



TDK Dolgozat

Pneumatikus munkahenger PID szabályozásának stabilitása

Tolner Ferenc

Témavezető: Hős Csaba
Egyetemi docens
BME-GPK,
Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék

BME
2013

TDK dolgozat kiírás

A hagyományos pneumatikus munkahengerek jellemzően PID szabályzókkal vannak felszerelve, illetve ezen kontrollerekkel történik a szabályozás. Ezek a szabályzók azonban lineáris rendszerekre lettek kifejlesztve és nem veszik figyelembe az olyan nemlinearitásokat, mint pl. holtidő (szabályzóselepe), tapadó-csúszó súrlódás vagy a digitális mintavételezésből adódó időkéésés.

Ezek az ún. nem-folytonos hatások azonban alkalmatlanná tehetik a hagyományos vizsgálati módszereket. Ezek arra épülnek, hogy az egyenleteink folytonosan differenciálhatók, ami nem feltétlenül teljesül az egész értelmezési tartományon (pl.: a tapadó-csúszó súrlódás felléptekor még csak nem is folytonos a súrlódásfüggvény zérus sebesség esetén). Az utóbbi évtizedben kialakultak azok az analitikus matematikai- és numerikus módszerek, amelyek lehetővé teszik az ilyen hatások minőségi vizsgálatát is (pl.: stabilitásra nézve).

A TDK munka során egy egyszerű rendszerből kiindulva vizsgálom a PID szabályozásból következő visszacsatolás hatását és a szabályozás stabilitását egy pneumatikus munkahenger példáján. Az egyes nemlinearitásokat fokozatosan hozzáadva, illetve az elméleti és gyakorlati szempontból érdekes elemeket a modellbe építve közeledek a valós rendszer felé.

A TDK munka során érinteni fogjuk a klasszikus stabilitáselméletet és a modern nemlineáris dinamikát, majd elmélyedünk a „kapcsos” függvényekkel leírt közönséges differenciálegyenletek stabilitásának elméletében és szimulációs kérdéseiben. A témát választó hallgató az elméleti számításokat Matlabban megírt szimulációkkal fogja ellenőrizni.

Önállósági nyilatkozat

Alulírott Tolner Ferenc a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi egyetem Gépészmérnöki Karának Gépészeti Modellezés mesterképzési szakos hallgatója kijelentem, hogy ezt a TDK-dolgozatot meg nem engedett segédeszközök használata nélkül, saját magam készítettem el. A hivatkozásokban felsorolt forrásokon kívül csak a saját munkám eredménye.

Budapest, 2013. október 25.

.....

Aláírás

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	1
1. Bevezetés	2
1.1. Motiváció	2
1.2. Pneumatikus munkahengerek	2
1.3. PID szabályzás	5
2. Modellalkotás	6
2.1. Dinamikai alapegyenletek	6
2.2. A szabályozó szelep	7
2.2.1. A szabályozó szelep átfolyási keresztmetszete	7
2.2.2. A szabályozó szelep tömegárama	9
2.3. Modellegyenletek összefoglalása	11
3. Dimenziótlan egyenletek származtatása	12
3.1. A munkahenger sajátfrekvenciája	12
3.2. A csillapítási tényező meghatározása	13
3.3. Dimenziótlan egyenletek	15
4. A modell dimenziótlan alapegyenletei	20
5. Stabilitásvizsgálat, eredmények	23
5.1. Elméleti háttér	23
5.2. A stabilitásvizsgálat menete	24
5.3. Stabilitási térképek	25
5.3.1. Tisztán arányos szabályozás	25
5.3.2. PID szabályozás	28
5.4. Idődinamika	30
5.5. Az eredmények összefoglalása, konklúzió	32
6. Mellékletek	33
Hivatkozások	38

1. Bevezetés

1.1. Motiváció

A TDK dolgozatomban szakaszosan folytonos dinamikai rendszerek stabilitáselemzésével, illetve a "kapcsos" jobboldalú differenciálegyenletek stabilitásvizsgálatának elméleti kérdéseivel, szimulációs megvalósításokkal foglalkozom. Hasonló stabilitásvizsgálatok nemcsak a tudományos érdeklődés területén, hanem a modern mérnöki gyakorlatban is egyre nagyobb jelentőséggel bírnak. Fontos, hogy az egyre korszerűbb és kifinomultabb technikai eszközök precíz és realisztikus fizikai modelleknek megfelelően kerüljenek megtervezésre és megépítésre.

A fokozódó versenyhelyzet, illetve a technikai eszközök irányában mutakozó növekvő elvárások folyamatos fejlesztéseket és korszerűsítéseket vonnak maguk után. Így a folyamatok további optimalizációjához, valamint összességében a hatékonyabb üzemeltetéshez, nélkülözhetetlen a munkafolyamatok háttérében zajló konkrét fizikai jelenségek részletes feltérképezése, elemzése, azok egymáshoz képesti viszonyának, hatásuk nagyságrendjének ismerete.

A vizsgált folyamatokat megvalósító fizikai jelenségek leírhatóak differenciálegyenletek formájában. A gyakorlati számítások során pedig gyakorta élünk azzal a feltételezéssel, hogy a függvényeink „jól viselkednek”, vagyis folytonosak, megfelelő simasági tulajdonságokkal rendelkeznek¹, illetve alkalmazhatóak rájuk a közönséges differenciálegyenletek, illetve differenciálegyenlet rendszerek elemzésére ismert elméleti összefüggések². Viszont sok esetben nem teljesíthetők ezek a feltételek, nem állíthatjuk, hogy a függvényeink „kellően szépek”, vagy „kellően simák”. Ekkor pedig más megfontolást igényelnek a felírt egyenleteinknek, egyenletrendszereinknek a kezelése. Ezen újfajta, illetve más jellegű megfontolások, az általánosabb érvényű függvényekre vonatkozó stabilitáselemzés mélyebb megismerése a TDK-dolgozatom fő motivációja.

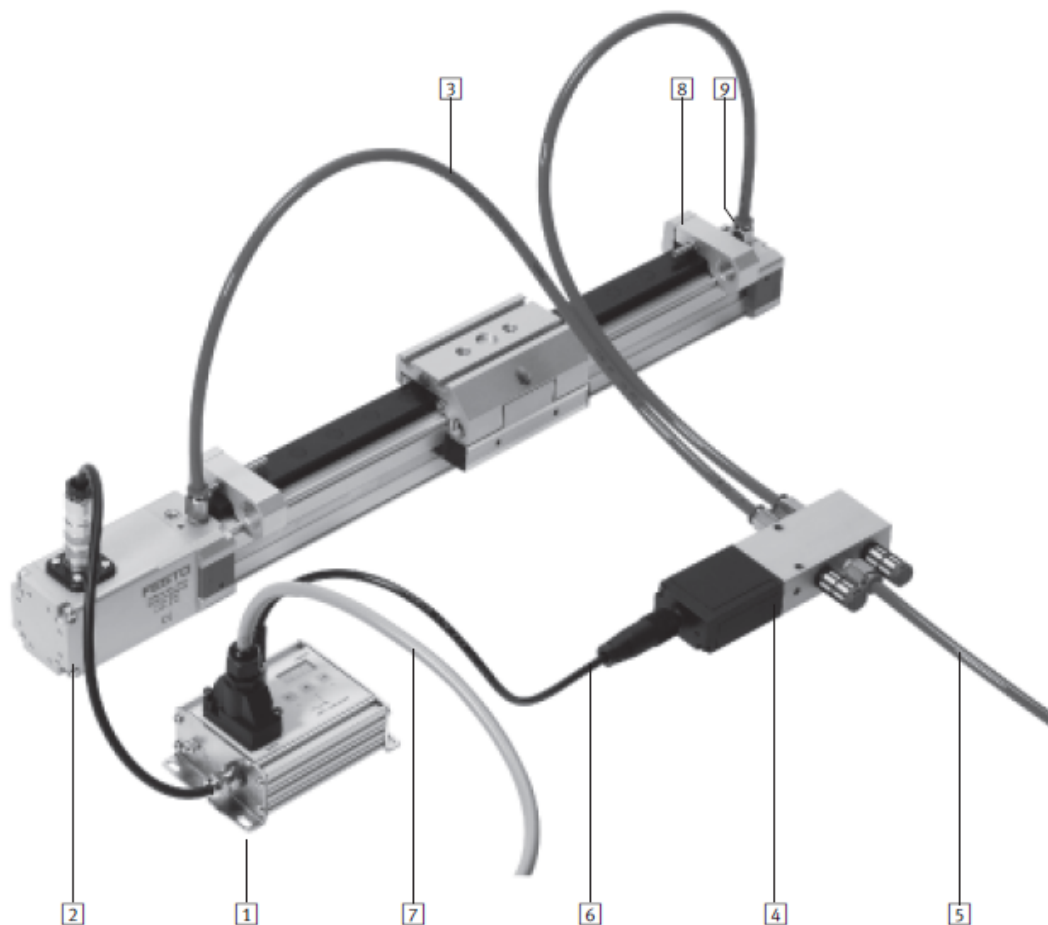
1.2. Pneumatikus munkahengerek

A vizsgálatot egy pneumatikus munkahenger példáján végeztem el, amely a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék laboratóriumában található (1. ábra).

A pneumatikus munkahengerek a sűrített levegővel való üzemeltetésből adódó gyorsabb áramlási sebességek miatt egyszerűbb kialakításúak, olcsóbbak, nagyobb sebességekre képesek, viszont kisebb erők kifejtésére alkalmasak, mint a hidraulikus munkahen-

¹Elegendően sokszor folytonosan differenciálhatóak

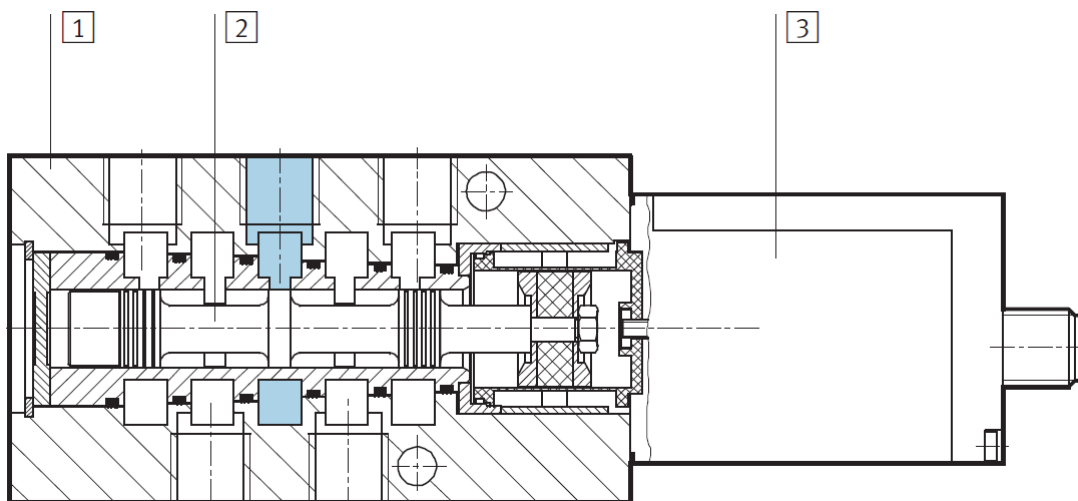
²Alapfeltétel, hogy a függvények Lipschitz-folytonosak, vagyis a függvénygörbe érintője nem lehet akármilyen meredek: $\forall f \in \mathbb{R}$ esetén $\exists L \in \mathbb{R}$, hogy $|f(y) - f(x)| \leq L \cdot |y - x|$



1. ábra. A munkahenger valós kinézete és elrendezése [4].

A Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék laboratóriumában megtalálható pneumatikus munkahenger. Felépítése: 1. Vég-pozícionáló controller, 2. Analóg távolságmérő jeladó,

3. Légvezeték, 4. Proporcionális szelep, 5. Kompresszor rávezetés, 6. Szelepet elektromos csatlakozója, 7. Controller elektromos csatlakozója, 8. Rögzített véghelyzet, 9. Légcsatlakozó.



2. ábra. Szabályószelep műszaki rajza [5].

A munkahenger szabályzását megvalósító proporcionális szelep keresztmetszeti felépítése: 1. Ház, 2. Szelep tolattyú, 3. Ház az elektronikának.

gerek. Ez meghatározza az alkalmazási területeit is, ami többnyire finom pozicionálás, kisebb erők megtartása, illetve anyagtovábbítás. Ezek az eszközök megfelelő pozicionálhatóság esetén könnyedén alkalmazhatóak ipari környezetben sokszor ismétlődő, periodikus mozgások megvalósítására (pl.: munkadarab továbbítása meghatározott távolságra). Elterjedésük a munkafolyamatok racionalizálásához és automatizálásához köthető [6].

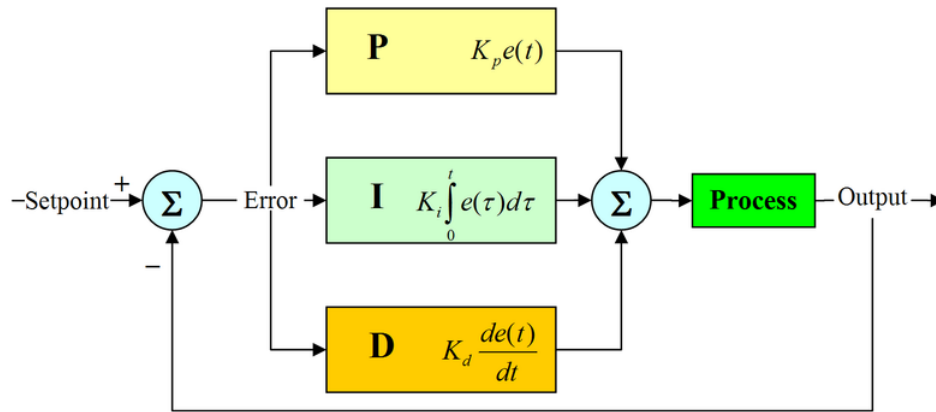
A munkahenger belsejében mozgó dugattyú pozíciójának érzékelése többnyire egy permanens mágnes segítségével történik. A detektált pozíció alapján pedig számítógépes felügyelettel, PID szabályzás keretében történik meg a kétoldali kamranyommás változtatása egy proporcionális szelep segítségével.

A szabályozás során többféle nemlinearitás is felléphet. Ilyen lehet például a belső mozgó rész és a henger belső fala között fellépő súrlódás hatása, amely a mozgás irányától függően előjelet valamint akár nagyságot is változtathat. A szelep beömlési keresztmetszete meghatározza, hogy fojtott, illetve nem-fojtott módon áramlik keresztül rajta a levegő, ez egy kritikus keresztmetszet esetén ugrásszerű változást jelent. Valamint az átfolyási keresztmetszet végeességéből adódóan a szabályozás során nem lehet tetszőlegesen nagy keresztmetszetet elérni. Esetleg túlszabályozás esetén előfordulhat, hogy a munkahenger belső mozgó része felütkezik a ház falába. Ezen hatások bármelyike szükségessé teszi, hogy a feladatot szakaszosan folytonos dinamikai rendszerként kezeljük.

1.3. PID szabályzás

A PID szabályozó a gyakorlatban előszeretettel alkalmazott, párhuzamos kompenzációjú alapuló szabályozótípus. A „PID” név a megvalósuló szabályozás elvére utal, az egyes kiadott jel típusok nevének rövidítéseiből tevődik össze. A szabályozó által kiadott vezérlőjel a következő komponensekből tevődik össze:

- A hibajellel arányos tag: **P** (Proportional)
- A hibajel integráljával arányos tag: **I** (Integral)
- A hibajel deriváltjával arányos tag: **D** (Derivative)



3. ábra. A PID szabályozás modellje [3].

Attól függően, hogy mely arányos tagok valósulnak meg a tényleges folyamatban, P, PI, PD vagy PID szabályzásról beszélhetünk. A szabályozó által kiadott feszültségjel általánosságban a az alábbi alakban írható

$$U(t) = - \left(P \cdot (x(t) - x_k(t)) + D \cdot \frac{d}{dt} (x(t) - x_k) + I \cdot \int_0^t (x(t') - x_k(t')) dt' \right) \quad (1)$$

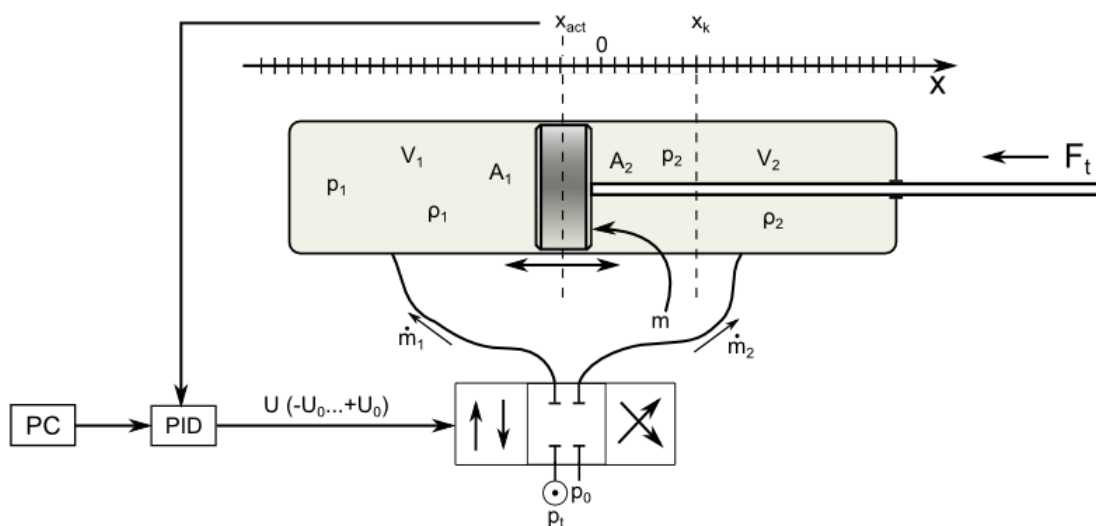
, ahol $x(t)$ a vizsgált jel aktuális nagysága, x_k a jel beállítani kívánt értéke, t pedig a mérés kezdési időpontjától számított idő. Vagyis a kiadott jel a jelenbeli, a jövőbeli és a múltbeli hibák függvénye. Az arányos tag a hibajel nagyságával együtt változva gyorsítja a kívánt jelszint elérését. Az integráló tag a múltbeli hibákat összegzi, gyorsítja a kívánt jel elérését, kiküszöböli a maradó szabályozási eltérést. A differenciáló tag a jövőbeli hibákkal áll összefüggésben, késlelteti a kimenet változásának mértékét, fokozza a szabályozás stabilitását, viszont felerősíti a jelben lévő nem kívánt zajokat.

Ezen három arányos tag segítségével gyors szabályzás érhető el, viszont a P, I és D paraméterek rossz megválasztása esetén instabilitás is keletkezhet a rendszerben, amely a gyakorlati feladatok túlnyomó többségében szigorúan elkerülendő. Így szükség van a vizsgált rendszert megfelelően jól leíró modell megalkotására, annak stabilitásvizsgálatára, valamint a mérnöki gyakorlatban használható stabilitási térképek³ előállítására [3].

2. Modellalkotás

2.1. Dinamikai alapegyenletek

A munkahenger belsejében egy dugattyú található, amely két részre osztja a hengeren belüli térfogatot. A dugattyú mozgatása fizikailag a két kamra közti nyomáskülönbség kialakításával illetve a dugattyúrúdra külsőleg alkalmazható erő segítségével történhet.



4. ábra. A vizsgált munkahenger fizikai modellje.

A 4. ábra jelöléseit alkalmazva a dugattyú két oldalán a közeg számára rendelkezésre álló térfogatok:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= (L_0 + x) A \\ V_2 &= (L_0 - x) A \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

³A stabilitási térképek segítségével diagram formájában megállapítható, hogy mely P, I és D paraméter értékek mellett várható egy rendszer stabil, illetve instabil működése. Az is könnyedén leolvasható róla, hogy ezen arányos tagok változtatásával hogyan módosul a stabil tartomány nagysága.

ahol L_0 a munkahenger félhossza és $x = 0$ esetén a dugattyú középen tartózkodik⁴. A dugattyú mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = A(p_1 - p_2) + F_t. \quad (3)$$

Az egyes kamrákban lévő közegek tömegének időbeli megváltozásából származtatható az adott kamra nyomásdinamikája. A bal oldali kamra tömegének időbeli megváltozása a bezárt levegő sűrűségének és térfogatának megváltozásából tevődik össze, ami egyenlő a szabályozószelepen keresztül bejuttatott levegő mennyiségével:

$$\dot{m}_1 = \frac{d}{dt}(\rho_1 V_1) = \rho_1 \frac{dV_1}{dt} + V_1 \frac{d\rho_1}{dt} = \rho_1 A\dot{x} + V_1 \frac{d\rho_1}{dp_1} \frac{dp_1}{dt} = \rho_1 A\dot{x} + \frac{V_1}{a^2} \frac{dp_1}{dt}, \quad (4)$$

ahol $a = \sqrt{\kappa RT}$ a közegbeli hangsebesség, valamint feltesszük, hogy $\rho = \rho(p)$. Hasonló gondolatmenet végezhető el a jobb oldali kamra tömegnövekedésének időbeli megváltozására. Így a bal- és jobb oldali kamra nyomásdinamikája:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{a^2}{V_1} (\dot{m}_1 - \rho_1 A\dot{x}) \quad (5)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{a^2}{V_2} (\dot{m}_2 + \rho_2 A\dot{x}). \quad (6)$$

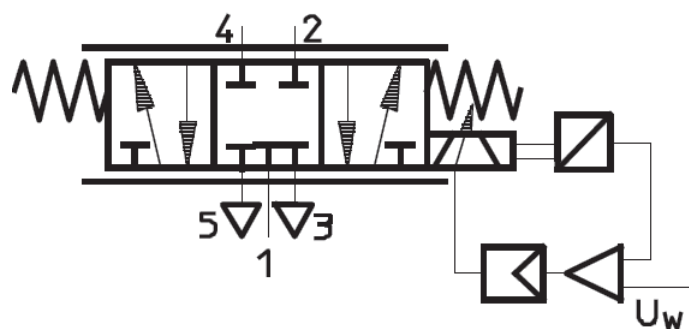
2.2. A szabályozó szelep

2.2.1. A szabályozó szelep átfolyási keresztmetszete

A szabályozó szelepen átfolyó levegő tömegáramainak számításakor figyelembe kell venni, hogy a szabályozó szelep átfolyási keresztmetszete a szabályozó feszültség függvénye. Ennek megfelelően meg kell adnunk, hogy a visszacsatoló szabályozófeszültség a szelep átfolyási keresztmetszetének változtatásával hogyan befolyásolja a munkahenger működését.

A szelepnél található beömlő-keresztmetszet függ a szelep pillanatnyi pozíciójától (5. ábra). A pozíciót viszont kívülről szabályozzuk a rendszerre kapcsolt feszültséggel. Vagyis a beömlő keresztmetszet függ a feszültségtől (6. ábra) Egy adott U_0 feszültségküszöbön belül zérus, innen pedig egy szintén ismert U_{max} értékig közel lineárisan növekszik, majd U_{max} feszültségérték felett már konstans $\hat{A}_{max}$ maximális átfolyási keresztmetszetünk van.

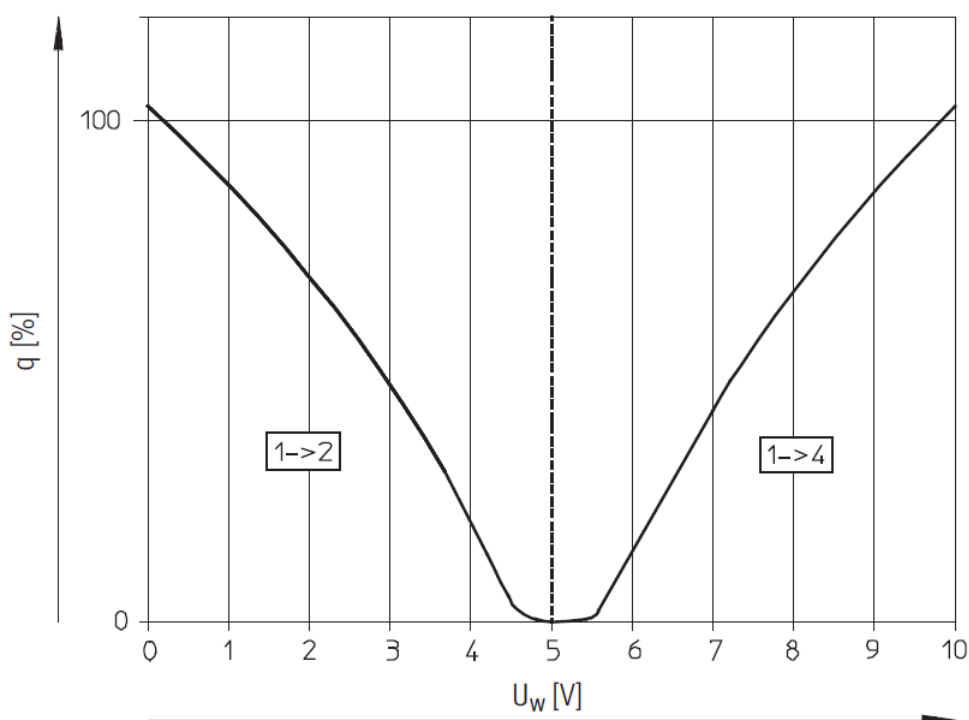
⁴Itt elhanyagoljuk a dugattyúrúd jelenlétét, ami az általunk vizsgált munkahenger esetében megtehető. Így a dugattyú két oldalának azonos felületet tulajdonítunk. Ez egy matematikailag indokolt és megalapozott közelítés. A gyakorlatban viszont ha csak egy irányban fontos a kifejtett erő nagysága lehet jelentősége az eltérő dugattyúfelületeknek.



5. ábra. A szelep katalógusban megadott elrendezése és lehetséges összeköttetései [5].

A beömlő-keresztmetszet közelítő függvénye:

$$\hat{A}(u) = \begin{cases} 0 & |U| < U_0 \\ \frac{\hat{A}_{max}}{U_{max} - U_0} \cdot (U - U_0) & |U| > U_0 \end{cases} \quad \text{ha} \quad (7)$$



6. ábra. A szelep –katalógusban feltüntetett– áteresztett térfogatáramának %-os változása a feszültség függvényében [5].

2.2.2. A szabályozó szelep tömegárama

A munkahengert szabályozó szelep mozgás közben lehetővé teszi, hogy közeg áramoljon be-, illetve ki a henger egyes kamráiba egy kicsiny $\hat{A}$ keresztmetszeten keresztül (2. ábra). Az átfolyó tömegáram attól függ, hogy mekkora a nyomáskülönbség az adott kamra illetve a munkahengerhez csatolt nyomástartó edény⁵ között. Az átfolyó tömegáram:

$$\dot{m} = C_d \hat{A} \rho v, \quad (8)$$

ahol ρ a közeg sűrűsége, C_d pedig az átfolyási tényező. A szelepnél átáramló közeg sebessége [2]:

$$v = \begin{cases} p_t \sqrt{\frac{\kappa}{RT_t} \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}} & \text{ha } \frac{p_e}{p_t} \leq 0.53 \\ \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} RT_t \left(1 - \frac{p_e}{p_t} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} & \text{ha } \frac{p_e}{p_t} > 0.53 \end{cases}, \quad (9)$$

ahol R a specifikus gázállandó, κ a fajhőviszony, T_t és p_t a tartályból kiömlő gáz hőmérséklete és nyomása, p_e pedig az ellennyomás⁶ a kiömlő sugárban. Ebből megállapítható, hogy a munkahenger egyes kamráinak, valamint az eszközre kapcsolt légköri-, és tartálynyomás nagyságának függvényében a szelepen be- és kiáramló közeg sebessége nem folytonos függvény szerint vált. Ezt a modellünkben figyelembe kell venni, a kamrák egyes tömegáramai szakaszosan folytonos függvényekkel adhatóak meg.

Attól függően, hogy milyen visszacsatoló feszültséggel vezéreljük a szelepet befele- és kifelé is áramolhat levegő a munkahenger kamráiba. Viszont az is előfordulhat, hogy az elválasztó dugattyú rezgései miatt rövid időre olyan nyomásdinamika alakul ki, melynek során a tartálynyomásnál (p_t) nagyobb vagy a légköri nyomásnál (p_0) kisebb nyomás is megfigyelhető az egyes kamrákban. Ennek megfelelően ezeket a lehetőségeket is figyelembe kell venni. Mindezeket a hatásokat figyelembe véve kapjuk a 1. és 2. táblázatok összefüggéseit.

⁵Az általam vizsgált elrendezésben egy $p_t = 6\text{bar}$ nyomású tartály, valamint $p_0 = 1\text{bar}$ nyomású légkör áll kapcsolatban a munkahengerrel a szabályozó szelepen keresztül

⁶Ezek a paraméterek általánosan érvényesek tetszőleges tartályból való gázkiömlés esetére.

$\dot{m}_1$			
$U > U_0$	$C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_t \sqrt{\frac{\kappa}{RT_t} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}$ $C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_t \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{RT_t} \left(1 - \frac{p_1}{p_t} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$ 0 $-C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_1 \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{RT_1} \left(1 - \frac{p_t}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$ $-C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_1 \sqrt{\frac{\kappa}{RT_1} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}$	ha $0 < \frac{p_1}{p_t} \leq 0,53$ BE ha $0,53 < \frac{p_1}{p_t} < 1$ BE ha $\frac{p_1}{p_t} = 1$ 0 ha $1 < \frac{p_1}{p_t} < \frac{1}{0,53}$ KI ha $\frac{1}{0,53} \leq \frac{p_1}{p_t}$ KI	
$U_0 > U > -U_0$	0	Holtsáv	0
$-U_0 > U$	$-C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_1 \sqrt{\frac{\kappa}{RT_1} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}$ $-C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_1 \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{RT_1} \left(1 - \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$ 0 $C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_0 \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{RT_0} \left(1 - \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$ $C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_0 \sqrt{\frac{\kappa}{RT_0} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}$	ha $0 < \frac{p_0}{p_1} \leq 0,53$ KI ha $0,53 < \frac{p_0}{p_1} < 1$ KI ha $\frac{p_0}{p_1} = 1$ 0 ha $1 < \frac{p_0}{p_1} < \frac{1}{0,53}$ BE ha $\frac{1}{0,53} \leq \frac{p_0}{p_1}$ BE	

1. táblázat. A bal oldali kamra $\dot{m}_1$ tömegárama.

$\dot{m}_2$			
$U > U_0$	$-C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_2 \sqrt{\frac{\kappa}{RT_2} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}$	ha $0 < \frac{p_0}{p_2} \leq 0,53$	KI
	$-C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_2 \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{RT_2} \left(1 - \frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$	ha $0,53 < \frac{p_0}{p_2} < 1$	KI
	0	ha $\frac{p_0}{p_2} = 1$	0
	$C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_0 \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{RT_0} \left(1 - \frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$	ha $1 < \frac{p_0}{p_2} < \frac{1}{0,53}$	BE
	$C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_0 \sqrt{\frac{\kappa}{RT_0} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}$	ha $\frac{1}{0,53} \leq \frac{p_0}{p_2}$	BE
$U_0 > U > -U_0$	0	Holtsáv	0
$-U_0 > U$	$C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_t \sqrt{\frac{\kappa}{RT_t} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}$	ha $0 < \frac{p_2}{p_t} \leq 0,53$	BE
	$C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_t \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{RT_t} \left(1 - \frac{p_2}{p_t} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$	ha $0,53 < \frac{p_2}{p_t} < 1$	BE
	0	ha $\frac{p_2}{p_t} = 1$	0
	$-C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_2 \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{RT_2} \left(1 - \frac{p_t}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$	ha $1 < \frac{p_2}{p_t} < \frac{1}{0,53}$	KI
	$-C_d \cdot \hat{A}(u) \cdot p_2 \sqrt{\frac{\kappa}{RT_2} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}$	ha $\frac{1}{0,53} \leq \frac{p_2}{p_t}$	KI

2. táblázat. A jobb oldali kamra $\dot{m}_2$ tömegárama.

2.3. Modellegyenletek összefoglalása

A mozgásegyenlet, a kamrák nyomásdinamikai alapegyenleteinek, szabályozószerepen lehetséges tömegáramok, valamint a visszacsatoló feszültségjel megadása után már zárt egyenletrendszerrel rendelkezünk. Ezzel már lehetséges a modell megadása, a feladat határozottá válik. Az előállt differenciálegyenlet rendszer Cauchy-transzformáció után a következő alakba írható⁷:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -\frac{k}{m} y_2 + \frac{A}{m} (y_3 - y_4) \\ \frac{a^2}{V_1} (\dot{m}_1 - \rho_1 A y_2) \\ \frac{a^2}{V_2} (\dot{m}_2 + \rho_2 A y_2) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

⁷A Cauchy-transzformált alak segítségével a magasabb rendű differenciálegyenletek is visszavezethetők elsőrendű differenciálegyenletek rendszerére. Ez a numerikus megoldás során előnyös, ugyanis ekkor kezdeti érték problémák esetén alkalmazhatóak a Runge-Kutta módszerek, melyekre a Matlab szoftverek már kész függvényeket kínálnak

ahol

$$y(t) = [x(t) \dot{x}(t) p_1(t) p_2(t)]^T$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_1(U(t), p_1(t), T_1)$$

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_2(U(t), p_2(t), T_2)$$

$$U(t) = -\left(P \cdot (x(t) - x_k(t)) + D \cdot \frac{d}{dt}(x(t) - x_k) + I \cdot \int_0^t (x(t') - x_k(t')) dt\right)$$

3. Dimenziótlan egyenletek származtatása

A fizikai rendszer jellemzéséhez egy olyan –a fizikai effektusokat figyelembe vevő– matematikai modell kidolgozása szükséges, amely elég komplex ahhoz, hogy a főbb jelenségeket és azok hatásait figyelembe vegye, viszont még elég egyszerű bizonyos analitikus, illetve szemléletes megállapítások megtételéhez. Ehhez célszerű a korábbi egyenleteinket dimenziótlan alakra hozni. Így könnyebben tudunk az egyes mennyiségek változásának egymáshoz képesti nagyságrendjéről, illetve időbeli változási gyorsaságáról információt szerezni. Ennek pedig a nagyságrendi elhanyagolások illetve egyszerűsítések megtételekor van nagy jelentősége.

3.1. A munkahenger sajátfrekvenciája

A dimenziótlanításhoz szükséges referenciamennyiségek származtatásához először vizsgáljuk meg a mindkét végén lezárt munkahengerben lévő dugattyú sajátfrekvenciáját a dugattyú pozíciójának függvényében. A csillapítatlan és gerjesztetlen rendszer ($k = 0$ és $F_t = 0$) sajátfrekvenciája a (10)-es egyenletrendszerből származtatható, ahol figyelembe kell venni, hogy a munkahenger zárt („lekupakolt”) kivezetései esetén esetén $\dot{m}_1 = 0$ és $\dot{m}_2 = 0$.

Vegyük a csillapítatlan, gerjesztés nélküli mozgásegyenlet (3) idő szerinti deriváltját, majd helyettesítsük be a kétoldali nyomások dinamikájára vonatkozó (5) és (6) összefüggéseket:

$$\begin{aligned} m \frac{d^3 x}{dt^3} &= A (\dot{p}_1 - \dot{p}_2) \\ m \frac{d^3 x}{dt^3} &= A a^2 \left(-\frac{\rho_1 A}{V_1} \dot{x} - \frac{\rho_2 A}{V_2} \dot{x} \right) \\ m \frac{d^3 x}{dt^3} &= -A^2 \kappa R T \dot{x} \left(\frac{\rho_1}{V_1} + \frac{\rho_2}{V_2} \right) \\ \frac{d^3 x}{dt^3} &= -A^2 \frac{\kappa R T}{m} \dot{x} \left(\frac{\rho_1}{A(L-x)} + \frac{\rho_2}{A(L+x)} \right). \end{aligned} \tag{11}$$

Ha idő szerint egyszer visszaintegráljuk a (11) egyenletet:

$$\ddot{x} + \frac{A\kappa RT}{m} \left(\rho_1 \ln(L+x) - \rho_2 \ln(L-x) \right) + C = 0. \quad (12)$$

Figyelembe véve, hogy egyensúlyi helyzet körüli kis kitéréseket vizsgálunk, így $p_1 = p_2$ ($\equiv p_0$ kísérletben)⁸ a kétoldali nyomás viszonyára, így a $p = \rho RT$ ideális gáztörvényből:

$$\ddot{x} + \frac{A\kappa p_0}{m} \ln\left(\frac{L+x}{L-x}\right) + C = 0. \quad (13)$$

Kis kitérések ($x \approx 0$) körül linearizálva a (13) mozgásegyenletet, valamint a konstans tényezőket elhagyva⁹ a következő rezgőmozgást leíró egyenletre jutunk:

$$\ddot{x} + \frac{\kappa A p_0}{m} \left(1 + \left(\frac{1}{L-x} + \frac{1}{L+x} \right) \Big|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) \right) = 0 \rightarrow \ddot{x} + \frac{s_{eff}}{m} x + const = 0. \quad (14)$$

Ha a munkahenger dugattyúja középpállásban helyezkedik el ($x_0 = 0$), és e helyzet körüli rezgéseket vizsgáljuk (ekkor (14)-es egyenlet konstans tagja nullával egyenlő), akkor:

$$\ddot{x} + \frac{1}{m} \cdot \frac{2\kappa A p_0}{L} x = 0, \quad (15)$$

vagyis a rendszer két darab sorba kapcsolt légrugóval írható le. Ha az $x_0 = 0$ helyzethez tartozó rugómerevséget választjuk referencia rugómerevségnek: $s_{ref} = s_{eff}^0(x_0 = 0) = \frac{2\kappa A p_0}{L}$, akkor a dimenziótlan rugómerevség:

$$\tilde{s} = \frac{\kappa A p_0 \left(\frac{1}{L-x} + \frac{1}{L+x} \right)}{\kappa A p_0 \frac{2}{L}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{L}} + \frac{1}{1 + \frac{x}{L}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \tilde{y}_1} + \frac{1}{1 + \tilde{y}_1} \right), \quad (16)$$

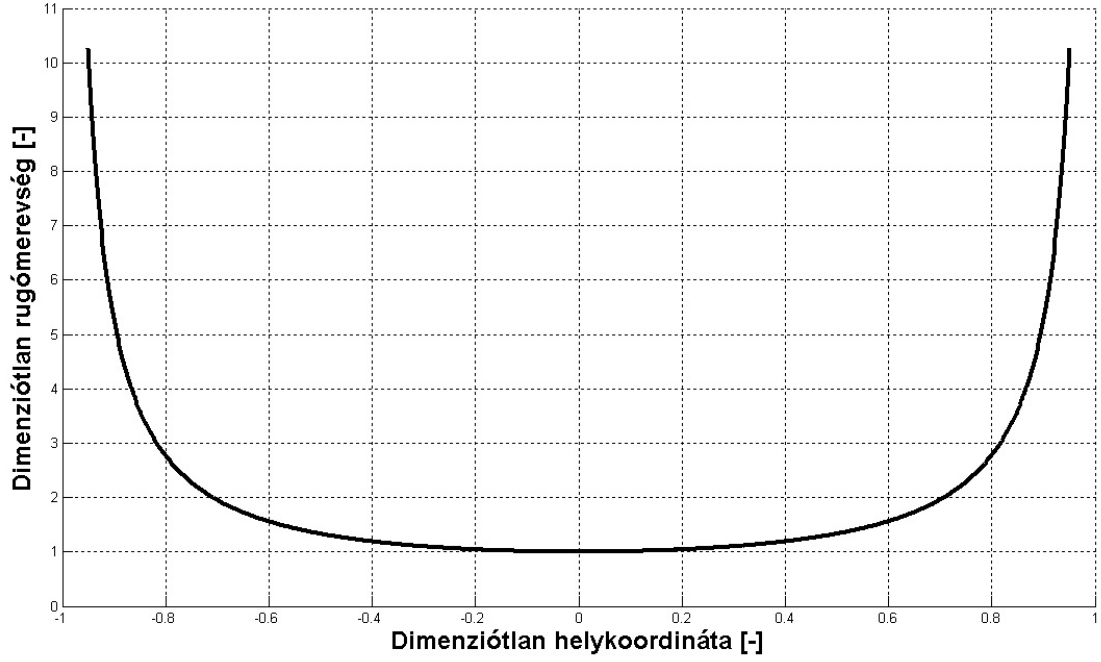
ahol $\tilde{y}_1 = \frac{x}{L}$ a dimenziótlan helykoordináta.

3.2. A csillapítási tényező meghatározása

A munkahenger dugattyújának gyors bepozicionálásához szükséges, hogy a kamrákba történő levegő bejuttatásával létrehozott zavarok miatt kialakuló rezgések a lehető leggyorsabban csengjenek le. Ehhez meg kell határozni a rendszer aperiódikus határrezgéséhez tartozó kritikus csillapítási tényezőjét.

⁸Ez a nyomásérték tetszőlegesen megválasztható egyensúlyi nyomás a légköri- és a tartálynymomás között. A későbbiekben használt referencia mennyiségek rögzítése miatt célszerű ezt a nyomást az ismert légköri nyomással azonosnak választani.

⁹Csak eltolják az egyensúlyi helyzetet, de a sajátfrekvencia értékét nem befolyásolják.



7. ábra. A dimenziótlan rugómerevség a dimenziótlan koordináta függvényében.

Egyszerű viszkózus csillapítást feltételezve egy gerjesztés nélküli rezgő rendszer általános mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + sx = 0. \quad (17)$$

Ez az $\omega^2 = \frac{s}{m}$ és $D = \frac{k}{2m\omega}$ mennyiségekkel a rezgésstanban szokásos

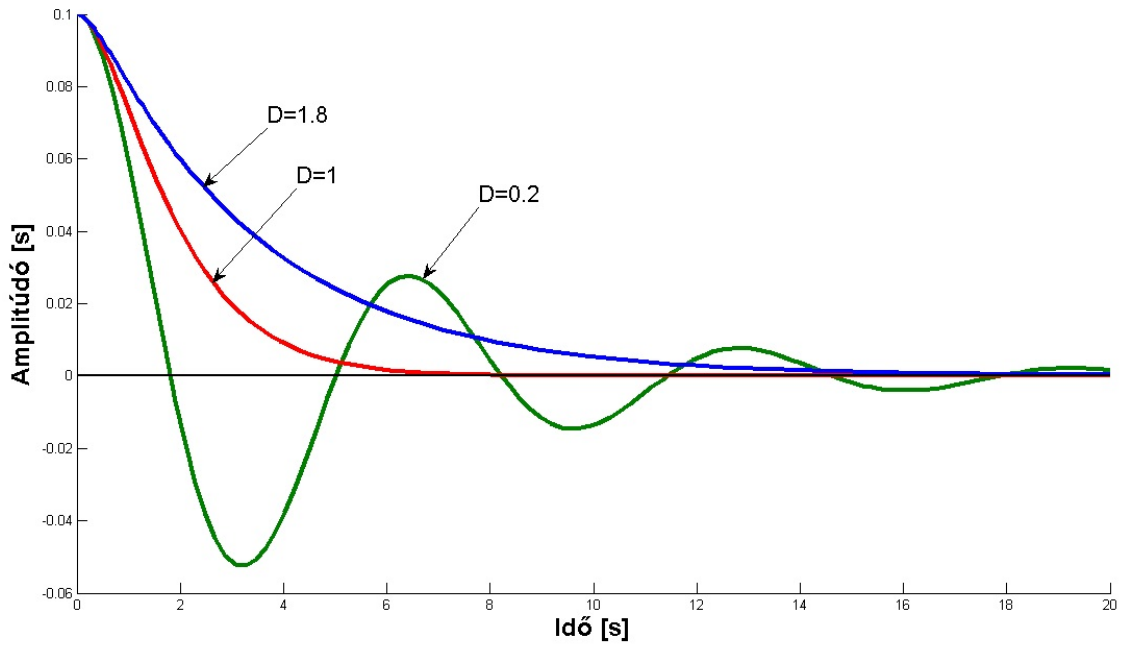
$$\ddot{x} + 2D\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (18)$$

alakra hozható. Az $x(t) = A \cdot \exp(\lambda t) \neq 0$ próbafüggvényt használva a $\lambda^2 + 2D\omega\lambda + \omega^2 = 0$ karakterisztikus egyenletre jutunk, melynek gyökei: $\lambda_{1,2} = -D\omega \pm \omega\sqrt{D^2 - 1}$.

$$\begin{aligned} \text{ha } 0 \leq D \leq 1 & \rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \rightarrow \text{alulcsillapított eset} \\ \text{ha } D = 1 & \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \rightarrow \text{aperiódikus határeset} \\ \text{ha } D \geq 1 & \rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \rightarrow \text{túlcsillapított eset} \end{aligned}$$

Így viszkózus csillapítást feltételezve (mérési adatokból lehet rá becslést adni) a $D = 1 = \frac{k}{2m\omega}$ összefüggésből a kritikus csillapítási tényező:

$$k_{krit} = 2\sqrt{ms_{eff}} = 2\sqrt{mA\kappa p_0 \left(\frac{1}{L-x} + \frac{1}{L+x} \right)}, \quad (19)$$



8. ábra. Csillapított rezgőmozgás amplitúdójának időfüggése a csillapítási tényező különböző értékei esetén.

vagyis a rendszer kritikus csillapítási tényezője is függ a dugattyú munkahengeren belüli pozíciójától. Ennek oka, hogy a dugattyú két oldalán található lérugók rugómerevsége függ az adott kamra térfogatától, azaz a dugattyú helyzetétől.

3.3. Dimenziótlan egyenletek

A modellt jellemző egyenleteket érdemes dimenziótlan alakban megadni. Ez azért előnyös, mert így a konkrét fizikai paraméterektől és a rendszert jellemző méretektől függetlenül tudjuk a kialakuló dimenziótlan egyenleteinket vizsgálni. Így matematikailag egyszerűbb alakra hozhatóak az egyenletek és könnyebben tudunk általános következtetéseket levonni a rendszert illetően. Nem kell figyelni a fizikai mennyiségekre, azok az eredmények diszkussziója során a megfelelő referenciamennyiségek segítségével visszakonvertálhatóak fizikai tartalmuknak megfelelő alakra.

A (10) egyenletrendszer dimenziótlanításához először írjuk fel az egyenletrendszer ismeretlen változóit dimenziótlan- és referencia mennyiségek szorzataként a következő módon:

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \cdot x_{ref} \\ \tilde{y}_2 \cdot v_{ref} \\ \tilde{y}_3 \cdot p_{ref} \\ \tilde{y}_4 \cdot p_{ref} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Az idő szerinti deriváláshoz vezessünk be egy dimenziótlan időt a $\tau = \omega \cdot t$ alakban, így az idő szerinti deriválás a $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = y' \cdot \omega$ láncszabály következtében egy konstanssal való szorzással helyettesíthető a dimenziótlan egyenleteink körében. Az ω konstans értékes a rendszer ismert paramétereivel az $\omega = \sqrt{\frac{s_{ref}}{m}}$ alakban felvenni, ahol m a mozgórész tömege, s_{ref} pedig a munkahenger középpontjában számolható csillapítatlan rendszer rugómerevsége.

A csillapítási tényező $k = \tilde{k} \cdot k_{ref}$ dimenziótlanításakor a referencia csillapítási tényezőt ismét célszerű az $x = 0$ helyen számolható rugómerevséggel megadni a $k_{ref} = 2\sqrt{ms_{ref}} = 2m\sqrt{\frac{s_{ref}}{m}} = 2m\omega$ módon. Tehát a rendszer csillapítási tényezőjét a kritikus csillapítási tényezővel dimenziótlanítjuk. Így $\tilde{k}$ 1-hez viszonyított értékéből (amit kísérletek alapján állapíthatunk meg) eldönthető, hogy az adott modellel jellemzett rendszer milyen módon csillapított.

A (10) egyenletrendszer első egyenletének dimenziótlanítása:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \Rightarrow \\ \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \end{aligned} \quad (21)$$

A (10) egyenletrendszer második egyenletének dimenziótlanítása:

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= -\frac{k}{m}y_2 + \frac{A}{m}(y_3 - y_4) \Rightarrow \\ \tilde{y}_2' &= -2\tilde{k}\tilde{y}_2 + \frac{Ap_{ref}}{mL\omega^2}(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_4), \end{aligned}$$

így $p_{ref} = \frac{mL\omega^2}{A}$ választással az

$$\tilde{y}_2' = -2\tilde{k}\tilde{y}_2 + (\tilde{y}_3 - \tilde{y}_4) \quad (22)$$

A (10) egyenletrendszer harmadik egyenletének dimenziótlanítása:

$$\dot{y}_3 = \frac{a^2}{V_1}(\dot{m}_1 - \rho_1 A y_2).$$

A továbbiakban a legáltalánosabb módon politropikus állapotváltozást tételezünk fel a munkahengerben lévő ideálisnak feltételezhető gáz állapotváltozásaira, vagyis:

$$\frac{p}{\rho^n} = \frac{p_{ref}}{\rho_{ref}^n}, \quad (23)$$

így a kétoldali kamrákban levő gázok sűrűsége felírható a $\rho_1 = \left(\frac{p_1}{p_{ref}}\right)^{\frac{1}{n}} \rho_{ref} = \tilde{y}_3^{\frac{1}{n}} \rho_{ref}$,

illetve a $\rho_2 = \left(\frac{p_2}{p_{ref}}\right)^{\frac{1}{n}} \rho_{ref} = \tilde{y}_4^{\frac{1}{n}} \rho_{ref}$ alakban:

$$p_{ref}\omega\tilde{y}_3' = \frac{a^2}{V_1} (\tilde{\mu}_1 \cdot \dot{m}_{ref} - \rho_1 AL\omega\tilde{y}_2)$$

$$\tilde{y}_3' = \frac{a^2\dot{m}_{ref}}{V_1 p_{ref}\omega} \left(\tilde{\mu}_1 - \frac{\tilde{y}_3^{\frac{1}{n}} \rho_{ref} AL\omega}{\dot{m}_{ref}} \tilde{y}_2 \right). \quad (24)$$

A (24) egyenleten már látható, hogy az egyenletek egyszerűbb alakra hozásának érdekében érdekében célszerű a referencia tömegáramot $\dot{m}_{ref} = \rho_{ref} AL\omega$ alakban felvenni, így a zárójelben lévő tört leegyszerűsödik és csak dimenziótlan mennyiségek maradnak ott.

A közegbeli hangsebesség négyzetére vonatkozó összefüggést dimenziótlanítva és felhasználva a politropikus állapotváltozásra vonatkozó gáztörvényt (24)-ben a zárójel előtti tört is tovább egyszerűsíthető:

$$a^2 = \kappa R T_1 = \kappa R \frac{T_1}{T_{ref}} \cdot T_{ref} = \kappa R \left(\frac{p_1}{p_{ref}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \cdot T_{ref} = \kappa R \tilde{y}_3^{\frac{n-1}{n}} \cdot T_{ref}, \text{ így}$$

$$\tilde{y}_3' = \frac{\kappa R \tilde{y}_3^{\frac{n-1}{n}} \cdot T_{ref} AL\omega}{A \cdot (L-x)\omega} \cdot \underbrace{\frac{\rho_{ref}}{p_{ref}}}_{\frac{1}{RT_{ref}}} \left(\tilde{\mu}_1 - \tilde{y}_3^{\frac{1}{n}} \tilde{y}_2 \right) = \kappa \frac{\tilde{y}_3^{\frac{n-1}{n}}}{1 + \frac{x}{L}} \left(\tilde{\mu}_1 - \tilde{y}_3^{\frac{1}{n}} \tilde{y}_2 \right) \quad (25)$$

Hasonló gondolatmenettel a (10) egyenletrendszer negyedik egyenletének dimenziótlanított alakja:

$$\tilde{y}_4' = \kappa \frac{\tilde{y}_4^{\frac{n-1}{n}}}{1 - \tilde{y}_1} \left(\tilde{\mu}_2 + \tilde{y}_4^{\frac{1}{n}} \tilde{y}_2 \right), \quad (26)$$

Ezzel meghatároztuk mind a négy differenciálegyenlet dimenziótlan alakját. Így már csak a maradék referencia mennyiségnek az értékét kell rögzíteni, hogy az előálló kezdeti érték probléma határozott legyen. Ehhez a munkahengert vezérlő szelepeken átfolyó tömegáramok dimenziótlan alakját kell még megvizsgálni. Itt két eset is lehetséges. Ugyanis attól függően, hogy a munkahenger tartályában lévő nyomás és az ellennyomás hogyan

viszonyul egymáshoz a szelepen történő átáramlás lehet fojtott illetve nem fojtott:

$$\dot{m} = \begin{cases} Cd\hat{A}(u)p_t \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{RT_t} \left(1 - \frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} & \text{ha } \frac{p_e}{p_t} > 0,53 \\ Cd\hat{A}(u)p_t \sqrt{\frac{\kappa}{RT_t} \left(\frac{2}{\kappa-1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}} & \text{ha } \frac{p_e}{p_t} \leq 0,53 \end{cases} \quad (27)$$

A dimenziótlan $\tilde{\mu}_1$ és $\tilde{\mu}_2$ tömegáramok előállításához a következő dimenziótlanításokat végeztem el:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0 &= \frac{p_0}{p_{ref}} & \tilde{T}_0 &= \frac{T_0}{T_{ref}} & \tilde{T}_1 &= \frac{T_1}{T_{ref}} \\ \tilde{p}_t &= \frac{p_t}{p_{ref}} & \tilde{T}_t &= \frac{T_t}{T_{ref}} & \tilde{T}_2 &= \frac{T_2}{T_{ref}} \end{aligned},$$

ahol p_0 és p_t a légköri- és a tartálynyomás, T_0 és T_t a légkör és a tartály hőmérséklete, valamint T_1 és T_2 a munkahenger két kamrájának hőmérséklete. Az ideális gáztörvény és az általános politropikus állapotváltozás összefüggéseinek felhasználásával az egyes kamrák hőmérsékletei a megfelelő hőmérséklet- és nyomás indexek behelyettesítésével a következő alakra hozhatók:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= RT / : (p_{ref} \cdot T_{ref}) \Rightarrow \tilde{T} = \frac{\rho_{ref}}{\rho} \cdot \tilde{p} \\ \frac{p}{\rho^n} &= \frac{p_{ref}}{\rho_{ref}^n} \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{\frac{p}{p_{ref}}} \rho_{ref} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{T}_1 = \tilde{y}_3^{\frac{n-1}{n}}, \text{ és } \tilde{T}_2 = \tilde{y}_4^{\frac{n-1}{n}} \quad (28)$$

Ezekkel a dimenziótlan nyomás- és hőmérséklet kifejezésekkel a dimenziótlan tömegáramok már származtathatóak általános tartály- és ellennyomás esetén, valamint mind fojtott-mind pedig nem fojtott áramlások esetén.

$$\text{Nem fojtott áramlás esetén: } \dot{m} = \frac{\tilde{A}\tilde{p}_t}{\sqrt{\tilde{T}_t}} \cdot \alpha_1 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\tilde{p}_e}{\tilde{p}_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \cdot \dot{m}_{ref}$$

$$\text{Fojtott áramlás esetén: } \dot{m} = \frac{\tilde{A}\tilde{p}_t}{\sqrt{\tilde{T}_t}} \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dot{m}_{ref},$$

$$\text{ahol } \alpha_1 = \frac{C_d \hat{A}_{max} \sqrt{RT_{ref}}}{AL\omega} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} \text{ és } \alpha_2 = \sqrt{\frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}.$$

Összefoglalva, a munkahenger két kamrájának dimenziótlan tömegáramai a 1. és 2 táblázatok kifejezéseinek megfelelően. Az alkalmazott szabályozófeszültség különböző értékei mellett, valamint a tartály- és ellennyomás egymáshoz viszonyulásának függvényében.

$\tilde{\mu}_1$			
$U > U_0$	$\frac{\tilde{A}\tilde{p}_t}{\sqrt{\tilde{T}_t}} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2$ $\frac{\tilde{A}\tilde{p}_t}{\sqrt{\tilde{T}_t}} \cdot \alpha_1 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\tilde{y}_3}{\tilde{p}_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$ 0 $-\frac{\tilde{A}\tilde{y}_3}{\sqrt{\tilde{T}_1}} \cdot \alpha_1 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\tilde{p}_t}{\tilde{y}_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$ $-\frac{\tilde{A}\tilde{y}_3}{\sqrt{\tilde{T}_1}} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2$	ha $0 < \frac{\tilde{y}_3}{\tilde{p}_t} \leq 0,53$ BE ha $0,53 < \frac{\tilde{y}_3}{\tilde{p}_t} < 1$ BE ha $\frac{\tilde{y}_3}{\tilde{p}_t} = 1$ 0 ha $1 < \frac{\tilde{y}_3}{\tilde{p}_t} < \frac{1}{0,53}$ KI ha $\frac{1}{0,53} \leq \frac{\tilde{y}_3}{\tilde{p}_t}$ KI	
$U_0 > U > -U_0$	0	Holtsáv	0
$-U_0 > U$	$-\frac{\tilde{A}\tilde{y}_3}{\sqrt{\tilde{T}_1}} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2$ $-\frac{\tilde{A}\tilde{y}_3}{\sqrt{\tilde{T}_1}} \cdot \alpha_1 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{y}_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$ 0 $\frac{\tilde{A}\tilde{p}_0}{\sqrt{\tilde{T}_0}} \cdot \alpha_1 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\tilde{y}_3}{\tilde{p}_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$ $\frac{\tilde{A}\tilde{p}_0}{\sqrt{\tilde{T}_0}} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2$	ha $0 < \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{y}_3} \leq 0,53$ KI ha $0,53 < \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{y}_3} < 1$ KI ha $\frac{\tilde{p}_0}{\tilde{y}_3} = 1$ 0 ha $1 < \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{y}_3} < \frac{1}{0,53}$ BE ha $\frac{1}{0,53} \leq \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{y}_3}$ BE	

3. táblázat. A bal oldali kamra dimenziótlan $\tilde{\mu}_1$ tömegárama.

$\tilde{\mu}_2$			
$U > U_0$	$-\frac{\tilde{A}\tilde{y}_4}{\sqrt{\tilde{T}_2}} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2$	ha $0 < \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{y}_4} \leq 0,53$	KI
	$-\frac{\tilde{A}\tilde{y}_4}{\sqrt{\tilde{T}_2}} \cdot \alpha_1 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{y}_4}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$	ha $0,53 < \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{y}_4} < 1$	KI
	0	ha $\frac{\tilde{p}_0}{\tilde{y}_4} = 1$	0
	$\frac{\tilde{A}\tilde{p}_0}{\sqrt{\tilde{T}_0}} \cdot \alpha_1 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\tilde{y}_4}{\tilde{p}_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$	ha $1 < \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{y}_4} < \frac{1}{0,53}$	BE
	$\frac{\tilde{A}\tilde{p}_0}{\sqrt{\tilde{T}_0}} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2$	ha $\frac{1}{0,53} \leq \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{y}_4}$	BE
$U_0 > U > -U_0$	0	Holtsáv	0
$-U_0 > U$	$\frac{\tilde{A}\tilde{p}_t}{\sqrt{\tilde{T}_t}} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2$	ha $0 < \frac{\tilde{y}_4}{\tilde{p}_t} \leq 0,53$	BE
	$\frac{\tilde{A}\tilde{p}_t}{\sqrt{\tilde{T}_t}} \cdot \alpha_1 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\tilde{y}_4}{\tilde{p}_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$	ha $0,53 < \frac{\tilde{y}_4}{\tilde{p}_t} < 1$	BE
	0	ha $\frac{\tilde{y}_4}{\tilde{p}_t} = 1$	0
	$-\frac{\tilde{A}\tilde{y}_4}{\sqrt{\tilde{T}_2}} \cdot \alpha_1 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\tilde{p}_t}{\tilde{y}_4}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$	ha $1 < \frac{\tilde{y}_4}{\tilde{p}_t} < \frac{1}{0,53}$	KI
	$-\frac{\tilde{A}\tilde{y}_4}{\sqrt{\tilde{T}_2}} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2$	ha $\frac{1}{0,53} \leq \frac{\tilde{y}_4}{\tilde{p}_t}$	KI

4. táblázat. A jobb oldali kamra dimenziótlan $\tilde{\mu}_2$ tömegárama.

4. A modell dimenziótlan alapegyenletei

Összefoglalva a végső dimenziótlan egyenletrendszer, valamint a dimenziótlanításhoz használt referencia mennyiségek:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ \tilde{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_2 \\ -2\tilde{k}\tilde{y}_2 + (\tilde{y}_3 - \tilde{y}_4) \\ \kappa \frac{\tilde{y}_3^{\frac{n-1}{n}}}{1 + \tilde{y}_1} \left(\tilde{\mu}_1 - \tilde{y}_3^{\frac{1}{n}} \tilde{y}_2 \right) \\ \kappa \frac{\tilde{y}_4^{\frac{n-1}{n}}}{1 - \tilde{y}_1} \left(\tilde{\mu}_2 + \tilde{y}_4^{\frac{1}{n}} \tilde{y}_2 \right) \end{bmatrix} \quad (29)$$

A szabályozófeszültség, ami a visszacsatolásért felelős a rendszerben:

$$U(\tau) = -\left(P \cdot L \cdot (\tilde{y} - \tilde{y}_k) + D \cdot L\omega \cdot \frac{d}{d\tau} (\tilde{y} - \tilde{y}_k) + I \cdot \frac{L}{\omega} \cdot \int_0^T (\tilde{y} - \tilde{y}_k) d\tau \right), \quad (30)$$

így ebből leolvashatóan a dimenziótlan modellben használt arányos tagok: $\hat{P} = P \cdot L$, $\hat{D} = D \cdot L \cdot \omega$ valamint $\hat{I} = \frac{I \cdot L}{\omega}$ ¹⁰. A (10) és (30) egyenletek dimenziótlanításához használt referencia mennyiségek pedig:

$$\begin{aligned} s_{ref} &= \frac{2\kappa A p_0}{L} & \omega &= \sqrt{\frac{s_{ref}}{m}} & k_{ref} &= 2m\omega & t_{ref} &= \tau = \frac{1}{\omega} & x_{ref} &= L \\ v_{ref} &= L\omega & T_{ref} &= 293,15^0 K & p_{ref} &= \frac{mL\omega^2}{A} & \rho_{ref} &= \frac{p_{ref}}{RT_{ref}} & \dot{m}_{ref} &= \rho_{ref} AL\omega \end{aligned} \quad (31)$$

A modell szimulációs megvalósítása során a következő fizikai paramétereket használtam:

D	$= 0.04 \text{ m}^2$	a munkahenger házának belső átmérője	
L_0	$= 0.2 \text{ m}$	a munkahenger félhossza	
R	$= 287 \frac{\text{J}}{\text{kg}^0 K}$	a levegő specifikus gázállandója	
T	$= 293^0 K$	az izoterm rendszer hőmérséklete	
κ	$= 1.4$	ideális gáz fajhőviszony száma	
n	$= 1.4$	ideális gáz politropikus tényezője	(32)
p_t	$= 6 \text{ bar}$	tartálynyomás	
p_0	$= 1 \text{ bar}$	légköri nyomás	
$\hat{A}_{max}$	$= 0.0016 \text{ m}^2$	a szelep maximális átfolyási keresztmetszete	
C_d	$= 0.8$	korrekciós tényező	
U_{max}	$= 20 \text{ V}$	az $\hat{A}_{max}$ átfolyási keresztmetszethez tartozó feszültség	
U_0	$= 0 \text{ V}$	a szelep holtávát megadó feszültség	

¹⁰A szabályozó feszültség dimenzióval rendelkező mennyiség, ennek dimenziótlanítása a szelep átfolyási keresztmetszetének figyelembe vétele során történik meg. Így a $\hat{P}$, $\hat{I}$ és $\hat{D}$ mennyiségek is feszültség dimenzióval rendelkeznek

Így a (31)-ben megadott referenciamennyiségek az általam használt fizikai paraméterek mellett a következő értékeknek adódtak:

$$\begin{aligned}
 s_{ref} &= 1.7593 \cdot 10^3 \frac{N}{m} \\
 \omega &= 1.8758 \frac{1}{s} \\
 k_{ref} &= 1.8758 \cdot 10^3 \frac{kg}{s} \\
 t_{ref} &= 0.5331 \text{ s} \\
 x_{ref} &= 0.2 \text{ m} \\
 v_{ref} &= 0.3752 \frac{m}{s} \\
 p_{ref} &= 2.8 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\
 \rho_{ref} &= 3.3297 \frac{kg}{m^3} \\
 \dot{m}_{ref} &= 0.0016 \frac{kg}{s}
 \end{aligned} \tag{33}$$

5. Stabilitásvizsgálat, eredmények

A levezetett (29) és (30) dimenziótlan összefüggések segítségével sikerült végleges formára hozni a pneumatikus munkahengert jellemző modellegyenleteket. Így ezek most már a konkrét fizikai paramétereitől függetlenül írják le a rendszer állapotát.

A (29) és (30) egyenletek segítségével már lehetséges egy zárt egyenletrendszer viselkedésének stabilitásvizsgálata, vagyis megállapítható, hogy milyen $\hat{P}$, $\hat{I}$ és $\hat{D}$ paraméterek beállítása mellett várható a munkahenger stabil szabályozhatósága.

5.1. Elméleti háttér

A (29) és (30) összefüggések stabilitásának vizsgálatakor figyelembe kellett venni, hogy ezek az egyenletek valójában "kapcsos egyenletek" [7], [8]. Vagyis a feszültség előjelétől függően más egyenleteket kell vizsgálnunk. Így a vizsgálandó linearizált egyenletrendszerünk alakja:

$$\dot{\underline{y}} = \begin{cases} \underline{A_1} \cdot \underline{y} & \text{ha } U > 0 \\ \underline{A_2} \cdot \underline{y} & \text{ha } U < 0 \end{cases}, \quad (34)$$

ahol az $\underline{A_1}$ és $\underline{A_2}$ együtthatómátrixok a szabályozószelep átfolyási keresztmetszetének és tömegáramainak feszültségfüggése miatt különbözőek. Az egyensúlyi helyzetet pedig az

$$\tilde{\underline{y}}_e = [\tilde{y}_k, 0, \tilde{p}_e, \tilde{p}_e, 0]^T \quad (35)$$

kapcsolóvonal mentén keressük, ha $U = 0$. Itt $\tilde{y}_k$ a kívánt dimenziótlan helykoordináta, $\tilde{p}_e$ pedig egy dimenziótlan egyensúlyi tartálynyomás. Ez a $\tilde{p}_e$ érték a dimenziótlan légköri és a dimenziótlan tartálynyomás között bármely értéket felvehet, így az egyensúlyi helyzeteink egy $\tilde{p}_e$ paraméter erejéig határozatlanok. Az egyensúlyi helyzetek tehát az $5D$ -s térben egy egyenest határoznak meg, ami $U = 0$ feltétel mellett mindkét rendszer esetében éppen a rendszer kapcsolóvonalával¹¹ esik egybe.

Így két darab rendszer linearizálását kell elvégezni. Mind a két esetben elő kell állítani a megfelelő Jacobi-mátrixot, valamint ki kell számítani azoknak a sajátértékeit¹².

Esetünkben viszont a (29) egy olyan speciális alakú differenciál egyenletrendszer, amely-nél a két karakterisztikus polinom –így a megfelelő sajátértékek is– megegyezik $U > 0$ és

¹¹A kapcsolóvonal a kapcsos egyenletrendszerek azon paraméter szerint kijelölt vonala, amely paraméter megfelelő értéke esetén az egyenletrendszer éppen vált, ez esetünkben az $U = 0$ által paraméterezett egyenes.

¹²A linearizált együtthatómátrixok előállításakor a szabályozó feszültséget „nagyon picinek” gondoljuk, hiszen az $U = 0$ egyensúlyi helyzet közelében vizsgálódunk. Így a munkahenger szabályozószelepe szintén csak nagyon picit mozdul ki a záró pozícióból. Ebből következően pedig lineáris esetben csak fojtott áramlásokat kell figyelembe vennünk a tömegáramok megadásakor (lásd: (3) és (4) táblázatok).

$U < 0$ esetekben. Így, mivel az $U = 0$ kapcsolóvonal két oldalán a linearizált együtthatómátrix karakterisztikus polinomja megegyezik, valamint mindkét oldal egyensúlyi helyzetei a kapcsolóvonalon helyezkednek el, ezért lehetséges a rendszer hagyományos értelemben vett stabilitásvizsgálata [7], [8].

5.2. A stabilitásvizsgálat menete

A stabilitásvizsgálatot több lépésben hajtottam végre. Először $\hat{D} = 0$, $\hat{I} = 0$ és $U_0 = 0$ feltételezések mellett egy egyszerűbb rendszert vizsgáltam¹³. Majd az addig zérusnak választott paramétereknek fokozatosan nemzérus értéket adva elvégeztem a stabilitásvizsgálatot a bonyolultabb egyenletrendszerek esetére.

Meghatároztam azt a $\hat{P}_{krit}$ kritikus $\hat{P}$ paraméter értéket, amely esetén a munkahenger a linearizált modell keretein belül még éppen stabilan viselkedik. Tehát előállítottam az instabilitási határhoz tartozó $\hat{P}$ értéket.

Ehhez a Wolfram Mathematica 8.0 szimbolikus algebrai program segítségével előállítottam az adott feltételezésekhez tartozó dimenziótlan egyenletrendszer linearizált alakját a (34)-nek megfelelően. A linearizált rendszermátrixok segítségével megmondható, hogy milyen stabilitási tulajdonságokkal rendelkezik a vizsgált rendszer.

Az instabilitási határállapotban a munkahenger dugattyúja állandó amplitúdóval rezeg az egyensúlyi helyzet körül. Ekkor a dugattyú dimenziótlan pozíciójához és dimenziótlan sebességéhez tartozó sajátértékek tisztán képzetes komplex számok, vagyis $i \cdot \Omega$ alakúak.

Mivel a PID szabályzást leíró (30) egyenletben integrálás is szerepel, ezért az eredeti (29)-es egyenletrendszert ki kell egészíteni egy ötödik egyenlettel, amely az integrálást végrehajtja. Így egy 5×5 -ös linearizált rendszermátrix karakterisztikus egyenletét kell vizsgálnunk. Ez a szimbolikus számítások szerint a következő alakú:

$$a_5 \lambda^5 + a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (36)$$

Ha behelyettesítjük a stabil rezgéshez tartozó $\lambda = i \cdot \Omega$ tisztán képzetes sajátértéket és szétválasztjuk a tisztán képzetes és tisztán valós kifejezéseket tartalmazó tagokat, ahol a_0 esetünkben zérus értékű):

$$\left. \begin{aligned} a_1 - a_3 \cdot \Omega^2 + a_5 \cdot \Omega^4 &= 0 \\ a_2 \cdot \Omega - a_4 \cdot \Omega^3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (37)$$

¹³A szabályozószelep U_0 holtáv-feszültségét a számítások során végig zérus értéken tartottuk. Így elég volt egy darab „kapcsolást” figyelembe venni az egyenletrendszerünkénél, valamint még lehetséges volt analitikus formulák szimbolikus származtatása $\hat{P}_{krit}$ értékére.

Itt a triviális $\Omega = 0$ megoldás nem lehetséges, mert abból $a_1 = 0$ következne. Ez azt jelentené, hogy nem alakul ki rezgőmozgás, ami a vizsgálódási feltételezésünkkel ellentétes. Megoldva a (37) egyenletrendszert az állandó amplitúdójú rezgés feltétele:

$$a_1 \cdot a_4^2 - a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + a_5 \cdot a_2^2 = 0, \quad (38)$$

amelynek teljesülése esetén az alkalmazott feszültség a $\tilde{P}_{krit}$ arányos tag mellett megvalósuló szabályozó feszültség. Ennek teljesülése esetén létezik tisztán képzetes gyöke a karakterisztikus egyenletnek, és az algebra alaptétele miatt ennek a konjugált párja is a gyökök között lesz.

A szimbolikus számításokból derül ki az is, hogy az $U > 0$ és $U < 0$ esetekhez tartozó linearizált rendszermátrix ugyanolyan karakterisztikus egyenletet szolgáltat, valamint a számolható $\hat{P}_{krit}$ érték is ugyanaz lesz (lásd 1. számú melléklet). Vagyis a fázisképen, az egyensúlyi nyomás által kijelölt kapcsolóvonalon a karakterisztikák folytonos vonalként, törés nélkül haladnak át. Esetünkben a kapcsolóvonal jelenléte nem figyelhető meg a fázisképeken (10-12. ábra).

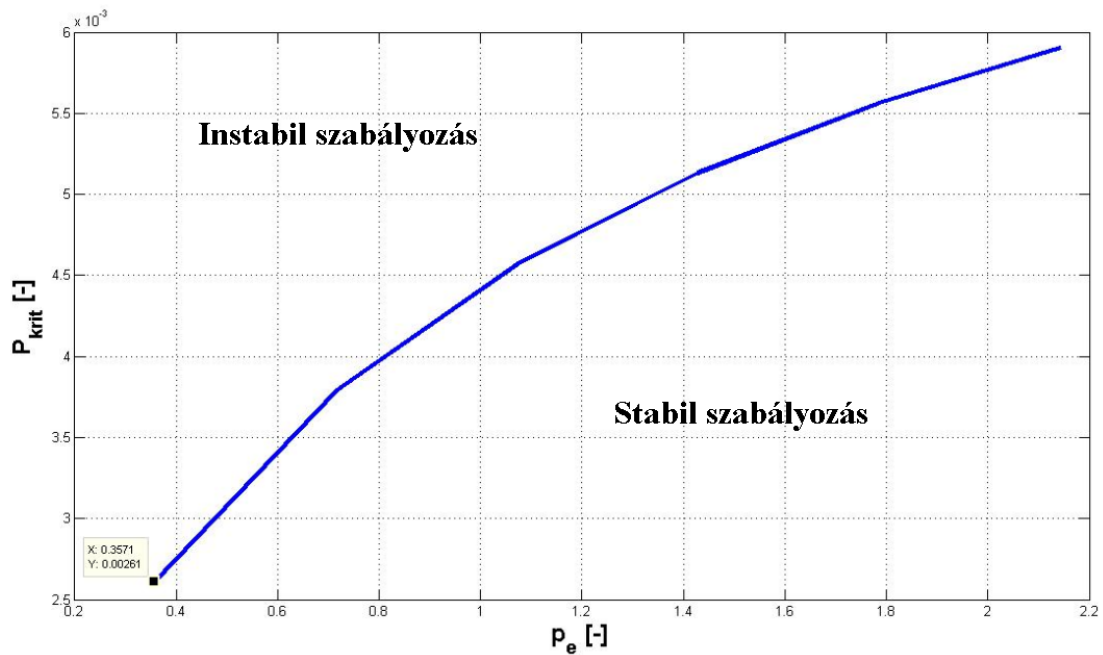
5.3. Stabilitási térképek

5.3.1. Tisztán arányos szabályozás

Ha $\hat{I} = 0$ és $U_0 = 0$, akkor a kritikus $\hat{P}$ érték $\hat{P}_{krit} = \frac{4\tilde{k} \cdot \tilde{p}_e^{\frac{1}{n}} \cdot U_{max}}{\alpha_{12} \left(\tilde{p}_e^{\frac{n+1}{2n}} + \beta \right)}$, ahol $\beta = \tilde{p}_t \cdot \tilde{T}_t^{-\frac{1}{2}}$

és $\alpha_{12} = \alpha_1 \cdot \alpha_2$. Ez a legegyszerűbb analitikus alakban kifejezhető $\tilde{P}_{krit}$ érték, ami lehetőséget biztosít a stabil rezgés gyakorlatban történő megfigyelésére és a származtatott elmélet ellenőrzésére is akár (9. ábra). (A határgörbe egyéb tulajdonságairól lásd 2. számú melléklet).

Az $\hat{I} \neq 0$ és $U_0 = 0$ esetben kapott $\hat{P}_{krit}$ kifejezések értelem szerint visszaadják az egyszerűbb rendszerre vonatkozó értéket, ha a megfelelő paraméterek értékét zérusra állítjuk (lásd 5. számú melléklet). Ezzel pedig folyamatosan ellenőrizhetjük a „komplikáltabb” modellek konzisztenciáját.

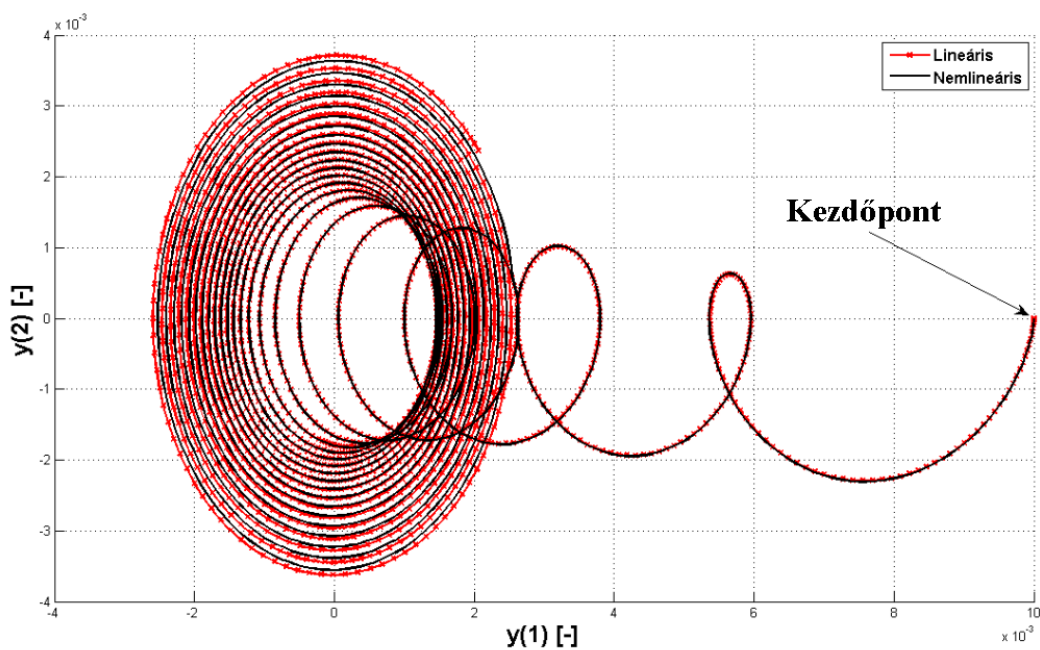


9. ábra. $\hat{P}_{krit}$ függése a dimenziótlan $\tilde{p}_e$ tartálynyomástól (6 bar tartálynyomásig) ha $\hat{I} = 0$ és $\hat{D} = 0$.

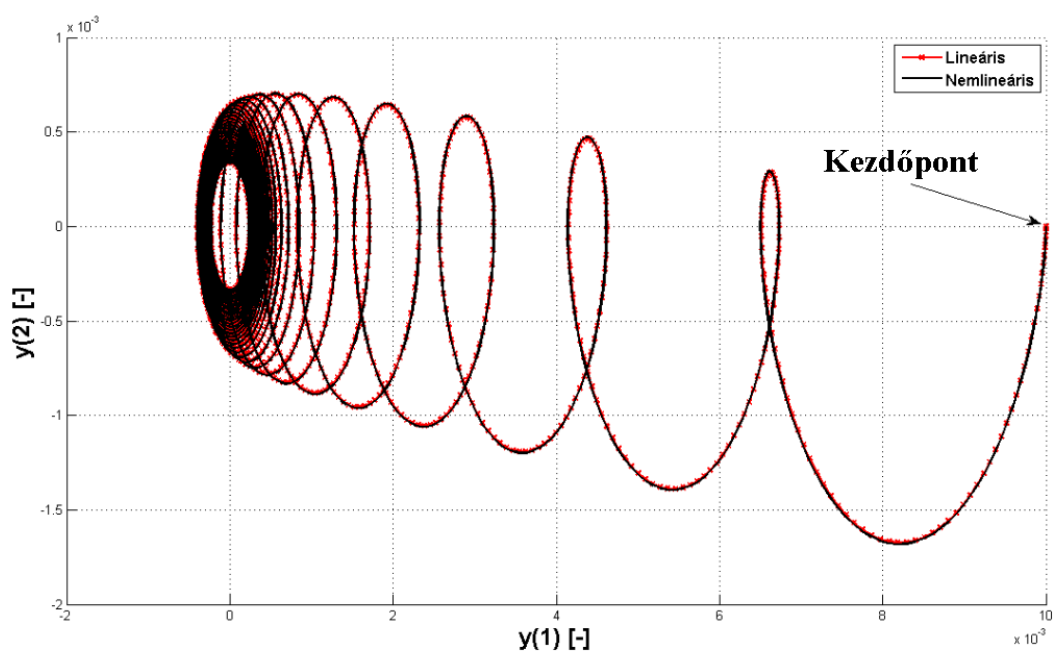
A $\hat{P}_{krit}$ érték viszont függ a $\tilde{p}_e$ dimenziótlan egyensúlyi munkahenger nyomástól, ami egy szabad paraméter, a dimenziótlan légköri- és dimenziótlan tartálynyomás között bármely értéket felvehet (9. ábra). Ennek a függésnek a segítségével pedig meghatározható, hogy egy adott egyensúlyi nyomás esetén milyen $\hat{P}$ arányos tag esetén várható a stabil szabályozhatóság. A különböző stabilitási állapotokhoz készített fázisképeket a 10.-12. ábrák mutatják, melyeken jól látszik, hogy a lineáris és a nemlineáris modell trajektóriái az egyensúlyi helyzethez közel, nem túl nagy időkre jó egyezést mutatnak.

A stabilitási térképről leolvasható, hogy egy adott $\tilde{p}_e$ dimenziótlan tartálynyomás esetén milyen arányos tag mellett lesz a szabályozás stabil. Viszont a $\tilde{p}_e$ dimenziótlan tartálynyomás tetszőleges lehet, ez egy szabad paraméter. Vagyis fizikailag a szelep folyamatosan levegőt fog beengedni a tartályokba, hogy a dugattyú a kívánt pozícióba kerüljön. Ez jól látszik a munkahenger dugattyújának idődinamikáján (15. ábra).

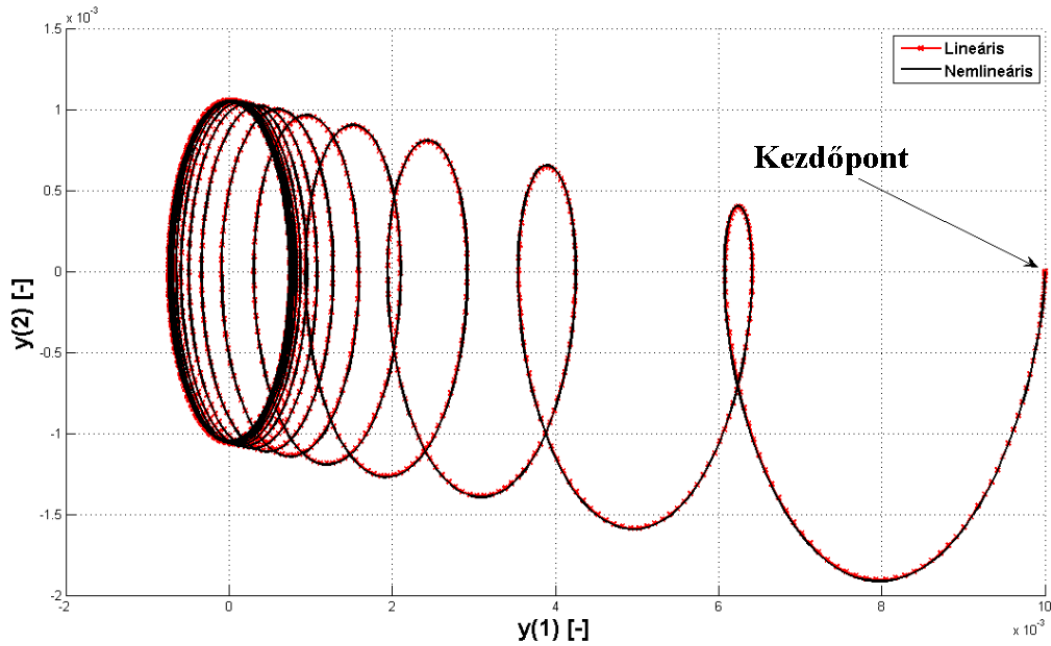
A szabályozás során növekvő $\tilde{p}_e$ dimenziótlan tartálynyomás pedig instabil szabályozás esetén is a stabil szabályozás fele hajtja a rendszert (16. ábra). A szimulációk eredményeiből megállapítható, hogy megfelelően hosszú idő után a munkahenger dugattyúja instabil szabályozás esetén is megtalálja a kívánt egyensúlyi pozíciót. Ennek oka, hogy a $\tilde{p}_e$ dimenziótlan tartálynyomás növekedésével adott $\hat{P}$ arányos tag mellett a 9. ábrának megfelelően elegendően hosszú idő után átlépünk a stabil szabályozás tartományára.



10. ábra. A lineáris és a nemlineáris rendszer fázisképe egy adott $\tilde{p}_e$ dimenziótlan egyensúlyi tartálynyomás esetén, ha $\hat{P} > \hat{P}_{krit}$.



11. ábra. A lineáris és a nemlineáris rendszer fázisképe egy adott $\tilde{p}_e$ dimenziótlan egyensúlyi tartálynyomás esetén, ha $\hat{P} < \hat{P}_{krit}$.



12. ábra. A lineáris és a nemlineáris rendszer fázisképe egy adott $\tilde{p}_e$ dimenziótlan egyensúlyi tartálynymomás esetén, ha $\hat{P} = \hat{P}_{krit}$.

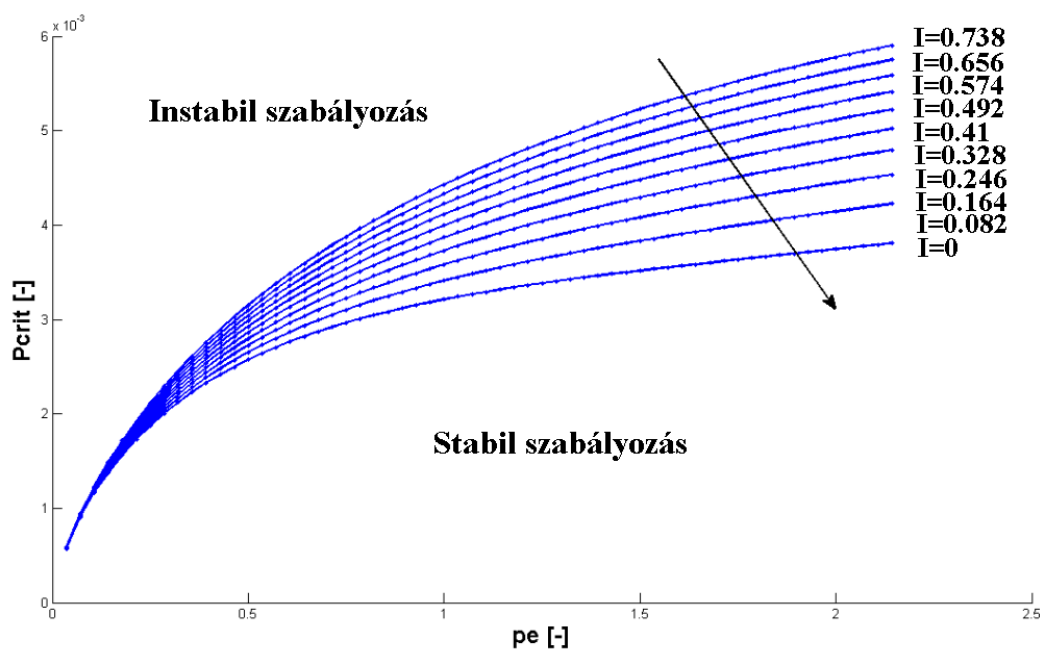
5.3.2. PID szabályozás

A kritikus instabilitás határgörbájének segítségével meg tudjuk határozni, hogy a $\tilde{p}_e$ egyensúlyi tartálynymomás függvényében hogyan változik a stabil szabályozhatóság (9. ábra). El tudjuk készíteni a vizsgált un. rendszer stabilitási térképét.

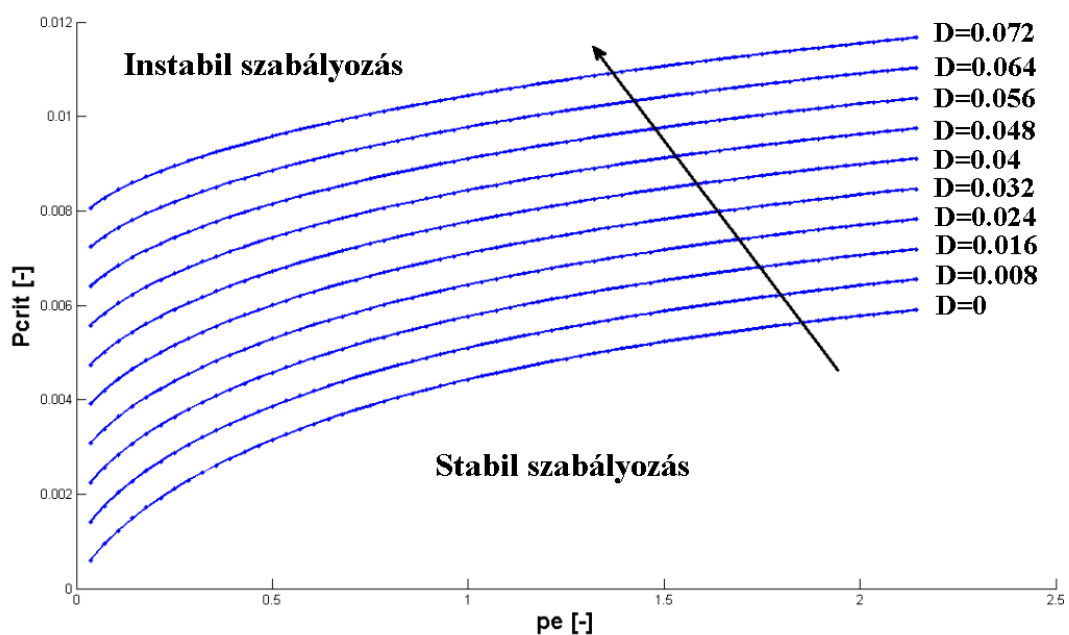
A stabilitási térképek segítségével információt nyerhetünk arról, hogy a PID szabályozás (1) egyenletében az egyes arányos tagok változtatása milyen hatással van a szabályozás stabilitására különböző I és D paraméterek esetén. Az elméleti analitikus számítások eredményeiből megállapítható (lásd 5. számú melléklet), hogy az I arányos tag növelésével csökken, míg a D arányos tag növelésével növekszik a stabil szabályozás tartománya (13. és 14. ábra).

Viszont a PID szabályozás elméletéből tudjuk, hogy a D tag növelésével a szabályozás időben lassul. Így a valós idejű, gyors szabályozhatósághoz érdemes a gyakorlati elvárásoknak megfelelően optimalizálni D értékét¹⁴.

¹⁴A 13. és 14. ábrák a dimenziótlan rendszerre jellemző $\hat{P}_{krit} - \tilde{p}_e$ görbékét adják különböző $\hat{I}$ és $\hat{D}$ paraméterek függvényében.



13. ábra. A stabil szabályozhatóság tartományának változása az $\hat{I}$ arányos tag növelése esetén.



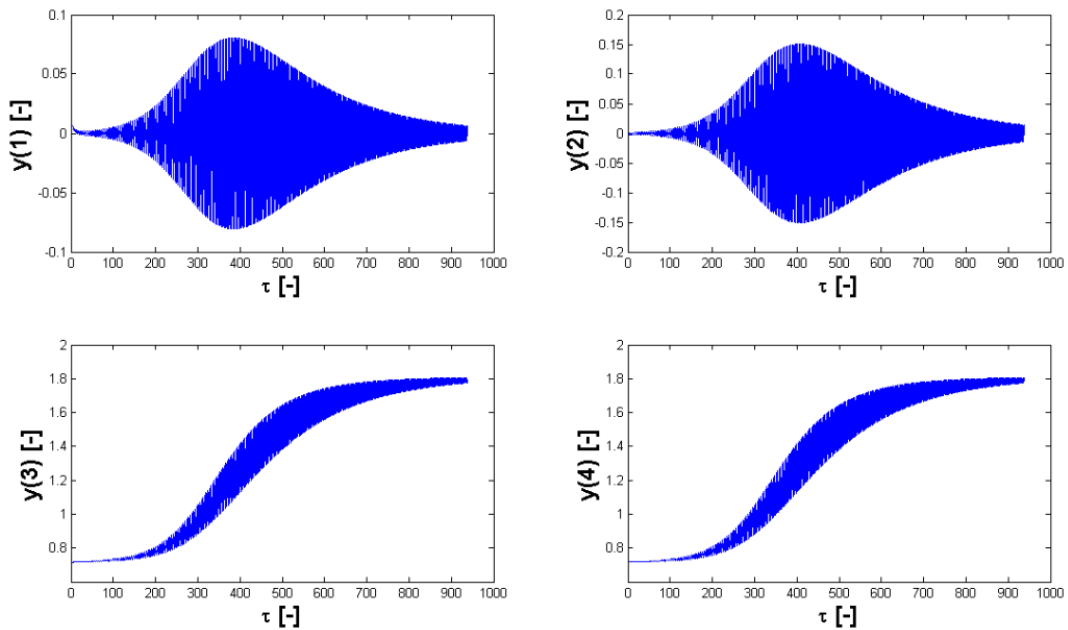
14. ábra. A stabil szabályozhatóság tartományának változása a $\hat{D}$ arányos tag növelése esetén.

5.4. Idődinamika

A Matlab 7.6 szoftverben készített szimulációk segítségével a nemlineáris rendszer fáziskepei mellett a PID szabályozás időbeli dinamikáját is megvizsgáltam (15. ábra). Ezen vizsgálat szükségessége a hosszútávú stabilitás szempontjából fontos, ugyanis a lineárizált rendszer csak az egyensúlyi helyzet kis környezetében ad információt a stabilitásról, kezdeti instabil viselkedés esetében következésképpen csak kis időkre.

A fizikai realitásnak megfelelően megfelelően a hosszú ideig futtatott szimulációkban, az instabil rezgések növekvő amplitúdója egy idő után átvált csökkenő tendenciába (a rendszer $\tilde{p}_e$ dimenziótlan egyensúlyi nyomása nem nőhet túl a dimenziótlan tartálynyomás értékén és csillapítás is jelen van a rendszerben). Majd az idő előrehaladtával a rezgés elhal, a rendszer stabilizálódik. Vagyis az egyensúlyi helyzettől „kicsit” kitérített rendszer időben először megtalálja az egyensúlyi helyzetet, majd vagy bekövetkezik egy elhaló amplitúdójú rezgés, vagy időben erősödő rezgés indul, ami idővel elhal (16. ábra).

Tehát a rendszer megoldása a kezdeti instabil viselkedés ellenére megfelelő idő eltelével újra „megtalálja” a stabil egyensúlyi állapotot. Ez viszont már nem köthető a lineárizációból származó, az egyensúlyi ponthoz tartozó stabilitási tulajdonsághoz. (Az instabil rezgés idődinamikájához további részletek lásd 3. és 4. számú melléklet.)



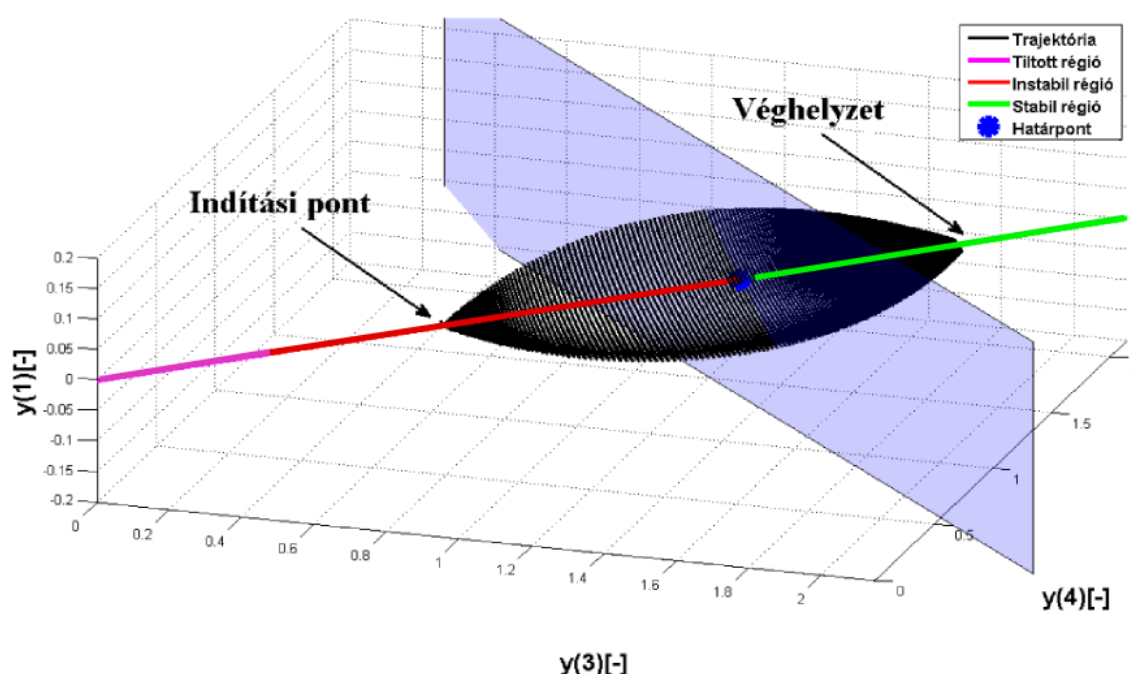
15. ábra. Az egyensúlyi helyzet kis környezetéből induló dugattyú dimenziótlan pozíciójának ($\tilde{y}_1$), sebességének ($\tilde{y}_2$), és kétoldali kamranyomásának ($\tilde{y}_3$) és ($\tilde{y}_4$) időfejlődése.

A 15. és 16. ábráról látható, hogy az instabil módon induló megoldás trajektóriája idővel újra megtalálja a stabil egyensúlyi állapotot. Az instabil induláshoz a PID szabályozás $\hat{P}$ arányos tagját a kezdeti tartálynyomásokhoz tartozó, a linearizált modellből származó

$\hat{P}_{krit}$ értéknél nagyobbra kell megválasztani. A megfelelő $\hat{P}$ érték megállapításához¹⁵ a számolt $\hat{P}_{krit} - \tilde{p}_e$ görbét használtam fel (9. ábra).

Ennek segítségével gyorsan, számszerűleg meg tudjuk mondani, hogy adott $\tilde{p}_e$ egyensúlyi nyomásnál mi lesz a kritikus $\hat{P}$ arányos tag. Valamint az is megállapítható, hogy egy beállított $\hat{P}$ esetén mely $\tilde{p}_e$ egyensúlyi nyomások felelnek meg a stabil és melyek az instabil szabályozásnak (16. ábra). Tehát grafikusan szemléltethető, hogy adott $\hat{P}$ arányos tag esetén sikerül-e a megoldás trajektóriának „átjutnia” a stabil szabályozhatóság tartományába és ha igen, akkor ott megtalálja-e a stabil egyensúlyi pontot.

A szimulációs tapasztalatok szerint a linearizált modellből adott $\hat{P}$ esetre számítható stabil/instabil tartományok valamint a nem linearizált rendszer megoldásgörbéjének nagy időtartamokra való viselkedése párhuzamba állítható. Vagyis a linearizált modellből adódó stabil szabályozhatóság a nem linearizált rendszer stabil szabályozhatóságát is jelenti¹⁶.



16. ábra. A szabályozás szempontjából stabil és instabil tartományok a $\tilde{p}_e$ egyensúlyi nyomás-vonal mentén adott $\hat{P}_{krit}$ esetén. Az ábrán látható szimulációban a kezdeti dimenziótlan egyensúlyi tartálynymás $\tilde{p}_e = 0.7143$, míg az arányos szabályozótag $\hat{P} = 0.0052$. Ez a lineáris elmélet keretében instabil szabályozásnak felel meg (lásd 9. ábra).

¹⁵Úgy kell megválasztani a $\hat{P}$ arányos tagot, hogy ne történjék végzetes túlszabályozás, vagyis a munkahenger dugattyúja ne szenvedjen felütkezést a dugattyút befoglaló ház falával. Így ne következessen be a szerkezet esetleges károsodása.

¹⁶Ennek nem kellene feltétlen így lennie, hiszen az egyensúlyi helyzettől mért nagy rezgések fellépte, illetve a vizsgálatok hosszú időtartamokra történő kiterjesztése a túllépi a linearizált modell érvényességének kereteit.

5.5. Az eredmények összefoglalása, konklúzió

A TDK dolgozatomban egy pneumatikus munkahenger PID szabályozásának stabilitás-vizsgálatával foglalkoztam. A munkám során elkészítettem a fizikai rendszer egyszerűsített modelljét. Majd a modell bonyolultságával lépcsőről lépésre közelítettem a reális rendszerjellemzés fele. Ezt követően elvégeztem a modell dimenziótlanítását, definiáltam a rendszert jellemző referencia mennyiségeket, majd elvégeztem a kapcsos függvényekkel megadott rendszer stabilitás vizsgálatát.

A stabilitásvizsgálatból kiderült, hogy hogyan reagál a rendszer a kezdeti feltételek megváltoztatására, illetve időben milyen dinamikát mutat.

Megmutattam, hogy a rendszer a lineáris stabilitásvizsgálatból megállapított instabil helyzetéből az idő előrehaladtával átvált a stabil szabályozhatóság tartományába. Vagyis megfelelő idő elteltével a munkahenger dugattyúja mindig meg fogja találni a kívánt egyensúlyi helyzetet, kivéve ha a peremfeltételek illetve esetleges túlszabályozás miatt a dugattyú fel nem ütközik¹⁷.

A dolgozat lezárásaként elkészítettem továbbá a PID szabályozás stabilitási térképeit, melyek segítségével a felhasználó információt kaphat róla, hogy a PID szabályzás milyen paraméter beállításai esetén várhatja a munkahenger stabil bepozicionálhatóságát.

Budapest, 2013. október 25.

.....

Aláírás

¹⁷A felütközés vizsgálata lényegesen bonyolultabb modell vizsgálatát igényelné. Ezt a dolgozatomban nem tettem meg. A modell a munkahenger dugattyújának csak kis kitérései esetén ad értelmes eredményt.

6. Mellékletek

• 1. számú melléklet

Az $U > 0$ és $U < 0$ feszültségekhez tartozó 5×5 -ös linearizált rendszermátrixok csak annyiban különböznek egymástól, hogy a harmadik és negyedik soruk fel van cserélve és mind a kettő ellentett előjellel szerepel, mint a másik mátrixban. Ez a dimenziótlan egyenletrendszer tartálynyomásokra vonatkozó egyenleteinek szimmetriájából adódik.

$$\underline{\underline{A}}_{(U>0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 \cdot \tilde{k} & 1 & -1 & 0 \\ A_1 & A_2 & 0 & 0 & A_3 \\ A_4 & A_5 & 0 & 0 & A_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{\underline{A}}_{(U<0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 \cdot \tilde{k} & 1 & -1 & 0 \\ -A_4 & -A_5 & 0 & 0 & -A_6 \\ -A_1 & -A_2 & 0 & 0 & -A_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az állítás, hogy a két linearizált rendszermátrix sajátértékei megegyeznek. Ennek következtében pedig a linearizált rendszer fázisképén a trajektóriák a kapcsolóvonalon folytonosan, törés nélkül haladnak át.

Ha a sajátértékek megegyeznek, akkor a két mátrix karakterisztikus polinomja is meg kell, hogy egyezzen. Ennek belátásához a következő műveleteket kell elvégezni a vizsgált determinánsan:

- 1 3.-ik és 4.-ik sor cseréje (A determináns előjelet vált).
- 2 3.-ik és 4.-ik oszlop cseréje (A determináns nem vált előjelet).
- 3 3.-ik és 4.-ik sor (-1) -gyel való szorzása.
- 4 Transzponálás, 3.-ik és 4.-ik sor (-1) -gyel való szorzása, visszatranszponálás, ahol kihasználjuk, hogy egy mátrixnak és a transzponáltjának a determinánsa megegyezik.

$$\text{Det}\left(\underline{\underline{A}}_{(U>0)} - \lambda \cdot \underline{\underline{I}}\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\tilde{k} - \lambda & 1 & -1 & 0 \\ A_1 & A_2 & -\lambda & 0 & A_3 \\ A_4 & A_5 & 0 & -\lambda & A_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{1.}{=}$$

$$\begin{aligned}
& (-1) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\tilde{k} - \lambda & 1 & -1 & 0 \\ A_4 & A_5 & 0 & -\lambda & A_6 \\ A_1 & A_2 & -\lambda & 0 & A_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{2.}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\tilde{k} - \lambda & -1 & 1 & 0 \\ A_4 & A_5 & -\lambda & 0 & A_6 \\ A_1 & A_2 & 0 & -\lambda & A_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{3.}{=} \\
& (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\tilde{k} - \lambda & -1 & 1 & 0 \\ -A_4 & -A_5 & \lambda & 0 & -A_6 \\ -A_1 & -A_2 & 0 & \lambda & -A_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{4.}{=} (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\tilde{k} - \lambda & 1 & -1 & 0 \\ -A_4 & -A_5 & -\lambda & 0 & -A_6 \\ -A_1 & -A_2 & 0 & -\lambda & -A_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
& \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\tilde{k} - \lambda & 1 & -1 & 0 \\ -A_4 & -A_5 & -\lambda & 0 & -A_6 \\ -A_1 & -A_2 & 0 & -\lambda & -A_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \text{Det} \left(\underline{\underline{A}}_{(U<0)} - \lambda \cdot \underline{\underline{I}} \right)
\end{aligned}$$

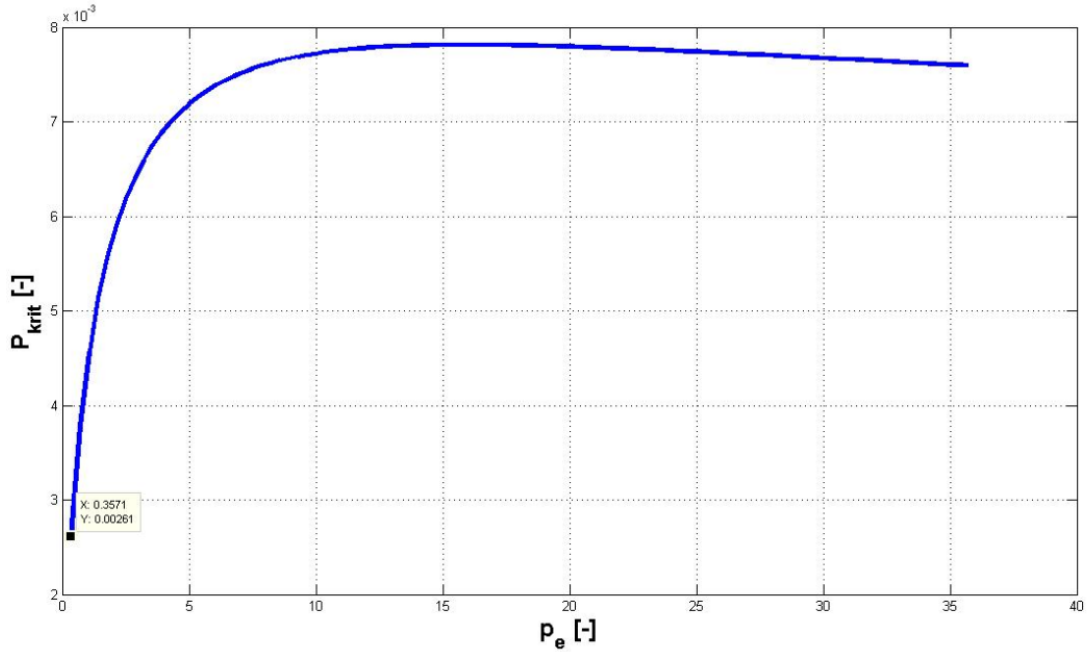
Ezzel az állítást igazoltuk.

• 2. számú melléklet

Az analitikailag legegyszerűbb $U_0 = 0$, $D = 0$ és $I = 0$ esetben belátható, hogy a $\hat{P}_{kirt}(\tilde{p}_e)$ görbének létezik egy egyértelmű maximuma $\tilde{p}_e = \left(\frac{2\beta}{n-1} \right)^{\frac{2n}{n-1}} \approx 15,91$ érték mellett (17. ábra). Ez viszont körülbelül 45 bar-os tartálynyomást igényelne, ami az általam vizsgált munkahengernél irreális lenne.

Az irreális értékek ellenére viszont jó tudni, hogy a stabilitási határgörbénk ilyen módon viselkedik. Ez alátámasztja a fizikai szemléletet, hogy nem lehet akármilyen nagy kritikus arányos tagot beállítani a stabil szabályozáshoz, még akkor sem ha minden határon túl növeljük a munkahengerben uralkodó egyensúlyi nyomást.

Ez az globális maximum természetesen nem csak a megadott zérus paraméter értékek mellett létezik, viszont analitikus zárt alak már nehezen vagy egyáltalán nem található sem a maximum helyére, sem annak értékére.



17. ábra. P_{krit} függése a dimenziótlan $\tilde{p}_e$ tartálynymástól (100 bar tartálynymásig).

• 3. számú melléklet

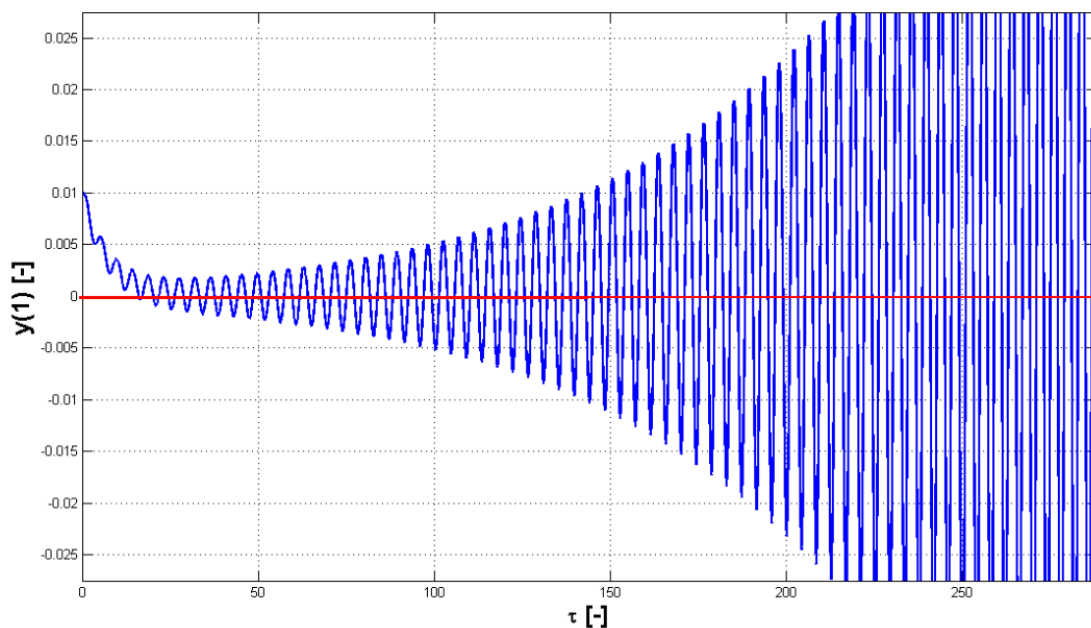
A (36) egyenlet gyökeit $\lambda = i \cdot \Omega$ alakban keressük a stabil rezgések, mint kritikus instabilitási állapotok vizsgálata érdekében.

A (37) egyenletrendszer második egyenletéből megállapítható, hogy ezen rezgések körfrekvenciája kifejezhető a karakterisztikus polinom megfelelő együtthatóival az $\Omega = \sqrt{\frac{a_2}{a_4}}$ módon. Behelyettesítés után, valamint kihasználva, hogy a modellünkben izotermikus állapotra vonatkozóan dimenziótlanítottunk (a dimenziótlan tartályhőmérséklet: $\tilde{T}_t = 1$) megkapjuk a rezgés dimenziótlan körfrekvenciájának $\tilde{p}_e$ egyensúlyi nyomástól való függését:

$$\Omega = \hat{P} \cdot \left(\frac{\kappa \alpha_1 \alpha_2}{2kU_{max}} \right) \cdot \left(\tilde{p}_e^{\frac{n-1}{n}} \cdot \sqrt{\tilde{p}_e^{\frac{n+1}{2n}} + \tilde{p}_t} \right) \quad (39)$$

A (39) egyenletből egyértelműen látszik, hogy a rezgés frekvenciája az egyensúlyi nyomás függvényében növekszik. Ez a Matlab 7.6-ban készített szimulációkban is látható (18. ábra). Ez a fizikai képünkkel megegyezik, hiszen minél többet korrigálunk a szelepeken keresztül (növeljük a kamrákban lévő nyomásokat), annál merevebb légrugók feleltethetők meg a kamráknak. Valamint minél gyorsabban rezeg egy rendszer, azt fizikailag egyre kisebb amplitúdókkal képes, aminek következtében a dugattyú kitérése időben be kell, hogy konvergáljon egy egyensúlyi értékhez.

- 4. számú melléklet



18. ábra. Az egyensúlyi helyzettől kis távolságra elindított dugattyú mozgásának időfejlődése.

- 5. számú melléklet

A PID szabályzásra stabilitására készített linearizáció során az $U_0 = 0$ megkötés mellett számított kritikus arányos tag a következő alakúnak adódott:

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{krit}} = B_1 \cdot \left[B_2 + \hat{\mathbf{D}} \cdot B_3 + \sqrt{-\hat{\mathbf{I}} \cdot B_4 + B_5 \left(B_6 + \hat{\mathbf{D}} \cdot B_7 \right)^2} \right], \quad (40)$$

ahol

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{\tilde{p}_e \left(\tilde{p}_e^{\frac{n+1}{2n}} + \beta \right)^2 \kappa \alpha_{12}} \\
B_2 &= 2\tilde{k}\kappa U_{max} \tilde{p}_e^{\frac{n+1}{n}} \left(\tilde{p}_e^{\frac{n+1}{2n}} + \beta \right) \\
B_3 &= \tilde{k}\kappa \alpha_{12} \tilde{p}_e \left(\tilde{p}_e^{\frac{n+1}{n}} + \beta^2 \right) \\
B_4 &= 4U_{max} \tilde{k}^2 \kappa \alpha_{12} \tilde{p}_e^{\frac{n+1}{n}} \left(\tilde{p}_e^{\frac{n+1}{2n}} + \beta \right)^3 \\
B_5 &= \left(\tilde{k} \tilde{p}_e \kappa \right)^2 \\
B_6 &= 2\tilde{p}_e U_{max} \left(\tilde{p}_e^{\frac{n+1}{2n}} + \beta \right) \\
B_7 &= \left(\tilde{p}_e^{\frac{n+1}{2n}} + \beta \right)^2 \alpha_{12}
\end{aligned}$$

Hivatkozások

- [1] A munkahenger definíciója, felépítése, rendeltetése:
[http : //hu.wikipedia.org/wiki/Munkahenger](http://hu.wikipedia.org/wiki/Munkahenger), 2013. 03. 25.
- [2] Lajos Tamás: *Az áramlástan alapjai 166.-178. oldal*,
Műegyetemi Kiadó, 1998, Azonosító: 450392, 13. fejezet
- [3] PID szabályozás:
[http : //en.wikipedia.org/wiki/PID_controller](http://en.wikipedia.org/wiki/PID_controller), 2013. 04. 30.
- [4] A munkahengerben megvalósított PID szabályzó dokumentációja:
[http : //www.festo.com/net/SupportPortal/Files/10038/SPC11_ENUS.pdf](http://www.festo.com/net/SupportPortal/Files/10038/SPC11_ENUS.pdf),
2013. 04. 30.
- [5] A munkahenger vezérlőszelepének dokumentációja:
[http : //xdki.festo.com/xdki/data/doc_ENUS/PDF/US/MPYE_ENUS.PDF](http://xdki.festo.com/xdki/data/doc_ENUS/PDF/US/MPYE_ENUS.PDF),
2013. 04. 30.
- [6] A pneumatika alapjai és a pneumatikus munkahengerek felhasználási területei:
[http : //www.kekvilag.hu/didactic/letoltes/oktatas/P111Pneumatika_alapjai.pdf](http://www.kekvilag.hu/didactic/letoltes/oktatas/P111Pneumatika_alapjai.pdf),
2013. 10. 20.
- [7] Mario di Bernardo, Cristopher J. Budd, Alan R. Champneys, Piotr Kowalczyk:
Piecewise-smooth Dynamical Systems, Theory and Applications,
Springer-Verlag London Limited 2008, ISBN: 978-1-84628-039-9
- [8] Dr. Hős Csaba: *Szakaszosan folytonos dinamikai rendszerek, előadásjegyzet*,
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2013