



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Műszaki Mechanikai Tanszék

TDK DOLGOZAT

Járműszerelvény stabilitásvizsgálata dinamikus kerékmodell alkalmazásával

Beregi Sándor
MSc hallgató

Konzulens:
Dr. Takács Dénes
tudományos munkatárs

2013.

Tartalomjegyzék

1.	Bevezetés	3
2.	Az alkalmazott mechanikai modell	5
2.1.	A személygépjármű-utánfutó rendszer.....	5
2.2.	A rendszer mozgásegyenletei	7
3.	Dinamikus kerékmodellek	13
3.1.	A gumikerék feszített húr modellje	13
3.2.	A kontakttartomány pontjainak mozgását leíró parciális differenciálegyenlet	15
3.3.	Módosított kvázi-statikusan kerékmodell, a relaxáció figyelembe vételével	17
3.4.	„Emlékező” kerékmodell.....	18
4.	A járműszerelvény stabilitásvizsgálata a kerekek relaxációjának figyelembe vételével	20
4.1.	A vizsgált differenciálegyenlet-rendszer szerkezete.....	20
4.2.	Stabilitásvizsgálat.....	21
4.3.	Eredmények	22
4.4.	Numerikus szimuláció	24
4.5.	Stabil tartomány	24
4.6.	Instabil tartomány I.	25
4.7.	Instabil tartomány II.	26
4.8.	Következtetések	27
5.	A járműszerelvény stabilitásvizsgálata „emlékező” kerékmodell esetén.....	28
5.1.	A haladóhullám megoldás	28
5.2.	Linearizálás az állandósult mozgás körül.....	29
5.3.	A kerekekre ható erők és koncentrált erőpárok meghatározása	31
5.4.	A vizsgált differenciálegyenlet-rendszer szerkezete.....	32
5.5.	Numerikus stabilitásvizsgálat	34
5.6.	Eredmények	36
5.7.	A stabilitási tartományok jellegének meghatározása szem-diszkrétizációval	37
5.8.	Eredmények	40
5.9.	Numerikus szimuláció	41
5.10.	Következtetések	41
6.	A járműszerelvény kísérleti stabilitásvizsgálata	44
6.1.	Kerék deformáció-erő karakterisztika mérése	44
6.2.	A berendezés mechanikai modellje.....	49

6.3.	Stabilitásvizsgálat.....	51
6.4.	Kísérleti eredmények.....	54
7.	Összefoglalás	57
8.	Irodalomjegyzék.....	59

1. Bevezetés

Napjainkban a járműdinamika területén számos kutatás foglalkozik a gumikerekek deformációjának, és ennek a járművek stabilitásra gyakorolt hatásának vizsgálatával. E terület jelentőségét indokolja többek között az is, hogy egyre inkább elterjednek a közúti járművek vezetését (pl. a parkolást) segítő rendszerek, amelyek a mozgás mind pontosabb modellezését igénylik, amelynek sarkalatos pontja a kerékmodell megválasztása.

A dolgozatban egy személygépjárműből és vontatmányból álló járműszerelvény stabilitását vizsgáltam, amelyet síkbeli, ún. „bicikli”-modellel helyettesítettem, amely egy a járműiparban általánosan alkalmazott eljárás közúti járművek modellezése esetén [1]. A járműszerelvény mozgására a vonató jármű hosszirányú sebességének konstans értékét előírva kinematikai kényszert alkalmaztam, így az anholonom mechanikai rendszer mozgásegyenleteit az Appell-Gibbs egyenletek segítségével vezettem le [2]. A kerékdeformációkból származó erők illetve koncentrált erőpárok meghatározására kétféle, a gumikerek ún. feszített húr modelljén alapuló modellt alkalmaztam. Ezekről az aktuális kutatások eredményei alapján elmondható, hogy elsősorban kis sebességek esetén módosítják a rendszer dinamikus viselkedését a kvázi-statisztikus deformációt feltételező kerékmodellekhez képest [3]. Az első esetben a kerék kvázi-statisztikus modelljét a kerék kontakttartományon kívül eső részének relaxációját is figyelembe véve módosítottam, míg a másik esetben, a kontakttartományban a futófelület egyes pontjainak a talajhoz való letapadását feltételező, így a kerék múltbeli helyzetét is figyelembe vevő, „emlékező” kerékmodellt alkalmaztam.

Utóbbi esetben a kerék pontjainak helyzetét leíró parciális differenciálegyenlet haladóhullám-megoldását levezetve, linearizálást követően a kvázi-statisztikus kerékmodell esetén véges dimenziós, közönséges differenciálegyenletekkel leírható rendszerről végtelen dimenziós, késleltetett differenciálegyenletekkel leírható rendszerre jutottam. A stabilitásvizsgálatot az első esetben analitikusan, míg a késleltetett rendszer esetében numerikus úton, többdimenziós szelő módszer [4] segítségével hajtottam végre, szemi-diszkretizációval meghatározva a stabilitási tartományok jellegét. Korábbi munkám során a járműszerelvény stabilitását kvázi-statisztikus kerékmodell segítségével is vizsgáltam, amelynek eredményeit jelen dolgozatban referenciaként felhasználtam.

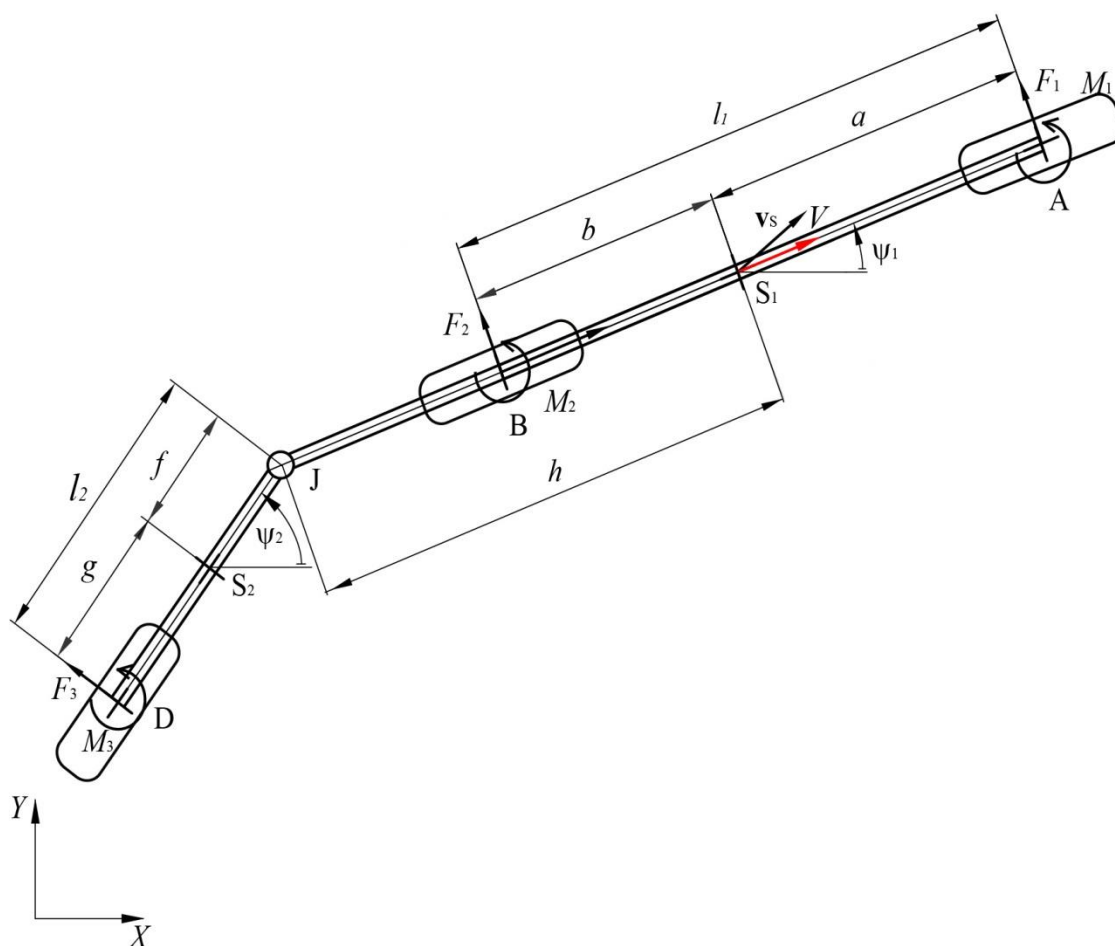
Mindezek mellett a dolgozat célja volt egy, a vontatmányok stabilitásával kapcsolatos eredmények validálását lehetővé tevő kísérleti berendezés megépítése, amelyen bemutathatók a járműszerelvény stabilitásvesztésének jellegzetes módjai. Annak érdekében, hogy a kísérleti

és a mechanikai modell paramétereit egymásnak megfeleltethetőek legyenek, szükség volt a kísérletek során használt modellautó kerék deformáció-erő karakterisztikájának kísérleti úton történő meghatározására is.

2. Az alkalmazott mechanikai modell

2.1. A személygépjármű-utánfutó rendszer

Járműszerelvények vízszintes talajon végzett mozgásának leírása során elterjedt megoldás a bonyolult térbeli modell helyett, síkbeli, egymáshoz csuklóval kapcsolódó rudakból, valamint hozzájuk kapcsolódó kerekekből álló ún. „bicikli” modell alkalmazása. Ezzel elhanyagoljuk a járműszerelvény oldalirányú méretét, illetve az egyes tengelyeken a két (vagy több) kereket 1 kerékkel helyettesítjük. [1]



1. ábra, A személygépjármű-utánfutó rendszer mechanikai modellje

A személygépjárműből és az általa vontatott utánfutóból álló rendszer vizsgálatához alkalmazott síkbeli, négy szabadságfokú modell tehát két l_1 , illetve l_2 hosszúságú (személygépjármű, ill. utánfutó) egymáshoz a J pontban csuklóval kapcsolódó rúdból áll (ld. 1. ábra). A személygépjárművet reprezentáló rúd A és B, míg az utánfutót képviselő rúd D pontban kapcsolódik a kerekekhez. A kocsi első illetve hátsó kerekének távolsága a jármű S_1 súlypontjától a és b , míg az utánfutó S_2 súlypontjának távolsága a J csuklótól, valamint a hátsó keréktől f és g . A személygépjármű S_1 súlypontjának J csuklótól való távolsága h .

A rudak S_1 és S_2 súlypontjainak helyvektorai $\mathbf{R}_{S_1}(t) = [X_1(t), Y_1(t), 0]^T$ valamint $\mathbf{R}_{S_2}(t) = [X_2(t), Y_2(t), 0]^T$, a rudak hossz tengelyének az x-tengellyel bezárt szöge $\psi_1(t)$ és $\psi_2(t)$. A két rúd helyzetét egyértelműen meghatározhatjuk, ha ismerjük a kocsi S_1 súlypontjának X_1 és Y_1 koordinátáját, valamint ψ_1 és ψ_2 szögeket. Válasszuk ezeket általános koordinátáknak, így tehát az általános koordináta-vektor:

$$\mathbf{q} = [X_1 \quad Y_1 \quad \psi_1 \quad \psi_2]^T. \quad (2.1)$$

Írjuk fel az utánfutó S_2 súlypontjának helyvektorát az általános koordináták függvényében:

$$\mathbf{R}_{S_2} = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 - h \cos \psi_1 - f \cos \psi_2 \\ Y_1 - h \sin \psi_1 - f \sin \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

A kocsi S_1 súlypontjának sebessége, az $\mathbf{R}_{S_1}$ helyvektor idő szerinti deriváltjaként írható fel:

$$\mathbf{v}_{S_1} = [\dot{X}_1 \quad \dot{Y}_1 \quad 0]^T, \quad (2.3)$$

hasonlóképpen határozható meg az utánfutó S_2 súlypontjának sebessége:

$$\mathbf{v}_{S_2} = \begin{bmatrix} \dot{X}_2 \\ \dot{Y}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 + \dot{\psi}_1 h \sin \psi_1 - \dot{\psi}_2 f \sin \psi_2 \\ \dot{Y}_1 - \dot{\psi}_1 h \cos \psi_1 - \dot{\psi}_2 f \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Mivel mindkét jármű síkmozgást végez, szögsebességük a mozgás síkjára merőleges z irányú lesz, így a kocsis és az utánfutó ω_1 és ω_2 szögsebességét a következőképpen írhatjuk fel:

$$\omega_1 = [0 \quad 0 \quad \dot{\psi}_1]^T, \quad (2.5)$$

valamint:

$$\omega_2 = [0 \quad 0 \quad \dot{\psi}_2]^T. \quad (2.6)$$

A $\mathbf{v}_{S_1}$ és $\mathbf{v}_{S_2}$ sebességek idő szerinti deriváltjaként állítsuk elő az S_1 és S_2 súlypontok $\mathbf{a}_{S_1}$ illetve $\mathbf{a}_{S_2}$ gyorsulását:

$$\mathbf{a}_{S_1} = [\ddot{X}_1 \quad \ddot{Y}_1 \quad 0]^T, \quad (2.7)$$

illetve:

$$\mathbf{a}_{S_2} = \begin{bmatrix} \ddot{X}_2 \\ \ddot{Y}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{X}_1 + \dot{\psi}_1^2 h \cos \psi_1 + \ddot{\psi}_1 h \sin \psi_1 + \dot{\psi}_2^2 f \cos \psi_2 + \ddot{\psi}_2 f \sin \psi_2 \\ \ddot{Y}_1 + \dot{\psi}_1^2 h \sin \psi_1 - \ddot{\psi}_1 h \cos \psi_1 + \dot{\psi}_2^2 f \sin \psi_2 - \ddot{\psi}_2 f \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Hasonlóképpen a járművek ϵ_1 és ϵ_2 szöggyorsulását a szögsebességek idő szerinti deriválásával kaphatjuk meg:

$$\epsilon_1 = [0 \quad 0 \quad \ddot{\psi}_1]^T, \quad (2.9)$$

valamint:

$$\epsilon_2 = [0 \quad 0 \quad \ddot{\psi}_2]^T. \quad (2.10)$$

2.2. A rendszer mozgásegyenletei

A járműszerelvénny vizsgálatahoz a rendszerre kinematikai kényszert írunk elő. Legyen a kocsis S_1 súlypontjának a kocsis irányába eső sebességkomponense minden időpillanatban V , állandó nagyságú, azaz:

$$\dot{X}_1 \cos \psi_1 + \dot{Y}_1 \sin \psi_1 = V. \quad (2.11)$$

Mivel a rendszerre így a geometriai kényszerek mellett kinematikai kényszer is érvényes, a rendszer anholonom. Az ilyen rendszerek mozgásegyenleteit az Appell–Gibbs-egyenletből származtathatjuk [2].

Ehhez az általános koordináták helyett vezessünk be ún. pszeudo sebességeket az alábbiak szerint:

$$\begin{bmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}_0 \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.12)$$

ahol:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad (2.13)$$

általános koordináta sebesség vektor, illetve $\boldsymbol{\sigma}$ a pszeudo sebességeket tartalmazó vektor. Az $\mathbf{A}_0$ mátrix első sorát a kinematikai kényszer (ld. (2.11)) határozza meg, míg a többi sorát célszerűen, mi határozhatjuk meg. Az egyenlet mindkét oldalát megszorozva $\mathbf{A}_0$ mátrix inverzével az általános koordinátasebességek és a pszeudo sebességek közötti összefüggést leíró elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert kapunk:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}_0^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.14)$$

azaz:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cos \psi_1 - \beta_1 \sin \psi_1 \\ V \sin \psi_1 + \beta_1 \cos \psi_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

A fenti egyenlet mindkét oldalát deriválva az idő szerint a gyorsulásokra az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{Y}_1 \\ \ddot{\psi}_1 \\ \ddot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_2 V \sin \psi_1 - \beta_1 \beta_2 \cos \psi_1 - \dot{\beta}_1 \sin \psi_1 \\ \beta_2 V \cos \psi_1 - \beta_1 \beta_2 \sin \psi_1 + \dot{\beta}_1 \cos \psi_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Az Appell–Gibbs-egyenleteket az ún. gyorsulási energiából származtatjuk, amelyet merev testre az alábbi összefüggéssel írhatunk fel [2]:

$$S = \frac{1}{2} m a_s^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\omega})) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T (\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\omega}) \omega^2, \quad (2.17)$$

ahol, m a merev test tömege, $\boldsymbol{\theta}_s$ a test súlypontjára számított tehetetlenségi nyomatéki mátrixa, $\mathbf{a}_s$ a test súlypontjának gyorsulása, a_s pedig a gyorsulásvektor abszolútértéke; $\boldsymbol{\omega}$ a

test szögsebessége, ω a szögsebesség vektor abszolútértéke, valamint ε a test szöggyorsulása. Síkbeli mozgás esetén, kihasználva, hogy mind az ω szögsebesség vektor, mind az ε szöggyorsulás vektor merőleges a mozgás síkjára, a fenti kifejezést egyszerűsíthetjük. Ezen túlmenően, mivel az Appell–Gibbs-egyenleteket a gyorsulási energiából a pszeudo gyorsulások szerinti deriválással származtatjuk, és a (2.17) összefüggés utolsó tagjában ezek nem szerepelnek, így az egyszerűség kedvéért ezt a tagot is elhagyhatjuk. Így az alábbi egyszerűbb alakú összefüggésre jutunk:

$$S = \frac{1}{2} m a_s^2 + \frac{1}{2} \theta_s \varepsilon^2 + \dots \quad (2.18)$$

A fenti formula szerint írjuk fel a vizsgált rendszer gyorsulási energiáját:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{2} m_1 a_{s_1}^2 + \frac{1}{2} \theta_{s_1} \varepsilon_1^2 + \dots \\ & + \frac{1}{2} m_2 a_{s_2}^2 + \frac{1}{2} \theta_{s_2} \varepsilon_2^2 + \dots, \end{aligned} \quad (2.19)$$

ahol m_1 és m_2 a személygépjármű és az utánfutó tömege, θ_{s_1} és θ_{s_2} a járművek saját súlyponti, a mozgás síkjára merőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka, a_{s_1} és a_{s_2} a járművek súlypontjainak gyorsulásvektorainak, ε_1 és ε_2 pedig szöggyorsulás vektorainak az abszolútértéke.

A gyorsulásokra, illetve szöggyorsulásokra vonatkozó (2.7), (2.8), (2.9) és (2.10) összefüggéseket a gyorsulási energiába behelyettesítve, illetve az általános koordináta sebességek és gyorsulások helyett (2.15) és (2.16) szerint bevezetve a pszeudo sebességeket, illetve pszeudo gyorsulásokat, a következő formulát kapjuk:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{2} \left(m_1 \left((V^2 + \beta_1^2) \beta_2^2 + 2V \beta_2 \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_1^2 \right) + \theta_{s_1} \dot{\beta}_2^2 + \theta_{s_2} \dot{\beta}_3^2 \right. \\ & + m_2 \left(\left(\beta_2 \sin \psi_1 (h \beta_2 - \beta_1) + \cos \psi_1 (V \beta_2 + \dot{\beta}_1 - h \dot{\beta}_2) + f (\beta_3^2 \sin \psi_2 - \dot{\beta}_3 \cos \psi_2) \right)^2 \right. \\ & \left. \left. + \left(\beta_2 \cos \psi_1 (h \beta_2 - \beta_1) - \sin \psi_1 (V \beta_2 + \dot{\beta}_1 - h \dot{\beta}_2) + f (\beta_3^2 \cos \psi_2 + \dot{\beta}_3 \sin \psi_2) \right)^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Az Appell–Gibbs-egyenlet szerint egy anholonom rendszer mozgásegyenlet-rendszerét az alábbi formulával kaphatjuk meg [2]:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_r} = \Pi_r \quad r = 1, 2, 3, \quad (2.21)$$

ahol Π_1, Π_2, Π_3 az ún. pszeudo erő komponensek. Állítsuk elő a fenti egyenlet baloldalát az S gyorsulási energia egyes pszeudo gyorsulások $(\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3)$ szerinti deriválásával:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \dot{\beta}_1} &= m_1(\dot{\beta}_1 + V\beta_2) + m_2(\dot{\beta}_1 + V\beta_2 - h\dot{\beta}_2 - f\dot{\beta}_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) + f\beta_3^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)), \\ \frac{\partial S}{\partial \dot{\beta}_2} &= \theta_{s_1}\dot{\beta}_2 + m_2(h^2\dot{\beta}_2 - hV\beta_2 - h\dot{\beta}_1 + hf\dot{\beta}_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) - hf\beta_3^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)), \\ \frac{\partial S}{\partial \dot{\beta}_3} &= \theta_{s_2}\dot{\beta}_3 + m(f^2\dot{\beta}_3 - fV\beta_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) - f\dot{\beta}_1 \cos(\psi_2 - \psi_1) \\ &\quad - f\beta_1\beta_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) + hf\dot{\beta}_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) + hf\beta_2^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)).\end{aligned}\quad (2.22)$$

A Π_1, Π_2, Π_3 pszeudo erőket a δP virtuális teljesítményből határozhatjuk meg az alábbi összefüggés szerint:

$$\delta P = \sum_{r=1}^3 \Pi_r \delta \beta_r, \quad (2.23)$$

ahol $\delta \beta_1, \delta \beta_2, \delta \beta_3$ a virtuális pszeudo sebességek. A δP virtuális teljesítményt a rendszerre a következő formulával írhatjuk fel:

$$\delta P = \mathbf{F}_1 \delta \mathbf{v}_A + \mathbf{F}_2 \delta \mathbf{v}_B + \mathbf{F}_3 \delta \mathbf{v}_D + (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \delta \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{M}_3 \delta \boldsymbol{\omega}_2, \quad (2.24)$$

ahol $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ illetve $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ a kerekekről a járművekre átadódó erők, illetve koncentrált erőpárok (amelyek megegyeznek a megfelelő kerekre az útfelületről átadódó erőkkel, valamint koncentrált erőpárokkal):

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -F_1 \sin \psi_1 \\ F_1 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -F_2 \sin \psi_1 \\ F_2 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} -F_3 \sin \psi_2 \\ F_3 \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

valamint:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

$\delta \mathbf{v}_A, \delta \mathbf{v}_B, \delta \mathbf{v}_D$ A, B valamint D pontok virtuális sebessége, $\delta \boldsymbol{\omega}_1$ és $\delta \boldsymbol{\omega}_2$ pedig a két jármű virtuális szögsebessége.

A virtuális sebességek meghatározásához írjuk fel, A, B és D pont $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$, illetve $\mathbf{v}_D$ sebességét:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_{S_1A} = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 - a\dot{\psi}_1 \sin \psi_1 \\ \dot{Y}_1 + a\dot{\psi}_1 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_{S_1B} = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 + b\dot{\psi}_1 \sin \psi_1 \\ \dot{Y}_1 - b\dot{\psi}_1 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_{S_1C} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_{CD} = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 + h\dot{\psi}_1 \sin \psi_1 + l_2\dot{\psi}_2 \sin \psi_2 \\ \dot{Y}_1 - h\dot{\psi}_1 \cos \psi_1 - l_2\dot{\psi}_2 \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Az $\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$ általános koordináta sebességek helyére (2.15) szerint helyettesítsük be a pszeudo sebességeket:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_{S_1A} = \begin{bmatrix} V \cos \psi_1 - \beta_1 \sin \psi_1 - a\beta_2 \sin \psi_1 \\ V \sin \psi_1 + \beta_1 \cos \psi_1 + a\beta_2 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_{S_1B} = \begin{bmatrix} V \cos \psi_1 - \beta_1 \sin \psi_1 + b\beta_2 \sin \psi_1 \\ V \sin \psi_1 + \beta_1 \cos \psi_1 - b\beta_2 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_{S_1C} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_{CD} = \begin{bmatrix} V \cos \psi_1 - \beta_1 \sin \psi_1 + h\beta_2 \sin \psi_1 + l_2\beta_3 \sin \psi_2 \\ V \sin \psi_1 + \beta_1 \cos \psi_1 - h\beta_2 \cos \psi_1 - l_2\beta_3 \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

A $\delta \mathbf{v}_A, \delta \mathbf{v}_B, \delta \mathbf{v}_D$ virtuális sebességeket formálisan úgy kaphatjuk meg, ha $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ pszeudo sebességek helyére a $\delta \beta_1, \delta \beta_2, \delta \beta_3$ virtuális pszeudo sebességeket helyettesítjük. Mivel a személygépjármű V hossz tengelyével párhuzamos sebessége állandó, így annak virtuális mennyisége zérus, azaz $\delta V = 0$. A behelyettesítéseket elvégezve a virtuális sebességekre a következő formulát kapjuk:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{v}_A &= \begin{bmatrix} -\delta \beta_1 \sin \psi_1 - a\delta \beta_2 \sin \psi_1 \\ +\delta \beta_1 \cos \psi_1 + a\delta \beta_2 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\delta \mathbf{v}_B &= \begin{bmatrix} -\delta \beta_1 \sin \psi_1 + b\delta \beta_2 \sin \psi_1 \\ +\delta \beta_1 \cos \psi_1 - b\delta \beta_2 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\delta \mathbf{v}_D &= \begin{bmatrix} -\delta \beta_1 \sin \psi_1 + h\delta \beta_2 \sin \psi_1 + l_2\delta \beta_3 \sin \psi_2 \\ +\delta \beta_1 \cos \psi_1 - h\delta \beta_2 \cos \psi_1 - l_2\delta \beta_3 \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Ezzel tehát a rendszerre ható erők, illetve nyomatékok δP virtuális teljesítményét leíró (2.24) egyenletbe behelyettesítve az erőket (2.25) és nyomatékokat (2.26), valamint a virtuális sebességeket (2.29), egyszerűsítések után, a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \delta P = & (F_1 + F_2 + F_3 \cos(\psi_2 - \psi_1)) \delta \beta_1 \\ & + (aF_1 - bF_2 - hF_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) + M_1 + M_2) \delta \beta_2 + (M_3 - l_2 F_3) \delta \beta_3. \end{aligned} \quad (2.30)$$

A fenti összefüggésből $\delta \beta_1, \delta \beta_2, \delta \beta_3$ virtuális pszeudo sebességek együtthatóit kigyűjtve kaphatjuk meg a pszeudo erőket:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= F_1 + F_2 + F_3 \cos(\psi_2 - \psi_1), \\ \Pi_2 &= aF_1 - bF_2 - hF_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) + M_1 + M_2, \\ \Pi_3 &= M_3 - l_2 F_3. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ezek után az Appell–Gibbs-egyenletbe ((2.21)) (2.23) (2.22) és (2.31) összefüggéseket behelyettesítve felírhatjuk a személygépjármű-utánfutó rendszer mozgásegyenleteit:

$$\begin{aligned} & m_1 (\dot{\beta}_1 + V \beta_2) + m_2 (\dot{\beta}_1 + V \beta_2 - h \dot{\beta}_2 - f \dot{\beta}_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) + f \beta_3^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)) \\ &= F_1 + F_2 + F_3 \cos(\psi_2 - \psi_1), \\ & \theta_{s_1} \dot{\beta}_2 + m_2 (h^2 \dot{\beta}_2 - hV \beta_2 - h \dot{\beta}_1 + hf \dot{\beta}_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) - hf \beta_3^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)) \\ &= aF_1 - bF_2 - hF_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) + M_1 + M_2, \\ & \theta_{s_2} \dot{\beta}_3 + m (f^2 \dot{\beta}_3 - fV \beta_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) - f \dot{\beta}_1 \cos(\psi_2 - \psi_1) - f \beta_1 \beta_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) \\ &+ hf \dot{\beta}_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) + hf \beta_2^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)) = M_3 - l_2 F_3. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Mivel a rendszer mozgásegyenletében a pszeudo sebességek és gyorsulások mellett ψ_1 és ψ_2 általános koordináták is szerepelnek, így a fenti egyenletrendszer ki kell egészítenünk a kocsi és az utánfutó X tengellyel bezárt szöge, és a pszeudo sebességek közötti összefüggést leíró differenciál-egyenletekkel (ld. (2.15)):

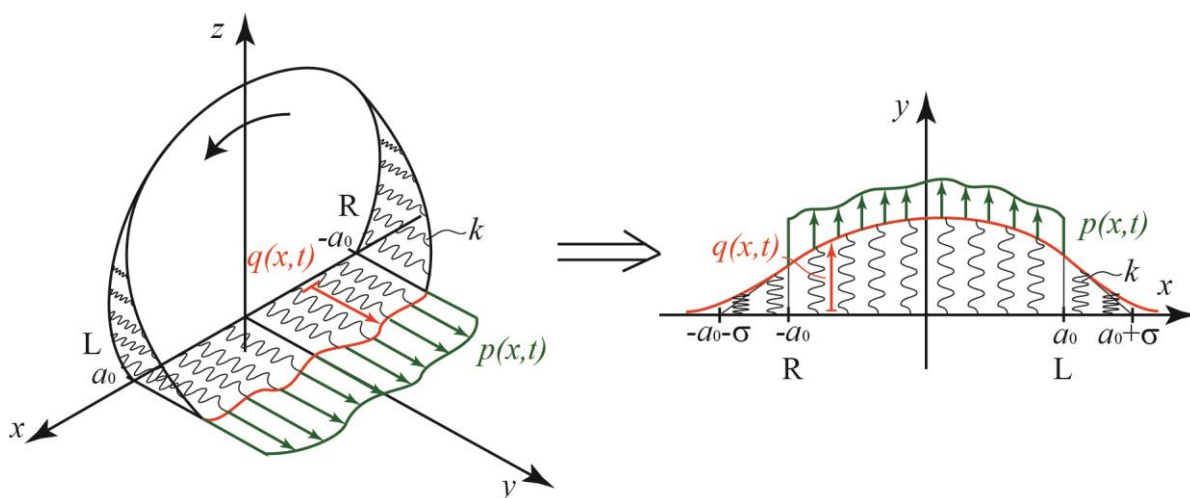
$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \beta_2, \\ \dot{\psi}_2 &= \beta_3. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Megjegyzés: Mivel $\dot{X}$ és $\dot{Y}$ közvetlenül nem jelenik meg a jobboldalon, így a rájuk vonatkozó összefüggéseket (ld. (2.15)) leválaszthatjuk.

3. Dinamikus kerékmodellek

3.1. A gumikerék feszített húr modellje

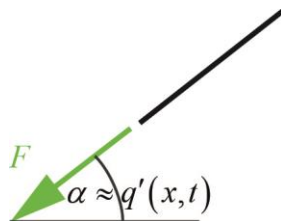
A kerékdeformációból származó erők illetve koncentrált erőpárok meghatározására kétféle kerékmodellt alkalmaztunk, amelyeknek alapja a gumikerék feszített húr modellje [1]. Ennek leírásához tekintsük az y tengely körül pozitív szögsebességgel gördülő kereket, melynek futófelületét a kerék (felni) középsíkjához k lineárisan megoszló merevségű rugalmas ágyazással kapcsolódó húrként modellezzük (ld. 2. ábra).



2. ábra, A kerék feszített húr modellje

A futófelület az úttal a $2a_0$ hosszúságú $\overline{LR}$ kontakttartományban érintkezik (ahol L az ún. vezető pont, míg R a kontakttartomány hátsó pontja), amelynek minden pontja letapad az útfelülethez. Ennek köszönhetően a kontakttartomány mentén – a feszített húr oldalirányú erőegyensúlyát biztosítandó – a kerékre az útfelületről egy $p(x,t)$ megoszló terhelés hat.

Amennyiben a kerék kerülete kellően nagy a kontakttartomány hosszához képest, akkor az iménti modelltől áttérhetünk egy egyszerűbb, síkbeli leírásra, ahol a továbbiakban már végtelen hosszú, a kontakttartományban $p(x,t)$ megoszló erővel terhelt, rugalmasan ágyazott feszített húrt vizsgálunk.



3. ábra

Vágjuk el a húrt egy tetszőleges pontjában (ld. 3. ábra), ekkor az elvágott végen aktív erőként megjelenik az F feszítő erő. Tekintsük ennek y irányú komponensét, amelyet közelítőleg az y irányú elmozdulás ($q(x, t)$) hely szerinti deriváltjával számíthatunk:

$$F_y \approx Fq'(x, t). \quad (3.1)$$

Ezt felhasználva írjuk fel a húr nyíró-igénybevételét:

$$V(x, t) = -Fq'(x, t). \quad (3.2)$$

Másfelől a nyíró-igénybevételt a húrra ható $p(x)$ megoszló erő, illetve a rugalmas ágyazásból származó erő függvényében is meghatározhatjuk:

$$V(x, t) = \int_{x_0}^x -kq(\xi, t)d\xi + \int_{x_0}^x p(\xi, t)d\xi. \quad (3.3)$$

A (3.2) és (3.3) összefüggések jobb oldalát egyenlővé téve, majd a kapott egyenletet hely szerint deriválva, átrendezést követően az alábbi közönséges differenciálegyenletre jutunk:

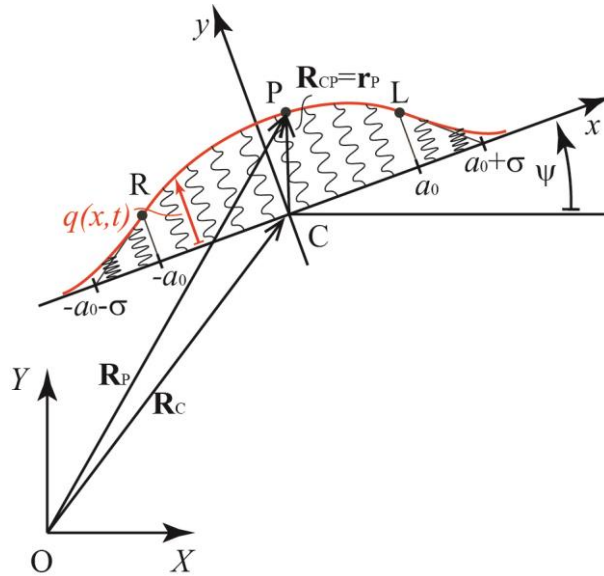
$$\frac{F}{k} q''(x, t) - q(x, t) = -\frac{1}{k} p(x, t). \quad (3.4)$$

Vezessük be a $\sigma = \sqrt{F/k}$ paramétert, ezzel a fenti egyenlet a következőképp módosul:

$$\sigma^2 q''(x, t) - q(x, t) = -\frac{1}{k} p(x, t). \quad (3.5)$$

A σ paraméter szakirodalomban szokásos elnevezése az ún. relaxációs hossz [1]. Belátható ugyanis, hogy a futófelület terheletlen (az úttal nem érintkező) részén a futófelület pontjainak elmozdulása (a leíró differenciálegyenlet homogén megoldásának megfelelően) a hely függvényében exponenciálisan cseng le, az L illetve R pontokból húzott érintők pedig éppen $x = a_0 + \sigma$, valamint $x = -a_0 - \sigma$ helyen metszik az x tengelyt.

3.2. A kontakttartomány pontjainak mozgását leíró parciális differenciálegyenlet



4. ábra, Egy adott kerék pontjainak helyzete a globális (X, Y, Z) koordináta rendszerben

Vizsgáljuk most egy tetszőleges kerék mozgását az O középpontú (X, Y, Z) azonosító (vagy referencia) koordináta rendszerben (ld. 4. ábra). Ekkor a kerék egy adott P pontjának helyvektorát a kerék pillanatnyi konfigurációjához kötött (x, y, z) vonatkoztatási rendszer C origójának segítségével a következőképp írhatjuk:

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_C + \mathbf{R}_{CP}, \quad (3.6)$$

ahol $\mathbf{R}_P, \mathbf{R}_C$ valamint $\mathbf{R}_{CP}$ az (X, Y, Z) referencia koordináta-rendszerben értelmezett vektorok. Ezzel:

$$\mathbf{R}_P = \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{CP}. \quad (3.7)$$

Megjegyzés: A továbbiakban az egyszerűség kedvéért mind az azonosító mind a vonatkoztatási rendszerben értelmezett vektoroknál elhagyjuk a zérus z, ill. Z koordinátát.

A P pont helyvektora az (x, y, z) vonatkoztatási rendszerben:

$$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} x \\ q(x, t) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Áttranszformálva az azonosító koordináta-rendszerbe:

$$\mathbf{R}_{CP} = \begin{bmatrix} x \cos \psi - q(x, t) \sin \psi \\ x \sin \psi + q(x, t) \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

A kontakttartományban teljes tapadást feltételezve, a tartomány minden pontjának sebessége zérus lesz, így a P pont sebességére kinematikai kényszert írhatunk elő:

$$\dot{\mathbf{R}}_p = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

Így az idő szerinti deriválást elvégezve a következő egyenletre jutunk:

$$\dot{\mathbf{R}}_{CP} = \begin{bmatrix} \dot{x} \cos \psi - x \dot{\psi} \sin \psi - \frac{d}{dt}(q(x, t)) \sin \psi - q(x, t) \dot{\psi} \cos \psi \\ \dot{x} \sin \psi + x \dot{\psi} \cos \psi + \frac{d}{dt}(q(x, t)) \cos \psi - q(x, t) \dot{\psi} \sin \psi \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

ahol $q(x, t)$ idő szerinti deriváltja figyelembe véve, hogy x a pillanatnyi, t időponthoz tartozó konfigurációban értelmezett, azaz ($x = x(t)$):

$$\frac{d}{dt}(q(x, t)) = q'(x, t) \dot{x} + \dot{q}(x, t) \quad (3.12)$$

A fentieket behelyettesítve a (3.10) kényszeregyenletbe, a vektoregyenletet komponensenként kiírva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$x: \quad \ddot{X}_C + \dot{x} \cos \psi - x \dot{\psi} \sin \psi - (q'(x, t) \dot{x} + \dot{q}(x, t)) \sin \psi - q(x, t) \dot{\psi} \cos \psi = 0, \quad (3.13)$$

$$y: \quad \ddot{Y}_C + \dot{x} \sin \psi + x \dot{\psi} \cos \psi + (q'(x, t) \dot{x} + \dot{q}(x, t)) \cos \psi - q(x, t) \dot{\psi} \sin \psi = 0. \quad (3.14)$$

Ezek után a (3.13) összefüggést szorozzuk meg $\sin \psi$ -vel, (3.14)-t pedig $\cos \psi$ -vel majd képezzük az így kapott két egyenlet különbségét, így egyszerűsítés után az alábbi formulát kapjuk:

$$-\ddot{X}_C \sin \psi + \ddot{Y}_C \cos \psi + x \dot{\psi} + (q'(x, t) \dot{x} + \dot{q}(x, t)) = 0. \quad (3.15)$$

Illetve hasonlóan (3.13)-t $\cos \psi$ -vel, (3.14)-t $\sin \psi$ -vel szorozva, majd a két egyenletet összegezve $\dot{x}$ -ra az alábbi összefüggés adódik:

$$\dot{x} = q(x, t) \dot{\psi} - \ddot{X}_C \cos \psi - \ddot{Y}_C \sin \psi. \quad (3.16)$$

Ezt behelyettesítve a (3.15) egyenletbe, átrendezés után az alábbi nemlineáris, parciális differenciálegyenletre (PDE) jutunk:

$$\dot{q}(x,t) = \dot{X}_C \sin \psi - \dot{Y}_C \cos \psi - x\dot{\psi} + q'(x,t)(\dot{X}_C \cos \psi + \dot{Y}_C \sin \psi - \dot{\psi}q(x,t)). \quad (3.17)$$

3.3. Módosított kvázi-statisztikus kerékmodell, a relaxáció figyelembe vételével

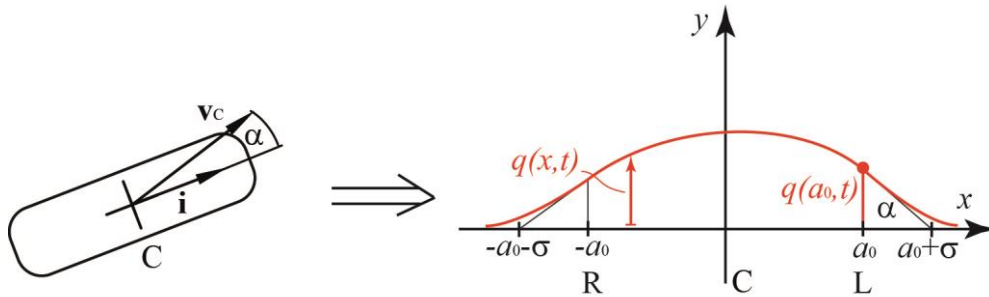
A gumikerék kontakttartománybeli deformációjára nézve kvázi-statisztikus állapotokat feltételezve, kis deformációk esetén a talajról a kerekre átadódó erőt, illetve forgatónyomatékokat a kerek α kúszási szögének függvényében számíthatjuk [1]:

$$F_y = \alpha C_{Fy}; \quad M_z = \alpha C_{Mz}, \quad (3.18)$$

ahol C_{Fy} és C_{Mz} együtthatók a kerék laterális illetve torziós lineáris rugómerevségei, amelyeket a kerék paraméterinek segítségével a következőképp számíthatunk [1]:

$$C_{Fy} = -2a_0^2 k, \quad (3.19)$$

$$C_{Mz} = \frac{2}{3} a_0^3 k. \quad (3.20)$$



5. ábra, A kerék kúszási szögének értelmezése kvázi-statisztikus esetben, illetve a feszített húr modell alapján.

Kvázi-statisztikus esetben a kerék α kúszási szögét a kerék C középpontjának sebessége és a kerék síkja által közbezárt szöggel azonosítják (ld. 5. ábra). Ezt a modellt fejlesztjük most tovább úgy, miközben a kerekre átadódó erőket, valamint nyomatékokat továbbra is a kúszási szög függvényében, (3.18) szerint számítjuk, magát a kúszási szöget a relaxációt is figyelembe véve, a kerék L vezető pontjának ($x = a_0$) y irányú elmozdulásából származtatjuk, amelyre nézve egy elsőrendű közönséges differenciálegyenletet vezethetünk le. Ehhez a kerék pontjainak laterális elmozdulására vonatkozó (3.17) parciális

differentiálegyenlethez adjuk meg a következő, a kerék L vezető pontjára vonatkozó harmadfajú peremfeltételt:

$$q'(a_0, t) = -\frac{q(a_0, t)}{\sigma}. \quad (3.21)$$

Szemléletesen ezzel azt írjuk elő, hogy a keréknek az úttesthez már letapadt és le nem tapadt pontjai az $x = a_0$ (L) pontban a kerék gördülő mozgásának következtében elsőrendben folytonosan csatlakoznak.

Így a (3.17) parciális differenciálegyenletbe való behelyettesítéssel az L pontra vonatkozóan az alábbi közönséges differenciálegyenlet írható fel:

$$\dot{q}(a_0, t) = \dot{X}_C \sin \psi - \dot{Y}_C \cos \psi - a_0 \dot{\psi} - \frac{q(a_0, t)}{\sigma} (\dot{X}_C \cos \psi + \dot{Y}_C \sin \psi - \dot{\psi} q(a_0, t)). \quad (3.22)$$

Ennek felhasználásával a kerék α kúszási szögét közelítsük a futófelület pontjait leíró görbe L pontbeli érintőjével (ld. 5. ábra), azaz:

$$\tan \alpha = -\frac{q(a_0, t)}{\sigma}, \quad (3.23)$$

ahol a kerék L pontjának y irányú elmozdulását $(q(a_0, t))$ az idő függvényében a (3.22) egyenlet írja le. Ezzel az egyszerűsítéssel, a parciális differenciálegyenlettel adott végtelen dimenziós rendszer helyett a kvázi-statikussá esethez képest magasabb szabadságfokú, de továbbra is véges dimenziós rendszert vizsgálunk.

3.4. „Emlékező” kerékmodell

Az előzőekben bemutatott modell a kerék L pontjára felírt differenciálegyenlettel már tartalmazott dinamikus elemet a kvázi-statikussá modellhez képest, ennél azonban pontosabb leírást is adhatunk, ha a kerékre átadódó erőt, illetve nyomatékot immár nem a kúszási szög alapján, hanem közvetlenül a kerék egyes pontjainak deformációjából az alábbi integrálokkal számítjuk:

$$F = k \int_{-\infty}^{\infty} q(x, t) dx, \quad (3.24)$$

valamint:

$$M = k \int_{-\infty}^{\infty} x q(x, t) dx. \quad (3.25)$$

Mindemellett ahhoz, hogy a rendszer stabilitását vizsgálhassuk, a kerék pontjainak laterális elmozdulását leíró (3.17) parciális differenciálegyenletről át kell térnünk közönséges differenciálegyenlet(ek)re. Erre a dolgozatban két módszert alkalmaztunk, egyrészt megkeresve a haladóhullám megoldást, a PDE-t késleltetett differenciálegyenletre írtuk át, és a (továbbra is végtelen dimenziós) késleltetett rendszer stabilitását vizsgáltuk. Másrészt, a stabilitási tartományok jellegének megállapítása végett a PDE-t szemi-diszkretizációval (a hely szerinti deriváltakat véges differencia módszerrel közelítve) véges számú közönséges differenciálegyenlettel helyettesítettük.

Utalva a kerékmodellben megjelenő késleltetett hatásra – nevezetesen, hogy a talajról a kerékre áradó erő, ill. nyomaték függ a kerék múltbeli állapotától – szokás a fenti modellt „emlékező” kerékmodellnek is nevezni [3].

4. A járműszerelvény stabilitásvizsgálata a kerekek relaxációjának figyelembe vételével

4.1. A vizsgált differenciálegyenlet-rendszer szerkezete

Tekintsük a kerék vezető (L) pontjára vonatkozó (3.22) differenciálegyenletet a járműszerelvény egyes kerekeire nézve, azok paramétereit azonosnak feltételezve:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(a_0, t) &= \dot{X}_A \sin \psi_1 - \dot{Y}_A \cos \psi_1 - a_0 \dot{\psi}_1 - \frac{q_1(a_0, t)}{\sigma} (\dot{X}_A \cos \psi_1 + \dot{Y}_A \sin \psi_1 - \dot{\psi}_1 q_1(a_0, t)), \\ \dot{q}_2(a_0, t) &= \dot{X}_B \sin \psi_1 - \dot{Y}_B \cos \psi_1 - a_0 \dot{\psi}_1 - \frac{q_2(a_0, t)}{\sigma} (\dot{X}_B \cos \psi_1 + \dot{Y}_B \sin \psi_1 - \dot{\psi}_1 q_2(a_0, t)), \\ \dot{q}_3(a_0, t) &= \dot{X}_D \sin \psi_2 - \dot{Y}_D \cos \psi_2 - a_0 \dot{\psi}_2 - \frac{q_3(a_0, t)}{\sigma} (\dot{X}_B \cos \psi_2 + \dot{Y}_B \sin \psi_2 - \dot{\psi}_2 q_3(a_0, t)),\end{aligned}\quad (4.1)$$

ahol a kerekek A, B illetve D középpontjának sebességét (2.28) szerint számíthatjuk a pszeudo sebességek függvényében. Így egyszerűsítés után a következő egyenletekre jutunk:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(a_0, t) &= -\beta_1 - (a + a_0) \beta_2 - \frac{q_1(a_0, t)}{\sigma} (V - \beta_2 q_1(a_0, t)), \\ \dot{q}_2(a_0, t) &= -\beta_1 + (b - a_0) \beta_2 - \frac{q_2(a_0, t)}{\sigma} (V - \beta_2 q_2(a_0, t)), \\ \dot{q}_3(a_0, t) &= -V \sin(\psi_2 - \psi_1) + (h \beta_2 - \beta_1) \cos(\psi_2 - \psi_1) + (l_2 - a_0) \beta_3 \\ &\quad - \frac{q_3(a_0, t)}{\sigma} (V \cos(\psi_2 - \psi_1) + (\beta_1 - h \beta_2) \sin(\psi_2 - \psi_1) - \beta_3 q_3(a_0, t)).\end{aligned}\quad (4.2)$$

Ennek felhasználásával a kerekekről a járművekre átadódó erőket és koncentrált erőpárokat a kerekek kúszási szögének ill., laterális és torziós merevségének szorzataként számítjuk:

$$F_{yi} = \alpha_i C_{Fy}; \quad M_{zi} = \alpha_i C_{Mz}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.3)$$

ahol a kúszási szögeket (3.23) alapján a kerekek futófelületét leíró görbe $x = a_0$ -beli érintőjéből származtatjuk:

$$\alpha_i = -\arctan\left(\frac{q(a_0, t)}{\sigma}\right). \quad (4.4)$$

Ezt behelyettesítve a járműszerelvénymozgásegyenlet-rendszerébe, ill. hozzátéve a kerekek vezető pontjaira felírt egyenleteket ((4.2)) az alábbi alakban felírható, 8-ismeretlenes, nemlineáris, elsőrendű, autonóm differenciálegyenlet rendszerre jutunk:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (4.5)$$

ahol a változókat tartalmazó vektor:

$$\mathbf{x}^T(t) = [\beta_1(t) \ \beta_2(t) \ \beta_3(t) \ \psi_1(t) \ \psi_2(t) \ q_1(a_0, t) \ q_2(a_0, t) \ q_3(a_0, t)]. \quad (4.6)$$

4.2. Stabilitásvizsgálat

Vizsgáljuk a rendszer stabilitását az állandósult mozgás körül. Az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_0 \mathbf{x}$ differenciálegyenlet-rendszer a (4.5) autonóm egyenletrendszer $\mathbf{x}_0$ egyensúlyi helyéhez tartozó variációs rendszere, ahol $\mathbf{J}_0$ az $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ Jacobi-mátrixa, az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ helyen:

$$\mathbf{J}_0 = [j_{0kl}], \quad k, l = 1, \dots, 8, \quad (4.7)$$

ahol:

$$j_{0kl} = \left. \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad (4.8)$$

ahol $\mathbf{x}_0$ a (4.5) differenciálegyenlet változóinak az állandósult mozgás során felvett értékeit tartalmazó vektor, amely ebben az esetben nullvektor:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}. \quad (4.9)$$

A karakterisztikus polinomot ezek alapján a következőképpen írhatjuk fel:

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{J}_0 - \lambda \mathbf{I}). \quad (4.10)$$

A differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{x}_0$ egyensúlyi helye (amely esetünkben a stacionárius mozgás) Ljapunov értelemben stabilis, ha $\mathbf{J}_0$ mátrix minden sajátértékének valós része negatív, vagy zérus. Belátható, hogy a $\mathbf{J}_0$ Jacobi-mátrixnak paraméterektől függetlenül mindig lesz egy zérus sajátértéke. Ez a fizikai képünkkel megegyezik, ugyanis az állandósult egyenes vonalú mozgás abszolút rendszerben értelmezett iránya közömbös, kényszerként csak azt írjuk elő, hogy a járműszerelvénymozgás állandó V kocsirányú sebességgel haladjon. Ennek köszönhetően a lineáris stabilitás szempontjából elegendő a $\hat{P}(\lambda) = P(\lambda)/\lambda$ polinomot vizsgálnunk. Annak eldöntésére, hogy adott paraméterek esetén a stabilitási feltétel teljesül-e a Routh-Hurwitz kritériumot alkalmaztuk [5].

4.3. Eredmények

A rendszer lineáris stabilitását különböző V jármű irányába eső sebességek, valamint az utánfutó súlypontjának helyzetét leíró dimenzió nélküli p paraméter függvényében vizsgáltuk, a járművek összes többi paraméterének állandó értéke mellett. A p paramétert az utánfutó jellemző adataiból (ld. 2.1. fejezet), a következőképpen számíthatjuk ki:

$$p = \frac{f}{l_2}. \quad (4.11)$$

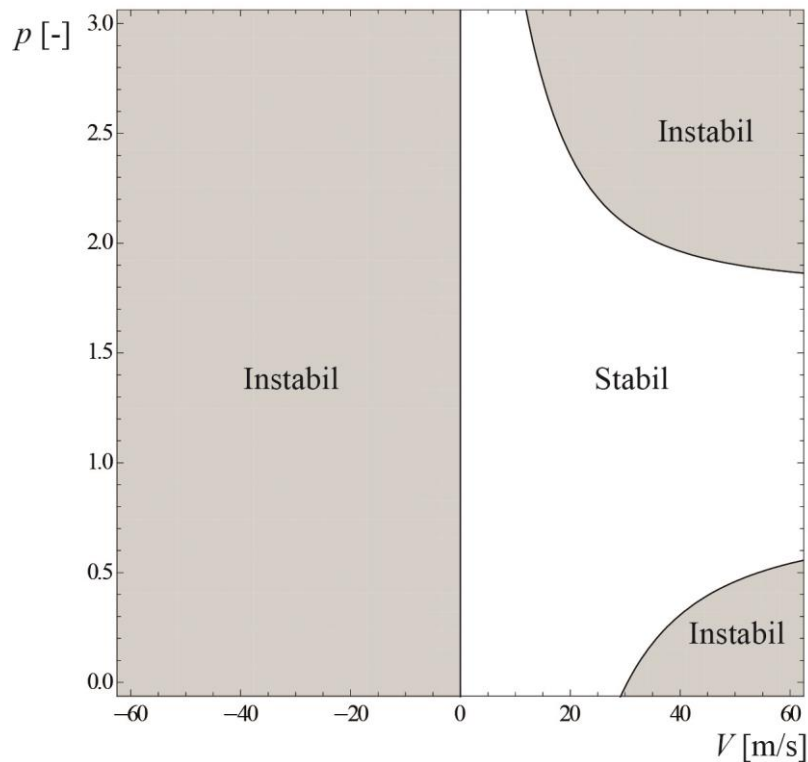
Ebből következik, hogy $p=1$ értéke mellett a vontatmány súlypontja éppen a kerekek tengelyének vonalában, míg $p < 1$ mellett a vontatmány tengelye előtt, $p > 1$ esetén pedig a vontatmány tengelye mögött helyezkedik el. A vizsgálatok során az alábbi paraméterekkel rendelkező járműszerelvényt vizsgáltunk:

$$\begin{aligned} a &= 1.4 \text{ m}, \\ b &= 1.6 \text{ m}, \\ h &= 1.8 \text{ m}, \\ l_2 &= 2 \text{ m}, \\ m_1 &= 1600 \text{ kg}, \\ m_2 &= 400 \text{ kg}, \\ k_1 &= 1.5, \\ k_2 &= 0.5, \\ s &= 20000000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

ahol k_1 és k_2 a személygépjármű, illetve a vontatmány alaktényezője. Feltételezzük, hogy a járművek θ_1 , illetve θ_2 saját súlyponti, a mozgás síkjára merőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka arányos a tömegükkel, valamint a hosszirányú méretük négyzetével, az arányossági tényező pedig k_1 és k_2 :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= k_1 m_1 (a + h)^2, \\ \theta_2 &= k_2 m_2 l_2^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Az egyes kerekek relaxációs hossza egyaránt $\sigma = 6a_0$, azaz a $2a_0$ hosszúságú kontakttartomány háromszorosa. A fenti paraméterek mellett a stabilitásvizsgálat eredményeit stabilitási térképen ábrázoltuk (6. ábra).



6. ábra, A személygépjármű-utánfutó rendszer stabilitástérképe a relaxáció figyelembe vétele esetén

Pozitív V jármű irányú sebesség mellett két instabil tartomány jelenik meg, az egyik abban az esetben, ha $p < 1$, azaz az utánfutó súlypontja lényegesen előrébb helyezkedik el a tengelyéhez képest, a másik abban az esetben, ha $p > 1$, azaz az utánfutó súlypontja lényegesen hátrébb helyezkedik el a tengelyéhez képest. Hátrafelé való haladáskor, azaz $V < 0$ esetén viszont a rendszer mindenképpen instabil.

A fenti stabilitási térkép közelítőleg megegyeznek azzal, amely a kvázi-statisztikus kerékmodell esetén kimutatható, és bár megállapítható, hogy a σ relaxációs hossz növelésével a stabil tartomány mérete csökken, ennek reális paramétertartományokban ($\sigma \sim 3-10a_0$ ld. [6]) nincs szignifikáns hatása. Ugyanakkor a rendszer dinamikus viselkedését a kerekek relaxációja különösen kis sebességek esetén mégis jelentősen módosítja. Ennek elemzésére numerikus szimulációkat végeztünk.

4.4. Numerikus szimuláció

A rendszer mozgását leíró (4.5) elsőrendű autonóm differenciálegyenlet-rendszer adott kezdeti feltételek melletti megoldását, numerikus úton, explicit Runge-Kutta formulával határoztuk meg, míg a kezdeti feltételeket az állandósult mozgáshoz képest kis zavarással adtuk meg. Az egyes szimulációs esetekben a vontató jármű V longitudinális sebességét, és a p , a súlypont helyét leíró paramétert változtattuk, míg a rendszer összes többi paraméterét azonosnak feltételeztük.

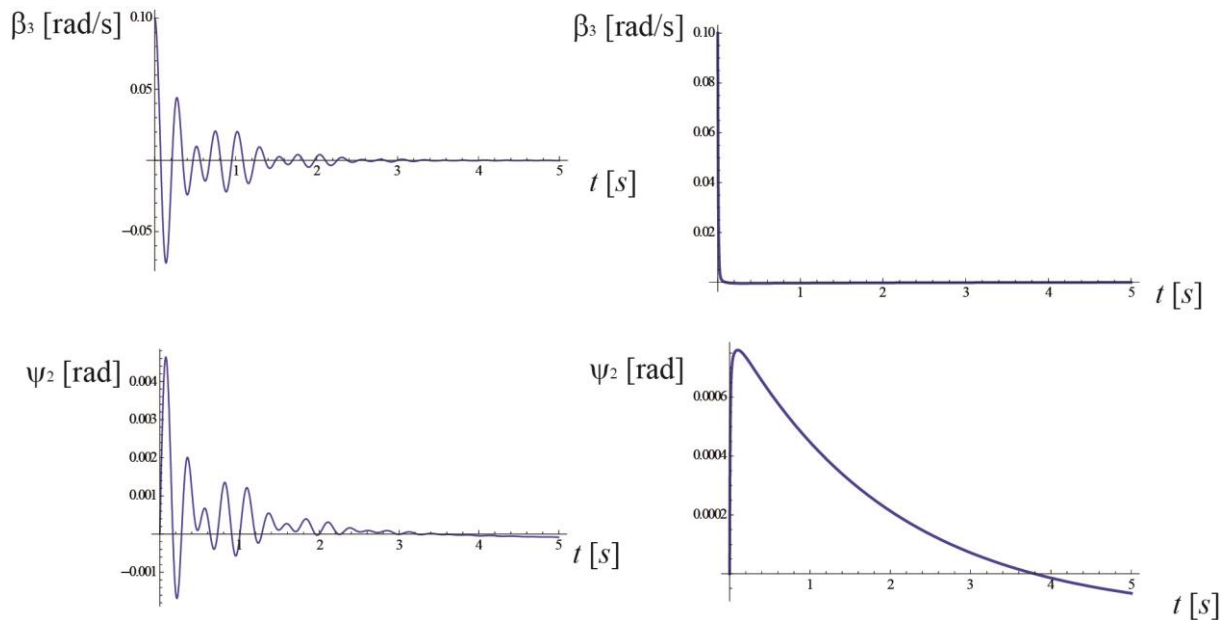
4.5. Stabil tartomány

Adatok:

$$\begin{aligned} V &= 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad p = 1, \\ \beta_1(0) &= 0, \quad \beta_2(0) = 0, \quad \beta_3(0) = 0,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\ \psi_1(0) &= 0, \quad \psi_2(0) = 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

valamint a relaxáció figyelembe vétele esetén:

$$q_i(a_0, 0) = 0, \quad \dot{q}_i(a_0, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.15)$$



7. ábra, A vontatmány szögsebessége illetve szöghelyzete az idő függvényében a kerekek relaxációjának figyelembe vételével (bal oldal), illetve kvázi statikus kerékmodell alkalmazásával (jobb oldal), adott kezdeti feltételek esetén

4.6. Instabil tartomány I.

Adatok:

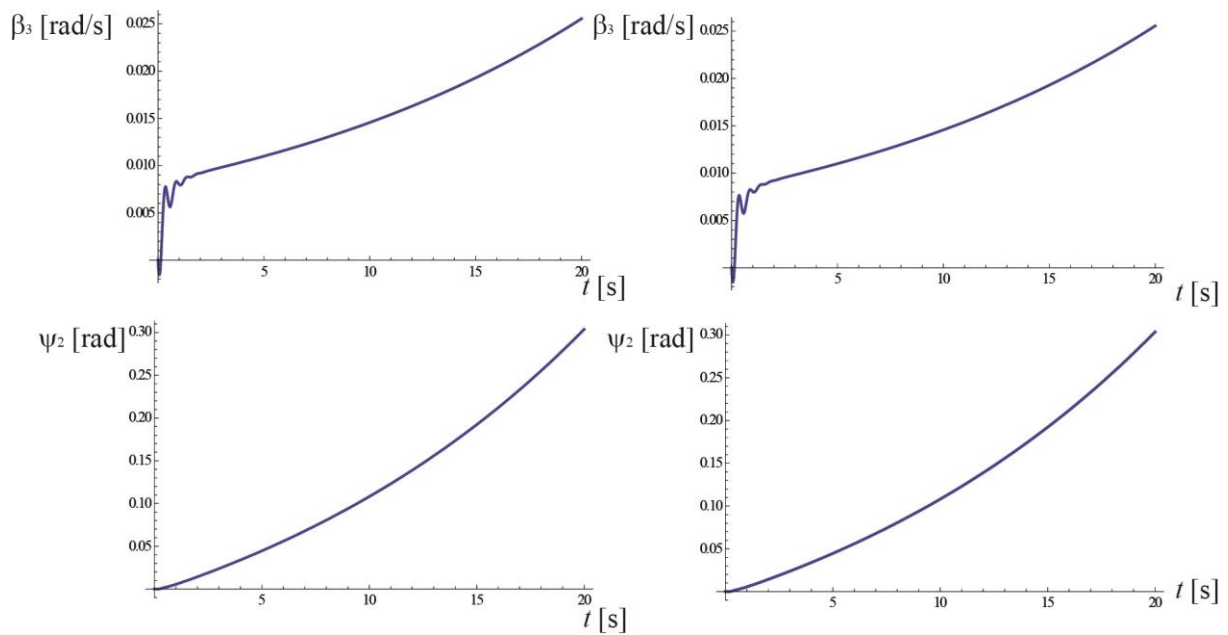
$$V = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad p = 0,5,$$

$$\beta_1(0) = 0, \quad \beta_2(0) = 0,01 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \beta_3(0) = 0, \quad (4.16)$$

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(0) = 0,$$

valamint a relaxáció figyelembe vétele esetén:

$$q_i(a_0, 0) = 0, \quad \dot{q}_i(a_0, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.17)$$



8. ábra, A vontatmány szögsebessége illetve szöghelyzete az idő függvényében a kerekek relaxációjának figyelembe vételével (bal oldal), illetve kvázi statikus kerékmodell alkalmazásával (jobb oldal), adott kezdeti feltételek esetén

4.7. Instabil tartomány II.

Adatok:

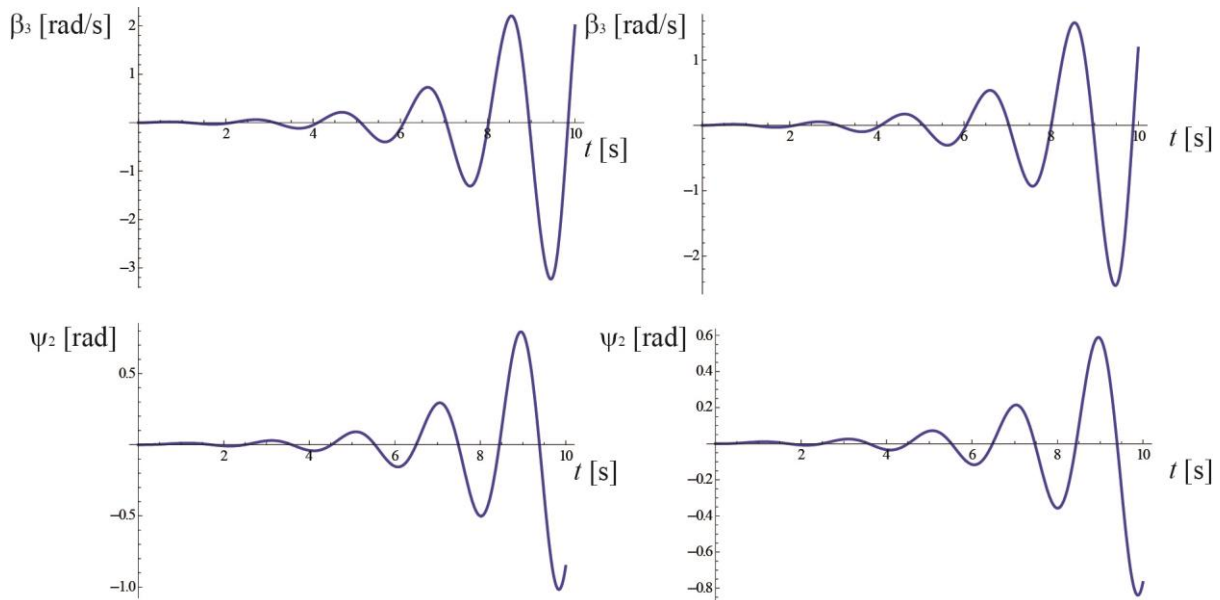
$$V = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad p = 2,5,$$

$$\beta_1(0) = 0, \quad \beta_2(0) = 0,01 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \beta_3(0) = 0, \quad (4.18)$$

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(0) = 0,$$

valamint a relaxáció figyelembe vétele esetén:

$$q_i(a_0, 0) = 0, \quad \dot{q}_i(a_0, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.19)$$



9. ábra, A vontatmány szögsebessége illetve szöghelyzete az idő függvényében a kerekek relaxációjának figyelembe vételével (bal oldal), illetve kvázi statikus kerékmodell alkalmazásával (jobb oldal), adott kezdeti feltételek esetén

4.8. Következtetések

A 7. ábra stabil paramétertartományban, a vontató jármű kis longitudinális sebessége ($V=1\text{ [m/s]}$) mellett szemlélteti a rendszer viselkedését a kerekek relaxációjának figyelembe vételével illetve a kvázi statikus kerékmodell esetén. Megállapítható hogy ekkor, bár instabilitást nem okoz, de a relaxáció minőségileg módosítja a rendszer mozgását a kvázi statikus esethez képest, és új csillapodó rezgések jelennek meg.

Az instabil tartományokban ugyanakkor, ahol a vontató jármű V hossz tengelyével párhuzamos sebessége nagy a létrejövő mozgást a relaxáció nem befolyásolja jelentősen (bár a dinamikus instabil esetben kismértékben módosítja a kialakuló rezgés frekvenciáját). Ugyanakkor megfigyelhető, hogy a rendszer két instabil paramétertartományán belül a kialakuló mozgások más jellegűek. Míg abban az esetben, amikor az utánfutó súlypontja a kerekek tengelye előtt helyezkedik el ($p < 1$) a rendszer statikusan instabil, addig a tengelye mögött elhelyezkedő súlyponttal ($p > 1$) rendelkező utánfutóval a járműszerelvénny folyamatosan növekvő amplitúdójú rezgéssel veszti el a stabilitását.

5. A járműszerelvény stabilitásvizsgálata „emlékező” kerékmodell esetén

5.1. A haladóhullám megoldás

A kerekek deformációját leíró (3.17) PDE az 4.1. fejezetben bemutatott módszerrel analóg módon a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(a_0, t) &= \dot{X}_A \sin \psi_1 - \dot{Y}_A \cos \psi_1 - a_0 \dot{\psi}_1 - q'_1(a_0, t) (\dot{X}_A \cos \psi_1 + \dot{Y}_A \sin \psi_1 - \dot{\psi}_1 q_1(a_0, t)), \\ \dot{q}_2(a_0, t) &= \dot{X}_B \sin \psi_1 - \dot{Y}_B \cos \psi_1 - a_0 \dot{\psi}_1 - q'_2(a_0, t) (\dot{X}_B \cos \psi_1 + \dot{Y}_B \sin \psi_1 - \dot{\psi}_1 q_2(a_0, t)), \\ \dot{q}_3(a_0, t) &= \dot{X}_D \sin \psi_2 - \dot{Y}_D \cos \psi_2 - a_0 \dot{\psi}_2 - q'_3(a_0, t) (\dot{X}_D \cos \psi_2 + \dot{Y}_D \sin \psi_2 - \dot{\psi}_2 q_3(a_0, t)).\end{aligned}\quad (5.1)$$

Hasonlóképpen az egyes kerekekhez tartozó vonatkoztatási rendszerben adott x koordináta idő szerinti deriváltjára (ld. (3.16)) írható:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= q_1(x_1, t) \dot{\psi}_1 - \dot{X}_C \cos \psi_1 - \dot{Y}_C \sin \psi_1, \\ \dot{x}_2 &= q_2(x_2, t) \dot{\psi}_1 - \dot{X}_C \cos \psi_1 - \dot{Y}_C \sin \psi_1, \\ \dot{x}_3 &= q_3(x_3, t) \dot{\psi}_2 - \dot{X}_C \cos \psi_2 - \dot{Y}_C \sin \psi_2.\end{aligned}\quad (5.2)$$

A (5.1)-ben adott PDE-k haladóhullám megoldásának kereséséhez írjuk fel az egyes kerekekhez tartozó vonatkoztatási rendszerek origójának és a futófelületének egy adott P_1 , P_2 , illetve P_3 pontjának helyvektorát az azonosító rendszerben (ld. (3.7), ahol C pont megfelelői az egyes kerekek esetében rendre A , B , illetve D pontok):

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{P_1} &= \begin{bmatrix} X_1 + (a + x_1) \cos \psi_1 - q_1(x_1, t) \sin \psi_1 \\ Y_1 + (a + x_1) \sin \psi_1 + q_1(x_1, t) \cos \psi_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_{P_2} &= \begin{bmatrix} X_1 - (b - x_2) \cos \psi_1 - q_2(x_2, t) \sin \psi_1 \\ Y_1 - (b - x_2) \sin \psi_1 + q_2(x_2, t) \cos \psi_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_{P_3} &= \begin{bmatrix} X_1 - h \cos \psi_1 - (l_2 + x_3) \cos \psi_2 - q_3(x_3, t) \sin \psi_2 \\ X_1 - h \sin \psi_1 - (l_2 + x_3) \sin \psi_2 - q_3(x_3, t) \cos \psi_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (5.3)$$

Ezek segítségével keressük a PDE-k haladóhullám megoldását a következő alakban:

$$\mathbf{R}_{P_i}(x_i, t) = \mathbf{R}_{P_i}(a_0, t - \tau_i(x_i)), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.4)$$

ahol $\tau_i(x_i)$, $i = 1, 2, 3$ az időkéésés, ami az x_i a kerekekhez kötött vonatkoztatási rendszerbeli koordináta függvénye.

A fenti vektoregyenletek két-két komponensegyenletét felhasználva minden egyes kerékre levezethető egy a futófelület pontjainak laterális elmozdulását $(q_i(x_i, t) \quad i=1,2,3)$ leíró összefüggés (haladóhullám megoldás), valamint egy az $x_i \quad i=1,2,3$ változóra vonatkozó összefüggés:

$$\begin{aligned}
q_1(x_1, t) &= (X_1(t) - X_1(t - \tau_1(x_1))) \sin \psi_1(t) - (Y_1(t) - Y_1(t - \tau_1(x_1))) \cos \psi_1(t) \\
&\quad - (a + a_0) \sin(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau_1(x_1))) + q_1(a_0, t - \tau_1(x_1)) \cos(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau_1(x_1))), \\
q_2(x_2, t) &= (X_1(t) - X_1(t - \tau_2(x_2))) \sin \psi_1(t) - (Y_1(t) - Y_1(t - \tau_2(x_2))) \cos \psi_1(t) \\
&\quad - (a_0 - b) \sin(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau_2(x_2))) + q_2(a_0, t - \tau_2(x_2)) \cos(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau_2(x_2))), \quad (5.5) \\
q_3(x_3, t) &= (X_1(t) - X_1(t - \tau_3(x_3))) \sin \psi_2(t) - (Y_1(t) - Y_1(t - \tau_3(x_3))) \cos \psi_2(t) \\
&\quad + h(\sin(\psi_2(t) - \psi_1(t - \tau_3)) - \sin(\psi_2(t) - \psi_1(t))) \\
&\quad - (a_0 - l_2) \sin(\psi_2(t) - \psi_2(t - \tau_3(x_3))) + q_3(a_0, t - \tau_3(x_3)) \cos(\psi_2(t) - \psi_2(t - \tau_3(x_3))),
\end{aligned}$$

valamint:

$$\begin{aligned}
x_1 + a &= -(X_1(t) - X_1(t - \tau_1(x_1))) \cos \psi_1(t) - (Y_1(t) - Y_1(t - \tau_1(x_1))) \sin \psi_1(t) \\
&\quad + (a + a_0) \cos(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau_1(x_1))) + q_1(a_0, t - \tau_1(x_1)) \sin(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau_1(x_1))), \\
x_2 - b &= -(X_1(t) - X_1(t - \tau_2(x_2))) \cos \psi_1(t) - (Y_1(t) - Y_1(t - \tau_2(x_2))) \sin \psi_1(t) \\
&\quad + (a_0 - b) \cos(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau_2(x_2))) + q_2(a_0, t - \tau_2(x_2)) \sin(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau_2(x_2))), \quad (5.6) \\
x_3 - l_2 &= -(X_1(t) - X_1(t - \tau_3(x_3))) \cos \psi_2(t) - (Y_1(t) - Y_1(t - \tau_3(x_3))) \sin \psi_2(t) \\
&\quad - h(\cos(\psi_2(t) - \psi_1(t - \tau_3)) - \cos(\psi_2(t) - \psi_1(t))) \\
&\quad + (a_0 - l_2) \cos(\psi_2(t) - \psi_2(t - \tau_3(x_3))) + q_3(a_0, t - \tau_3(x_3)) \sin(\psi_2(t) - \psi_2(t - \tau_3(x_3))).
\end{aligned}$$

5.2. Linearizálás az állandósult mozgás körül

A járműszerelvénny egyenes vonalú mozgásai közül válasszuk azt a speciális esetet, amikor $t=0$ időpillanatban a rendszert az origóból, az X tengellyel párhuzamosan indítjuk, azaz a kezdeti feltétel:

$$\begin{aligned}
X_1(0) &= 0, \quad Y_1(0) = 0, \quad \psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(0) = 0, \\
\dot{Y}_1(0) &= 0, \quad \dot{\psi}_1(0) = 0, \quad \dot{\psi}_2(0) = 0,
\end{aligned} \quad (5.7)$$

illetve a fentieknek megfelelően az állandósult mozgás:

$$\begin{aligned}
Y_1(t) &\equiv 0, \quad \psi_1(t) \equiv 0, \quad \psi_2(t) \equiv 0, \\
\dot{Y}_1(t) &\equiv 0, \quad \dot{\psi}_1(t) \equiv 0, \quad \dot{\psi}_2(t) \equiv 0.
\end{aligned} \quad (5.8)$$

Vegyük figyelembe, hogy a rendszerre az kinematikai kényszer működik (ld. (2.11)):

$$\dot{X}_1 \cos \psi_1 + \dot{Y}_1 \sin \psi_1 = V. \quad (5.9)$$

Linearizáljuk a fenti formulát az egyensúlyi mozgás körül:

$$\dot{X}_1(t) = V. \quad (5.10)$$

Ezt az összefüggést idő szerint integrálva a vontató jármű súlypontjának X irányú elmozdulására a következő formulát kapjuk:

$$X_1(t) = Vt. \quad (5.11)$$

Ezen túlmenően egyszerűsítsük tovább a modellt az egyes kerek esetében elhanyagolva a futófelület a kontakttartományon kívüli részének relaxációját, és tételezzük fel, hogy a vezető (L) pont laterális elmozdulása a kerékhez kötött vonatkoztatási rendszerben mindig zérus. Tehát:

$$q_i(a_0, t) \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.12)$$

A fentieket behelyettesítve linearizáljuk a haladóhullám megoldást (5.5) a stacionárius mozgás körül:

$$\begin{aligned} q_1(x_1, t) &= V\tau_1(x_1)\psi_1(t) - (Y_1(t) - Y_1(t - \tau_1(x_1))) - (a + a_0)(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau_1(x_1))), \\ q_2(x_2, t) &= V\tau_2(x_2)\psi_1(t) - (Y_1(t) - Y_1(t - \tau_2(x_2))) - (a_0 - b)(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau_2(x_2))), \\ q_3(x_3, t) &= V\tau_3(x_3)\psi_2(t) - (Y_1(t) - Y_1(t - \tau_3(x_3))) + h(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau_3(x_3))) \\ &\quad - (a_0 - l_2)(\psi_2(t) - \psi_2(t - \tau_3(x_3))). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Hasonlóképpen linearizáljuk az x_i $i = 1, 2, 3$ változóra vonatkozó formulákat (ld. (5.6)):

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 - V\tau_1, \\ x_2 &= a_0 - V\tau_2, \\ x_3 &= a_0 - V\tau_3. \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.3. A kerekre ható erők és koncentrált erőpárok meghatározása

Az egyes kerekre a talajról átadódó erőket illetve nyomatékokat a (3.24) és (3.25) összefüggések alapján a következőképpen határozzuk meg:

$$F_i = k \int_{-a_0}^{a_0} q_i(x_i, t) dx_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.15)$$

valamint:

$$M_i = k \int_{-a_0}^{a_0} x_i q_i(x_i, t) dx_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.16)$$

A fenti integrálokat a relaxáció elhanyagolása miatt elegendő csak a kontakttartományban, a $(-a_0, a_0)$ intervallumban kiszámítani. Mivel a (5.13) haladóhullám megoldásban az egyes változók argumentumában a τ_i , $i = 1, 2, 3$ időkézés szerepel, hajtsuk végre ((5.14) alapján) az integrációs változókra alábbi integrál helyettesítést:

$$dx_i = -V d\tau_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.17)$$

Az integrálási határookra vonatkozóan pedig (5.14) alapján az alábbi összefüggésre jutunk:

$$\begin{aligned} \text{alsó határ: } a_0 &= a_0 - V\tau_i, \\ \text{felső határ: } -a_0 &= a_0 - V\tau_i, \end{aligned} \quad (5.18)$$

amiből az integrálási határok:

$$\begin{aligned} \text{alsó határ: } \tau_i &= 0, \\ \text{felső határ: } \tau_i &= \frac{2a_0}{V}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Miután az integrálok az összefüggésekben negatív előjellel szerepelnének, így az integrálási határokat felcserélve írhatjuk a továbbiakban pozitív előjellel az integrálokat.

A fentieket figyelembe véve, valamint az integrálást – amelyik tagra lehet – elvégezve, az egyes kerekre ható erőkre, illetve nyomatékokra vonatkozóan az alábbi egyenleteteket vezethetjük le:

$$\begin{aligned}
F_1 &= -2a_0k(Y_1(t) + a\psi_1(t)) + k \int_0^{\frac{2a_0}{V}} (Y_1(t - \tau_1) + (a + a_0)\psi_1(t - \tau_1)) V d\tau_1, \\
F_2 &= 2a_0k(b\psi_1(t) - Y_1(t)) + k \int_0^{\frac{2a_0}{V}} (Y_1(t - \tau_2) + (a_0 - b)\psi_1(t - \tau_2)) V d\tau_2, \\
F_3 &= 2a_0k(h\psi_1(t) + l_2\psi_2(t) - Y_1(t)) \\
&\quad + k \int_0^{\frac{2a_0}{V}} (Y_1(t - \tau_3) + (a_0 - l_2)\psi_2(t - \tau_3) - h\psi_1(t - \tau_3)) V d\tau_3,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

illetve:

$$\begin{aligned}
M_1 &= -\frac{2}{3}a_0^3k\psi_1(t) + k \int_0^{\frac{2a_0}{V}} (a_0 - V\tau_1)(Y_1(t - \tau_1) + (a + a_0)\psi_1(t - \tau_1)) V d\tau_1, \\
M_2 &= -\frac{2}{3}a_0^3k\psi_1(t) + k \int_0^{\frac{2a_0}{V}} (a_0 - V\tau_2)(Y_1(t - \tau_2) + (a_0 - b)\psi_1(t - \tau_2)) V d\tau_2, \\
M_3 &= -\frac{2}{3}a_0^3k\psi_2(t) + k \int_0^{\frac{2a_0}{V}} (a_0 - V\tau_3)(Y_1(t - \tau_3) + (a_0 - l_2)\psi_2(t - \tau_3) - h\psi_1(t - \tau_3)) V d\tau_3.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Látható, hogy az előbbi összefüggésekben a τ_1, τ_2 valamint τ_3 időkéseletetés szerinti integrálokban az időkéseletetés csak azonos indexszel szerepel, így a továbbiakban az időkéseletetés indexét elhagyjuk.

5.4. A vizsgált differenciálegyenlet-rendszer szerkezete

Mivel a további számítások szempontjából ez vezet egyszerűbb alakú összefüggésekre, a rendszert ezúttal az általános-koordináták terében vizsgáljuk. Linearizáljuk a pszeudo sebességek és az általános koordináta sebességek közötti (2.12) összefüggést a stacionárius mozgás (5.8) körül:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \dot{Y}_1 - V\psi_1, \\
\beta_2 &= \dot{\psi}_1, \\
\beta_3 &= \dot{\psi}_2.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

A pszeudo gyorsulásokra vonatkozó összefüggést pedig a fenti egyenletek idő szerinti deriválásával állíthatjuk elő:

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_1 &= \ddot{Y}_1 - V\dot{\psi}_1, \\ \dot{\beta}_2 &= \ddot{\psi}_1, \\ \dot{\beta}_3 &= \ddot{\psi}_2.\end{aligned}\tag{5.23}$$

A fentieket figyelembe véve írjuk át a járműszerelvénny (2.32) mozgásegyenlet-rendszerét az általános koordináták terébe, illetve linearizáljuk az egyenleteket az (5.8) stacionárius mozgás körül:

$$\begin{aligned}m_1\ddot{Y}_1 + m_2(\ddot{Y}_1 - h\ddot{\psi}_1 - f\ddot{\psi}_2) &= F_1 + F_2 + F_3, \\ \theta_{s_1}\ddot{\psi}_1 + m_2(h^2\ddot{\psi}_1 - h\ddot{Y}_1 + hf\ddot{\psi}_2) &= aF_1 - bF_2 - hF_3 + M_1 + M_2, \\ \theta_{s_2}\ddot{\psi}_2 + m_2(f^2\ddot{\psi}_1 - f\ddot{Y}_1 + hf\ddot{\psi}_2) &= M_3 - l_2F_3.\end{aligned}\tag{5.24}$$

Ebbe behelyettesítve a kerekekről a járművekre átadódó F_1, F_2, F_3 erőkre és M_1, M_2, M_3 koncentrált erőpárookra levezetett (5.20), valamint (5.21) összefüggéseket, az alábbi alakú mátrixegyütthatós differenciálegyenlet-rendszerre jutunk:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{S}\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t - \tau),\tag{5.25}$$

ahol $\mathbf{q}(t)$ az általános koordinátákat tartalmazó vektor:

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix},\tag{5.26}$$

$\mathbf{M}$ a rendszer tömegmátrixa:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -hm_2 & -fm_2 \\ -hm_2 & \theta_{s_1} + m_2h^2 & m_2hf \\ -fm_2 & m_2hf & \theta_{s_2} + m_2f^2 \end{bmatrix},\tag{5.27}$$

$\mathbf{S}$ a merevségi mátrix:

$$\mathbf{S} = 2a_0k \begin{bmatrix} 3 & a - b - h & -l_2 \\ a - b - h & a^2 + b^2 + h^2 + \frac{2}{3}a_0^2 & l_2h \\ -l_2 & l_2h & \frac{1}{3}a_0^2 + l_2^2 \end{bmatrix},\tag{5.28}$$

$\mathbf{Q}(t-\tau)$ pedig a késleltetett tagokat tartalmazó mátrix, amelyet a következőképp írhatunk fel:

$$\mathbf{Q} = k \int_0^{\frac{2a_0}{V}} \mathbf{B}(\tau) \mathbf{q}(t-\tau) V d\tau. \quad (5.29)$$

A fenti egyenletben szereplő $\mathbf{B}(\tau)$ mátrixban a τ időkéstől független, illetve tőle lineárisan függő elemek szerepelnek:

$$\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}_0 - V\tau \mathbf{B}_1, \quad (5.30)$$

ahol az együtthatómátrixok:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 3 & a-b-h & a_0-l_2 \\ 2a_0+a-b-h & a^2+b^2-h^2+2a_0(a_0+a-b) & -h(a_0-l_2) \\ a_0-l_2 & -h(a_0-l_2) & (a_0-l_2)^2 \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

valamint:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a_0+a-b & 0 \\ 1 & -h & a_0-l_2 \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Ezzel tehát a $\mathbf{Q}(t-\tau)$ mátrixra a következő formulát kapjuk:

$$\mathbf{Q}(t-\tau) = k \left(\int_0^{\frac{2a_0}{V}} \mathbf{B}_0 \mathbf{q}(t-\tau) V d\tau - \int_0^{\frac{2a_0}{V}} \mathbf{B}_1 \mathbf{q}(t-\tau) V^2 \tau d\tau \right). \quad (5.33)$$

5.5. Numerikus stabilitásvizsgálat

Keressük az (5.25) mátrix együtthatós differenciálegyenlet megoldását $\mathbf{q}(t) = \mathbf{K}e^{\lambda t}$ alakban, ahol $\mathbf{K}$ konstans vektor. Ezt visszatéve a differenciálegyenletbe az alábbi összefüggésre jutunk:

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}) \mathbf{K} e^{\lambda t} = \mathbf{K} e^{\lambda t} k \left(\int_0^{\frac{2a_0}{V}} \mathbf{B}_0 e^{-\lambda \tau} V d\tau - \int_0^{\frac{2a_0}{V}} \mathbf{B}_1 e^{-\lambda \tau} V^2 \tau d\tau \right). \quad (5.34)$$

Elvégezve az integrálást egyenlet jobboldalán $e^{\lambda t}$ -vel való egyszerűsítést követően az alábbi formulát kapjuk:

$$\left(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{S} - k \frac{V}{\lambda} \left(\mathbf{B}_0 \left(1 - e^{-\frac{2a_0}{V} \lambda} \right) \right) - \mathbf{B}_1 \left(\frac{V}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{2a_0}{V} \lambda} \right) - 2a_0 e^{-\frac{2a_0}{V} \lambda} \right) \right) \mathbf{K} = \mathbf{0}. \quad (5.35)$$

A fenti egyenletnek csak akkor van triviálistól különböző megoldása, ha a $\mathbf{K}$ együtthatóvektor nem nulla vektor. Ekkor az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a zárójelben lévő

kifejezés mátrixának determinánsa zérus, így felírhatjuk a rendszer karakterisztikus egyenletét:

$$D(\lambda) = \det \left(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{S} - k \frac{V}{\lambda} \left(\mathbf{B}_0 \left(1 - e^{-\frac{2a_0}{V}\lambda} \right) \right) - \mathbf{B}_1 \left(\frac{V}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{2a_0}{V}\lambda} \right) - 2a_0 e^{-\frac{2a_0}{V}\lambda} \right) \right) = 0. \quad (5.36)$$

A karakterisztikus egyenletet elemezve belátható, hogy a paraméterektől függetlenül mindig lesz két zérus gyöke. Ez a fizikai képünkkel megegyezik, ugyanis az állandósult egyenes vonalú mozgás abszolút rendszerben értelmezett iránya, illetve a járműszerelvénnyel pozíciója az (X, Y) síkon a mozgás stabilitása szempontjából közömbös, kényszerként csak azt írjuk elő, hogy a járműszerelvénnyel állandó V jármű irányú sebességgel haladjon. Ennek köszönhetően a lineáris stabilitás szempontjából elegendő a $\hat{D}(\lambda) = D(\lambda) / \lambda^2$ egyenletet vizsgálnunk.

A stabilitás feltétele, hogy a $\hat{D}(\lambda)$ karakterisztikus egyenlet minden λ_i gyökére teljesüljön:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, \dots, \infty. \quad (5.37)$$

A rendszer lineáris stabilitását különböző V jármű irányába eső sebességek, valamint az utánfutó súlypontjának helyzetét leíró dimenzió nélküli p paraméter függvényében vizsgáltuk, a járművek összes többi paraméterének állandó értéke mellett. A fentiekből következik, hogy a stabilitási határokon a karakterisztikus egyenlet egy vagy több gyökének valós része előjelet vált. Ebből a szempontból két esetet kell vizsgálnunk, az első esetben egy valós gyök vált előjelet, azaz a határhelyzetben $\lambda \rightarrow 0$. Ekkor a stabilitásvesztés módja statikus:

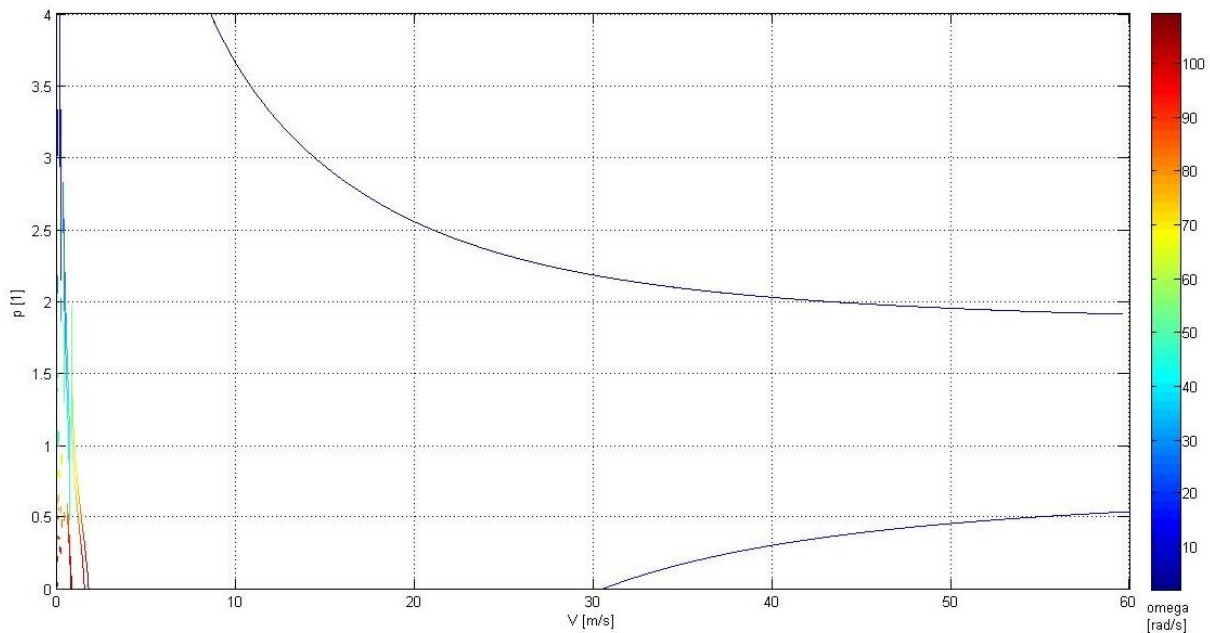
$$D_{\text{Stat}}(p, V) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{D}(\lambda, p, V) = 0. \quad (5.38)$$

A második esetben egy komplex konjugált gyökpár valós része vált előjelet, ami a rendszer szempontjából dinamikus stabilitásvesztést jelent, tehát a határhelyzetben $\lambda = \pm i\omega$. Azaz, a karakterisztikus egyenletbe $\lambda = i\omega$ -t helyettesítve megkaphatjuk a dinamikus stabilitásvesztéshez tartozó paramétergörbét:

$$D_{\text{Din}}(p, V) = \hat{D}(\lambda, p, V) \Big|_{\lambda = i\omega} = 0. \quad (5.39)$$

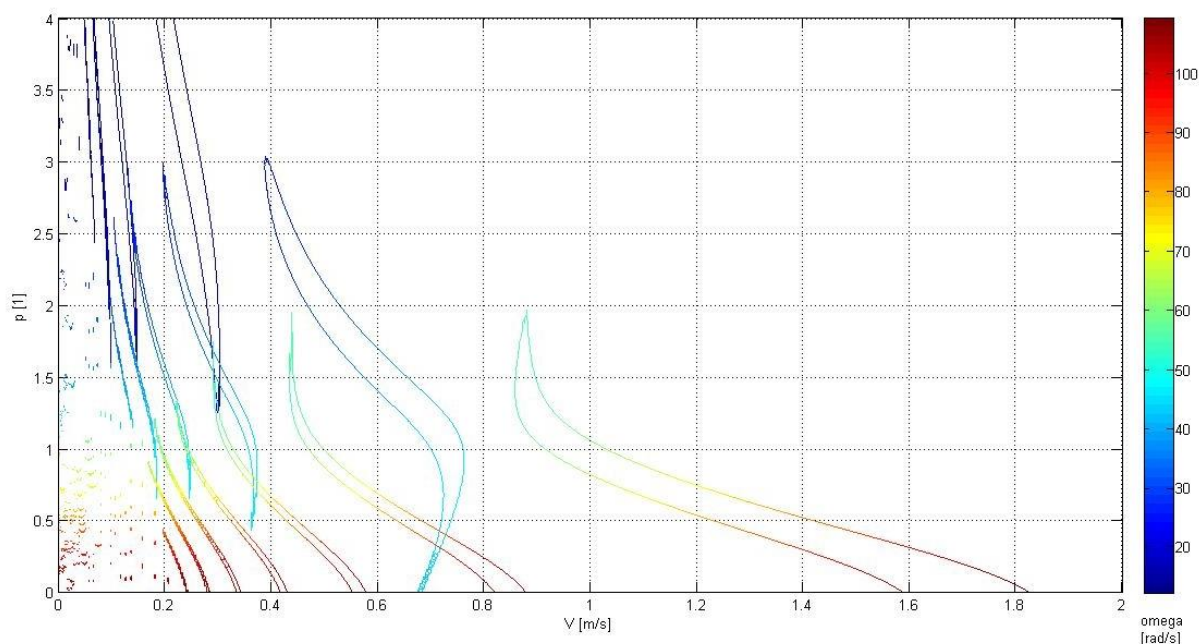
A statikus stabilitási határhoz tartozó görbét analitikusan határoztuk meg, míg a dinamikus stabilitási határokat az (5.39) egyenlet numerikus megoldásával kerestük, amihez többdimenziós szelő módszert alkalmazó programot használtunk [4].

5.6. Eredmények



10. ábra, Stabilitási határok a késleltetett rendszerben

A fenti módszerrel, az eddigiekkel azonos jármű paraméterek mellett meghatározott stabilitási határokat pozitív V longitudinális sebesség mellett a 10. ábra szemlélteti. Az ábra jobb oldalán található színskála pedig a karakterisztikus egyenlet, stabilitási határokhoz tartozó nulla valós részű gyökeinek képzetes részét szemlélteti, ami lineáris esetben megegyezik az itt kialakuló rezgések sajátkőrfrekvenciájával. Látható, hogy a kvázi-statisz kerékmodellel illetve a relaxáció figyelembe vételével meghatározható, nagy sebességnél megjelenő két jellegzetes stabilitási határ mellett, kis hosszirányú sebességek esetén új, a kerekek öngerjesztett rezgéséből adódó stabilitási határok jelennek meg. Ezeket részletesen a 11. ábra szemlélteti.

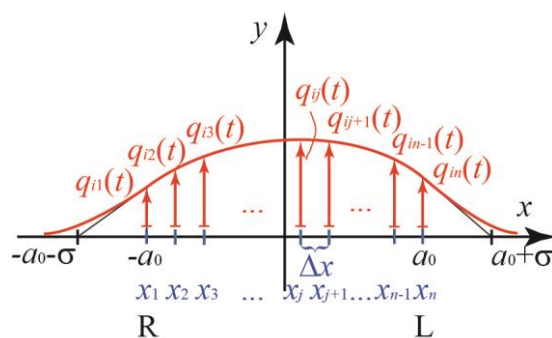


11. ábra, Stabilitási határok a késleltetett rendszerben, kis longitudinális sebesség esetén

A fenti diagram alapján, illetve a rendszer késleltetett jellegéből adódóan arra következtethetünk, hogy végtelen sok a fentihez hasonló stabilitási határ létezik, melyek $V \rightarrow 0$ esetén folyamatosan sűrűsödnek.

5.7. A stabilitási tartományok jellegének meghatározása szemi-diszkrétizációval

Az 5.5 fejezetben bemutatott módszerrel tehát meghatározhatóak a stabilitási határok, a stabilitási tartományok jellegének megállapításához azonban a (5.36) végtelen dimenziós rendszer karakterisztikus egyenletének minden (tehát végtelen számú) gyökét vizsgálnunk kellene (5.37) feltétel szerint. Ezért az egyes kerekek futófelületének laterális elmozdulását leíró (3.17) PDE szemi-diszkrétizációjával véges szabadságfokú modellre térünk át és ennek a stabilitását vizsgáljuk.



12. ábra, Szemi-diszkrétizáció

Ehhez bontsuk fel a $-a_0 < x_i < a_0$, $i=1,2,3$ kontakttartományt az egyes kerek esetében n pont segítségével $n-1$ db $\Delta x = 2a_0 / (n-1)$ hosszúságú intervallumra (ld. 12. ábra), úgy, hogy az első pont $x_{i1} = -a_0$, az n -dik pedig $x_{in} = a_0$ legyen. Ezek alapján a j -dik pont helyét a következőképpen határozhatjuk meg:

$$x_{ij} = -a_0 + (j-1)\Delta x \quad j=1, \dots, n, \quad (5.40)$$

illetve a j -dik pont laterális elmozdulása:

$$q_{ij}(t) = q(x_{ij}, t), \quad i=1,2,3; \quad j=1, \dots, n, \quad (5.41)$$

míg a kontakttartományon kívüli pontokban a relaxációt elhanyagolva zérus deformációt feltételezünk.

Közelítsük az egyes pontok laterális elmozdulásának x_i változó szerinti deriváltját az x_{i1} pontban ($q'_{ij}(t)$) az alábbi véges differencia sémákkal:

$$q'_{i1}(t) \cong \frac{q_{i2}(t) - q_{i1}(t)}{\Delta x}, \quad (5.42)$$

az x_n pontban:

$$q'_{in}(t) \cong \frac{q_{in}(t) - q_{in-1}(t)}{\Delta x}, \quad (5.43)$$

az összes többi pontban pedig:

$$q'_{ij}(t) \cong \frac{q_{ij+1}(t) - q_{ij-1}(t)}{2\Delta x}, \quad j=2, \dots, n-1. \quad (5.44)$$

A fenti formulák segítségével átírva a (5.1) PDE-ket, valamint (2.15) szerint áttanformálva az egyenleteket a pszeudo sebességek terébe, az alábbi közönséges differenciálegyenletek vezethetők le:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{1j}(t) &= -\beta_1 - (a + x_j)\beta_2 - q'_{1j}(t)(V - \beta_2 q_{1j}(t)), \\ \dot{q}_{2j}(t) &= -\beta_1 + (b - x_j)\beta_2 - q'_{2j}(t)(V - \beta_2 q_{2j}(t)), \\ \dot{q}_{3j}(t) &= -V \sin(\psi_2 - \psi_1) + (h\beta_2 - \beta_1) \cos(\psi_2 - \psi_1) + (l_2 - x_j)\beta_3 \\ &\quad - q'_{3j}(t)(V \cos(\psi_2 - \psi_1) + (\beta_1 - h\beta_2) \sin(\psi_2 - \psi_1) - \beta_3 q_{3j}(t)), \end{aligned} \quad (5.45)$$

ahol $j=1, \dots, n-1$ és a kerék kontakttartományon kívüli relaxációjának elhanyagolása, illetve (5.12) feltétel miatt $\dot{q}_{in}(t) \equiv 0$, $i=1,2,3$.

Mindezek figyelembe vételével közelítsük a kerekekről a járművekre átadódó (F_1, F_2, F_3) erőket, illetve (M_1, M_2, M_3) koncentrált erőpárokat leíró (5.15) és (5.16) integrálokat trapézformulákkal:

$$F_i \cong k \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_{ij} + q_{ij+1}}{2} \Delta x, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (5.46)$$

valamint:

$$M_i \cong k \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} \right) \frac{q_{ij} + q_{ij+1}}{2} \Delta x, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (5.47)$$

Az integrált közelítő formulákat behelyettesítve a járműszerelvény pszeudo sebességek terében felírt (2.32) ill. (2.33) mozgásegyenlet-rendszerébe, valamint hozzávéve a kerék diszkrét pontjaira felírt (5.45) differenciálegyenleteket, az alábbi alakú $5 + 3(n-1) = 3n + 2$ ismeretlenes, nemlineáris, elsőrendű, autonóm differenciálegyenlet rendszerre jutunk:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (5.48)$$

ahol az $\mathbf{x}(t)$ változókat tartalmazó vektor első 5 eleme a pszeudo sebességeket, illetve a vontató jármű és a vontatmány x tengellyel bezárt szögét, míg a további $3(n-1)$ db elem az egyes kerekek diszkrét pontjainak laterális irányú elmozdulását tartalmazza:

$$\mathbf{x}(t) = [\beta_1(t) \quad \beta_2(t) \quad \beta_3(t) \quad \psi_1(t) \quad \psi_2(t) \quad \dots q_{1j}(t) \dots q_{2j}(t) \dots q_{3j}(t) \dots]^T, \quad (5.49)$$

Vizsgáljuk a differenciálegyenlet-rendszer stabilitását az állandósult mozgás körül. Az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_0 \mathbf{x}$ differenciálegyenlet-rendszer az (5.48) autonóm egyenlet $\mathbf{x}_0$ egyensúlyi helyéhez tartozó variációs rendszere, ahol $\mathbf{J}_0$ az $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ Jacobi-mátrixa, az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ helyen:

$$\mathbf{J}_0 = [j_{0kl}], \quad k, l = 1, \dots, 3n + 2, \quad (5.50)$$

ahol:

$$j_{0kl} = \left. \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad (5.51)$$

ahol $\mathbf{x}_0$ a (5.48) differenciálegyenlet változóinak az állandósult mozgás során felvett értékeit tartalmazó vektor, amely ebben az esetben nullvektor:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}. \quad (5.52)$$

A stabilitás feltétele, hogy a $\mathbf{J}_0$ Jacobi-mátrix egyenlet minden λ_i sajátértékére teljesüljön:

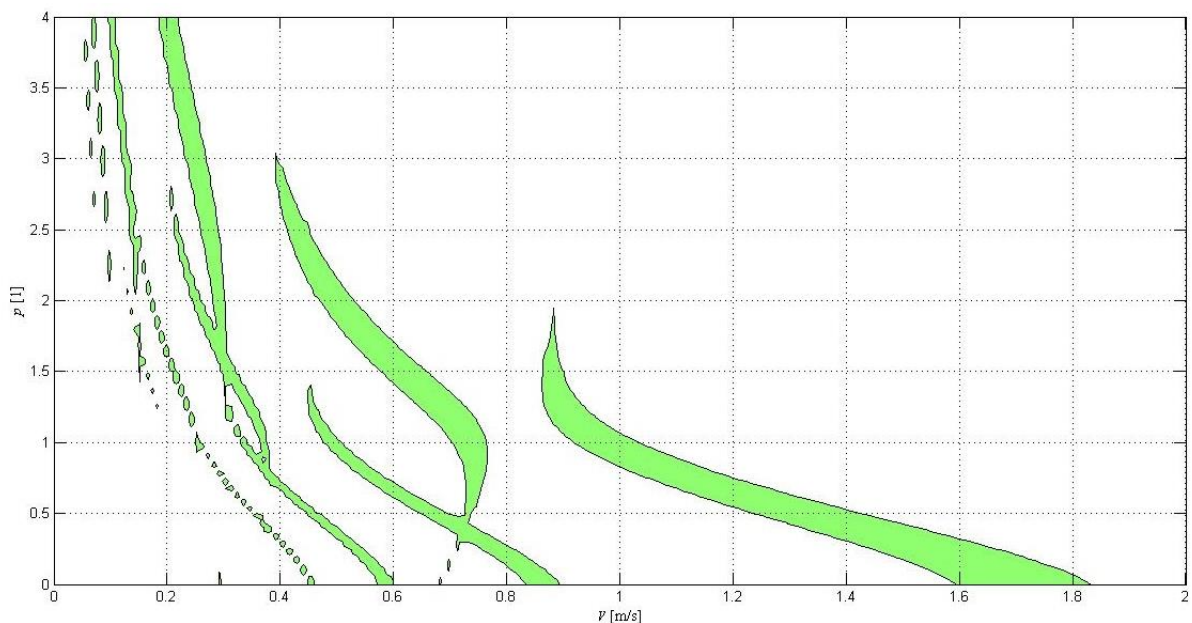
$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, \dots, 3n + 2. \quad (5.53)$$

E feltétel alapján különböző V jármű irányába eső sebességek, valamint az utánfutó súlypontjának helyzetét leíró dimenzió nélküli p paraméter mellett vizsgáltuk a Jacobi-mátrix legnagyobb nem zérus sajátértékének előjelét, és határoztuk meg a stabilitási tartományokat.

5.8. Eredmények

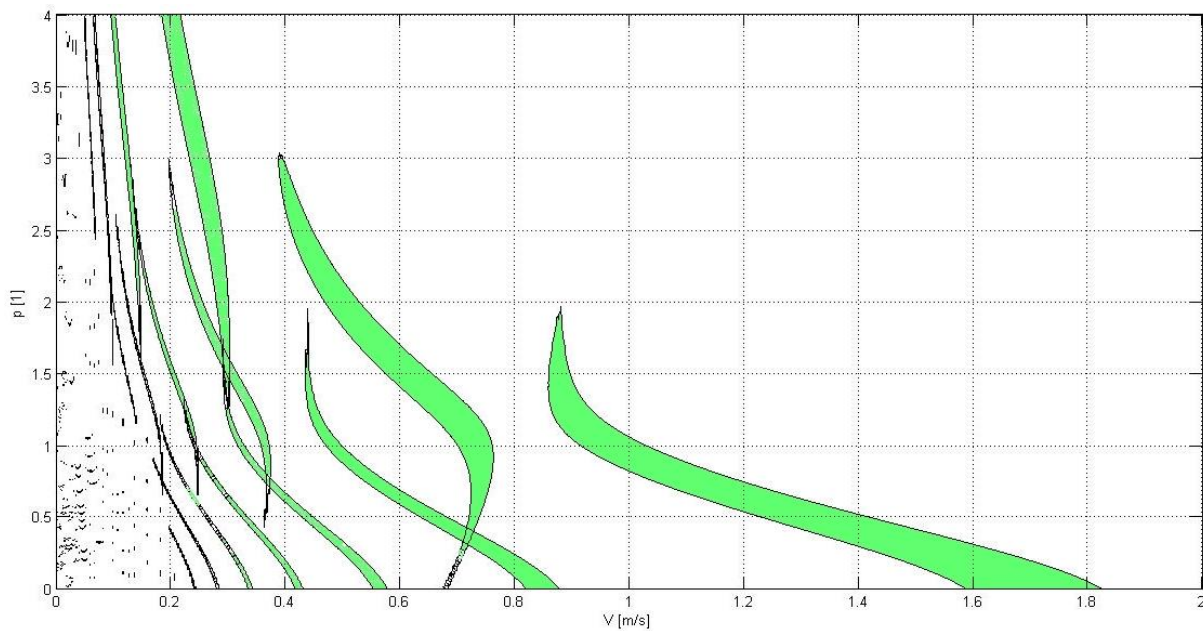
Mivel a szemi diszkretizált rendszer véges dimenziós, csak korlátozott számú stabilitási tartomány esetében ad releváns eredményt. A módszer pontossága növelhető a kontakttartomány felosztásánál alkalmazott intervallumok számának növelésével, azonban ebben az esetben a modell számítási igénye is jelentősen megnő.

A rendszer stabilitástérképét, az egyes kerekek esetében a kontakttartományt egyaránt $n = 40$ ponttal felosztva, a 13. ábra mutatja, fehérrel jelölve a stabil, zölddel az instabil tartományokat.



13. ábra, A szemi diszkretizált rendszer stabilitási térképe

Ez alapján elmondható, hogy a rendszer minden zárt görbével körülhatárolt tartományban instabil viselkedést mutat, amiből következtethetünk a késleltetett rendszer stabilitási tartományainak hasonló jellegére is, amit az alábbi ábrán szemléltetünk.



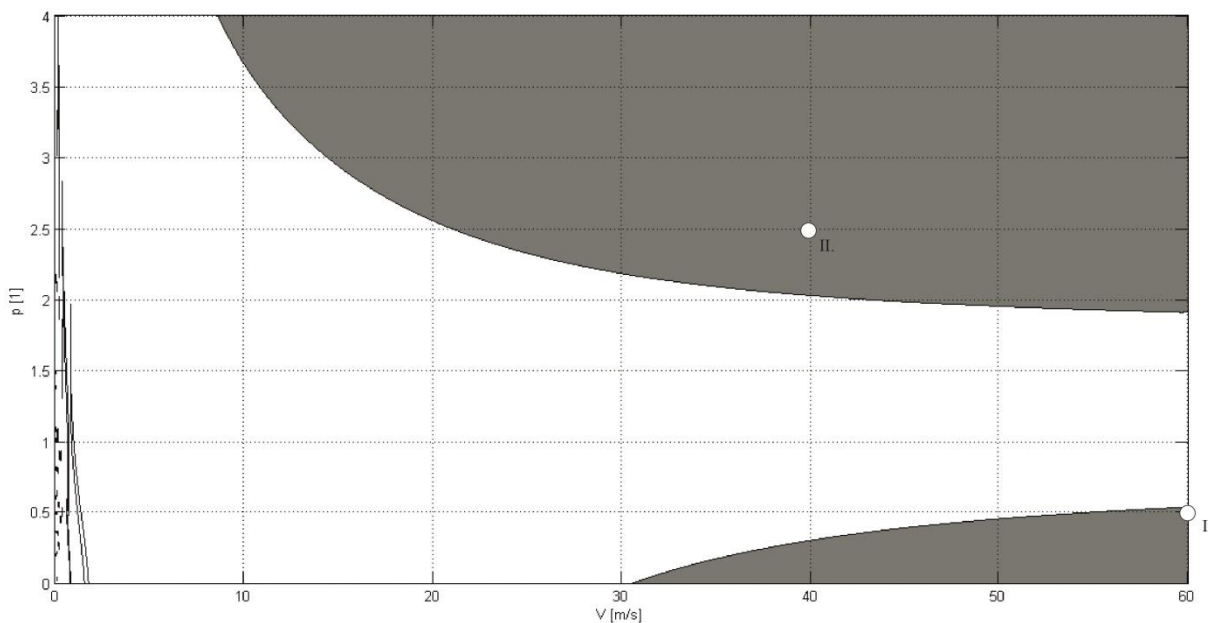
14. ábra, A késleltetett rendszer stabilitástérképe a szemi-diszkretizáció eredményei alapján

5.9. Numerikus szimuláció

Az előző fejezetekben tárgyalt stabilitásvizsgálat eredményeinek ellenőrzésére szimulációk segítségével vizsgáltuk a rendszer mozgását. A járműszerelvény (5.48) szemi diszkretizált mozgásegyenletének adott kezdeti feltételek melletti megoldását, numerikus úton, explicit Runge-Kutta formulával határoztuk meg, míg a kezdeti feltételeket az állandósult mozgáshoz képest kis zavarással adtuk meg. A szemi-diszkretizációhoz a kerekek öngerjesztett rezgéseinek vizsgálatánál 40 ponttal, míg a nagy longitudinális sebesség melletti stabilitásvesztés vizsgálatánál 5 ponttal osztottuk fel a kontakttartományt. A szimulációs eredményeket a dolgozathoz csatolt melléklet tartalmazza. Az egyes esetekben ábrázoltuk a rendszer autonóm differenciálegyenletéhez tartozó $\mathbf{J}_0$ Jacobi-mátrix adott V longitudinális sebesség, illetve p a vontatmány súlypontjának helyét leíró paraméter melletti legnagyobb valós részű sajátértékeit, a $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ pszeudo sebességek időfüggvényét, valamint a kerek kontakttartománybeli, adott rezgési módusra jellemző deformációját.

5.10. Következtetések

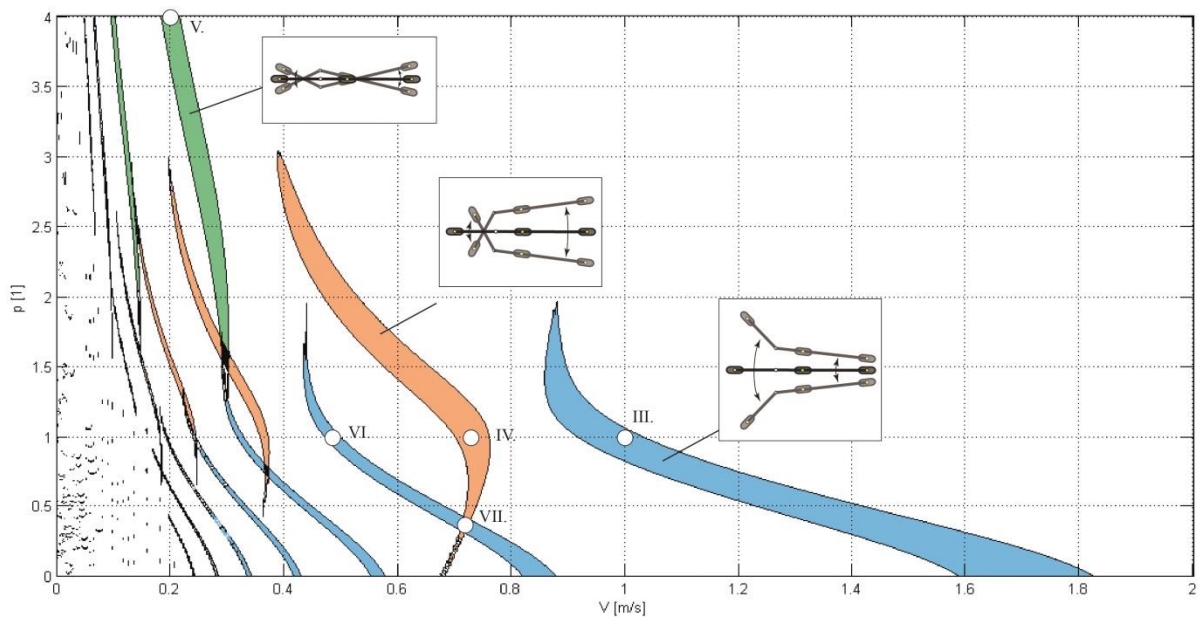
A numerikus szimulációk eredményei alapján elmondható, hogy a kvázi-staikus kerékmodellel is kimutatható, nagy V jármű irányú sebességhez tartozó instabil tartományban (ld. 15. ábra) a rendszer stabilitásvesztése dinamikus abban az esetben, ha a vontatmány súlypontja a kerekek tengelye mögött van, és statikus, ha a vontatmány súlypontja a kerekek tengelye előtt helyezkedik el, ami megegyezik a korábbi modellek eredményeivel.



15. ábra, Nagy longitudinális sebességek mellett kialakuló rezgések

A kis V longitudinális sebesség mellett kialakuló instabil tartományok ezzel szemben egyaránt dinamikusak és három alapvető típusba sorolhatók (minden kerék azonos fázisban, illetve vagy a vontató jármű hátsó kereke, vagy az utánfutó kereke a többihez képest ellentétes fázisban deformálódik). Ezekben az esetekben a gumikerék talajjal érintkező pontjai a mozgás során egy teljes sinushullámhoz hasonló alakban deformálódnak.

Kisebb sebességek mellett a fentiekhez hasonló módusok alakulnak ki), azonban a kerekek deformációjára ekkor már a közelítőleg többszörös sinushullám alak jellemző. Mindemellett léteznek olyan paramétertartományok is, ahol több instabil tartomány metszi egymást, amelyekhez a rendszer Jacobi-mátrixának több pozitív valós részű komplex-konjugált gyökpárja tartozik, azaz az így kialakuló rezgésben több frekvencia is megjelenik, illetve a kerekek kontakttartománybeli deformált alakja is összetettebb. A különböző rezgési módusokat eltérő színekkel jelölve az alábbi összefoglaló ábrán tüntettük fel.



16. ábra, Az öngerjesztett rezgések típusai

Érdeemes még megemlíteni, hogy bár jelen esetben kis deformációkat feltételezve elhanyagoltuk a kerekek esetleges megcsúszását, a kerekek öngerjesztett rezgései miatt kialakuló instabil tartományokban mégis ezzel összeegyeztethető eredményt kaptunk. A kontakttartományban másodfokú függvény szerinti nyomáseloszlást feltételezve ugyanis a futófelület pontjainak megcsúszását, (a Brush-modelt [1] alkalmazva) egy a lehetséges oldalirányú elmozdulást határoló parabolával vehető figyelembe, amivel nem csak a futófelület L vezető $x_i = a_0$, hanem az R hátsó $x_i = -a_0$ pontjában is zérus oldalirányú elmozdulás adódik. Ezt a feltételezést a fentebb bemutatott esetekben a kialakult kerékdeformáció alakja jó közelítéssel teljesíti.

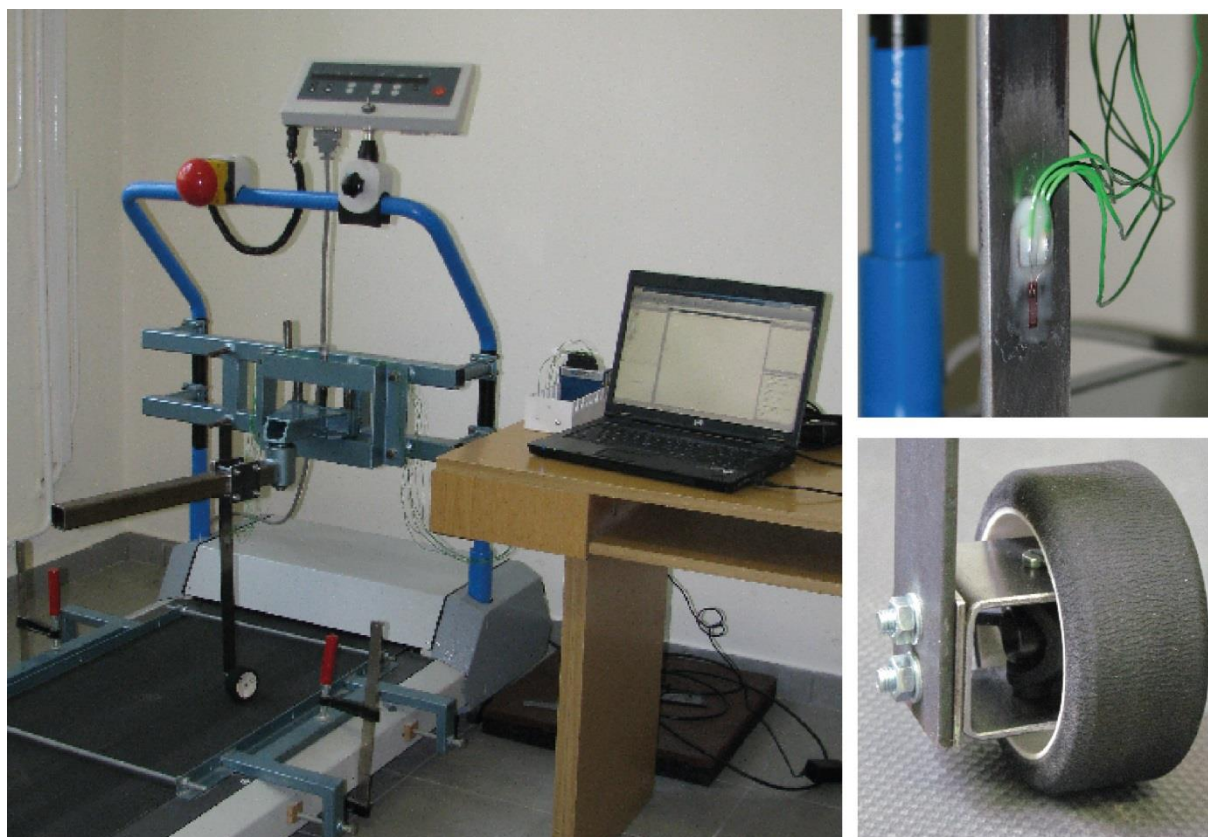
6. A járműszerelvény kísérleti stabilitásvizsgálata

6.1. Kerék deformáció-erő karakterisztika mérése

A dolgozat célja volt egy olyan kísérleti berendezés megépítése, amely alkalmas a személygépjármű-utánfutó rendszer futópádon való stabilitásvizsgálatára és a járműszerelvény stabilitásvesztésének jellegzetes módjainak bemutatására. Annak érdekében, hogy a kísérleti és a mechanikai modell paraméterei egymásnak megfeleltethetők legyenek, szükség volt a kísérletek során használt modellautó kerék (kvázi-statisztikus állapotot feltételező) deformáció-erő karakterisztikájának kísérleti úton történő meghatározására is.

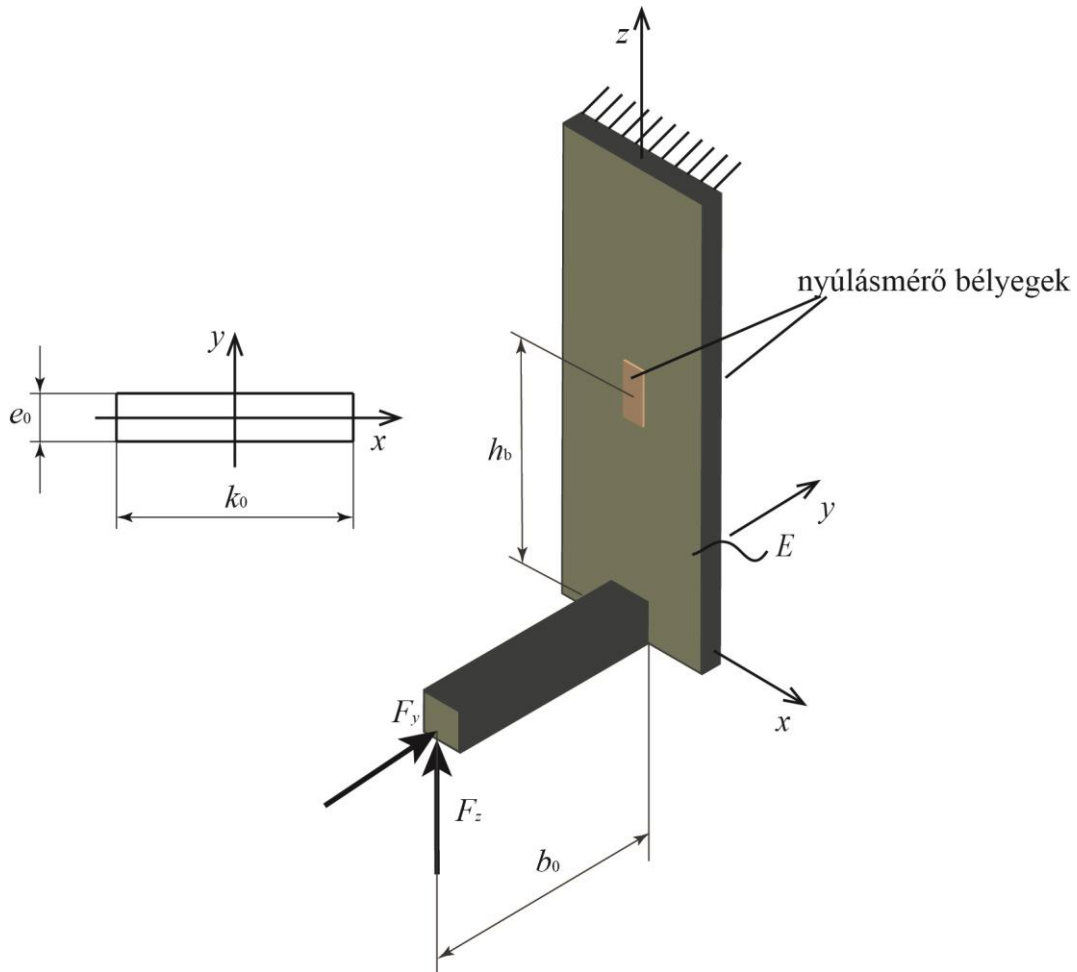
Ehhez a kísérleti modellen használt kereket egy hosszú rugalmas rúdhoz úgy rögzítettük, hogy az a rúdhoz képest ne fordulhasson el, majd az egész rendszert rögzítettük a futópádon, úgy hogy a kerék α kúszási szöge tetszőlegesen beállítható legyen.

A rúd két oldalára külön-külön negyed Wheastone-hídba kapcsolt nyúlásmérő bélyegeket helyeztünk [7], amelyek segítségével különböző α kúszási szögek mellett mértük a rúd hossz tengely irányába eső ε_z fajlagos nyúlást. A mérési elrendezést a 17. ábra mutatja.



17. ábra, A modellhez használt kerék deformáció-erő karakterisztika mérése

A kerékről a rúdra átadódó F_y oldalirányú erőket a mért ε_z fajlagos nyúlás értékekből a következő ábrán látható modell segítségével határoztuk meg.



18. ábra, A laterális erők mérésének mechanikai modellje

A függőleges irányú befogott rudat, amelynek két oldalára h_b magasságban ragasztottuk a nyúlásmérő bélyegeket, menetes szár segítségével szorítjuk le a futópadhoz, aminek hatására az a hozzá rögzített kerék középsíkjában (a rúd hossz tengelyétől b_0 távolságra) egy F_z koncentrált erővel, illetve a kerék oldalirányú deformációja miatt egy F_y erővel terheli a szerkezetet. Ezek figyelembe vételével írjuk fel a függőleges rúd hajlító nyomatéki igénybevételét a $z = h_b$ helyen:

$$M_{hx} = F_y h_b - F_z b_0. \quad (6.1)$$

Ezzel a hajlításból származó feszültség a keresztmetszet szélső szálaiban:

$$\sigma_{zh} = \pm \frac{M_{hx}(h_b)}{I_x} \frac{e_0}{2}, \quad (6.2)$$

ahol $I_x = k_0 e_0^3 / 12$ a keresztmetszet hajlítás tengelyére számított másodrendű nyomatéka. Mindemellett a függőleges irányú F_z terhelő erőből normáligenybevétel is származik, amelyet a

$$\sigma_{zn} = \frac{F_z}{A} \quad (6.3)$$

formulával határozhatunk meg, ahol $A = k_0 e_0$ a keresztmetszet területe. Összegezve tehát a szélső szálakban ébredő normál feszültséget a következőképpen számíthatjuk:

$$\sigma_z(\pm e_0 / 2, h_b) = \pm \frac{M_{hx}(h_b)}{I_x} \frac{e_0}{2} - \frac{F_z}{A}. \quad (6.4)$$

Egytengelyű feszültségi állapotot feltételezve a szélső szálakban ébredő feszültséget az egyszerű Hooke-törvény segítségével a mérés során meghatározott nyúlások segítségével határoztuk meg:

$$\sigma(\pm e_0 / 2, h_b) = E \varepsilon(\pm e_0 / 2, h_b), \quad (6.5)$$

ahol E a rúd anyagának rugalmassági modulusa. A két feszültségérték különbségét képezve meghatározhatjuk a hajlításból származó feszültség nagyságát:

$$\sigma_h = \frac{\sigma_z(e_0 / 2, h_b) - \sigma_z(-e_0 / 2, h_b)}{2} = \frac{M_{hx}(h_b)}{I_x} \frac{e_0}{2}, \quad (6.6)$$

amelyből (6.1) szerint meghatározható az F_y oldalirányú erő:

$$F_y = \frac{1}{h_b} \left(\frac{2\sigma_h I_x}{e_0} + F_z b_0 \right). \quad (6.7)$$

Az F_z függőleges irányú terhelést a szélső szálakban létrejövő feszültségek határozhatnánk meg:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_z(e_0 / 2, h_b) + \sigma_z(-e_0 / 2, h_b)}{2} = -\frac{F_z}{A}, \quad (6.8)$$

ahonnan:

$$F_z = -\sigma_n A. \quad (6.9)$$

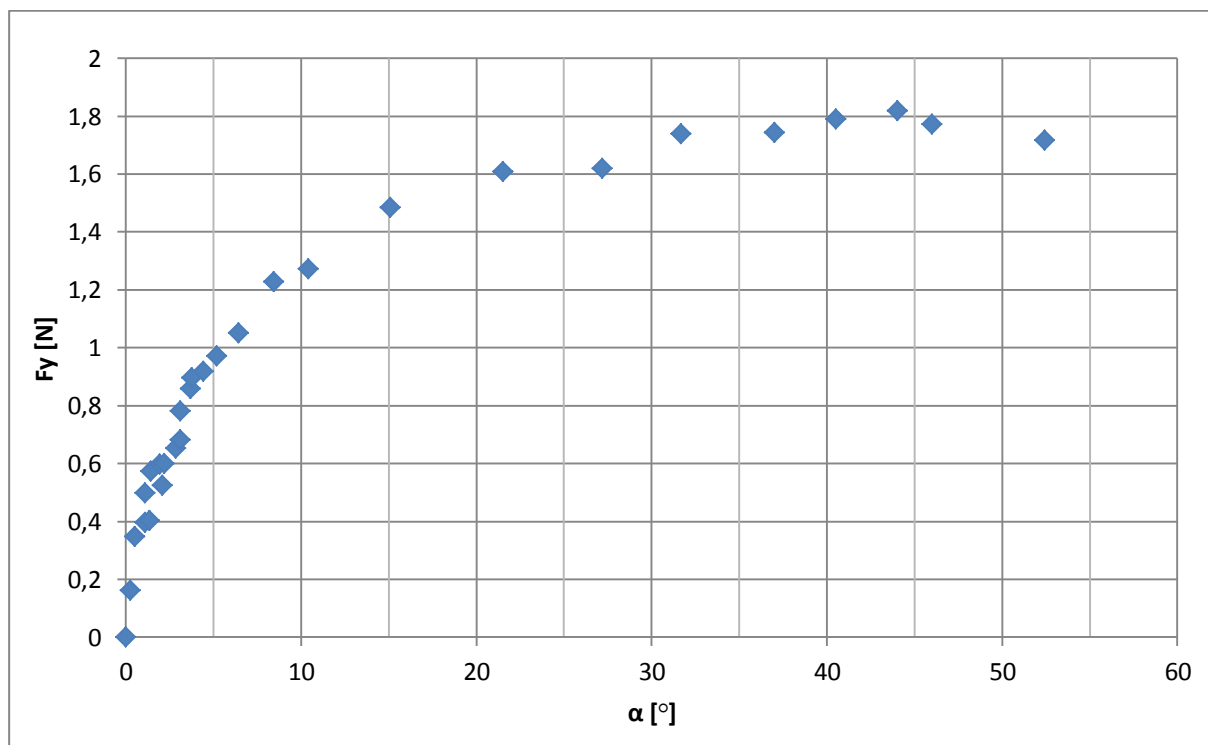
A mérés során azonban a szélső szálakban mért nyúlások abszolútértékének különbsége a mérési zaj nagyságrendjébe esett, így ezzel a módszerrel nem kaptunk értékelhető eredményeket. Ehelyett feltételeztük, hogy amennyiben a kerék α kúszási szöge zérus, akkor

nem ébred laterális irányú erő ($F_y = 0$), így a z irányú terhelést (6.7) szerint az alábbi összefüggésből számítottuk:

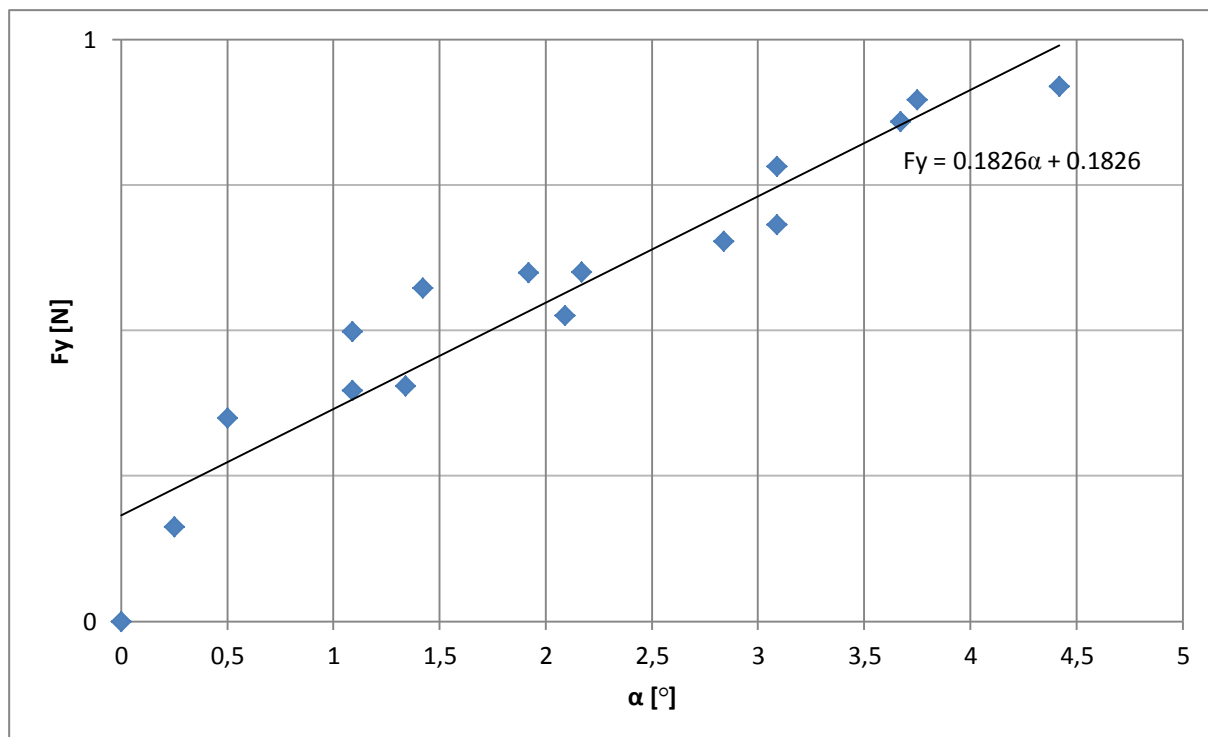
$$F_z = -\frac{2\sigma_h I_x}{e_0 b_0}, \quad (6.10)$$

a többi mérési pontban pedig ezt a referencia értéket használtuk a számításokhoz. A fentiek felhasználásával meghatározható a kerékről a rúdra átadódó oldalirányú erő, amelyek alapján az alább ismertetett paraméterinek segítségével felvehető a kúszási szög-erő karakterisztika:

$$\begin{aligned} E &= 210 \text{ GPa}, \\ h_b &= 260 \text{ mm}, \\ b_0 &= 35 \text{ mm}, \\ k_0 &= 30 \text{ mm}, \\ e_0 &= 2 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (6.11)$$



19. ábra, Az oldalirányú erő változása a kúszási szög függvényében

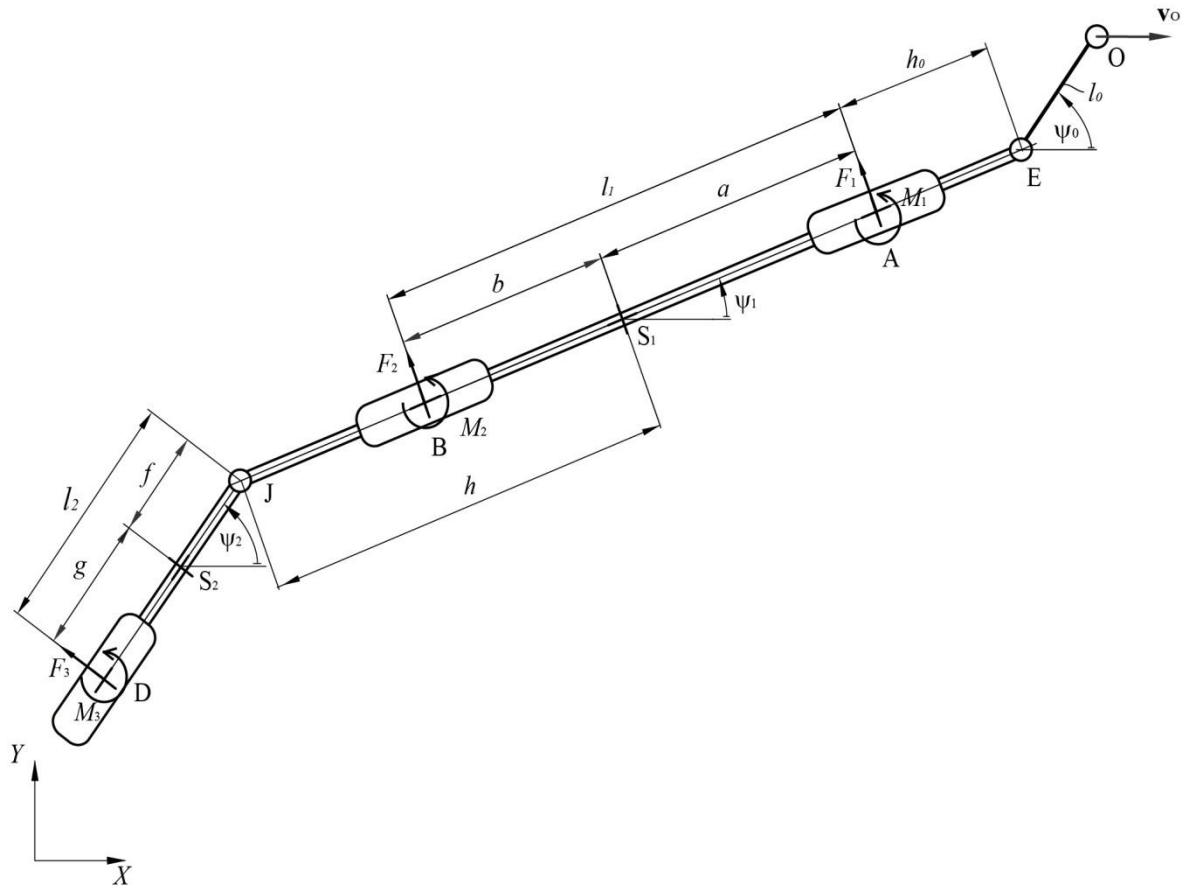


20. ábra, Az oldalirányú erő változása a kúszási szög függvényében, lineáris tartomány

Az F_z függőleges terhelés közelítése miatt azonban a fenti erőkarakterisztika csak kis kúszási szögek mellett ad elfogadható eredményt, ugyanis a rúd nagy alakváltozása mellett a kereket a talajhoz szorító erő drasztikusan lecsökken, ami miatt a laterális erők lehetséges maximuma is csökken a konstans terheléshez képest, így az esetleges nemlineáris vizsgálatokhoz további méréseket tennének szükségessé. Az erőkarakterisztika lineárisnak tekinthető tartományában ($0 \leq \alpha \leq 5^\circ$) (ld. 20. ábra) a mérési pontokra legkisebb négyzetek módszerével regressziós egyenest illesztettünk, ami alapján meghatároztuk a kerék lineáris rugómerevségét:

$$C_{F_y} = 0,1286 \left[\frac{N}{\text{fok}} \right] = 10,46 \left[\frac{N}{\text{rad}} \right]. \quad (6.12)$$

6.2. A berendezés mechanikai modellje



21. ábra, A kísérleti berendezés mechanikai modellje

A kísérleti berendezés mechanikai modelljének (ld. 21. ábra) megtervezésekor a 2. fejezetben bemutatott bicikli modellt vesszük alapul. Az utánfutót vontató személygépjárművet a futópadhoz az O pontban csuklóval rögzítjük egy l_0 hosszúságú, a modellben zérus tömegűnek tekintett rúddal, amely a személygépjárműhöz az E pontban szintén csuklóval kapcsolódik. E pont távolsága a jármű első kerekétől h_0 .

Bár a valós kísérleti berendezésben a futópadon a talajt mozgatjuk a járműhöz képest, a Galilei-transzformáció alapján a modellezésnél úgy tekintjük, hogy a talaj az abszolút vonatkoztatási rendszerben áll, és az O pont sebességére írunk elő kényszert:

$$\mathbf{v}_O = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Mivel a fenti kényszer integrálható, ezzel valójában az O pont $\mathbf{r}_O$ helyvektorára írtunk elő, időfüggő geometriai kényszert:

$$\mathbf{r}_O(t) = \begin{bmatrix} Vt \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

A rendszer tehát csak geometriai kényszert tartalmaz, amelyek között azonban (6.14) időfüggő, azaz a rendszer 3 szabadságfokú holonóm, reonóm rendszer, amelynek mozgásegyenletit a másodfajú Lagrange egyenlet segítségével vezethetjük le.

Válasszuk általános koordinátáknak az egyes rudak x -tengellyel bezárt ψ_0, ψ_1, ψ_2 szögeit:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Ezeket felhasználva a rendszer mozgásegyenleteit a másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével vezethetjük le:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k=1,2,3, \quad (6.16)$$

ahol T a rendszer kinetikus energiája $\dot{q}_k$ és q_k az általános koordináta sebesség, valamint általános koordináta vektorok k -dik elemei, valamint Q_k -k az ún. általános erők.

A rendszerre ható, a kerekek deformációjából származó F_1, F_2, F_3 erők, illetve az M_1, M_2, M_3 forgatónyomaték kiszámításához a kvázi-statisztikus deformációt feltételező lineáris kerékmodellt alkalmaztuk (ld. (3.18)) alkalmazhatjuk. A járműszerelvénny kerekeinek kúszási szögeit az eredeti modelltől eltérő módon az alábbiak szerint határozhatjuk meg az A, B, valamint D pontok sebességének x és y irányú komponenseinek segítségével:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arctan \left(\frac{-l_0 \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - h_0 \dot{\psi}_1 \cos \psi_1}{V + l_0 \dot{\psi}_0 \sin \psi_0 + h_0 \dot{\psi}_1 \sin \psi_1} \right) - \psi_1, \\ \alpha_2 &= \arctan \left(\frac{-l_0 \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - (a+b+h_0) \dot{\psi}_1 \cos \psi_1}{V + l_0 \dot{\psi}_0 \sin \psi_0 + (a+b+h_0) \dot{\psi}_1 \sin \psi_1} \right) - \psi_1, \\ \alpha_3 &= \arctan \left(\frac{-l_0 \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - (a+h+h_0) \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 - l_2 \dot{\psi}_2 \cos \psi_2}{V + l_0 \dot{\psi}_0 \sin \psi_0 + (a+h+h_0) \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 + l_2 \dot{\psi}_2 \sin \psi_2} \right) - \psi_2. \end{aligned} \quad (6.17)$$

6.3. Stabilitásvizsgálat

A kísérleti berendezést reprezentáló mechanikai rendszer stabilitásvizsgálatához, a mozgást leíró másodrendű differenciálegyenlet-rendszer egyenleteit Cauchy-átírással alakítsuk át elsőrendűvé. Ehhez $\dot{\psi}_0, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$ általános koordináta sebességek helyére vezessük be $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ változókat az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_0 &= \Omega_0, \\ \dot{\psi}_1 &= \Omega_1, \\ \dot{\psi}_2 &= \Omega_2.\end{aligned}\tag{6.18}$$

A fenti összefüggést deriválva az idő szerint az alábbi egyenletekre jutunk:

$$\begin{aligned}\ddot{\psi}_0 &= \dot{\Omega}_0, \\ \ddot{\psi}_1 &= \dot{\Omega}_1, \\ \ddot{\psi}_2 &= \dot{\Omega}_2.\end{aligned}\tag{6.19}$$

A fenti (6.18) és (6.19) összefüggéseket helyettesítsük be a rendszer mozgásegyenleteibe, majd hozzuk őket autonóm differenciálegyenlet alakra. Ezzel egy $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$, alakú, hatismeretlenes elsőrendű autonóm differenciálegyenlet-rendszerre jutottunk, ahol a változókat tartalmazó vektor:

$$\mathbf{x}^T(t) = [\Omega_0(t) \quad \Omega_1(t) \quad \Omega_2(t) \quad \psi_0(t) \quad \psi_1(t) \quad \psi_2(t)].\tag{6.20}$$

Ekkor az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_0 \mathbf{x}$ differenciálegyenlet-rendszer az autonóm egyenlet x_0 egyensúlyi helyéhez tartozó variációs rendszere, ahol $\mathbf{J}_0 \mathbf{f}(\mathbf{x})$ Jacobi-mátrixa, az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ helyen:

$$\mathbf{J}_0 = [j_{0kl}], \quad k, l = 1, \dots, 6,\tag{6.21}$$

ahol:

$$j_{0kl} = \left. \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0},\tag{6.22}$$

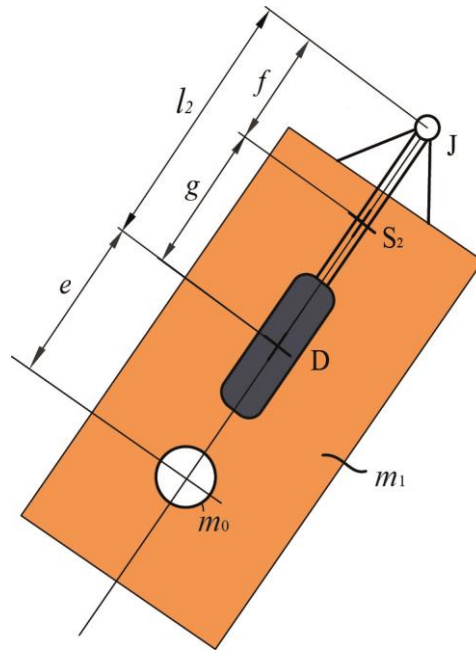
ahol $\mathbf{x}_0$ a differenciálegyenlet változóinak az állandósult mozgás során felvett értékeit tartalmazó vektor, amely ebben az esetben nullvektor. A karakterisztikus polinomot a következőképpen írhatjuk fel:

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{J}_0 - \mathbf{I}\lambda).\tag{6.23}$$

A differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{x}_0$ egyensúlyi helye (amely esetünkben a stacionárius mozgás) Ljapunov értelemben stabilis, ha $\mathbf{J}_0$ mátrix minden sajátértékének valós része

negatív, vagy zérus. Belátható, hogy a $\mathbf{J}_0$ Jacobi-mátrixnak ebben az esetben paramétereiktől függetlenül mindig lesz két zérus sajátértéke. A járműszerelvény egyenesfutásának lineáris stabilitása szempontjából azonban elegendő a $\hat{P}(\lambda) = P(\lambda)/\lambda^2$, λ -ra nézve negyedfokú polinomot vizsgálnunk, amihez Routh-Hurwitz kritériumot alkalmaztuk [5].

A kísérleti modell stabilitásvizsgálata során figyelembe vettük azt is, hogy a mérések során a vontatmány súlypontjának helyét a járművekre a kerekek tengelyéhez képest e távolságra elhelyezett póttömegekkel változtatjuk (ld. 22. ábra), ezzel azonban egyidejűleg a tehetetlenségi nyomatékot is megváltoztatjuk.



22. ábra, Vontatmány a ráhelyezett póttömeggel

Ezért ebben az esetben az utánfutó súlypontjának helyét leíró paramétereinek a következőképpen változnak meg:

$$f = \frac{l_2 \hat{p} m_2 + (l_2 + e) m_0}{m_2 + m_0}, \quad (6.24)$$

valamint:

$$p = \frac{f}{l_2} = \frac{l_2 p m_2 + (l_2 + e) m_0}{(m_2 + m_0) l_2}, \quad (6.25)$$

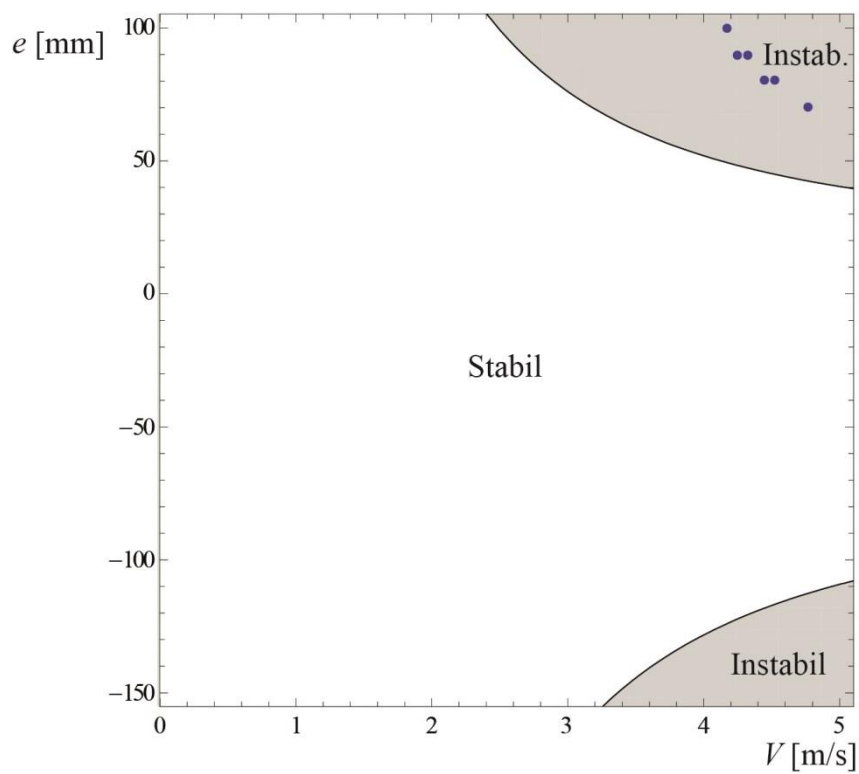
ahol $\hat{p}$ a p paraméterrel analóg mennyiség, a póttömeg nélküli vontatmány súlypontjának helyét adja meg. A rendszer stabilitását így különböző V jármű irányába eső sebességek, valamint a póttömeg az utánfutó tengelyéhez képesti különböző távolsága mellett vizsgáltuk az alábbi jármű paraméterek mellett:

$$\begin{aligned}
m_1 &= 2.83 \text{ kg}, & l_0 &= 0.1 \text{ m}, \\
m_2 &= 0.9 \text{ kg}, & a &= 0.108 \text{ m}, \\
m_0 &= 1 \text{ kg}, & b &= 0.149 \text{ m}, \\
k_1 &= 0.25, & h_0 &= 0.08 \text{ m}, \\
k_2 &= 0.15, & h &= 0.23 \text{ m}, \\
\hat{p} &= 1, & l_2 &= 0.25 \text{ m}, \\
C_{Fy} &= 10.46 \text{ N/rad},
\end{aligned} \tag{6.26}$$

ahol k_1 és k_2 a személygépjármű, illetve a vontatmány alaktényezője. Ezek segítségével a járművek θ_1 , illetve θ_2 saját súlyponti, a mozgás síkjára merőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékát a járművek hosszával négyzetesen arányosnak feltételezve, valamint az utánfutó esetében figyelembe véve a póttömeg pozíciójának hatását is a következőképpen becsüljük:

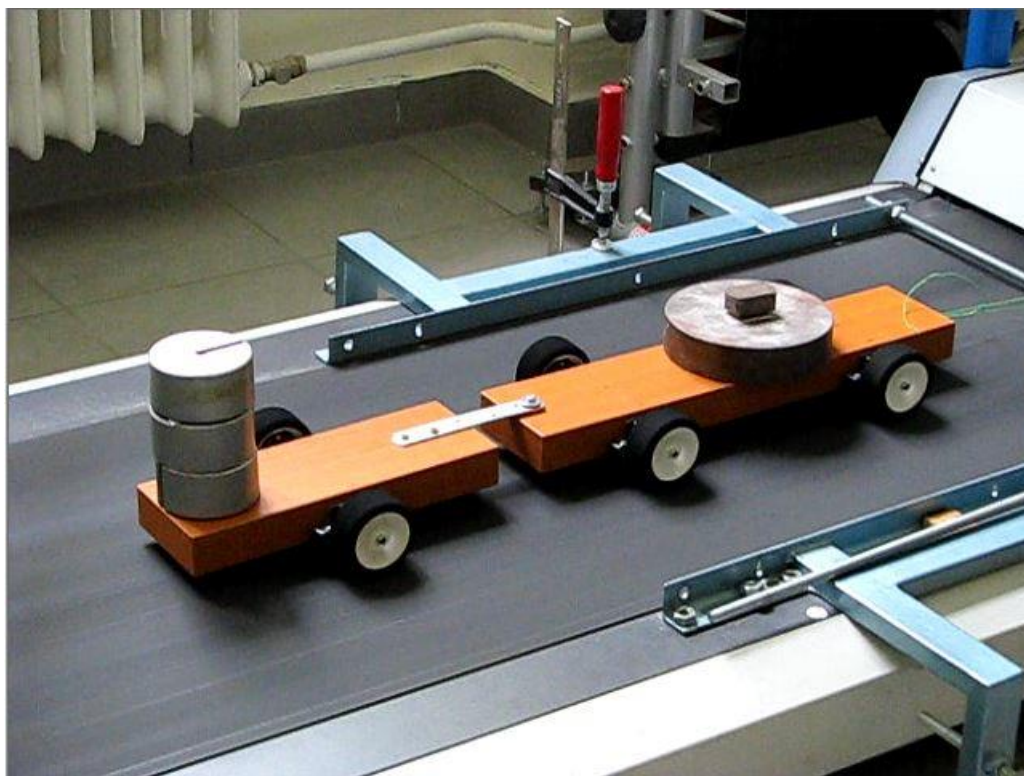
$$\begin{aligned}
\theta_1 &= k_1 m_1 (a + h + h_0)^2, \\
\theta_2 &= k_2 m_2 l_2^2 + m_0 (l_2 + p_0 - f)^2.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

A fenti paraméterek mellett a stabilitásvizsgálat eredményeit pozitív V longitudinális sebességek mellett stabilitási térképen ábrázoltuk (23. ábra). Megmutatható, hogy a kísérlethez módosított rendszer lineáris stabilitási tartományai megfeleltethetők az eredeti rendszerrel.



23. ábra, A kísérleti modell stabilitás térképe és a kísérlet során meghatározott, a stabilitásvesztéshez tartozó paraméterek

6.4. Kísérleti eredmények

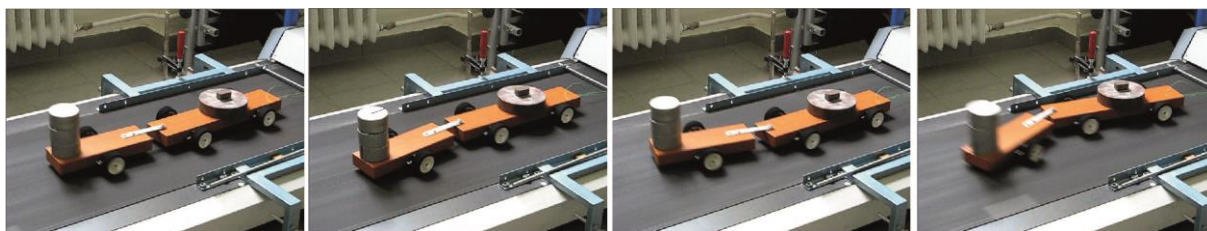


24. ábra, A járműszerelvény kísérleti modellje

A kísérlethez épített járműszerelvény modell a 24. ábrán látható. A járművek súlypontjának helyét ráhelyezett póttömegekkel állítottuk be. A mérések során, az utánfutón elhelyezett tömegek helyét 10 mm-es lépésekkel változtatva, minden egyes beállításhoz kerestük a stabilitásvesztéshez tartozó sebességeket. Egy-egy beállítás mellett több mérést is végeztünk. A stabilitásvesztéshez tartozó sebességeket a számítással meghatározott stabilitástérképen ábrázoltuk (ld. 23. ábra).

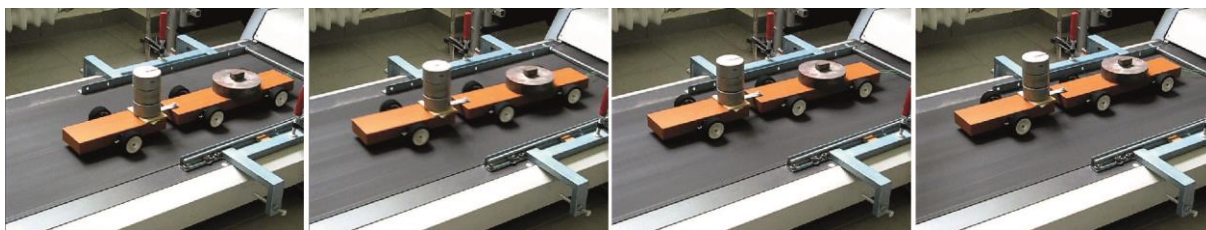
Megállapítható, hogy a vontatmány tengelye mögötti súlyponthoz tartozó stabilitási határ jellegre megegyezik a számítások eredményével. A stabilitásvesztés során kialakuló mozgást tekintve (ld. 25. ábra) elmondható, hogy annak rezgéses jellege ugyancsak egybevág a számítási eredményekkel. Ugyanakkor a méréssel meghatározott stabilitási határok a számítások által előre jelzettnél nagyobb V sebesség mellett alakultak ki, amelynek oka lehet akár a kerekek csillapítása, amelyet a dolgozatban nem modelleztünk.

Emellett megfigyelhető volt, hogy a stabilitási határhoz közeli, de még lineárisan stabil sebességtartományokban a rendszer nagyobb kitérítése esetén ugyancsak tapasztaltunk stabilitásvesztést, ami a nemlineáris rendszerben szubkritikus bifurkáció jelenlétére utal.



25. ábra, Stabilitásvesztés a vontatmány tengelye mögé helyezett póttömeg esetén

Ezzel szemben a vontatmány tengelye előtti súlyponthoz tartozó stabilitási tartomány határa a mérés során nem volt egyértelműen meghatározható. A kísérleti modellhez tartozó mechanikai rendszerben a stacionárius mozgás ugyanis a két zérus gyök miatt nem aszimptotikusan stabil, így a járműszerelvény nem tartja meg az egyenes mozgását. Ez a dinamikus stabilitásvesztés vizsgálatánál nem jelentett problémát, ott ugyanis a jármű stabilitásvesztésnél kialakuló rezgés egyértelműen domináns volt a zérus gyökök miatt kialakuló mozgáshoz képest. A statikus instabilitási határ esetében azonban szabad szemmel, nem különíthető el egymástól egyértelműen a járműszerelvény stabil illetve instabil egyenes futása, miután mindkét esetben tapasztalunk (a zavarások miatt kialakuló) rezgést (ld. 26. ábra)



26. ábra, Stabilitásvesztés a vontatmány tengelye elé helyezett póttömeg esetén

A probléma kiküszöbölésére egy lehetséges megoldás lehetne a rendszer mozgásának kamerával, illetve számítógép segítségével való analizálása, amelyek segítségével megállapítható lehetne a mozgás kezdetekor az utánfutó szögsebességének exponenciálisan növekvő, vagy csillapodó jellege, ami alapján elkülöníthető lenne a stabil és az instabil egyenes futás.

7. Összefoglalás

Összességében megállapítható, hogy a dolgozatban bemutatott mindkét dinamikus kerékmodell, a relaxációt figyelembe véve módosított kvázi-statikuss modell illetve az „emlékező” kerékmodell a járműszerelvénymozgásának részletesebb vizsgálatát tette lehetővé, és elsősorban kis longitudinális sebességek esetén kimutathatóan módosította a kialakuló mozgás jellegét, míg nagy sebesség mellett visszaadta a kvázi-statikuss kerékmodellel kapott eredményeket.

Emellett az „emlékező” kerékmodell esetében, az időkésleltetés miatt végtelen dimenziós rendszerben, kis sebességek esetén új instabil paramétertartományokat mutattunk ki. Ezeket numerikus szimuláció segítségével analizáltuk, és elkülönítettük az eltérő jellegű rezgési módusokat. Az is elmondható ugyanakkor, hogy ezek a módusok gyengén instabilak, így a valóságban ezek kevésbé jelentenek veszélyt, mint a nagy sebességnél történő stabilitásvesztés, ugyanis a kerékben lévő csillapítás miatt az instabil tartományok mérete csökkenhet, vagy akár el is tűnhetnek. Mindezek ellenére a rendszer dinamikáját befolyásolhatják, így közúti járművek vezetését segítő rendszerek tervezésekor, kis sebességű alkalmazásoknál jelentőségük lehet.

Mindezek mellett a dolgozat célja volt a járműszerelvények kísérleti stabilitásvizsgálata, és egy alkalmas mérési berendezés megépítése, amelyhez kapcsolódóan sor került a kerekek kúszási szög-laterális erő karakterisztikájának kimérésére is. A kísérleti eredmények a nagy longitudinális sebességekhez tartozó két jellegzetes instabil tartomány közül abban az esetben, amikor a vontatmány súlypontja a kerekek tengelye mögött helyezkedik el a számítási eredményekkel megegyező jelleget mutatott, valamint a nemlineáris rendszerben szubkritikus bifurkáció jelenléte is kimutatható volt.

Ezzel szemben abban az esetben, amikor a vontatmány súlypontja a kerekek tengelye előtt helyezkedett el nem volt egyértelműen azonosítható az egyenes futás stabilitásvesztéséhez tartozó határsebesség, így ezzel kapcsolatban még további vizsgálatok szükségesek.

A mechanikai modellel kapcsolatban továbblépési lehetőség lehet egyrészt a kerékmodell további fejlesztése, aminek egyik lehetséges iránya a relaxáció figyelembe vétele lehetne az „emlékező” modell esetében is, illetve a késleltetett rendszerben kis sebességnél kialakuló instabil tartományok stabilitása szempontjából a csillapítás figyelembe vétele. Ezen kívül érdekes eredményeket szolgáltatna a kerekek megcsúszásának implementálása a

kerékmodellbe és ezen keresztül a rendszer nemlineáris analízise, illetve ebben az esetben lehetőség lenne nagyobb kerékdeformációval járó mozgások (pl. a kanyarodás) vizsgálatára is.

8. Irodalomjegyzék

- [1] Pacejka, H.B., Tyre and Vehicle Dynamics, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2002.
- [2] Gantmacher, F., Lectures in Analytical Mechanics, Mir Publications, Moszkva, 1975.
- [3] Takács, D., Stépán, G., Contact patch memory of tyres leading to lateral vibrations of four-wheeled vehicles, *Philosophical Transactions of the Royal Society, A* 1-16. 2011.
- [4] Bachrathy D., Stépán G., Bisection method in higher dimensions and the efficiency number, *Periodica Politechnica, Mechanical Engineering*, 56/2 81-83. 2012.
- [5] Wolfram MathWorld, Routh-Hurwitz Theorem, <http://mathworld.wolfram.com/Routh-HurwitzTheorem.html>
- [6] Besselink, I.J.M., Shimmy of Aircraft Main Landing Gears, Proefschrift, Technische Universiteit Delft, 2000.
- [7] National Instruments, Measuring with Strain Gages, <http://www.ni.com/white-paper/3642/en/>