}^{tot}$ a pillanatnyi konfiguráción értelmezett teljes feszültségtenzort jelöli, mely felbontható egy mechanikai illetve egy elektromos terhelésből keletkező feszültségtenzorra (Maxwell-feszültségi tenzor), tehát

$$\boldsymbol{\sigma}^{tot} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{Maxwell}. \quad (3.42)$$

Ekkor a teljes második Piola-Kirchhoff feszültségtenzor az ismert transzformáció felhasználásával kifejezhető

$$\mathbf{S}^{tot} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{tot} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (3.43)$$

4. FEJEZET

VÉGESELEMES SZÁMÍTÁSI MODELL

4.1. A feladatra vonatkozó virtuális munka elv

A végeselemes számítás a virtuális munka elvén alapul, mely azt mondja ki, hogy a külső és belső erők virtuális munkájának egyenlőnek kell lennie, vagyis

$$\delta W = \delta W_b - \delta W_k = 0. \quad (4.1)$$

Mivel kapcsolt feladat megoldása történik, ezért ezt az egyenletet a mechanikai és az elektromos részre egyaránt fel kell írni. *Megjegyzés: a virtuális munka elvének felírása, az egyenletekben szereplő mennyiségek és matematikai operátorok a pillanatnyi konfiguráción értendők.*

Mechanikai terhelés esetén

$$\delta W_k^m = \int_v \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv + \int_a \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, da, \quad (4.2)$$

ahol $\delta \mathbf{u}$ a virtuális elmozdulást, $\mathbf{q}$ a térfogati, $\mathbf{t}$ a felületi terhelést jelöli egységnyi térfogatra/felületre. A belső erők virtuális munkája a

$$\delta W_b^m = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \text{grad } \delta \mathbf{u} \, dv \quad (4.3)$$

kifejezéssel számolható.

Az elektromos terhelésből adódó virtuális munkánál szintén megkülönböztetünk térfogati és

felületi terhelést:

$$\delta W_k^e = \int_v \delta\varphi \varrho_0^f dv + \int_a \delta\varphi \tilde{\varrho}_0^f da, \quad (4.4)$$

ahol ϱ_0^f az egységnyi térfogatra jutó szabad töltéssűrűség, $\tilde{\varrho}_0^f$ pedig az egységnyi felületre jutó szabad töltéssűrűség, $\delta\varphi$ pedig az elektromos potenciál variációja. A belső erők munkája ekkor:

$$\delta W_b^e = \int_v \text{grad}(\delta\varphi) \cdot \mathbf{d} dv. \quad (4.5)$$

4.2. A végeselemes alapegyenletek

A végeselemes modell alapegyenlete a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{u\varphi} \\ (\mathbf{K}^{u\varphi})^T & \mathbf{K}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^u \\ \mathbf{r}^\varphi \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

alakban írható fel [37]. Az érintő merevségi mátrix négy tagból áll, a $\mathbf{K}^{uu}$, a $\mathbf{K}^{u\varphi}$ és a $\mathbf{K}^{\varphi\varphi}$ rendre az érintő merevségi mátrix mechanikai, kapcsolt és elektromos részeinek szubmátrixait jelölik.

Az ismeretlen mennyiségeket tartalmazó vektor, illetve az erővektor is két (egy mechanikai $\Delta \mathbf{u}$ ill. $\mathbf{r}^u$ és egy elektromos $\Delta \varphi$ ill. $\mathbf{r}^\varphi$) részre bontható.

A (4.6) egyenletben szereplő mennyiségek a (4.2), (4.3), (4.4) és (4.5) egyenletek linearizálása és diszkretizálása [55] után előállíthatók.

A (α, β) csomópontokhoz tartozó szubmátrixokat a következő összefüggések definiálják:

$$(\mathbf{K}^{uu})_{\alpha\beta} = \int (\mathbf{B}_\alpha^u)^T \mathbf{k}_{m,v} \mathbf{B}_\beta^u dv, \quad (4.7)$$

$$(\mathbf{K}^{u\varphi})_{\alpha\beta} = \int (\mathbf{B}_\alpha^u)^T \mathbf{k}_{me,v} \mathbf{B}_\beta^\varphi dv, \quad (4.8)$$

$$(\mathbf{K}^{\varphi\varphi})_{\alpha\beta} = \int (\mathbf{B}_\alpha^\varphi)^T \mathbf{k}_{e,v} \mathbf{B}_\beta^\varphi dv, \quad (4.9)$$

amely egyenletekben a $\mathbf{k}_{m,v}$, $\mathbf{k}_{me,v}$ és $\mathbf{k}_{e,v}$ mátrixok a konstitutív egyenletek (3.38) pillanatnyi konfigurációra való transzformáltjainak Voigt-jelölés szerinti mátrixai (részletes leírás az A3.3-as mellékletben).

A $\mathbf{B}_i^u$ és $\mathbf{B}_i^\varphi$ mátrixok az elmozdulás-alakváltozás kapcsolatot leíró (megadó) transzformációs mátrixok, amelyek összhangban állnak a geometria egyenletekkel

$$\mathbf{B}_i^u = \begin{bmatrix} N_{i,1}^u & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,2}^u & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,3}^u \\ N_{i,2}^u & N_{i,1}^u & 0 \\ 0 & N_{i,3}^u & N_{i,2}^u \\ N_{i,3}^u & 0 & N_{i,1}^u \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

illetve

$$\mathbf{B}_i^\varphi = \begin{bmatrix} N_{i,1}^u \\ N_{i,2}^u \\ N_{i,3}^u \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Az egyenletekben megjelenő $N_{i,1}^u, N_{i,2}^u$ illetve $N_{i,3}^u$ mennyiségek a formafüggvények globális deriváltjai.

A $\mathbf{k}_m$ tenzor felbontható anyagi és geometriai részre:

$$\mathbf{k}_m = \mathbf{k}_m^{mat} + \mathbf{k}_m^{geom}. \quad (4.12)$$

Pillanatnyi konfigurációra való transzformálás után:

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}_m^{mat})_{ijkl} &= \frac{1}{J} F_{iI} F_{jJ} \Theta_{IJKL} F_{kK} F_{lL}, \\ (\mathbf{k}_m^{geom})_{ijkl} &= \delta_{ik} \sigma_{jl}^{tot}, \\ (\mathbf{k}_{me})_{ijk} &= \frac{1}{J} F_{iI} \Pi_{IJK} F_{jJ} F_{kK}, \\ (\mathbf{k}_e)_{ij} &= \frac{1}{J} F_{iI} \Gamma_{IJ} F_{jJ}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

A (4.6) egyenlet jobb oldalán található mennyiség kifejezhető a belső és külső erővektor különbségével:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}^u \\ \mathbf{r}^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^u \\ \mathbf{f}^\varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{s}^u \\ \mathbf{s}^\varphi \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

A belső erővektor felépítése egy elemre:

$$\mathbf{s}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_e^u \\ \mathbf{s}_e^\varphi \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

ahol $(\boldsymbol{\sigma}_v^{tot}$ a pillanatnyi konfiguráción értelmezett teljes feszültségtenzor Voigt-féle átírását jelöli)

$$\mathbf{s}_e^u = \int (\mathbf{B}_e^u) \boldsymbol{\sigma}_v^{tot} dv, \quad (4.16)$$

illetve

$$\mathbf{s}_e^\varphi = \int (\mathbf{B}_e^\varphi)^T \mathbf{d}_v dv, \quad (4.17)$$

míg a külső terhelés vektora egy elemre

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e^u \\ \mathbf{f}_e^\varphi \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

ahol

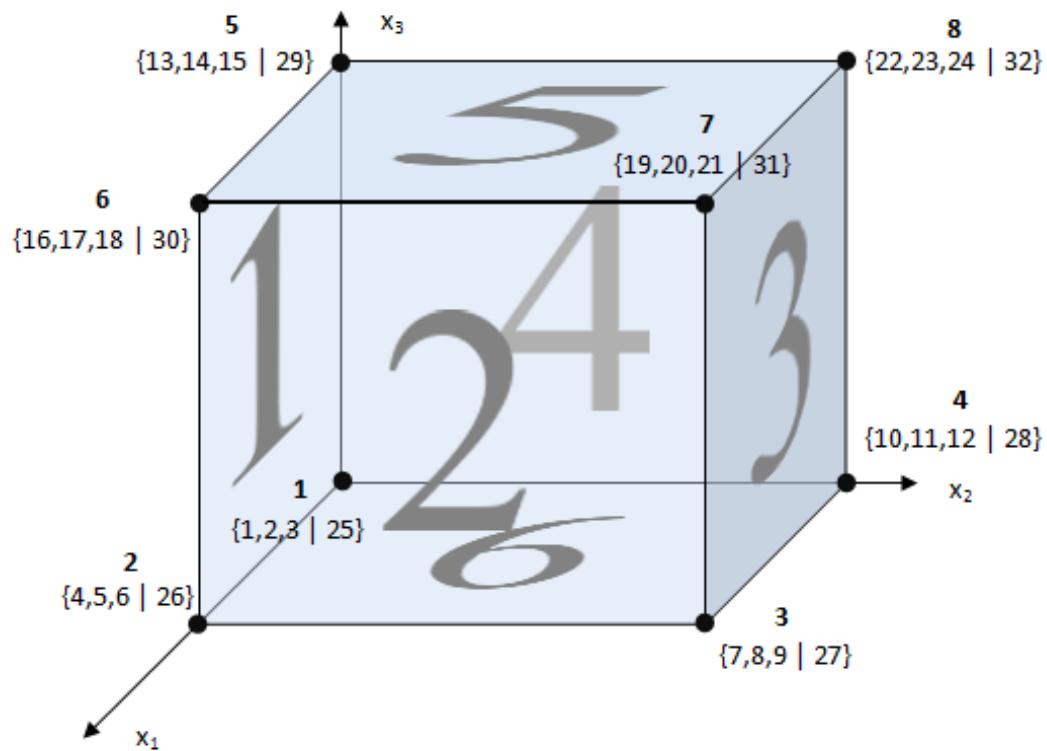
$$\mathbf{f}_e^u = \int_{\partial B_t^e} (\mathbf{N}_e^u)^T \boldsymbol{\sigma}^{tot} \cdot \mathbf{n} da + \int_{B_t^e} (\mathbf{N}_e^u)^T \mathbf{b}_t dv, \quad (4.19)$$

illetve

$$\mathbf{f}_e^\varphi = \int_{\partial B_t^e} (\mathbf{N}_e^\varphi)^T \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} da + \int_{B_t^e} (\mathbf{N}_e^\varphi)^T \varrho_t^f dv. \quad (4.20)$$

4.3. A végeselemes modell és a számítási eljárás rövid ismertetése

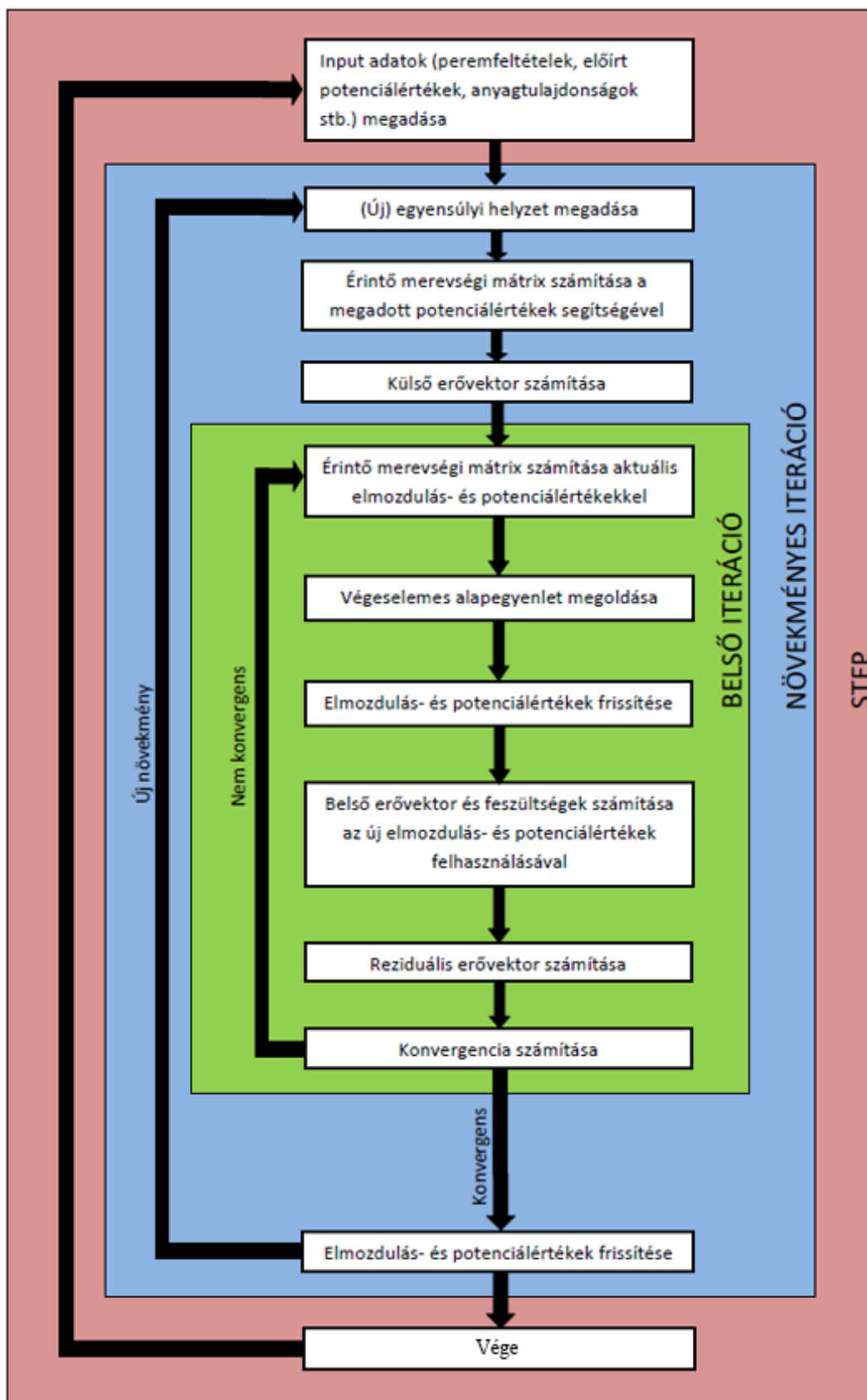
A végeselemes számításoknál nyolccsomópontos térbeli, lineáris, izoparaméteres elem került felhasználásra [53],[54]. Egy csomópont négy szabadságfokkal rendelkezik (három irányban történő elmozdulás és elektromos potenciál), így egy elem szabadságfokainak száma 32. A szabadságfokok számozását a 4.ábra mutatja. A függőleges szakasz előtti három szabadságfok a három irányban történő elmozdulás, míg a függőleges utáni az elektromos potenciál szabadságfoka.



4. ábra - Nyolccsomópontos térbeli, lineáris, izoparaméteres elem szabadságfokainak számozása

A merevségi mátrix számítása $2 \times 2 \times 2$ -es Gauss integrálással történt [54].

A számítások során az előírt elektromos potenciál értékek megadásával a modell mechanikai választ adott elektromos terhelésre. Az iteráció menetét az 5. ábra szemlélteti. A számításhoz szükséges konvergencia vizsgálat a reziduális erő normájának vizsgálatával történt, hibahatár beállításával.



5. ábra - A számítás algoritmusának folyamatábrája

5. FEJEZET

MINTAPÉLDÁK

A példánál az elektro-elasztikus Neo-Hooke anyagtörvény utolsó, ε_0 -t tartalmazó tagja elhanyagolhatóan kicsi (a felhasznált anyagparaméterek mellett) a többi taghoz képest, így attól az analitikus számítás során eltekintettünk.

5.1. Egytengelyű nyújtás

Az első feladatban egy egységnyi oldalélű kockát vizsgálunk, melynek az x_1 tengelyre merőleges oldallapjai között elektromos potenciál különbség van. Figyelembe véve, hogy a deformáció homogén és a potenciál lineárisan változik az x_1 koordináta mentén, az elektromos térerősség vektora

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

ahol $\Delta\varphi$ a potenciál különbséget jelöli, melynek függvényében szeretnénk meghatározni a kocka deformációját. A feladat megoldása csak a

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu}{J} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\delta}) + \frac{\lambda}{J} \ln J \boldsymbol{\delta} + 2 \frac{c_2}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{E} \otimes \mathbf{F} \cdot \mathbf{E}. \quad (5.2)$$

konstitutív egyenlet vizsgálatát igényli, mivel az egyensúlyi egyenletek automatikusan teljesülnek.

A geometria peremfeltételek megadása alapján az alábbi három esetet fogjuk elemezni:

A A mozgás minden irányban szabad. Ekkor nem ébred feszültség és az előírt potenciálmező alapján az x_2 és x_3 irányú elmozdulások azonosak. A főnyúlások: λ_1 és $\lambda_2 = \lambda_3$. A

feszültségek: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$.

B Sík-alakváltozási állapot. Ekkor a x_2 irányú elmozdulás gátolt és feszültség fog ébredni ebben az irányban. A főnyúlások: $\lambda_1, \lambda_2 = 1, \lambda_3$. A feszültségek: $\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0, \sigma_{22} \neq 0$.

C Mind az x_2 , mind az x_3 irányú elmozdulás gátolt. Csak x_1 irányú elmozdulás jön létre. A főnyúlások: $\lambda_1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$. A feszültségek: $\sigma_{11} = 0, \sigma_{33} \neq 0, \sigma_{22} \neq 0$.

5.1.1. Analitikus megoldások

A eset ($\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3$)



Ebben az esetben az alakváltozási gradiens mátrixa

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

alakú. A szimmetria miatt $\lambda_2 = \lambda_3$, így $J = \lambda_1 \lambda_2^2$. Az (5.2) konstitutív egyenlet az alábbi két egyenletre vezet

$$\sigma_{11} = \frac{\mu}{\lambda_1 \lambda_2^2} (\lambda_1^2 - 1) + \frac{\lambda}{\lambda_1 \lambda_2^2} \ln (\lambda_1 \lambda_2^2) + 2 \frac{c_2}{\lambda_1 \lambda_2^2} \lambda_1^2 (\Delta \varphi)^2, \quad (5.4)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\mu}{\lambda_1 \lambda_2^2} (\lambda_2^2 - 1) + \frac{\lambda}{\lambda_1 \lambda_2^2} \ln (\lambda_1 \lambda_2^2). \quad (5.5)$$

Mivel a mozgás egyik irányban sem gátolt, így nem ébred feszültség, vagyis $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$. Célunk a $\lambda_1 = f(\Delta \varphi)$, illetve a $\lambda_2 = f(\Delta \varphi)$ függvények meghatározása. A megoldás első lépéseként a fenti két egyenletet vonjuk ki egymásból

$$\mu (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + 2c_2 \lambda_1^2 (\Delta \varphi)^2 = 0, \quad (5.6)$$

majd fejezzük λ_2^2 -t

$$\lambda_2^2 = \lambda_1^2 \frac{\mu + 2c_2 (\Delta \varphi)^2}{\mu}. \quad (5.7)$$

Ezt az eredményt felhasználva az (5.4) egyenletből

$$\begin{aligned} \mu (\lambda_1^2 - 1) + \lambda \ln \left(\lambda_1^3 \frac{\mu + 2c_2 (\Delta\varphi)^2}{\mu} \right) + 2c_2 \lambda_1^2 (\Delta\varphi)^2 &= 0 \\ \underbrace{\lambda_1^2 \frac{2(\mu + 2c_2 (\Delta\varphi)^2)}{3\lambda}}_a + \ln \lambda_1^2 + \underbrace{\frac{2}{3} \left[\ln \left(\frac{\mu + 2c_2 (\Delta\varphi)^2}{\mu} \right) - \frac{\mu}{\lambda} \right]}_b &= 0 \\ a\lambda_1^2 + \ln \lambda_1^2 + b &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

adódik.

A fenti levezetés végén kapott $a\lambda_1^2 + \ln \lambda_1^2 + b = 0$ alakú egyenletet a Lambert-féle függvény segítségével meg tudjuk oldani zárt alakban:

$$a\lambda_1^2 + b + \ln \lambda_1^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{ae^{-b}}_z = \underbrace{a\lambda_1^2}_{W(z)} e^{\overbrace{a\lambda_1^2}^{W(z)}} \quad \rightarrow \quad z = W(z) e^{W(z)}, \quad (5.9)$$

ahol $W(z)$ a Lambert-féle függvény (a Mathematicában használt elnevezése: ProductLog). A megoldás így a

$$W(z) = \text{ProductLog}[z] \quad (5.10)$$

alapján

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\text{ProductLog}[ae^{-b}]}, \quad (5.11)$$

ahol az előbbiek szerint

$$a = \frac{2(\mu + 2c_2 (\Delta\varphi)^2)}{3\lambda}, \quad b = \frac{2}{3} \left[\ln \left(\frac{\mu + 2c_2 (\Delta\varphi)^2}{\mu} \right) - \frac{\mu}{\lambda} \right]. \quad (5.12)$$

A keresett elmozdulásfüggvények pedig

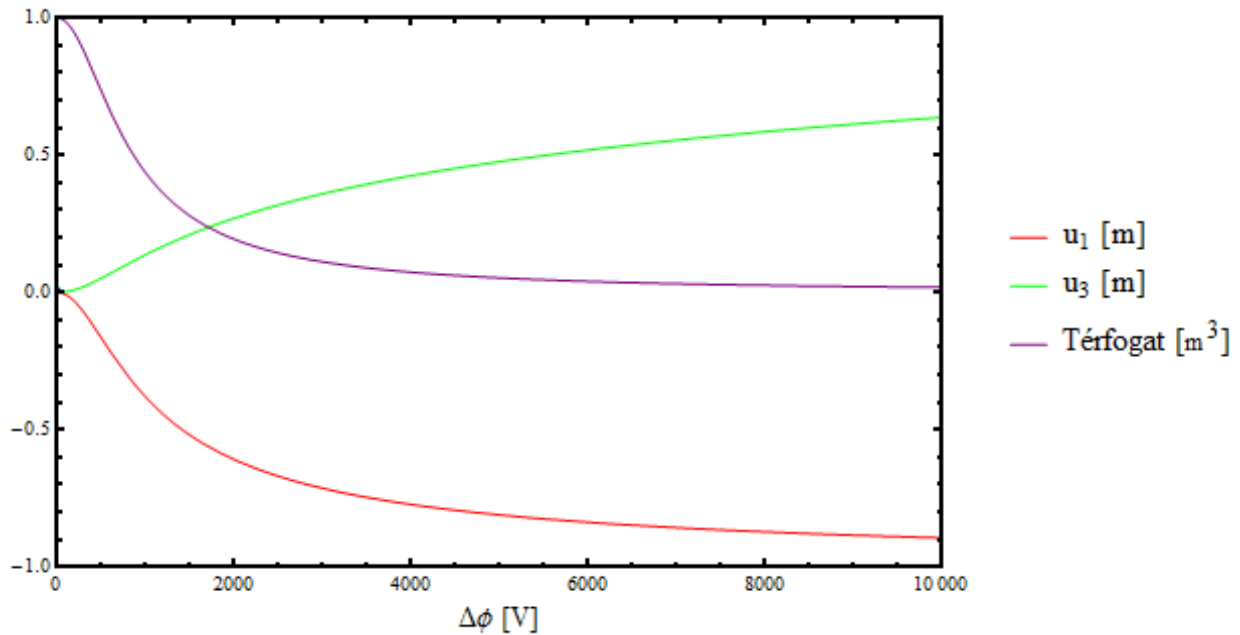
$$u_1(\Delta\varphi) = \lambda_1(\Delta\varphi) - 1, \quad (5.13)$$

illetve

$$u_2(\Delta\varphi) = u_3(\Delta\varphi) = \lambda_2(\Delta\varphi) - 1. \quad (5.14)$$

Az elmozdulásértékeket a potenciálkülönbség függvényében a 6. ábra mutatja (az ábra elkészítése

során a 2. táblázat anyagjellemzői lettek felhasználva).



6. ábra - Az elmozdulás és térfogat ábrázolása a potenciálkülönbség függvényében

B eset ($\lambda_1, \lambda_2 = 1, \lambda_3$)



Az alakváltozási gradiens mátrixa és determinánsa

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad J = \lambda_1 \lambda_3. \quad (5.15)$$

A konstitutív egyenletek ekkor:

$$\sigma_{11} = \frac{\mu}{\lambda_1 \lambda_3} (\lambda_1^2 - 1) + \frac{\lambda}{\lambda_1 \lambda_3} \ln(\lambda_1 \lambda_3) + 2 \frac{c_2}{\lambda_1 \lambda_3} \lambda_1^2 (\Delta\varphi)^2, \quad (5.16)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\lambda}{\lambda_1 \lambda_3} \ln(\lambda_1 \lambda_3), \quad (5.17)$$

$$\sigma_{33} = \frac{\mu}{\lambda_1 \lambda_3} (\lambda_3^2 - 1) + \frac{\lambda}{\lambda_1 \lambda_3} \ln(\lambda_1 \lambda_3). \quad (5.18)$$

A cél a $\lambda_1 = f(\Delta\varphi)$, $\lambda_3 = f(\Delta\varphi)$ illetve $\sigma_{22} = f(\Delta\varphi)$ függvények meghatározása. Mivel a mozgás csak az egyik irányban gátolt, a másik két irányban nem keletkezik feszültség:

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0. \quad (5.19)$$

Hasonlóan az A eset megoldásához vonjuk ki a (5.16) és (5.18) egyenleteket egymásból

$$\mu (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) + 2c_2 \lambda_1^2 (\Delta\varphi)^2 = 0. \quad (5.20)$$

Ebből λ_3 kifejezhető

$$\lambda_3 = \lambda_1 \sqrt{\frac{\mu + 2c_2 (\Delta\varphi)^2}{\mu}}. \quad (5.21)$$

Ezt a kifejezést beírva a (5.16) egyenletbe

$$\begin{aligned} \mu (\lambda_1^2 - 1) + \lambda \ln \left(\lambda_1^2 \sqrt{\frac{\mu + 2c_2 (\Delta\varphi)^2}{\mu}} \right) + 2c_2 \lambda_1^2 (\Delta\varphi)^2 &= 0 \\ \underbrace{\lambda_1^2 \left(\frac{\mu + 2c_2 (\Delta\varphi)^2}{\lambda} \right)}_a + \ln \lambda_1^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\mu + 2c_2 (\Delta\varphi)^2}{\mu} \right) - \frac{\mu}{\lambda}}_b &= 0 \\ a \lambda_1^2 + \ln \lambda_1^2 + b &= 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Ez az egyenlet az A esethez hasonlóan a Lambert-féle függvény segítségével zárt alakban megoldható, eredményként

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\text{ProductLog}[ae^{-b}]} \quad (5.23)$$

adódik, ahol

$$a = \frac{\mu + 2c_2 (\Delta\varphi)^2}{\lambda}, \quad b = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\mu + 2c_2 (\Delta\varphi)^2}{\mu} \right) - \frac{\mu}{\lambda}. \quad (5.24)$$

Ezután a $\lambda_3(\Delta\varphi)$ és $\sigma_{22}(\Delta\varphi)$ függvények a (5.17), (5.21) és (5.23) egyenletek segítségével meghatározhatók.

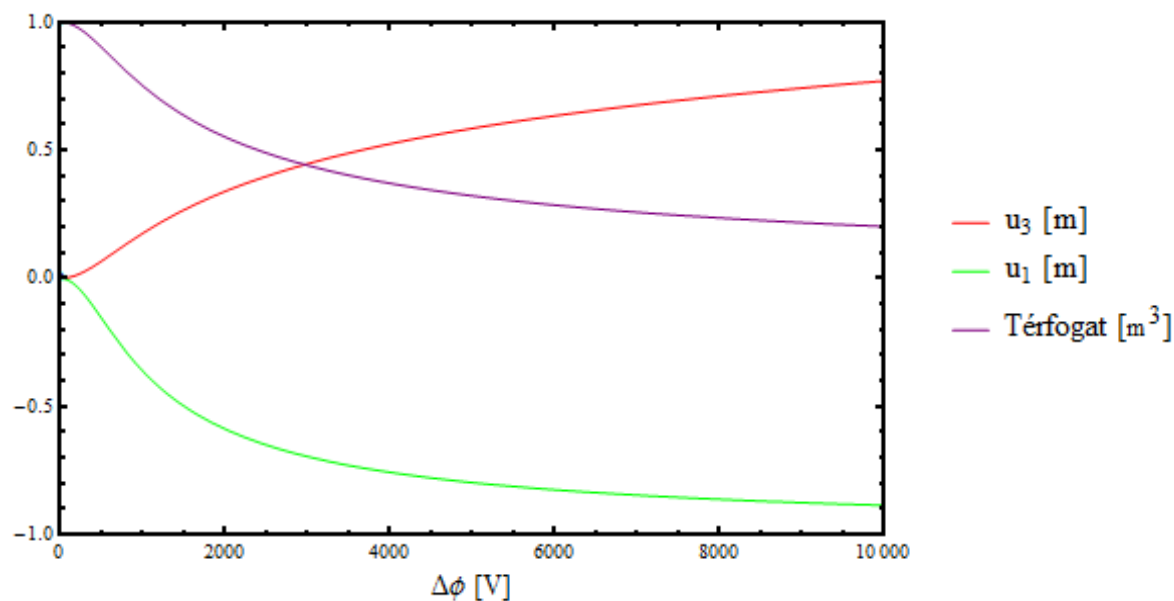
A keresett elmozdulásfüggvények:

$$u_1(\Delta\varphi) = \lambda_1(\Delta\varphi) - 1, \quad (5.25)$$

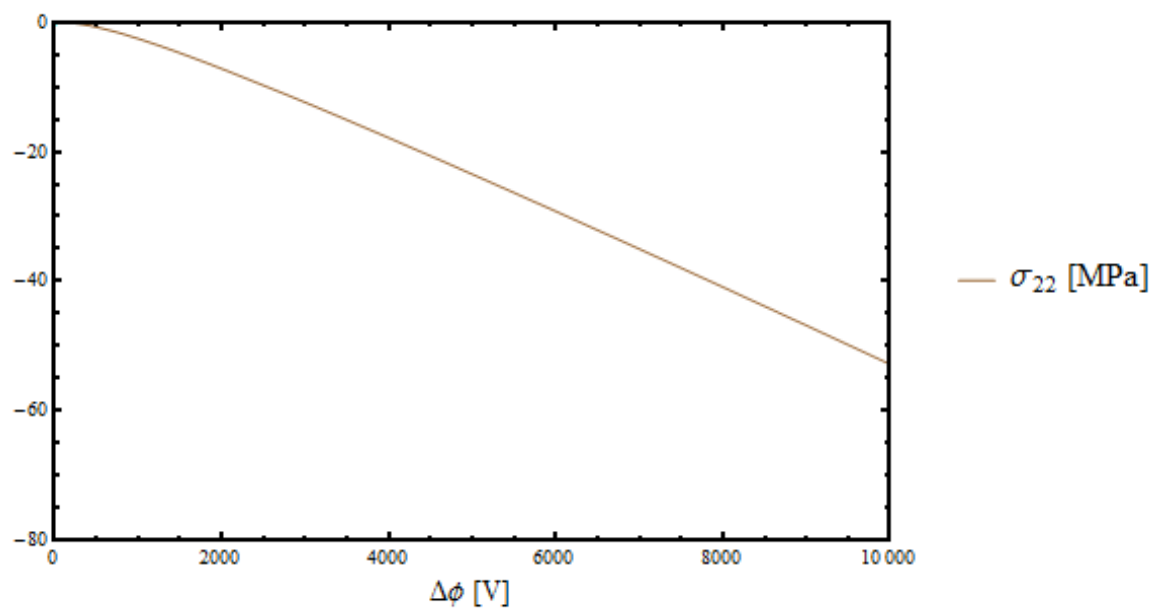
illetve

$$u_3(\Delta\varphi) = \lambda_3(\Delta\varphi) - 1. \quad (5.26)$$

Az elmozdulás- és feszültségértékeket a potenciálkülönbség függvényében a 7. és 8. ábrák mutatják (az ábrák elkészítése során a 2. táblázat anyagjellemzői lettek felhasználva).



7. ábra - Az elmozdulás és térfogat ábrázolása a potenciálkülönbség függvényében



8. ábra - A feszültség ábrázolása a potenciálkülönbség függvényében

C eset ($\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$)



Ebben az esetben az alakváltozási gradiens mátrixa és determinánsa

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \lambda_1 \quad (5.27)$$

alakú.

A konstitutív egyenletek ekkor:

$$\sigma_{11} = \mu\lambda_1 - \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\lambda}{\lambda_1} \ln(\lambda_1) + 2c_2\lambda_1 (\Delta\varphi)^2, \quad (5.28)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \ln(\lambda_1). \quad (5.29)$$

A főirányban nincs gátolva a mozgás, ezért nem keletkezik feszültség, tehát

$$\mu\lambda_1 - \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\lambda}{\lambda_1} \ln(\lambda_1) + 2c_2\lambda_1 (\Delta\varphi)^2 = 0 \quad (5.30)$$

egyenlet adódik.

Ezt rendezve a

$$\lambda_1^2 \underbrace{\left(\frac{2\mu}{\lambda} + 4 \frac{c_2\mu (\Delta\varphi)^2}{\lambda} \right)}_a + \ln(\lambda_1^2) - \underbrace{\frac{2\mu}{\lambda}}_b = 0 \quad (5.31)$$

$$a\lambda_1^2 + \ln \lambda_1^2 + b = 0 \quad (5.32)$$

alakú egyenletet kapjuk, mely az előző esetekhez hasonlóan a Lambert-féle függvény segítségével zárt alakban megoldható:

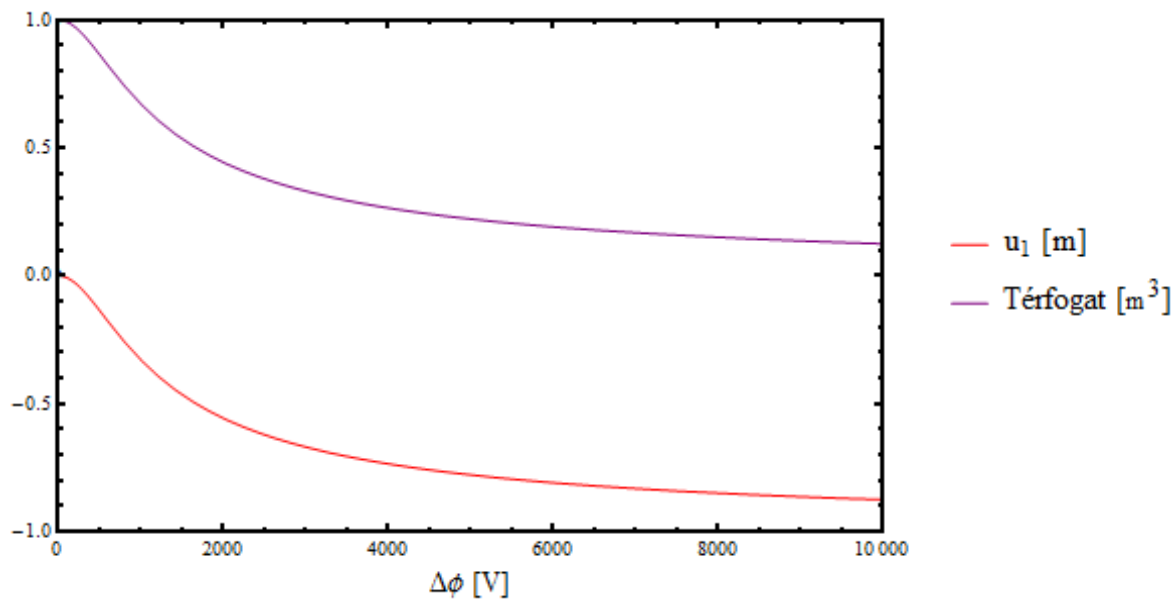
$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\text{ProductLog}[ae^{-b}]} \quad (5.33)$$

ahol

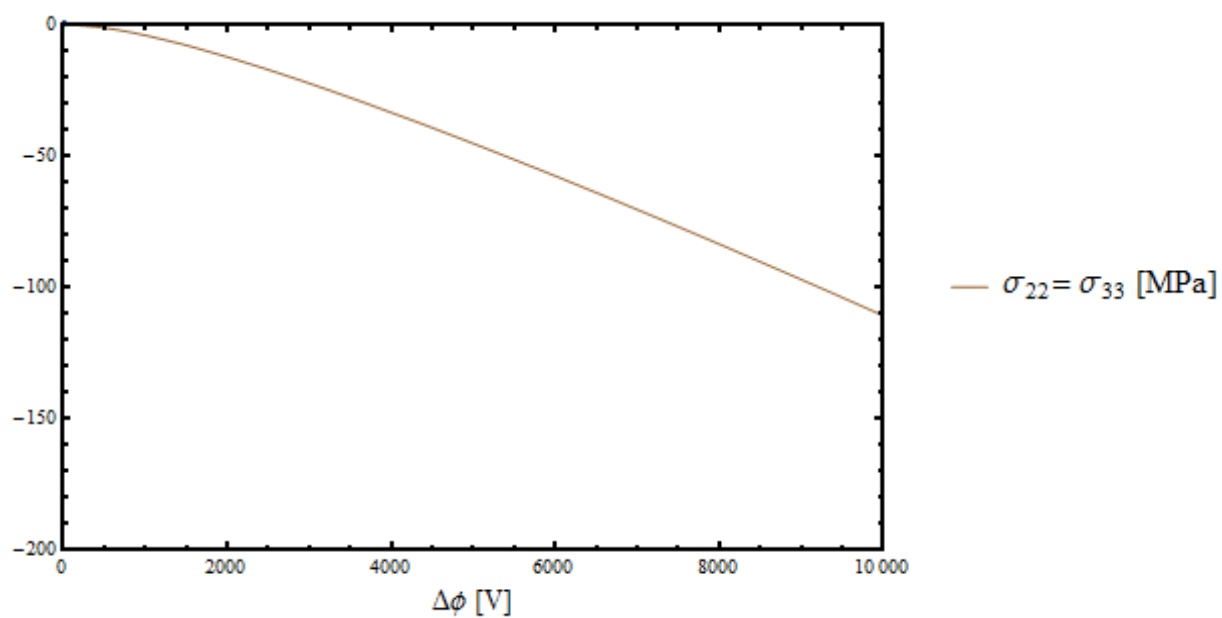
$$a = \frac{2\mu}{\lambda} + 4 \frac{c_2\mu (\Delta\varphi)^2}{\lambda}, \quad b = -\frac{2\mu}{\lambda}. \quad (5.34)$$

A keresett elmozdulásfüggvény:

$$u_1(\Delta\varphi) = \lambda_1(\Delta\varphi) - 1. \quad (5.35)$$



9. ábra - Az elmozdulás és térfogat ábrázolása a potenciálkülönbség függvényében



10. ábra - A feszültség ábrázolása a potenciálkülönbség függvényében

A $\sigma_{22}(\Delta\varphi)$ és $\sigma_{33}(\Delta\varphi)$ függvények a (5.29) és (5.33) egyenletek segítségével meghatározhatók. Az elmozdulás- és feszültségértékeket a potenciálkülönbség függvényében a 9. és 10. ábra mutatja (az ábrák elkészítése során a 2. táblázat anyagjellemzői lettek felhasználva).

Egytengelyű nyújtás eredményeinek összefoglalása

A három eset eredményeit a következő táblázat foglalja össze.

$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\text{ProductLog}[ae^{-b}]}$		
	a	b
A	$\frac{2(\mu + 2c_2(\Delta\varphi)^2)}{3\lambda}$	$\frac{2}{3} \left[\ln \left(\frac{\mu + 2c_2(\Delta\varphi)^2}{\lambda} \right) - \frac{\mu}{\lambda} \right]$
B	$\frac{\mu + 2c_2(\Delta\varphi)^2}{\lambda}$	$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\mu + 2c_2(\Delta\varphi)^2}{\lambda} \right) - \frac{\mu}{\lambda}$
C	$\frac{2\mu}{\lambda} (\mu + 2c_2(\Delta\varphi)^2)$	$\frac{2\mu}{\lambda}$

1. táblázat - Az egytengelyű nyújtás eredményeinek összefoglalása

5.1.2. Az analitikus és a végeselemes eredmények összehasonlítása

A végeselemes számítási modellt az 4. ábra mutatja. Az anyagjellemzőket a 2. táblázat tartalmazza.

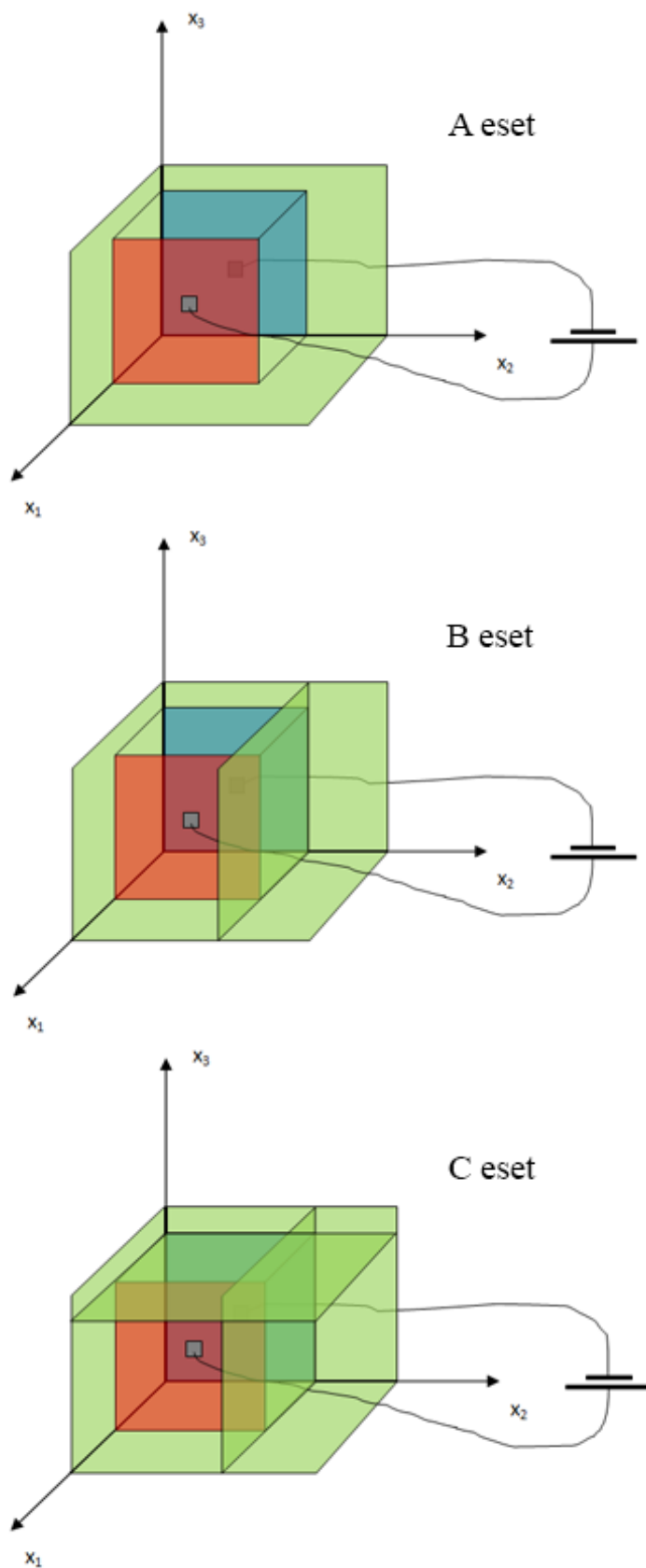
$$\mu = 5 \cdot 10^6 \text{ [Pa]}, \quad \lambda = \frac{20}{3} \cdot 10^6 \text{ [Pa]}, \quad c_1 = 10 \left[\frac{\text{Pa m}^2}{\text{V}^2} \right], \quad c_2 = 6 \left[\frac{\text{Pa m}^2}{\text{V}^2} \right]$$

2. táblázat - Felhasznált anyagjellemzők

A végeselemes számításokhoz egy elem lett felhasználva, a különböző esetekhez tartozó peremfeltételeket a 3. táblázat foglalja össze.

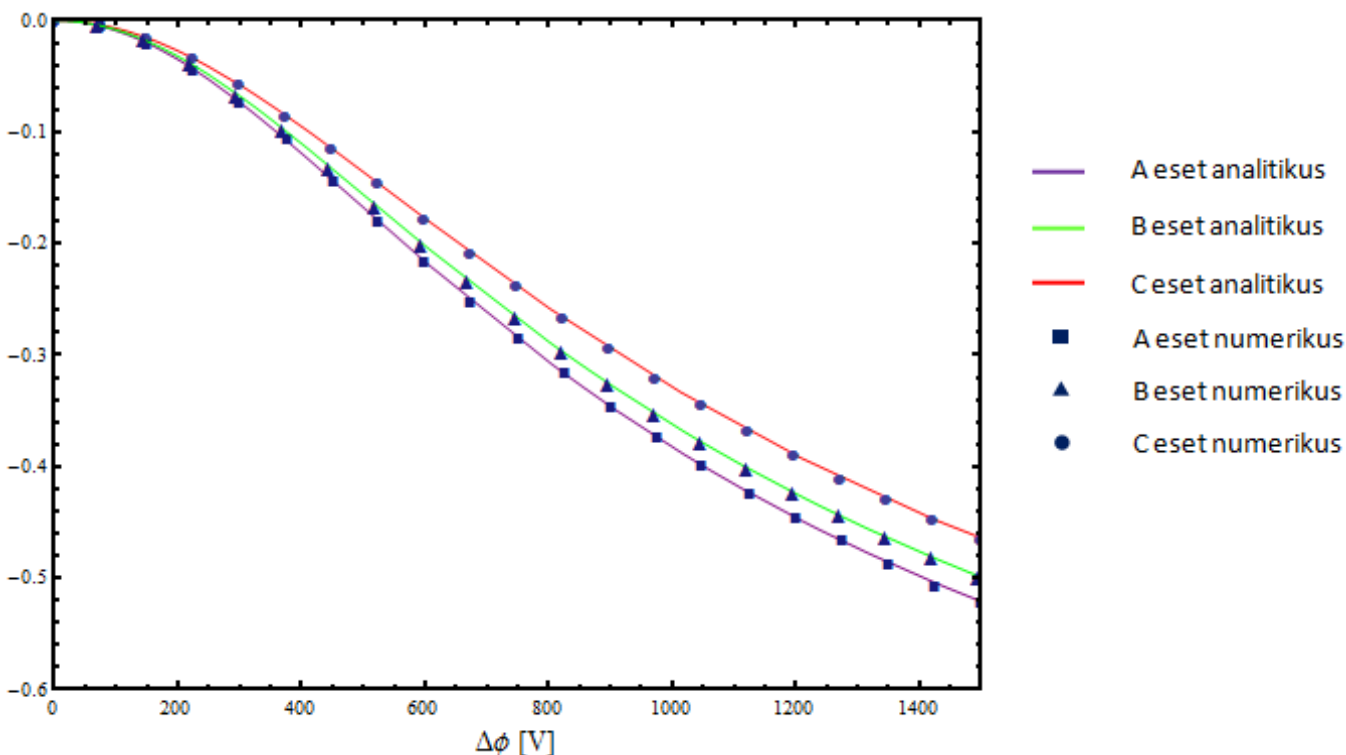
Peremfeltétel	A eset	B eset	C eset
Megtámasztott felületet (a felületet normálisának irányában gátolt az elmozdulás)	1	1	1
	4	4	4
	6	6	6
		3	3
			5
Előírt potenciál értéke a felületen $\varphi = 100 \text{ [V]}$	2	2	2
Előírt potenciál értéke a felületen $\varphi = -100 \text{ [V]}$	4	4	4

3. táblázat - Peremfeltételek összefoglalása



11. ábra - A peremfeltételek és a terhelés ábrázolása az egyes esetekre. A zöld színű sík a felületre merőleges megtámasztást, a pirossal és kézzel befestett felületek pedig az előírt potenciált jelölik.

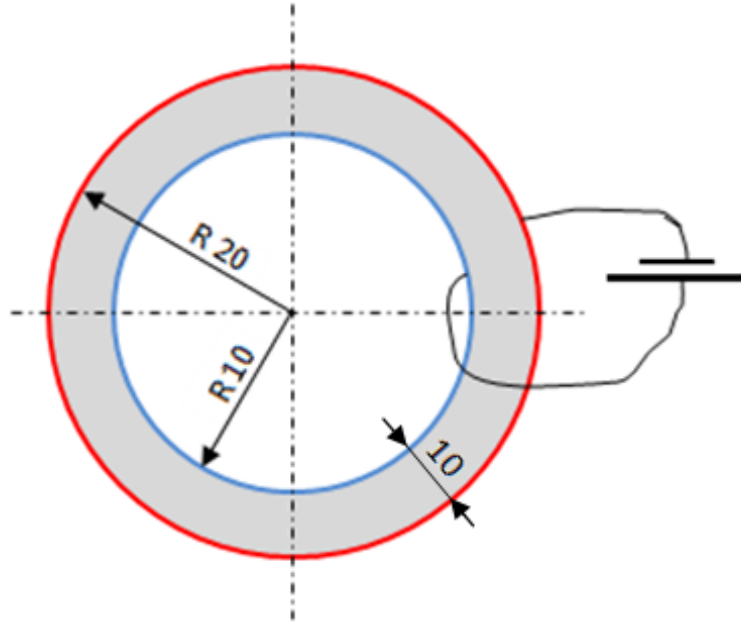
Az analitikus és numerikus eredmények összehasonlítását a 12. ábra mutatja.



12. ábra - Az egyes esetek analitikus és numerikus eredményeinek összehasonlítása a főirányú elmozdulások ábrázolásával. A diagram függőleges tengelyének értékei [m]-ben értendők.

5.2. Vastag falú cső

A vastag falú cső példájának analitikus megoldása megtalálható a [37] munkában. A szerzővel közvetlen munkakapcsolatban állunk, az analitikus megoldását rendelkezésünkre bocsátotta, ezt hasonlítottuk össze az általunk fejlesztett végeselemes eljárás eredményével. A megoldás során azt az esetet vizsgáltuk, melynél a cső belső és külső falának is gátolt az elmozdulása, továbbá a külső és belső felületen ellentétes értékű potenciálértékek vannak előírva. A felhasznált konstansokat a 2. táblázat tartalmazza.



13. ábra - Vastag falú cső terhelésének ábrázolása

5.2.1. Analitikus megoldás

Az analitikus megoldás során a különböző mennyiségek felírása henger-koordinátarendszerben történt. A megoldás levezetésétől eltekintünk, csupán a végeredményt közöljük, mely egy másodrendű differenciálegyenlet rendszer [37]:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[-R \left(c_1 + c_2 \left(\frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] = 0 \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial \left[R \left(\mu \frac{\partial r}{\partial R} - \frac{\mu}{\frac{\partial r}{\partial R}} + \frac{\lambda \ln \left(\frac{\partial r}{\partial R} \frac{r}{R} \right)}{\frac{\partial r}{\partial R}} + 2c_2 \frac{\partial r}{\partial R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right)^2 \right) \right]}{\partial R} = \frac{\mu r}{R} + \frac{R \left(-\mu + \lambda \ln \left(\frac{\partial r}{\partial R} \frac{r}{R} \right) \right)}{r}$$

mely az

$$r(10) = 10 \text{ [mm]}, \quad (5.37)$$

$$r(20) = 20 \text{ [mm]}, \quad (5.38)$$

$$\varphi(10) = -5 \text{ [V]}, \quad (5.39)$$

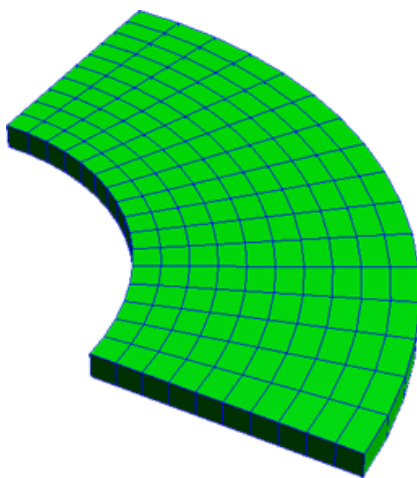
$$\varphi(20) = 5 \text{ [V]}, \quad (5.40)$$

peremfeltételekkel egy numerikusan megoldható peremérték feladatot alkot $r(R)$ és $\varphi(R)$ függvényekre, ahol

$$r(R) = R + u(R). \quad (5.41)$$

5.2.2. Az analitikus és a végeselemes eredmények összehasonlítása

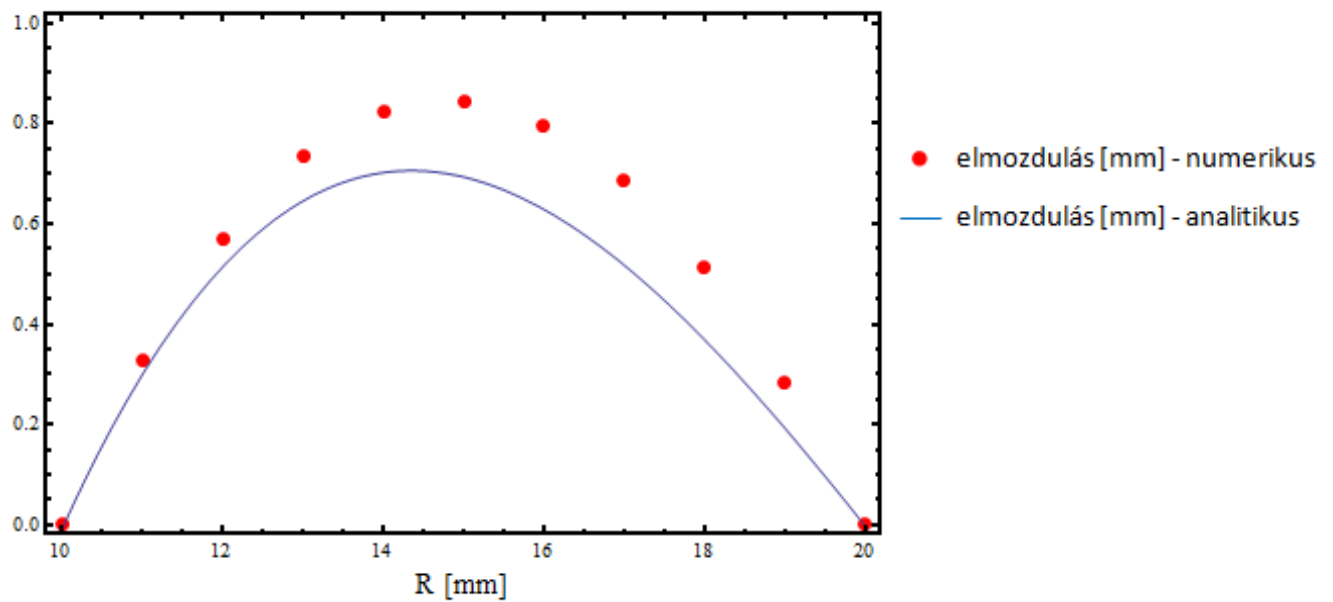
A végeselemes számításnál a szimmetria miatt negyedmodell vizsgálata célszerű, ez 160 elem (374 csomópont) felhasználásával történt (14. ábra), a méretek megegyeznek a 13. ábrán feltüntetett értékekkel.



14. ábra - Negyedmodell hálójának ábrázolása*

* A végeselemes háló Hénop Gábor segítségével, Ansys program felhasználásával történt.

Az analitikus és végeselemes számítás összehasonlítását a 15. ábra mutatja.



15. ábra - A vastagfalú cső példájának analitikus és numerikus eredményeinek összehasonlítása

Az analitikus és végeselemes számítás eredménye láthatóan jellegetegre egyezik, az értékekben viszont eltérés tapasztalható. Ez a probléma az elemszám növelésével nagy valószínűséggel javítható, de ez jelen TDK munka keretében nem volt megoldható.

6. FEJEZET

ÖSSZEFOGLALÁS

6.1. A dolgozat eredményeinek összefoglalása

A dolgozat alapkutatásnak feleltethető meg, célja a téma alapegyenleteinek tisztázása, szakirodalmának feltérképezése, illetve kapcsolt, nemlineáris számításokra alkalmas végeselemes algoritmus fejlesztése.

A végeselemes eljárást Wolfram Mathematica programban fejlesztettük. A szakirodalomban megtalálható összenyomható elektro-elasztikus Neo-Hooke anyagmodell energiafüggvényéből kiindulva tenzoranalízis segítségével állítottuk elő a konstitutív egyenleteket, majd ezeket beépítettük a végeselemes eljárásba. A fejlesztés során több programozási módszert is kipróbáltunk a merevségi mátrix és belső erővektor számításánál, míg végül a leggyorsabbat megtaláltuk. A tenzorok megadása először indexesen történt, ám hiába járt viszonylag kevés munkával, a számolás olyan lassú volt, hogy megbecsülhető időn belül nem adott eredményt. Második próbálkozásra a különböző mennyiségeket szimbolikusan számoltuk, ez gyorsabb módszernek bizonyult, viszont volt egy nagy hátránya: a Mathematica programban nem voltak olyan modulok előre definiálva, amelyek összetett tenzor- és vektorszorzatokat kezelni tudnak, így ezeket el kellett készíteni. A harmadik megoldás bizonyult a leggyorsabbnak: a különböző tenzorokat előre elkészítettük mátrixos alakban, majd a végeselem programnak a számításnál már rendelkezésre álltak ezek a mennyiségek, így a számítási idő rohamosan lecsökkent. Ezen számítás további előnye, hogy ciklusok segítségével könnyen programozható.

A végeselem algoritmust egyszerű, analitikus úton is levezethető terhelési esetek megoldásaival validáltuk, a numerikus és analitikus számítások jó egyezést mutattak. A vastagfalú cső példája megmutatta, hogy a Mathematica program numerikus alkalmazásának vannak határai.

6.2. Az eredmények továbbfejlesztésének lehetőségei

A dolgozatban használt fizikai modellnél a mágneses illetve termikus hatások figyelmen kívül lettek hagyva, ezeknek a modellbe történő beépítése nagy valószínűséggel pontosabban leírja ezen anyagok viselkedését.

Mivel a kereskedelemben még nem találkozhatunk nagy számban elektroaktív polimerekkel, ezért eddig többnyire az elméleti modellek fejlesztése került előtérbe, a modellek validálásával viszont csak pár publikáció foglalkozik, ezért nagy lehetőség van különböző anyagok energiafüggvényeinek meghatározásában, illetve a már meghatározott energiafüggvények felhasználásával elkészített végeselemes szimulációk validálásában.

A végeselemes algoritmus egyelőre nem tudja kezelni az összenyomhatatlan anyagok szimulációját, ezen fejlesztés szükséges lenne, hiszen találkozhatunk olyan polimerekkel, melyek ilyen tulajdonsággal rendelkeznek. Továbbá a számításához szükséges merevségi mátrix és belső erővektor előállítását kézzel kell elvégezni, majd beírni a programkódba. Ez igen kényelmetlen megoldás, így egy olyan szubrutin megírása, amely képes elvégezni a különböző matematikai műveleteket, s ezáltal energiafüggvényből automatikusan számol merevségi mátrixot, illetve belső erővektort, mindenféleképpen egyszerűbbé és felhasználóbarátabbá tenné a programot.

A numerikus számítási algoritmus Mathematica programra lett fejlesztve, ellenben ezen kód Fortran programnyelvre történő átírása a végeselemes program gyorsaságát minden bizonnyal növelné.

Jelenleg csomópontok potenciálértékeinek megadásával fut a szimuláció, ellenben a szakirodalomban már találkozhatunk olyan fejlesztésekkel, melyek a testet körülvevő elektromágneses teret is figyelembe veszik, időben szimulálják azt, majd a vizsgált testen az így kialakult potenciálértékekkel számolják az elektro- ill. magnetoaktív anyagok deformációját. Ezen számítás beépítése a végeselemes eljárásba további vizsgálatok elvégzésének lehetőségét teremti meg.

A MELLÉKLET

MELLÉKLETEK

A1. A felhasznált anyagtörvény levezetett összefüggései

A fejezet a dolgozatban felhasznált elektro-elasztikus Neo-Hooke anyagmodell esetére a merevségi mátrix és belső erővektor számításához szükséges mennyiségeket tartalmazza.

A1.1. Energiafüggvény deriváltjai

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{C}} \right)_{KL} &= \frac{\mu}{2} (\delta_{KL} - C_{KL}^{-1}) + \frac{1}{4} \lambda \ln(\det(\mathbf{C})) C_{KL}^{-1} + c_2 E_K E_L \\ &\quad - \frac{\varepsilon_0}{2} E_I E_J \left(\frac{J}{2} C_{IJ}^{-1} C_{KL}^{-1} + \frac{J}{2} (C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{IL}^{-1} C_{JK}^{-1}) \right), \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{C} \otimes \partial \mathbf{C}} \right)_{IJKL} &= \frac{\mu}{4} (C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{IL}^{-1} C_{JK}^{-1}) + \frac{\lambda}{4} (\ln(\det(J)) (C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} \\ &\quad + C_{IL}^{-1} C_{JK}^{-1}) + C_{IJ}^{-1} C_{KL}^{-1}) - \frac{\varepsilon_0 J}{8} E_P E_Q (C_{KL}^{-1} C_{IJ}^{-1} C_{PQ}^{-1} \\ &\quad + C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} C_{PQ}^{-1} + C_{IL}^{-1} C_{JK}^{-1} C_{PQ}^{-1} + C_{IJ}^{-1} C_{PK}^{-1} C_{QL}^{-1} \\ &\quad + C_{IJ}^{-1} C_{PL}^{-1} C_{QK}^{-1} + C_{KL}^{-1} C_{PI}^{-1} C_{QJ}^{-1} + C_{QJ}^{-1} C_{PK}^{-1} C_{IL}^{-1} \\ &\quad + C_{QJ}^{-1} C_{PK}^{-1} C_{IK}^{-1} + C_{PI}^{-1} C_{QK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{PI}^{-1} C_{QL}^{-1} C_{JK}^{-1} \\ &\quad + C_{KL}^{-1} C_{PJ}^{-1} C_{QI}^{-1} + C_{QI}^{-1} C_{PK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{QI}^{-1} C_{PL}^{-1} C_{JK}^{-1} \\ &\quad + C_{PJ}^{-1} C_{QK}^{-1} C_{IL}^{-1} + C_{PJ}^{-1} C_{QL}^{-1} C_{IK}^{-1}), \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{E}}\right)_I = 2c_1 E_I + 2c_2 C_{PI} E_I - \frac{\varepsilon_0 J}{2} (C_{IQ}^{-1} E_Q + C_{PI}^{-1} E_P), \quad (\text{A3})$$

$$\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mathbf{E}\otimes\partial\mathbf{E}}\right)_{IJ} = 2c_1 \delta_{IJ} + 2c_2 C_{IJ} - \varepsilon_0 J C_{IK}^{-1}, \quad (\text{A4})$$

$$\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mathbf{E}\otimes\partial\mathbf{C}}\right)_{IJK} = c_2 (\delta_{KI} E_J + \delta_{IJ} E_K) - \frac{\varepsilon_0 J}{2} E_Q (C_{IK}^{-1} C_{QL}^{-1} + C_{IL}^{-1} C_{QK}^{-1} + C_{KL}^{-1} C_{IQ}^{-1}). \quad (\text{A5})$$

A1.2. Konstitutív érintő tenzorok a kezdeti konfiguráción

$$\begin{aligned} \Theta_{IJKL} = & \mu (C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{IL}^{-1} C_{JK}^{-1}) + \lambda (-\ln(\det(J)) (C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{IL}^{-1} C_{JK}^{-1}) + \\ & + C_{IJ}^{-1} C_{KL}^{-1}) - \frac{\varepsilon_0 J}{2} E_P E_Q (C_{KL}^{-1} C_{IJ}^{-1} C_{PQ}^{-1} + C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} C_{PQ}^{-1} \\ & + C_{IL}^{-1} C_{JK}^{-1} C_{PQ}^{-1} + C_{IJ}^{-1} C_{PK}^{-1} C_{QL}^{-1} + C_{IJ}^{-1} C_{PL}^{-1} C_{QK}^{-1} + C_{KL}^{-1} C_{PI}^{-1} C_{QJ}^{-1} \\ & + C_{QJ}^{-1} C_{PK}^{-1} C_{IL}^{-1} + C_{QJ}^{-1} C_{PK}^{-1} C_{IK}^{-1} + C_{PI}^{-1} C_{QK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{PI}^{-1} C_{QL}^{-1} C_{JK}^{-1} \\ & + C_{KL}^{-1} C_{PJ}^{-1} C_{QI}^{-1} + C_{QI}^{-1} C_{PK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{QI}^{-1} C_{PL}^{-1} C_{JK}^{-1} + C_{PJ}^{-1} C_{QK}^{-1} C_{IL}^{-1} \\ & + C_{PJ}^{-1} C_{QL}^{-1} C_{IK}^{-1}), \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

$$\Pi_{IJK} = -2 c_2 (\delta_{KI} E_J + \delta_{IJ} E_K) + \varepsilon_0 J E_Q (C_{IJ}^{-1} C_{QK}^{-1} + C_{IK}^{-1} C_{QJ}^{-1} + C_{JK}^{-1} C_{IQ}^{-1}), \quad (\text{A7})$$

$$\mathbf{\Gamma}_{IJ} = -2c_1 \delta_{IJ} - 2c_2 C_{IJ} + \varepsilon_0 J C_{IK}^{-1}, \quad (\text{A8})$$

$$S_{IJ}^{tot} = \frac{\mu}{2} (\delta_{IJ} - C_{IJ}^{-1}) + \frac{1}{4} \lambda \ln(\det(\mathbf{C})) C_{IJ}^{-1} + c_2 E_I E_J - \quad (\text{A9})$$

$$- \frac{\varepsilon_0 J}{4} E_P E_Q (C_{IJ}^{-1} C_{PQ}^{-1} + C_{PI}^{-1} C_{QJ}^{-1} + C_{PJ}^{-1} C_{QI}^{-1}), \quad (\text{A10})$$

$$D_I = -2c_1 E_I - 2c_2 C_{PI} E_I + \frac{\varepsilon_0 J}{2} (C_{IQ}^{-1} E_Q + C_{PI}^{-1} E_P). \quad (\text{A11})$$

A1.3. Konstitutív érintő tenzorok a pillanatnyi konfiguráción

A 4.13 egyenletben bevezetett mennyiségek összenyomható Neo-Hooke anyagmodell esetén:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{k}_m^{mat})_{ijkl} &= \left(\frac{\mu - \lambda \ln(J)}{J} \right) (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \left(\frac{\lambda}{J} \right) (\delta_{ij}\delta_{lk}) \\
&\quad - \frac{\varepsilon_0}{2} (\delta_{lk}\delta_{ij}E_P F_{Pc}^{-1} E_Q F_{Qc}^{-1} + \delta_{il}\delta_{jk}E_P F_{Pc}^{-1} E_Q F_{Qc}^{-1} \\
&\quad + \delta_{ik}\delta_{jl}E_P F_{Pc}^{-1} E_Q F_{Qc}^{-1} + \delta_{ij}E_P F_{Pl}^{-1} E_Q F_{Qk}^{-1} \\
&\quad + \delta_{ij}E_P F_{Pk}^{-1} E_Q F_{Ql}^{-1} + \delta_{lk}E_P F_{Pi}^{-1} E_Q F_{Qj}^{-1} \\
&\quad + \delta_{ik}E_P F_{Pl}^{-1} E_Q F_{Qj}^{-1} + \delta_{il}E_Q F_{Qj}^{-1} E_P F_{Pk}^{-1} \\
&\quad + \delta_{jk}E_P F_{Pi}^{-1} E_Q F_{Ql}^{-1} + \delta_{jl}E_P F_{Pi}^{-1} E_Q F_{Qk}^{-1} \\
&\quad + \delta_{lk}E_P F_{Pj}^{-1} E_Q F_{Qi}^{-1} + \delta_{jk}E_P F_{Pl}^{-1} E_Q F_{Qi}^{-1} \\
&\quad + \delta_{jl}E_P F_{Pk}^{-1} E_Q F_{Qi}^{-1} + \delta_{ik}E_P F_{Pj}^{-1} E_Q F_{Ql}^{-1} \\
&\quad + \delta_{il}E_P F_{Pj}^{-1} E_Q F_{Qk}^{-1}) \\
&= \left(\frac{\mu - \lambda \ln(J)}{J} \right) (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \left(\frac{\lambda}{J} \right) (\delta_{ij}\delta_{lk}) \\
&\quad - \frac{\varepsilon_0}{2} (\delta_{lk}\delta_{ij}e_c e_c + \delta_{il}\delta_{jk}e_c e_c + \delta_{ik}\delta_{jl}e_c e_c \\
&\quad + 2\delta_{ij}e_l e_k + 2\delta_{lk}e_i e_j + 2\delta_{ik}e_l e_j \\
&\quad + 2\delta_{il}e_j e_k + 2\delta_{jk}e_i e_l + 2\delta_{jl}e_i e_k),
\end{aligned} \tag{A12}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{k}_m^{geom})_{ijkl} &= \delta_{ik} \left(\frac{\mu}{J} F_{jN} F_{lN} - \frac{\mu}{J} \delta_{jl} + \frac{\lambda}{J} \ln(J) \delta_{jl} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2c_2}{J} F_{jM} F_{lN} E_M E_N \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varepsilon_0}{4} E_P E_Q (\delta_{jl} F_{Pn}^{-1} F_{Qn}^{-1} + F_{Pj}^{-1} F_{Ql}^{-1} + F_{Pl}^{-1} F_{Qj}^{-1}) \right) \\
&= \delta_{ik} \left(\frac{\mu}{J} b_{jl} - \frac{\mu}{J} \delta_{jl} + \frac{\lambda}{J} \ln(J) \delta_{jl} + \frac{2c_2}{J} F_{jM} F_{lN} e_a F_{aM} e_b F_{bN} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varepsilon_0}{4} F_{aP} e_a F_{bQ} e_b (\delta_{jl} F_{Pn}^{-1} F_{Qn}^{-1} + F_{Pj}^{-1} F_{Ql}^{-1} + F_{Pl}^{-1} F_{Qj}^{-1}) \right) \quad (A13) \\
&= \delta_{ik} \left(\frac{\mu}{J} b_{jl} - \frac{\mu}{J} \delta_{jl} + \frac{\lambda}{J} \ln(J) \delta_{jl} + \frac{2c_2}{J} b_{ja} b_{lb} e_a e_b \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varepsilon_0}{4} (\delta_{jl} e_a e_a + 2e_j e_l) \right) \\
&\hat{=} \mathbf{I} \boxtimes \left(\frac{\mu}{J} \mathbf{b} + \left(\frac{\lambda}{J} \ln(J) - \frac{\mu}{J} \right) \mathbf{I} + \frac{2c_2}{J} ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) \otimes (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varepsilon_0}{4} (\mathbf{I} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) + \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{k}_{me})_{ijk} &= -\frac{2c_2}{J} (F_{iP} F_{kP} F_{jN} E_N + F_{iM} F_{jM} F_{kP} E_P) \\
&\quad + \varepsilon_0 E_Q (\delta_{ij} F_{Qk}^{-1} + \delta_{ik} F_{Qj}^{-1} + \delta_{jk} F_{Qi}^{-1}) \\
&= -\frac{2c_2}{J} (b_{ik} b_{ja} e_a + b_{ij} b_{ka} e_a) \quad (A14) \\
&\quad + \varepsilon_0 (\delta_{ij} e_k + \delta_{ik} e_j + \delta_{jk} e_i),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{k}_e)_{ij} &= -\frac{2c_1}{J} (F_{iP} F_{jP}) - \frac{2c_2}{J} (F_{bP} F_{bK} F_{iP} F_{jK}) + \varepsilon_0 \delta_{ij} \\
&= -\frac{2c_1}{J} (b_{ij}) - \frac{2c_2}{J} (b_{bi} b_{bj}) + \varepsilon_0 \delta_{ij} \quad (A15) \\
&\hat{=} -\frac{2c_1}{J} \mathbf{b} - \frac{2c_2}{J} \mathbf{b}^2 + \varepsilon_0 \mathbf{I}
\end{aligned}$$

A merevségi mátrix számítása a (4.7), (4.8) és (4.9) egyenletekben történik, az ehhez szükséges mennyiségek a Voigt-jelölés segítségével állíthatók elő:

$$\mathbf{k}_m \rightarrow \mathbf{k}_{m,v} = \begin{bmatrix} (\mathbf{k}_m)_{1111} & (\mathbf{k}_m)_{1122} & (\mathbf{k}_m)_{1133} & (\mathbf{k}_m)_{11(12)} & (\mathbf{k}_m)_{11(23)} & (\mathbf{k}_m)_{11(31)} \\ (\mathbf{k}_m)_{2211} & (\mathbf{k}_m)_{2222} & (\mathbf{k}_m)_{2233} & (\mathbf{k}_m)_{22(12)} & (\mathbf{k}_m)_{22(23)} & (\mathbf{k}_m)_{22(31)} \\ (\mathbf{k}_m)_{3311} & (\mathbf{k}_m)_{3322} & (\mathbf{k}_m)_{3333} & (\mathbf{k}_m)_{33(12)} & (\mathbf{k}_m)_{33(23)} & (\mathbf{k}_m)_{33(31)} \\ (\mathbf{k}_m)_{(12)11} & (\mathbf{k}_m)_{(12)22} & (\mathbf{k}_m)_{(12)33} & (\mathbf{k}_m)_{(12)(12)} & (\mathbf{k}_m)_{(12)(23)} & (\mathbf{k}_m)_{(12)(31)} \\ (\mathbf{k}_m)_{(23)11} & (\mathbf{k}_m)_{(23)22} & (\mathbf{k}_m)_{(23)33} & (\mathbf{k}_m)_{(23)(12)} & (\mathbf{k}_m)_{(23)(23)} & (\mathbf{k}_m)_{(23)(31)} \\ (\mathbf{k}_m)_{(31)11} & (\mathbf{k}_m)_{(31)22} & (\mathbf{k}_m)_{(31)33} & (\mathbf{k}_m)_{(31)(12)} & (\mathbf{k}_m)_{(31)(23)} & (\mathbf{k}_m)_{(31)(31)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A16})$$

ahol az indexben használt zárójel értelmezése:

$$(\mathbf{k}_m)_{11(12)} = \frac{(\mathbf{k}_m)_{1112} + (\mathbf{k}_m)_{1121}}{2}, \quad (\text{A17})$$

továbbá

$$\mathbf{k}_{me} \rightarrow \mathbf{k}_{me,v} = \begin{bmatrix} (\mathbf{k}_{me})_{111} & (\mathbf{k}_{me})_{112} & (\mathbf{k}_{me})_{113} & (\mathbf{k}_{me})_{1(12)} & (\mathbf{k}_{me})_{1(23)} & (\mathbf{k}_{me})_{1(31)} \\ (\mathbf{k}_{me})_{211} & (\mathbf{k}_{me})_{212} & (\mathbf{k}_{me})_{213} & (\mathbf{k}_{me})_{2(12)} & (\mathbf{k}_{me})_{2(23)} & (\mathbf{k}_{me})_{2(31)} \\ (\mathbf{k}_{me})_{311} & (\mathbf{k}_{me})_{312} & (\mathbf{k}_{me})_{313} & (\mathbf{k}_{me})_{3(12)} & (\mathbf{k}_{me})_{3(23)} & (\mathbf{k}_{me})_{3(31)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A18})$$

$$\mathbf{k}_e \rightarrow \mathbf{k}_{e,v} = \begin{bmatrix} (\mathbf{k}_e)_{11} & (\mathbf{k}_e)_{12} & (\mathbf{k}_e)_{13} \\ (\mathbf{k}_e)_{21} & (\mathbf{k}_e)_{22} & (\mathbf{k}_e)_{23} \\ (\mathbf{k}_e)_{31} & (\mathbf{k}_e)_{32} & (\mathbf{k}_e)_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A19})$$

A1.4. Feszültségtenzor és elektromos eltolás vektor

A belső erővektorhoz szükséges mennyiségek összenyomható Neo-Hooke anyagmodell esetén:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{tot} &= \frac{\mu}{J} F_{in} F_{jn} - \frac{\mu}{J} \delta_{ij} + \frac{\lambda}{J} \ln(J) \delta_{ij} + \frac{2}{J} c_2 F_{im} F_{jn} E_m E_n \\
&\quad - \frac{\varepsilon_0}{4} E_p E_q (\delta_{ij} F_{pn}^{-1} F_{qn}^{-1} + F_{pi}^{-1} F_{qj}^{-1} + F_{pj}^{-1} F_{qi}^{-1}) \\
&= \frac{\mu}{J} b_{ij} - \frac{\mu}{J} \delta_{ij} + \frac{\lambda}{J} \ln(J) \delta_{ij} + \frac{2}{J} c_2 b_{ia} e_a b_{jb} e_b - \frac{\varepsilon_0}{4} (\delta_{ij} e_a e_a + 2 e_i e_j) \\
&= \frac{\mu}{J} \mathbf{b} - \frac{\mu}{J} \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \ln J \right) \boldsymbol{\delta} + \frac{2}{J} c_2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) - \frac{\varepsilon_0}{4} [(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) \boldsymbol{\delta} + 2 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}],
\end{aligned} \tag{A20}$$

$$\begin{aligned}
d_i &= \frac{1}{J} (-2 c_1 F_{iM} E_M - c_2 (F_{iM} C_{MN} E_N + F_{iM} C_{MN} E_N) + \varepsilon_0 F_{Qi}^{-1} E_Q) \\
&= \frac{1}{J} (-2 c_1 b_{ij} e_j - 2 c_2 b_{ij}^2 e_j + \varepsilon_0 e_i) \\
&= \frac{1}{J} (-2 c_1 \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} - 2 c_2 \mathbf{b}^2 \cdot \mathbf{e} + \varepsilon_0 \mathbf{e}) = -\frac{2}{J} (c_1 \mathbf{b} + c_2 \mathbf{b}^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \boldsymbol{\delta}) \cdot \mathbf{e}
\end{aligned} \tag{A21}$$

A feszültségtenzor Voigt-jelölés szerinti vektora:

$$\boldsymbol{\sigma}^{tot} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_v^{tot} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{11}^{tot} & \boldsymbol{\sigma}_{22}^{tot} & \boldsymbol{\sigma}_{33}^{tot} & \boldsymbol{\sigma}_{12}^{tot} & \boldsymbol{\sigma}_{23}^{tot} & \boldsymbol{\sigma}_{31}^{tot} \end{bmatrix}^T, \tag{A22}$$

az elektromos eltolás vektora pedig

$$\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{d}_v = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}^T. \tag{A23}$$

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Fodor György: Elektromágneses terek, Műegyetemi Kiadó, (1993)
- [2] Bar-Cohen, Y.: Electro-active polymers: current capabilities and challenges. EAPAD Conference, San Diego, CA, 18–21 ; 4695–4702., (2002)
- [3] Böhlke, T: Höhere Technische Festigkeitslehre Skript, (2012)
- [4] Böhlke, T: Mathematische Methoden der Festigkeitslehre Skript, (2012)
- [5] Eringen, A.C., Maugin, G.A.: Electrodynamics of continua. Volume 1 – Foundations and solid media. Springer- Verlag, New York, (1989)
- [6] Eringen, A.C.: On the foundations of electroelastostatics, Int. J. Engng. Sci. Vol. 1, pp. 127-153, (1963)
- [7] Eringen, A.C , Dixon, R.C.: A dynamical theory of polar elastic dielectric. Int. J. Engng. Sci., 3:359-398, (1965)
- [8] Jordan, N.F., Eringen, A.C.: On the static nonlinear theory of electromagnetic thermoelastic solids I. Int. J. Engng Sci. 2, 59-95, (1963)
- [9] Jordan, N.F., Eringen, A.C.: On the static nonlinear theory of electromagnetic thermoelastic solids II. Int. J. Engng Sci. 2, 98-114, (1963)
- [10] Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Nonlinear electroelastic deformations. Journal of Elasticity, 82 (2). pp. 99-127, (2006)
- [11] Dorfmann, A., Ogden R.W.: Nonlinear electroelasticity. Acta Mechanica 174:167-183, (2005)

- [12] Dorfmann, A.: Modeling Nonlinear Electroelastic Materials in R.W. Ogden et al. (eds.), Mechanics and Electrodynamics of Magneto- and Electro-elastic Materials, Series CISM, Udine, Vol. 527, pp. 57–105, (2011)
- [13] Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Nonlinear electroelastostatics: Incremental equations and stability. *International Journal of Engineering Science*, 48 (1). pp. 1-14, (2010)
- [14] Dorfmann, A., and Ogden, R.W.: Some problems in nonlinear magnetoelasticity. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 56 (4). pp. 718-745, (2005)
- [15] Dorfmann, A., Ogden, R.W., Saccomandi, G.: The effect of rotation on the nonlinear magnetoelastic response of a circular cylindrical tube. *International Journal of Solids and Structures*, 42 (13). pp. 3700-3715, (2005)
- [16] Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Nonlinear magnetoelastic deformations. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 57 (4). pp. 599-622, (2004)
- [17] Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Nonlinear magnetoelastic deformations of elastomers. *Acta Mechanica*, 167 (1-2). pp. 13-28, (2004)
- [18] Dorfmann, A., Ogden, R.W., Saccomandi, G.: Universal relations for non-linear magnetoelastic solids. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39 (10). pp. 1699-1708, (2004)
- [19] Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Magnetoelastic modelling of elastomers, *European Journal of Mechanics A: Solids*, 22 (4). pp. 497-507, (2003)
- [20] Bustamante R.: Transversely isotropic non-linear electro-active elastomers, *Acta Mech* 206, 237-259, (2009)
- [21] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: On the electric body forces and Maxwell stresses in nonlinearly electroelastic solids, *Int. J. Eng. Sci.*, (2009)
- [22] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Nonlinear electroelastostatics: a variational framework, *Z. angew. Math. Phys.* 60, 154-177, (2009)
- [23] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Numerical solution of finite geometry boundary-value problems in nonlinear magnetoelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 48 (6). pp. 874-883, (2011)
- [24] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Nonlinear electroelastostatics: a variational framework. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 60 (1). pp. 154-177, (2009)

- [25] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: On boundary conditions in nonlinear magneto- and electroelasticity. In: Boukamel, A., Laiarinandrasana, L., Meo, S. and Verron, E. (eds.) Constitutive Models for Rubber V. Series: Balkema-proceedings and monographs in engineering, water, and earth sciences . Taylor & Francis, London, UK, pp. 339-344, (2008)
- [26] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: On variational formulations in nonlinear magnetoelastostatics. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 13 (8). pp. 725-745, (2008)
- [27] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: A nonlinear magnetoelastic tube under extension and inflation in an axial magnetic field: numerical solution. *Journal of Engineering Mathematics*, 59 (1). pp. 139-153, (2007)
- [28] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Universal relations in isotropic nonlinear magnetoelasticity. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 59 (3). pp. 435-450, (2006)
- [29] Bustamante, R., Ogden, R.W.: Universal relations for nonlinear electroelastic solids. *Acta Mechanica*, 182 (1-2). pp. 125-140, (2006)
- [30] Ogden, R.W., Steigmann, D.J., (Eds.): *Mechanics and Electrodynamics of Magneto- and Electro-elastic Materials*. Series: CISM Courses and Lectures Series. Springer, Wien, Austria, pp. 107-152, (2011)
- [31] Ogden, R.W.: Magnetostatics: from basic principles to nonlinear interactions in deformable media. In: Ogden, R.W. and Steigmann, D.J. (eds.) *Mechanics and Electrodynamics of Magneto- and Electro-elastic Materials*. Series: CISM Courses and Lectures Series (527). Springer, Wien, Austria, pp. 107-152, (2011)
- [32] Ogden, R.W.: Incremental elastic motions superimposed on a finite deformation in the presence of an electromagnetic field. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44 (5). pp. 570-580, (2009)
- [33] Toupin, R.A.: The elastic dielectric. *J. Rational Mech. Anal.* 5, 849-915, (1956)
- [34] Toupin, R.A.: Stress tensors in elastic dielectrics. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 5, 440-552, (1960)
- [35] Toupin, R.A.: A dynamical theory of elastic dielectrics, *Int. J. Eng. Sci.*, 1, 101, (1963).
- [36] Toupin, R.A.: *Elastic Materials with Couple-stresses*, (1962)
- [37] Vu, D.K., Steinmann, P., Possart, G.: Numerical modelling of non-linear electroelasticity, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 70:685-704, (2007)

- [38] Steinmann P.: Computational Nonlinear Electro-Elasticity in: R.W. Ogden et al. (eds.), Mechanics and Electrodynamics of Magneto- and Electro-elastic Materials, Series CISM, Udine, Vol. 527, pp. 181-230, (2011)
- [39] Vu, D.K., Steinmann, P.: A 2-D coupled BEM-FEM simulation of electro-elastostatics at large strain. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 199: 1124–1133, (2010)
- [40] Vu, D.K., Steinmann, P.: On 3-D coupled BEM-FEM simulation of nonlinear electro-elastostatics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, submitted for publication, (2011)
- [41] Vu, D.K., Steinmann, P.: Numerical simulation of electric electro-active polymers. *Proceedings, Sensor+Test Conferences 2011*, AMA Service GmbH, Germany, pp. 323–327, (2011)
- [42] Vu, D.K., Steinmann, P.: Computational challenges in the simulation of nonlinear electroelasticity, *Computer Assisted Methods in Engineering and Science*, 19: 199–212, (2012)
- [43] Rosato, D.: On the Formulation and Numerical Implementation of Dissipative Electro-Mechanics at Large Strains, (2010)
- [44] Rosato, D. , Linder, C. , Miehe, C.: New finite elements with embedded strong discontinuities for the modeling of failure in electromechanical coupled solids, (2010)
- [45] Thiele, C.: Electroactive Polymers and Devices 2013-2018: Forecasts, Technologies, Players, (2013)
- [46] Mallavarapu, K.: Feedback Control of Ionic Polymer Actuators, (2001)
- [47] Otake, M.: Electroactive Polymer Gel Robots, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, (2010)
- [48] Carpi, F., De Rossi, D., Kornbluh, R., Pelrine, R., Sommer-Larsen, P.: Dielectric Elastomers as Electromechanical Transducers, (2007)
- [49] Carpi, F. , Smela, E.: Biomedical Applications of Electroactive Polymer Actuators, (2009)
- [50] Wissler, M., Mazza, E.: Modeling of a pre-strained circular actuator made of dielectric elastomer actuators, *Sensors and Actuators A*, vol. 120, pp. 184 – 192, (2005)
- [51] Wissler, M., Mazza, E.: Modeling and simulation of dielectric elastomer actuators, *Smart Materials and Structures*, vol. 14, pp. 1396 – 1402, (2005)
- [52] Wissler, M., Mazza, E.: Circular pre-strained dielectric elastomer actuator: modeling, simulation and experimental verification, *Proc. SPIE*, vol. 5759, pp. 182 – 193, (2005)
- [53] Hughes, T. J.R.: The finite element method, (1987)

- [54] Bhatti, M. A.: Fundamental finite element analysis and applications, (2005)
- [55] Bonet, J., Wood, R.: Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, Second Edition, (2008)
- [56] McMeeking, R.M., Landis, C.M.: Electrostatic forces and stored energy for deformable dielectric materials. *Journal of Applied Mechanics – American Society of Mechanical Engineers – ASME*, 72: 581–590, (2005)
- [57] Volokh, K. Y.: On Electromechanical Coupling in Elastomer, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 79(4), 044507 (5 pages); doi: 10.1115/1.4006057, (2012)
- [58] Rajagopal, K.R., Wineman A.: A constitutive equation for non-linear electro-active solids, *Acta Mechanica* 135, 219-228, (1999)
- [59] Rajagopal, K.R., Ruzicka, M.: Mathematical modeling of electrorheological materials, *Continuum Mech. Thermodyn.* 13: 59-78, (2001)
- [60] Rajagopal, K.R., Wineman, A.: Flow of electro-rheological materials, *Acta Mechanica* 91, 57-75, (1992)
- [61] Mindlin, R.D.: Polarization gradient in elastic dielectrics, *Int. J. Solids Structures*, Vol 4. pp. 637-642, (1968)
- [62] Mindlin, R.D.: Coupled elastic and electromagnetic fields a diatomic, dielectric continuum, *Int. J. Solids Structures*, Vol 8. pp.401-408, (1972)
- [63] S. Skatulla, C. Sansour, A. Arockiarajan: A multiplicative approach for nonlinear electro-elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, (2012)
- [64] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 9.0, Champaign, IL, (2012).