



---

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék

# Különböző sebességprofilú sík szabadsugarak instabilitásának vizsgálata

Készítette: Nagy Péter Tamás

2013.

Konzulens: Dr. Paál György, egyetemi docens

Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék

1111, Budapest, Műegyetem rkp. 3

# Tartalomjegyzék

|                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Ábrajegyzék .....                                                             | i   |
| 1. Bevezetés .....                                                            | 1   |
| 2. A stabilitásvizsgálat .....                                                | 2   |
| 2.1 Az Orr-Sommerfeld egyenlet .....                                          | 2   |
| 2.2 Az összetett mátrix módszer.....                                          | 5   |
| 2.3 A vizsgált sebességprofilok.....                                          | 9   |
| 2.3.1. Analitikus sebességprofilok.....                                       | 9   |
| 2.3.2. Numerikus szimulációkból származó sebességprofilok .....               | 11  |
| 2.4 A megoldás menete .....                                                   | 18  |
| 2.5 Eredmények és értelmezésük .....                                          | 23  |
| 2.5.1. Az analitikus sebességprofilok stabilitása .....                       | 23  |
| 2.5.2. A numerikus szimulációkból származó sebességprofilok stabilitása ..... | 25  |
| 3. Összefoglalás .....                                                        | 33  |
| 4. Irodalomjegyzék .....                                                      | 34  |
| Függelék.....                                                                 | I   |
| A. Analitikus sebességprofilok stabilitása .....                              | I   |
| B. Szimulációból származó sebességprofilok stabilitása .....                  | VII |

## Ábrajegyzék

|                                                                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. ábra Kilépési sebességprofilok .....                                                                                               | 10 |
| 2. ábra A “top hat” sebességprofil átalakulási fázisai Bickley-profilba ( $U = sech2(yn)$ ) .....                                     | 10 |
| 3. ábra A numerikus szimuláció modellje .....                                                                                         | 11 |
| 4. ábra A szabadsugár sebességprofiljai .....                                                                                         | 13 |
| 5. ábra A szabadsugár dimenziótlan sebességprofiljai .....                                                                            | 14 |
| 6. ábra A maximális (jellemző) sebesség a szabadsugárban .....                                                                        | 14 |
| 7. ábra A sebességprofil jellemző szélessége a szabadsugárban .....                                                                   | 15 |
| 8. ábra A lokális Reynolds-szám a szabadsugárban .....                                                                                | 15 |
| 9. ábra Az élháng áramlási konfigurációja [9] .....                                                                                   | 16 |
| 10. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár és élháng sebességprofiljai .....                                                         | 16 |
| 11. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár és élháng dimenziótlan sebességprofiljai .....                                            | 17 |
| 12. ábra Az egyenletes kilépésű szabadsugár és élháng sebességprofiljai .....                                                         | 17 |
| 13. ábra Az egyenletes kilépésű szabadsugár és élháng dimenziótlan sebességprofiljai .....                                            | 18 |
| 14. ábra A numerikus hibák csökkentésére használt ablakfüggvény .....                                                                 | 19 |
| 15. ábra A D függvény zérusértékű szintvonalai.....                                                                                   | 21 |
| 16. ábra A perturbáció amplitúdójának növekedési rátája $sech2(y)$ sebességprofil esetén.....                                         | 23 |
| 17. ábra A különböző profilok perturbációjának növekedési rátája $Re=50$ .....                                                        | 24 |
| 18. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár perturbációs sebességének növekedési rátája különböző távolságokra a nyílástól (CFD)..... | 26 |
| 19. ábra Az egyenletes kilépésű szabadsugár perturbációs sebességének növekedési rátája különböző távolságokra a nyílástól (CFD)..... | 26 |
| 20. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár perturbációs sebességének növekedési rátája különböző távolságokra a nyílástól .....      | 28 |
| 21. ábra A parabolikus kilépésű élháng perturbációs sebességének növekedési rátája különböző távolságokra a nyílástól .....           | 28 |
| 22. ábra Az egyenletes kilépésű szabadsugár perturbációs sebességének növekedési rátája különböző távolságokra a nyílástól .....      | 29 |

|                                                                                                                                      |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 23. ábra Az egyenletes kilépésű élhang perturbációs sebességének növekedési rátája különböző távolságokra a nyílástól.....           | 29   |
| 24. ábra A parabolikus szabadsugár perturbációs sebességének össznövekedése.....                                                     | 30   |
| 25. ábra A parabolikus élhang perturbációs sebességének össznövekedése.....                                                          | 31   |
| 26. ábra Az egyenletes kilépésű szabadsugár perturbációs sebességének össznövekedése .....                                           | 31   |
| 27. ábra Az egyenletes kilépésű élhang perturbációs sebességének össznövekedése .....                                                | 32   |
| 28. ábra A $sech_2(y)$ profil fázissebességei különböző Reynolds-számok esetén .....                                                 | I    |
| 29. ábra A $sech_2(y)$ profil csoportsebességei különböző Reynolds-számok esetén .....                                               | I    |
| 30. ábra A $sech_2(y)$ profil stabilitásdiagramja, alacsony Re esetén.....                                                           | II   |
| 31. ábra A $sech_2(y)$ profil stabilitásdiagramja, teljes.....                                                                       | II   |
| 32. ábra A $sech_2(y^2)$ profil stabilitásdiagramja, alacsony Re esetén .....                                                        | III  |
| 33. ábra A $sech_2(y^2)$ profil stabilitásdiagramja, teljes .....                                                                    | III  |
| 34. ábra A $sech_2(y^3)$ profil stabilitásdiagramja, alacsony Re esetén .....                                                        | IV   |
| 35. ábra A $sech_2(y^3)$ profil stabilitásdiagramja, teljes .....                                                                    | IV   |
| 36. ábra Az idealizált parabolikus profil stabilitásdiagramja.....                                                                   | V    |
| 37. ábra A különböző profilok perturbációjának növekedési rátája $Re=5$ .....                                                        | V    |
| 38. ábra A különböző profilok perturbációjának növekedési rátája $Re=100$ .....                                                      | VI   |
| 39. ábra A különböző profilok perturbációjának növekedési rátája $Re=1000$ .....                                                     | VI   |
| 40. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora Re esetén $x=0$ mm .....   | VII  |
| 41. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora Re esetén $x=0.5$ mm ..... | VII  |
| 42. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora Re esetén $x=1$ mm .....   | VIII |
| 43. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora Re esetén $x=2.5$ mm ..... | VIII |
| 44. ábra A „top hat” kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora Re esetén $x=0$ mm .....     | IX   |
| 45. ábra A „top hat” kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora Re esetén $x=1$ mm .....     | IX   |

|                                                                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 46. ábra A „top hat” kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora $Re$ esetén $x=2$ mm..... | X  |
| 47. ábra A „top hat” kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora $Re$ esetén $x=3$ mm..... | X  |
| 48. ábra A „top hat” kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora $Re$ esetén $x=4$ mm..... | XI |
| 49. ábra A „top hat” kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora $Re$ esetén $x=6$ mm..... | XI |



# 1. Bevezetés

Euler 1752-ben írta le először a súrlódásmentes folyadékok mozgásegyenleteit, majd közel 100 évre rá, 1840-ben publikálták a Navier-Stokes egyenleteket, amelyek már figyelembe veszik a folyadékok súrlódását is. Az egyenleteknek akkoriban nagyon kevés esetben ismerték a megoldását, és azok sem egyeztek a természetben tapasztaltakkal. Az ellentétet Reynolds oldotta fel híres kísérletével, amelyben a csövek áramlástanai viszonyait tanulmányozta. Ő jött rá először, hogy adott sebesség felett a Stokes által csövekre levezetett megoldás nagyon kis zavarások esetén is elveszti a stabilitását. Tehát egy olyan megoldás, amelyik matematikailag kielégíti a folyadékok mozgásegyenletét, nem biztos, hogy a természetben is megfigyelhető. Ezek után több kutató is a folyadékok instabilitását vizsgáló módszereket dolgozott ki. Ezek közül a legjelentősebb a Prandtl által vezetett göttingeni iskolában dolgozó Tollmien és Schlichting, illetve tőlük függetlenül Orr és Sommerfeld által kidolgozott egyenlet volt, melyet végül utóbbiakról neveztek el. (Munkám során én is ezt az egyenletet oldottam meg.)

Látható, hogy sok más tudományterülethez hasonlóan, a stabilitásvizsgálat milyen nagy szerepet tölt be az áramlástanban is. Kutatásom során a kétdimenziós sík szabadsugar áramlástanai viszonyait fogom vizsgálni. A szabadsugar stabilitásának problémája bonyolultabb áramlástanai konfigurációk kapcsán merült fel, mint az él- és az üreghang. Ezek stabilitásvizsgálata rendkívül fontos, hogy megértsük az instabilitásuk kialakulását, és azt esetleg megszüntethessük (bombázó repülők ledobó nyílása, autók nyitott ablaka, napfényteteje), vagy kívánt frekvenciára hangolhassuk (fúvós hangszerek). A két konfiguráció nagyon hasonló, mindkettőnél a szabadsugar, illetve a nyíróréteg után egy áramlást megzavaró elemet (éket, üreget) helyeznek. Ezeket az öngerjesztett áramlásokat mindig visszacsatolási kör kialakulásával magyarázzák, aminek egyik eleme az, hogy az áramlásba helyezett tárgy visszahat a szabadsugar illetve a nyíróréteg kilépéshez közeli részére („a legérzékenyebb rész”), és ott egy infinitézimális zavarás létrehozásával instabilitási hullámot kezdeményez [1]. Ezt a fokozott érzékenységet már többen vizsgálták, és kísérletileg is sikerült kimutatni, hogy a szabadsugar tényleg a kilépésnél a legérzékenyebb [2].

Ennek a fokozott érzékenységek a matematikai magyarázatára a szakirodalomban egyetlen cikket találtam, amiben a kilépést nyíróréteggént veszik figyelembe, és ezen végzik el az

„fogékonyság” vizsgálatot [3]. A „fogékonyság” analízis (angolul: receptivity, saját fordítás, mivel a magyar szakirodalomban nem találtam rá kifejezést) a stabilitásvizsgálathoz nagyon hasonló elemzés, azonban itt nem egy általános zavaráshullám amplitúdójának növekedését vizsgálják az áramlásban, hanem az áramlás egy pontosan definiált gerjesztésre adott válaszát. Azonban a cikkben a nyíróréteg-közelítés feltételezi, hogy a határréteg a kilépésnél rendkívül vékony, amely bizonyos esetekben jó közelítés (egyenletes sebességprofil a kilépéshez közel), más esetekben azonban rossz (parabolikus kilépési profil vagy távol a kilépéstől). A munkám során ezért különböző, a valódi kilépési viszonyokat jobban közelítő, a nyílástól különböző távolságra lévő sebességprofilok stabilitásvizsgálatát fogom elvégezni, és ezek alapján vizsgálni, hogy a kilépés helyénél mennyivel érzékenyebb a szabadsugár, mint attól az áramlás irányában távolabb.

## 2. A stabilitásvizsgálat

### 2.1 Az Orr-Sommerfeld egyenlet

Az Orr-Sommerfeld egyenlet [4] a Navier-Stokes és a kontinuitás egyenletéből levezetett, stabilitásvizsgálatra már régóta használt egyenlet. Az áramlásra jellemző mennyiséget a következő alakban keressük:

$$q(x, y, z, t) = Q(x, y, z) + \varepsilon * \tilde{q}(x, y, z, t) \quad (2.1.1),$$

ahol  $Q$  a mennyiség időátlagolt nagysága, míg a másik tag, az  $\varepsilon * \tilde{q}$  az időben változó mennyiség (perturbációs tag), ami legalább egy nagyságrenddel kisebb az időátlagolt tagnál. Feltételezzük, hogy az áramlás közel párhuzamos: az  $y$  irányú sebesség komponens közel zérus, illetve hogy az állandó sebességkomponensek csak  $y$ -tól függenek.

$$U = U(y); V \approx 0; W = W(y) \quad (2.1.2),$$

ahol  $U, V, W$  a megszokott irányú időátlagolt sebességkomponenseket jelölik.

Ezek után, ha visszahelyettesítünk a dimenziótlan Navier-Stokes és a kontinuitási egyenletekbe a következő egyenletrendszert kapjuk az első rendben kicsi tagokra,  $O(\varepsilon)$ :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \tilde{v} \frac{dU}{dy} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{u} \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{v} \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + W \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \tilde{v} \frac{dW}{dy} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{w} \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.1.6),$$

ahol  $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$  a Reynolds-szám, melyben  $U_0$  a jellemző sebesség,  $L$  a jellemző méret  $\nu$  pedig a kinematikai viszkozitást jelöli.

A differenciálegyenlet-rendszer megoldását a következő alakban keressük:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(y) \\ \Phi(y) \\ h(y) \\ \pi(y) \end{bmatrix} e^{i(\alpha x + \beta y - \omega t)} \quad (2.1.7),$$

ahol  $f(y)$ ,  $\Phi(y)$ ,  $h(y)$  és  $\pi(y)$  az amplitúdó függvények, míg  $\alpha = \check{\alpha}L$  és  $\beta = \check{\beta}L$  az  $x$  illetve  $y$  irányú dimenziótlan hullámszámok,  $\omega = \check{\omega} \frac{L}{U_0}$  pedig a dimenziótlan körfrekvencia, ahol  $\check{\omega}$  az adott mennyiség dimenziós alakját jelenti.

Behelyettesítve a (2.1.7)-et a (2.1.3-6)-ba, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$i[\alpha U + \beta W - \omega]f + U'\Phi = -i\alpha\pi + \frac{1}{Re}[f'' - (\alpha^2 + \beta^2)f] \quad (2.1.8)$$

$$i[\alpha U + \beta W - \omega]\Phi = -\pi' + \frac{1}{Re}[\Phi'' - (\alpha^2 + \beta^2)\Phi] \quad (2.1.9)$$

$$i[\alpha U + \beta W - \omega]h + W'\Phi = -i\beta\pi + \frac{1}{Re}[h'' - (\alpha^2 + \beta^2)h] \quad (2.1.10)$$

$$i(\alpha f + \beta h) + \Phi' = 0 \quad (2.1.11),$$

ahol a  $\square'$  kifejezés az  $y$  szerinti deriválást jelöli, ahogy a továbbiakban is. Az egyenletrendszer lehetséges egy ismeretlenre rendezni, ekkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \Phi^{iv} - 2(\alpha^2 + \beta^2)\Phi'' + (\alpha^2 + \beta^2)^2\Phi = & \quad (2.1.12) \\ i \operatorname{Re} [(\alpha U + \beta W - \omega)[\Phi'' - (\alpha^2 + \beta^2)\Phi] - (\alpha U'' + \beta W'')\Phi] \end{aligned}$$

Ez a jól ismert Orr-Sommerfeld egyenlet, amely tovább egyszerűsíthető kétdimenziós áramlások esetén ( $\beta = 0; W = 0$ ):

$$\Phi^{iv} - 2\alpha^2\Phi'' + \alpha^4\Phi = i \operatorname{Re} [(\alpha U - \omega)[\Phi'' - \alpha^2\Phi] - \alpha U''\Phi] \quad (2.1.13)$$

A (2.1.11)-esből pedig a következő lesz:

$$f = -\frac{\Phi'}{i\alpha} \quad (2.1.14),$$

melyet az  $\tilde{u}$  sebességkomponensre adott peremfeltétel átírásához használhatunk fel.

A (2.1.13) egyenlet  $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$  határátmenet képzésével a súrlódásmentes esetet vizsgálhatjuk; ez a Rayleigh-egyenlethez vezet:

$$(\alpha U - \omega)[\Phi'' - \alpha^2\Phi] - \alpha U''\Phi = 0 \quad (2.1.15)$$

Bizonyos kétdimenziós esetekben hasznosabb lehet a perturbációs áramfüggvény használata, ezt is a többi mennyiséghez hasonló alakban keressük:

$$\tilde{\psi} = k(y) e^{i(\alpha x + \beta y - \omega t)} \quad (2.1.16)$$

Az  $y$  irányú sebességkomponenst kifejezve:

$$\tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} = -i\alpha k(y) e^{i(\alpha x + \beta y - \omega t)} \quad (2.1.17)$$

A 2.1.7-es egyenlettel összehasonlítva pedig a következő egyenletet kapjuk:

$$\Phi(y) = -i\alpha k(y) \quad (2.1.18)$$

Ezt visszahelyettesítve az Orr-Sommerfeld egyenletbe (2.1.12 vagy 2.1.13) láthatjuk, hogy az egyenlet minden tagját pontosan egyszer szoroztuk  $-i\alpha$ -val, így azzal leosztva ugyanarra az egyenletre jutunk. (A leosztást nyugodtan elvégezhetjük, mert  $\alpha = 0$  esetet nincs értelme vizsgálni.) Tehát az, hogy az Orr-Sommerfeld egyenletet az  $y$  irányú perturbációs sebesség-amplitúdó függvényre vagy a perturbációs áramfüggvényre oldjuk meg, csak az egyenlet peremfeltételeiben különbözik.

## 2.2 Az összetett mátrix módszer

Vizsgáljuk az Orr-Sommerfeld egyenletet (2.1.13) a végtelen távolságban. Ha  $y \rightarrow \infty, U(y) = U''(y) = 0$  szabadsugarak esetén. Így a következő egyenletet kapjuk:

$$\Phi^{iv} - 2\alpha^2 \Phi'' + \alpha^4 \Phi = i Re \omega_0 [\Phi'' - \alpha^2 \Phi] \quad (2.2.1)$$

Keressük a megoldást  $\Phi \sim e^\lambda$  alakban, ekkor a karakterisztikus egyenlet gyökei a következők lesznek:

$$\lambda_{1,2} = \pm \alpha \text{ illetve } \lambda_{3,4} = \pm Q \text{ ahol } Q := \sqrt{\alpha^2 - i Re \omega} \quad (2.2.2)$$

Látható, hogy nagy  $Re$ -számok esetén  $|\lambda_{3,4}| \gg |\lambda_{1,2}|$ , tehát az Orr-Sommerfeld egyenlet, az úgynevezett merev differenciálegyenletek közé tartozik. Az ilyen egyenleteket a szokásos explicit numerikus sémákkal nem lehet megoldani, mert a véges számábrázolás miatt, ha annyira lecsökkentjük a lépésközt, amit az adott módszer stabilitása megkíván, akkor már pontatlan lesz a megoldásunk. Az Orr-Sommerfeld egyenlet megoldására három fő módszert szoktak használni: mátrix módszer véges differenciás vagy spektrális diszkretizációval, az alarendszert alkotó megoldások ortogonalizációjával, illetve a „compound matrix method”-dal (CMM) (összetett mátrix módszerrel) történő megoldást. Sengupta szerint [4] hidrodinamikai problémák esetén a legjobb elérhető módszer a CMM, mivel egyszerű és mégis kielégítő pontosságú megoldásokhoz vezet. A munkám során a Sengupta által a határréteg-vizsgálatokhoz (Blasius-profilhoz) ismertetett megoldási módszert adaptáltam szabadsugarakra. A fő különbség a kettő között, a végtelen távoli (aszimptotikus) egyenletben van (2.2.1), a határrétegben  $y \rightarrow \infty$  esetén  $U(y) \rightarrow 1$ , míg a szabadsugarban  $U(y) \rightarrow 0$ . Ebből fakadóan a harmadik és a negyedik karakterisztikus

gyök is eltér (2.2.2), a négyzetgyök alatti kifejezésből eltűnik az  $(i \operatorname{Re} a)$  tag. A másik eltérés a peremfeltételekben jelentkezik, az ebből adódó különbségeket az alfejezet végén és a 2.4-es alfejezetben ismertetem.

Az Orr-Sommerfeld egyenlet általános megoldása:

$$\Phi = a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 + a_3 \Phi_3 + a_4 \Phi_4 \quad (2.2.3),$$

$$\text{ahol } y \rightarrow \infty \text{ esetén } \Phi_1 \sim e^{-\alpha y}; \Phi_2 \sim e^{\alpha y}; \Phi_3 \sim e^{-Qy}; \Phi_4 \sim e^{Qy} \quad (2.2.4)$$

Pozitív  $y$  esetén  $a_2$  -nek és  $a_4$  -nek zérusnak kell lennie, hogy kielégítse a  $\Phi(\infty) = 0$  peremfeltételt, feltételezve, hogy  $\Re[\alpha, Q] > 0$ . Így a következő megoldást kapjuk  $\Phi$ -re:

$$\Phi = a_1 \Phi_1 + a_3 \Phi_3 \quad y > 0 \quad (2.2.5)$$

Negatív  $y$  esetén  $a_1$  -nek és  $a_3$  -nak kell zérusnak lennie. A pozitív illetve negatív  $y$ -okra kapott megoldások teljesen egyenértékűek, ha az első alapmegoldást felcseréljük a másodikkal, a harmadikat pedig a negyedikkel, így a továbbiakban csak a pozitív  $y$ -okra mutatom be a módszert.

Vezessünk be hat új változót:

$$\eta_1 = \Phi_1 \Phi_3' - \Phi_1' \Phi_3 \quad (2.2.6)$$

$$\eta_2 = \Phi_1 \Phi_3'' - \Phi_1'' \Phi_3 \quad (2.2.7)$$

$$\eta_3 = \Phi_1 \Phi_3''' - \Phi_1''' \Phi_3 \quad (2.2.8)$$

$$\eta_4 = \Phi_1' \Phi_3'' - \Phi_1'' \Phi_3' \quad (2.2.9)$$

$$\eta_5 = \Phi_1' \Phi_3''' - \Phi_1''' \Phi_3' \quad (2.2.10)$$

$$\eta_6 = \Phi_1'' \Phi_3''' - \Phi_1''' \Phi_3'' \quad (2.2.11)$$

Differenciálva a változókat  $y$  szerint, illetve a kétdimenziós Orr-Sommerfeld egyenletbe (2.1.13) behelyettesítve, a következő egyenletrendszert kapjuk mátrix alakban.

$$\eta' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b2 & 0 & 0 & b1 & 0 & 1 \\ 0 & b2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \eta = A\eta \quad (2.2.12),$$

ahol  $b_1 := 2\alpha^2 + i \operatorname{Re}(\alpha U - \omega)$  és  $b_2 := \alpha^4 + \alpha^2 i \operatorname{Re}(\alpha U - \omega) + i\alpha \operatorname{Re} U''$

Így a negyedrendű differenciálegyenlet, ami a szokásos módon 4 elsőrendű differenciálegyenletre írható át, ezzel a módszerrel 6 elsőrendű differenciálegyenletre vezettük vissza. Ha azonban megvizsgáljuk az új változókat  $y \rightarrow \infty$  esetén, a (2.2.4)-hez hasonlóan, kiderül miért is hasznos ez az átírás.

$$\eta_1 \sim (-Q + \alpha)e^{-(\alpha+Q)y} \quad (2.2.13)$$

$$\eta_2 \sim (Q^2 - \alpha^2)e^{-(\alpha+Q)y} \quad (2.2.14)$$

$$\eta_3 \sim (-Q^3 + \alpha^3)e^{-(\alpha+Q)y} \quad (2.2.15)$$

$$\eta_4 \sim (-\alpha Q^2 + \alpha^2 Q)e^{-(\alpha+Q)y} \quad (2.2.16)$$

$$\eta_5 \sim (\alpha Q^3 - \alpha^3 Q)e^{-(\alpha+Q)y} \quad (2.2.17)$$

$$\eta_6 \sim (-\alpha^2 Q^3 + \alpha^3 Q^2)e^{-(\alpha+Q)y} \quad (2.2.18)$$

Látható, hogy a differenciálegyenlet merevségét megszüntettük, mivel minden változó azonos kitevővel rendelkezik. A változók rendkívül gyors változása miatt azonban, még továbbra is nagyon kis lépés szükséges a megoldáshoz, amin a változók normálásával lehet jelentősen javítani. Normáljuk a változókat az első szerint:

$$\tilde{\eta} := \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\eta}{\alpha - Q} e^{(\alpha+Q)y} \quad (2.2.19)$$

Ekkor  $y \rightarrow \infty$ -ben a következő kezdeti értékeket kapjuk  $\tilde{\eta}$ -ra, ahonnan a megoldást később indítani fogjuk:

$$\tilde{\eta}_\infty = \begin{bmatrix} 1 \\ -(\alpha + Q) \\ \alpha^2 + \alpha Q + Q^2 \\ \alpha Q \\ -\alpha Q(\alpha + Q) \\ \alpha^2 Q^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.20)$$

A normálás miatt azonban változik a differenciálegyenlet-rendszer is, deriváljuk (2.2.19)-et  $y$  szerint:

$$\tilde{\eta}' = \frac{\eta'}{\alpha - Q} e^{(\alpha+Q)y} + \frac{\eta}{\alpha - Q} (\alpha + Q) e^{(\alpha+Q)y} \quad (2.2.21)$$

$\eta'$  helyére helyettesítsük a (2.2.12) egyenletet, illetve használjuk fel a (2.2.17)-est:

$$\tilde{\eta}' = \frac{A\eta}{\alpha - Q} e^{(\alpha+Q)y} + (\alpha + Q)\tilde{\eta} = A\tilde{\eta} + (\alpha + Q)\tilde{\eta} \quad (2.2.22)$$

$$\tilde{\eta}' = [A + (\alpha + Q)I]\tilde{\eta} \quad (2.2.23)$$

Ahol  $I$  a 6x6-os egységmátrix. Ez az egyenletrendszer már könnyen megoldható numerikus módon.

Az eredeti perturbációs sebesség amplitúdó függvényeket az új változók segítségével négy különböző módon kaphatjuk vissza [4]:

$$\eta_1 \Phi'' - \eta_2 \Phi' + \eta_4 \Phi = 0 \quad (2.2.24)$$

$$\eta_1 \Phi''' - \eta_3 \Phi' + \eta_5 \Phi = 0 \quad (2.2.25)$$

$$\eta_2 \Phi''' - \eta_3 \Phi'' + \eta_6 \Phi = 0 \quad (2.2.26)$$

$$\eta_4 \Phi''' - \eta_5 \Phi'' + \eta_6 \Phi' = 0 \quad (2.2.27)$$

Látható, hogy egyedül az (2.2.24) egyenlet másodrendű, a többi harmadrendű, így ezt a legkönnyebb megoldani. Bizonyos sebességprofilok stabilitásvizsgálata esetén, ahol  $y = 0$  ott  $\eta_1 = 0$  is biztosítani kell, mert ott  $\Phi$ -nek és  $\Phi'$ -nek is zérusnak kell lennie (Blasius-profil). Ez a (2.2.24) egyenlet megoldása során komoly problémákat okoz, azonban sík szabadsugarak esetén ez nem áll fent, így nyugodtan lehet használni. Ezen kívül a numerikus hibák csökkentése érdekében felesleges renormálni a korábban kiszámolt  $\tilde{\eta}$  függvényeket, hisz minden tagban pontosan egyszer szerepel a  $(\alpha - Q)e^{-(\alpha+Q)y}$  tag, ami nem lehet zérus, így leoszthatunk vele és teljesen hasonló differenciálegyenletet kapunk:

$$\tilde{\eta}_1 \Phi'' - \tilde{\eta}_2 \Phi' + \tilde{\eta}_4 \Phi = 0 \quad (2.2.28)$$

## 2.3 A vizsgált sebességprofilok

### 2.3.1. Analitikus sebességprofilok

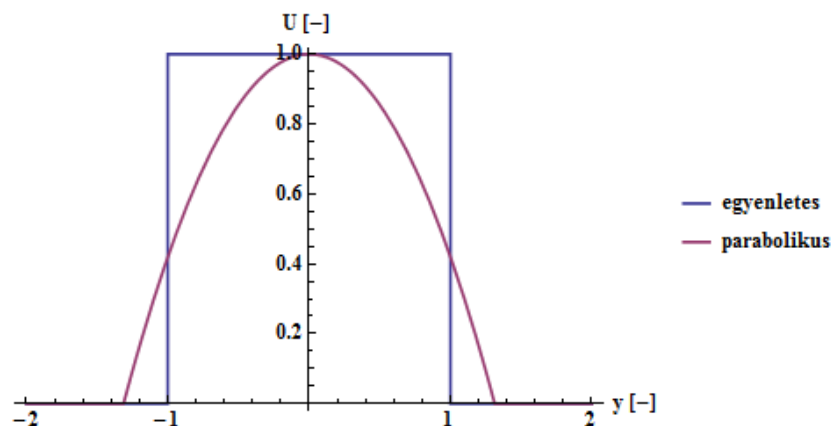
Schlichting 1933-ban [5] és Bickley [6] 1937-ben levezették a szabadsugarakra érvényes sebességprofil, ami szerint  $\tilde{U} = U_0 \operatorname{sech}^2(\tilde{y})$  vagy dimenziótlan alakban  $U = \operatorname{sech}^2(y)$  (Bickley-profil), ami a 2. ábrán is látható  $n = 1$  esetén. Itt a dimenziótlantításkor a jellemző sebesség a maximális sebesség az adott keresztmetszetben, míg a jellemző méret az a távolság a szimmetriatengelytől, ahol az áramlás sebessége eléri a maximális sebesség közel 0.42-szeresét, ez az érték a Bickley-profil kiértékeléséből adódik  $y = 1$  esetén (2.3.8). (A továbbiak is ezt a dimenziótlantítási módszert alkalmazom.) Később a profil kialakulását Andrade 1939-ben kísérletileg is igazolta [7]. Ez a profil azonban Nolle [5] szerint csak a kimeneti nyílás méretének körülbelül nyolcszorosától figyelhető meg az áramlásban.

Közvetlenül a kilépésnél két jellegzetes sebességprofil különböztetünk meg. Az egyik az úgynevezett parabolikus profil, ahol a két határréteg kitölti a teljes kimeneti nyílást. Ez a sebességprofil hosszú párhuzamos csatornán történő kiáramlás esetén alakul ki. A másik pedig az úgynevezett „top hat” profil vagy egyenletes sebességprofil, amelyben a határréteg rendkívül vékony. Ez rövid konfúzoros fúvókából történő kiáramlás esetén alakul ki. A kilépési profil és a később megfigyelhető  $\operatorname{sech}^2(y)$  profil közötti átmenet közelítésére sajnos csak a második esetben áll rendelkezésre [5]:

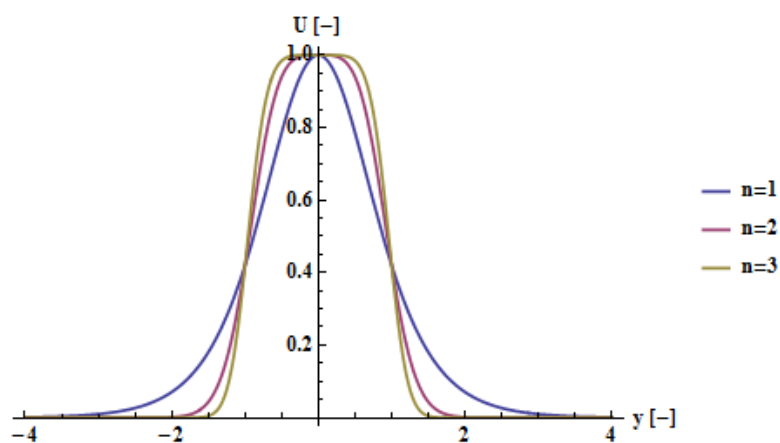
$$U = \operatorname{sech}^2(y^n) \quad (2.3.1),$$

ahol az  $n$  paraméter növelésével lehet az egyenleteshez egyre közelebbi sebességprofilokat előállítani. Ezt  $n = 1; 2; 3$  –ra fogom elvégezni, melyek közül az  $n = 1$  eset, ami a nyílástól kellően távol tetszőleges kilépési profil esetén megfigyelhető dimenziótlan sebességprofil (Bickley-profil). A parabolikus kilépési sebességprofil esetén sajnos nem áll rendelkezésre ilyen közelítés, így csak magát az idealizált parabolikus kilépési profilt használtam, amely  $\operatorname{sech}^2(y)$  –hez hasonló dimenziótlantítás esetén közelítőleg a következő lesz (1. ábra):

$$U = 1 - 0.58 y^2 \text{ ha } -1.31304 \leq y \leq 1.31304, \text{ más esetben } 0 \quad (2.3.1)$$



1. ábra Kilépési sebességprofilok



2. ábra A "top hat" sebességprofil átalakulási fázisai Bickley-profilba ( $U = \text{sech}^2(y^n)$ )

A dimenziótlan sebességprofiloknak megvizsgáltam a dimenziótlan térfogatáramát, ami a összehasonlíthatóság egyik szempontja lehet.

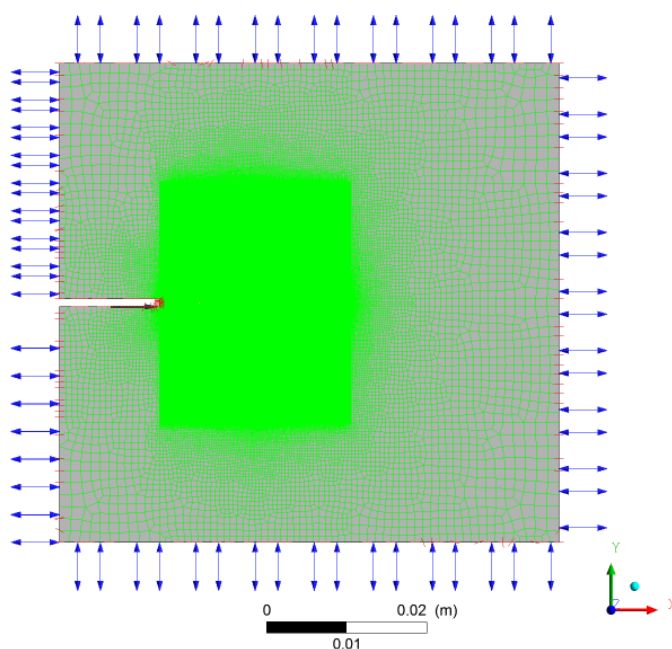
| Profil               | Dimenziótlan<br>térfogatáram [-] | Eltérés a Bickley-<br>profiltól [%] |
|----------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| Parabola             | 1.75072                          | -12.464                             |
| Bickley              | 2                                | 0                                   |
| $\text{sech}^2(y^2)$ | 1.90556                          | -4.722                              |
| $\text{sech}^2(y^3)$ | 1.91378                          | -4.311                              |
| Egyenletes           | 2                                | 0                                   |

1. táblázat A dimenziótlan sebességprofilok térfogatárama

Mivel a jellemző sebesség a dimenziótlanítás során a maximális volt, a dimenziótlan maximális sebesség minden esetben 1 lesz, tehát a különböző esetekben is egyenlő lesz.

### 2.3.2. Numerikus szimulációkból származó sebességprofilok

Mivel parabolikus esetben nem áll rendelkezésre közelítés, illetve az egyenletes profilú kilépés esetén is korlátozott, a pontos sebességprofil átalakulásnak vizsgálatához CFD szimulációkat végeztem, illetve megkaptam Vaik István élháng szimulációit [9]. Vizsgálatomat finom, strukturált hálón végeztem. A kilépési nyílás 1 mm széles volt az élháng szimulációkhoz hasonlóan, a vizsgált tartományban a cellaméret pedig 0.05 mm volt. Ez a tartomány 24 mm távolságig tartott a kilépési nyílástól.



3. ábra A numerikus szimuláció modellje

A peremfeltételek a következők voltak: előre megadott befűjési sebességprofil a fűvóka végén a kilépésnél (3. ábra, piros nyíl), súrlódásmentes fal a fűvóka széleinél, és nyomás peremfeltétel (ú. n. „opening”) a környezetben. Mint később látható, közel 1000-es Reynolds-szám felett a stabilitási tulajdonságok függetlenek Reynolds-számtól, 4,3 érték alatt pedig stabil marad az áramlás, ezért én egy köztes, 100-as Reynolds-számon végeztem a vizsgálataimat. Ezt a Reynolds-számot Vaik Istvánhoz hasonlóan definiálva használtam. Ekkor a jellemző sebesség az

átlagsebesség, jellemző méret pedig a fúvóka szélessége. Az előnye ennek, hogy a térfogatáramok egyenlők lesznek a két különböző esetben. Ezt a másfajta Reynold-szám definíciót egyedül a kifúvás peremfeltételeinek megadásához használtam, ezen kívül később semmilyen módon nem jelenik meg a számításokban. A szimulációknál a folyadék 25°C-os levegő volt, így a következők adódnak a sebességprofilra:

$$v_{\text{levegő } 25^{\circ}\text{C}} = 1,545 * 10^{-5} \quad (2.3.3)$$

$$U_{\text{átlag}} = \frac{Re \ v_{\text{levegő}, 25^{\circ}\text{C}}}{L} = 1.545 \left[\frac{m}{s}\right] \quad (2.3.4)$$

A „top hat” profilnál a teljesen idealizált esetet feltételeztem, hogy nyíróréteg infinitézimálisan vékony, így az átlagsebesség megegyezik a maximálissal. Parabolikus esetben a következő közismert összefüggést használtam:

$$U_{\text{Max,parabola}} = \frac{3}{2} U_{\text{átlag}} = 2,3175 \left[\frac{m}{s}\right] \quad (2.3.5)$$

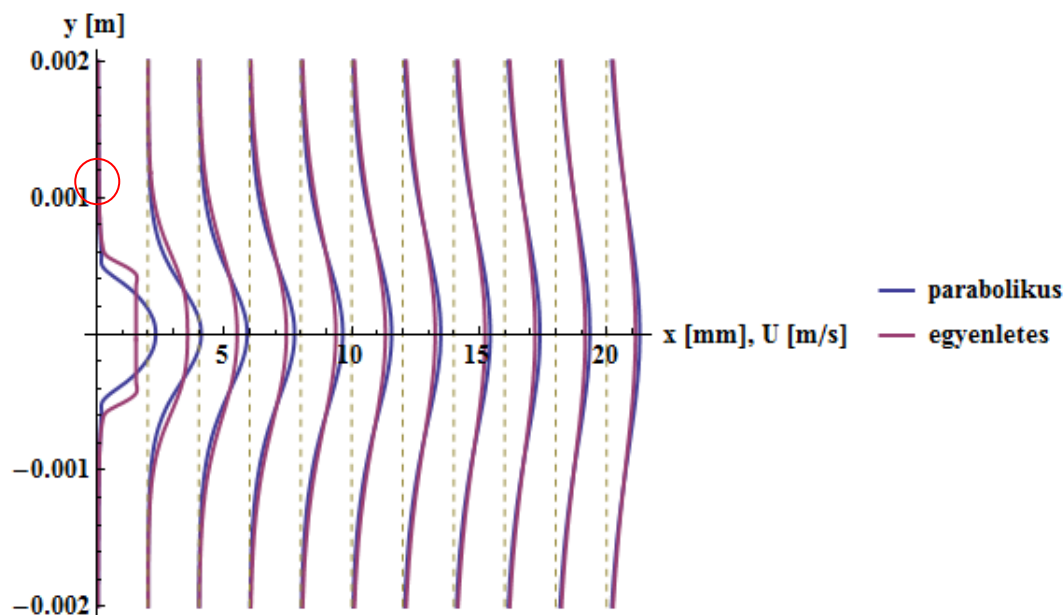
A szimulációkat először időben állandó („steady”) megoldóval végeztem, majd tranziens megoldóra váltottam. A tranziens megoldó időlépését ( $\Delta t$ ) úgy választottam, hogy a Courant-szám egynél kisebb legyen.

$$\Delta t_{\text{max}} = \frac{C_{\text{max}} \Delta x}{U_{\text{Mean}}} = 3.23625 * 10^{-5} [s] \quad (2.3.6)$$

$$\Delta t = 3 * 10^{-5} [s] \quad (2.3.7),$$

ahol  $\Delta x$  a legkisebb cellaméret, azaz  $5 * 10^{-5} m$  volt.

Ezek után az eredményeket időben átlagolva a következő sebességprofilokat kaptam:



4. ábra A szabadsugár sebességprofiljai

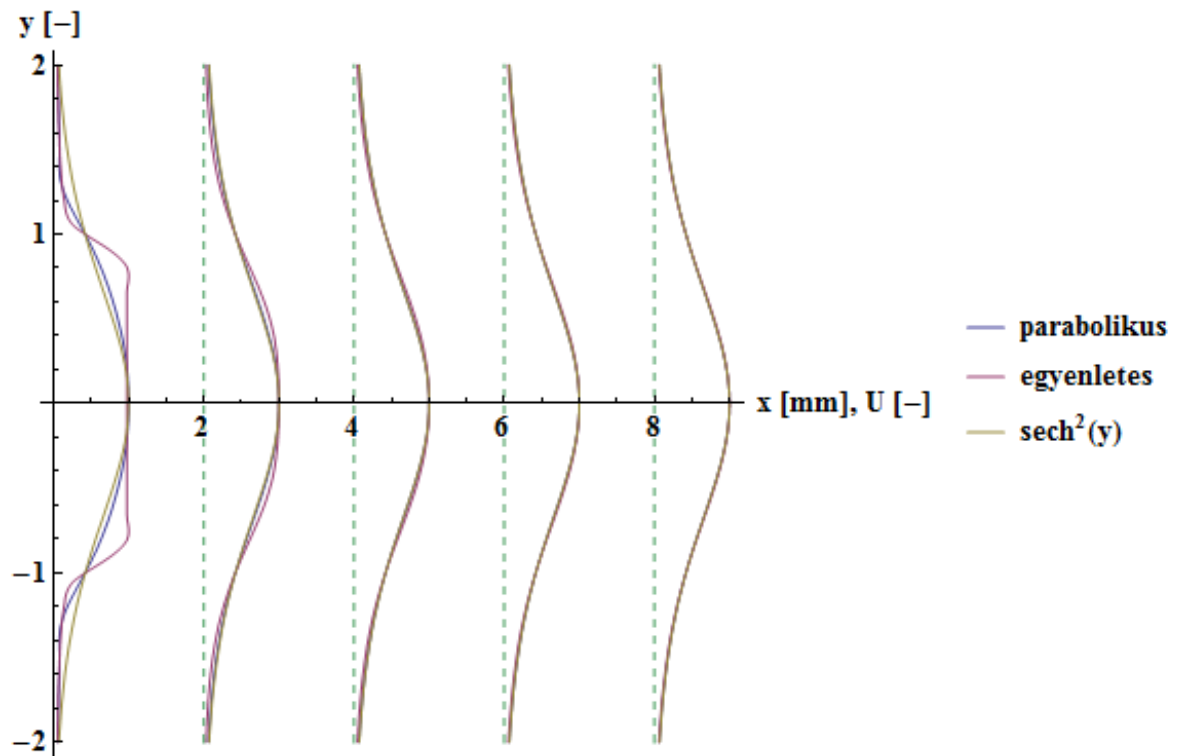
A kapott sebességprofilokat ezután a  $\text{sech}^2(y)$  profilhoz hasonlóan dimenziótlantottam. A jellemző mennyiségekből pedig kiszámoltam a lokális Reynolds-számot, ami az adott keresztmetszetben érvényes.

$$\text{sech}^2(1) \approx 0,4199743 \quad (2.3.8)$$

$$Re_{\text{lokális}}(x) = \frac{U_{\max}(x) L(x)}{\nu} \quad (2.3.9)$$

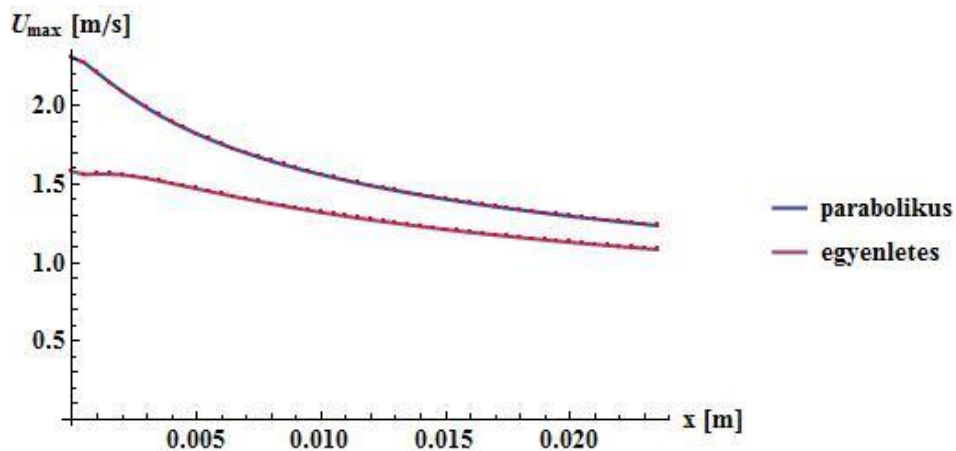
ahol  $Re_{\text{lokális}}$  a lokális Reynolds-szám,  $x$  a keresztmetszet és a fúvóka távolsága,  $U_{\max}$  a maximális  $x$  irányú sebesség a keresztmetszetben,  $L$  az a távolság a szimmetriatengelytől, ahol az áramlás sebessége eléri a maximális sebesség közel 0,42-szeresét.

A dimenziótlant sebességprofilok a következők lettek:

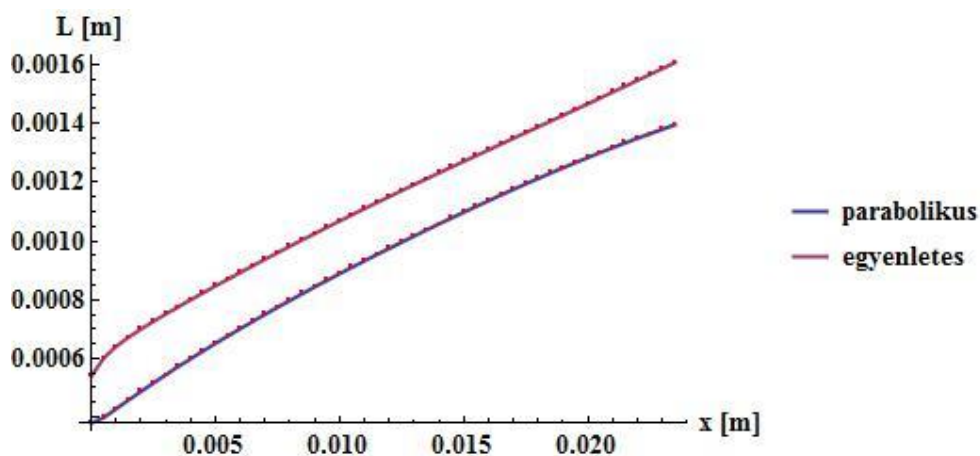


5. ábra A szabadsugár dimenziótlán sebességprofiljai

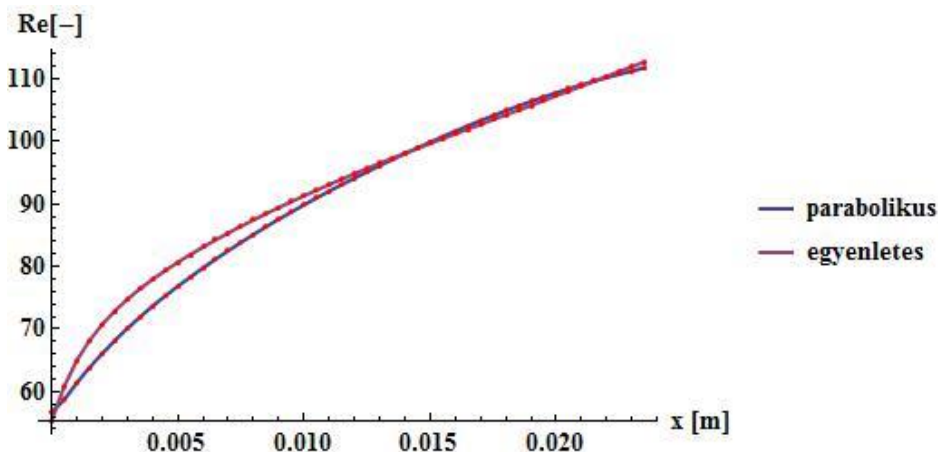
Az 5. ábrán jól látható, hogy a parabolikus profil sokkal gyorsabban alakul át a  $\text{sech}^2(y)$ -hoz hasonló profilba, ehhez elegendő a kilépési nyílás nagyságának 2-3 szorosának megfelelő távolság, míg „top hat” sebességprofilú kilépés esetén ez a távolság 6-8 szorosa a nyílásnak. Ez utóbbi jól egyezik a korábban említett kísérleti tapasztalattal [5]. A sebességprofilokat ezért parabolikus kilépés esetén  $x = \{0; 0,5; 1; 1,5; 2,5\} \text{ mm}$ , míg egyenletes sebességprofilú kilépés esetén  $x = \{0; 1; 2; 3; 4; 6\} \text{ mm}$  távolságra vizsgáltam.



6. ábra A maximális (jellemző) sebesség a szabadsugárban



7. ábra A sebességprofil jellemző szélessége a szabadsugárban

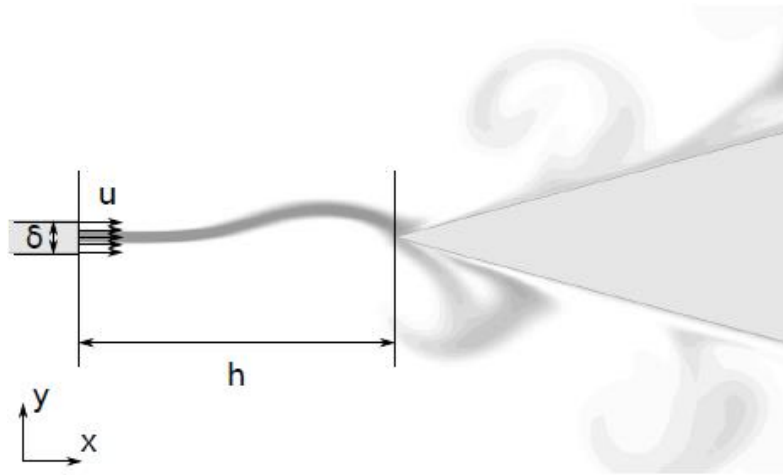


8. ábra A lokális Reynolds-szám a szabadsugárban

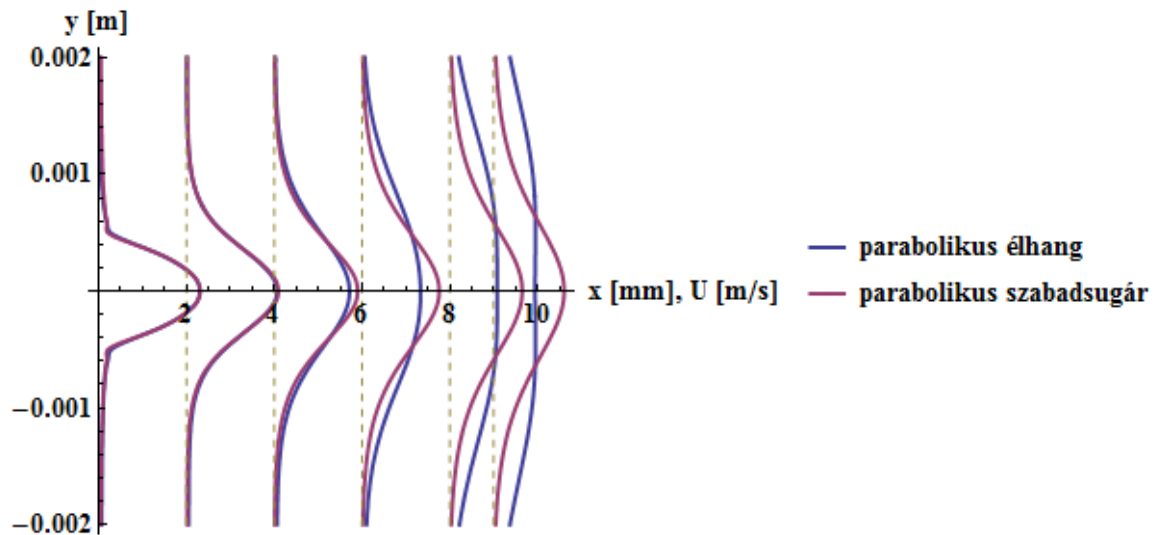
Az ábrákon az is megfigyelhető, hogy bár az átalakulás hamar lezajlik (5. ábra), a két különböző kilépési profilú áramlásban a dimenziós sebességprofilok kilépéstől távol sem egyeznek meg (4., 6-8. ábra). A parabolikus kilépésű áramlás maximális sebessége mindig egy kicsit nagyobb marad a „top hat”-énél, míg a szélesség ez utóbbinál marad nagyobb. A lokális Reynolds-számok, így mégis a két különböző esetben egymáshoz közelítenek (8. ábra). Illetve észrevehető a Reynolds-szám folyamatos növekedése távolodva a kilépéstől, amit sík szabadsugarak esetén a kilépéstől távol érvényes egyensúly sebességprofilokra teoretikusan is igazoltak [9].

A szabadsugár sebességprofiljait az élhangban létrejövővel is összehasonlítottam. Az élhang egyike a legegyszerűbb aeroakusztikus áramlási konfigurációknak, melyben egy fúvókából kiáramló sík szabadsugár az útjába helyezett éknek ütközik. Az ék megzavarja a

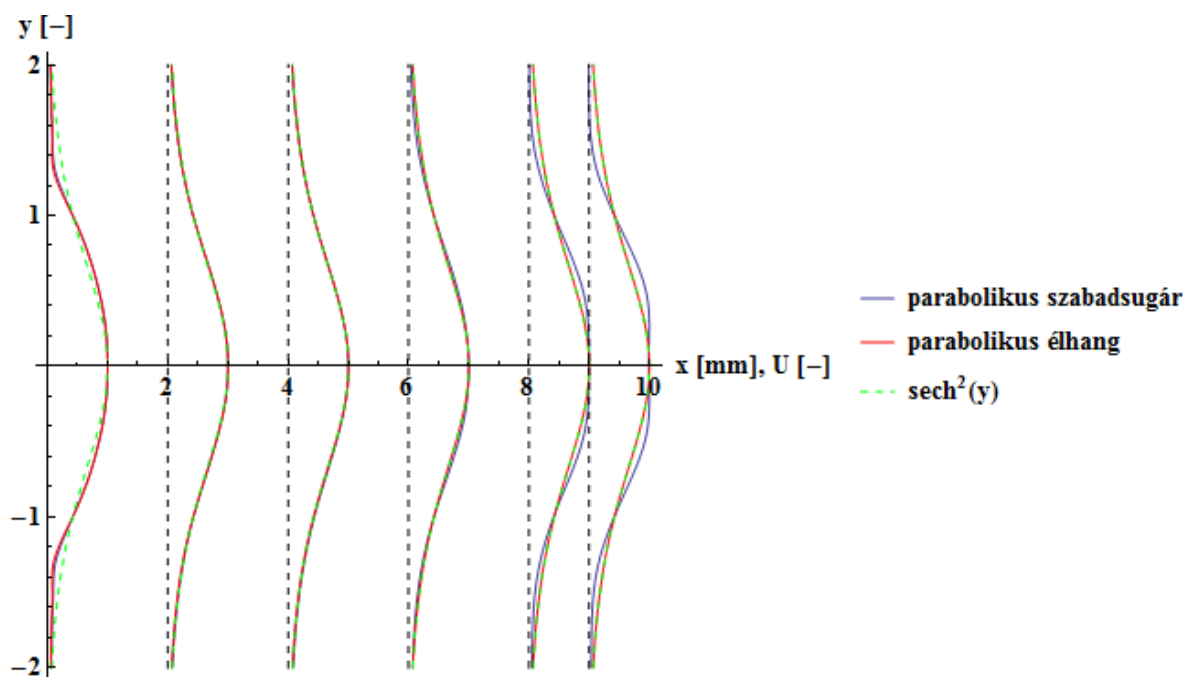
szabadsugár áramlását, és a kialakuló nyomásingadozás akusztikus dipólsugárzóként működik, amely tovább gerjeszti az áramlást a kilépés helyénél. A kilépés helyétől távolodva ez a zavarás felerősödik, így a kialakuló nyomásingadozás is fokozódik, és így létrejön egy öngerjesztett áramlás. A fő geometriai paramétere az élhangnak: a fúvóka szélessége ( $\delta$ ), a fúvóka és az ék távolsága ( $h$ ) és a kettő aránya ( $h/\delta$ ). Ezek a Vaik István által végzett szimulációkban [9], melynek eredményeit én is vizsgáltam, a következők voltak:  $\delta = 1$  mm,  $h = 10$  mm,  $h/\delta = 10$ .



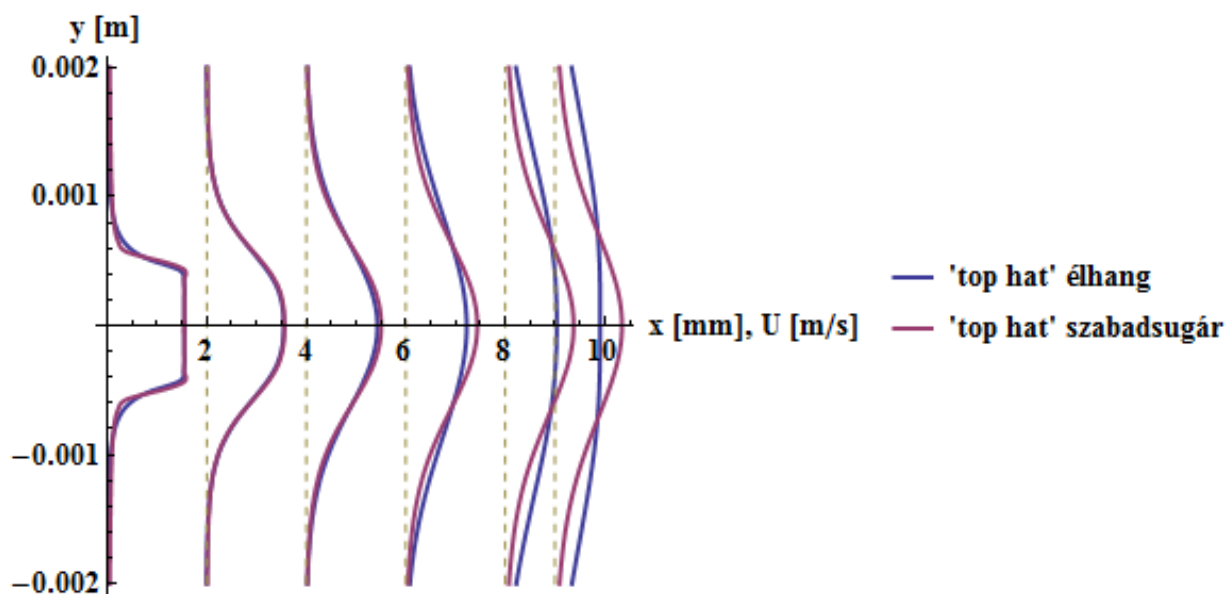
9. ábra Az élhang áramlási konfigurációja [9]



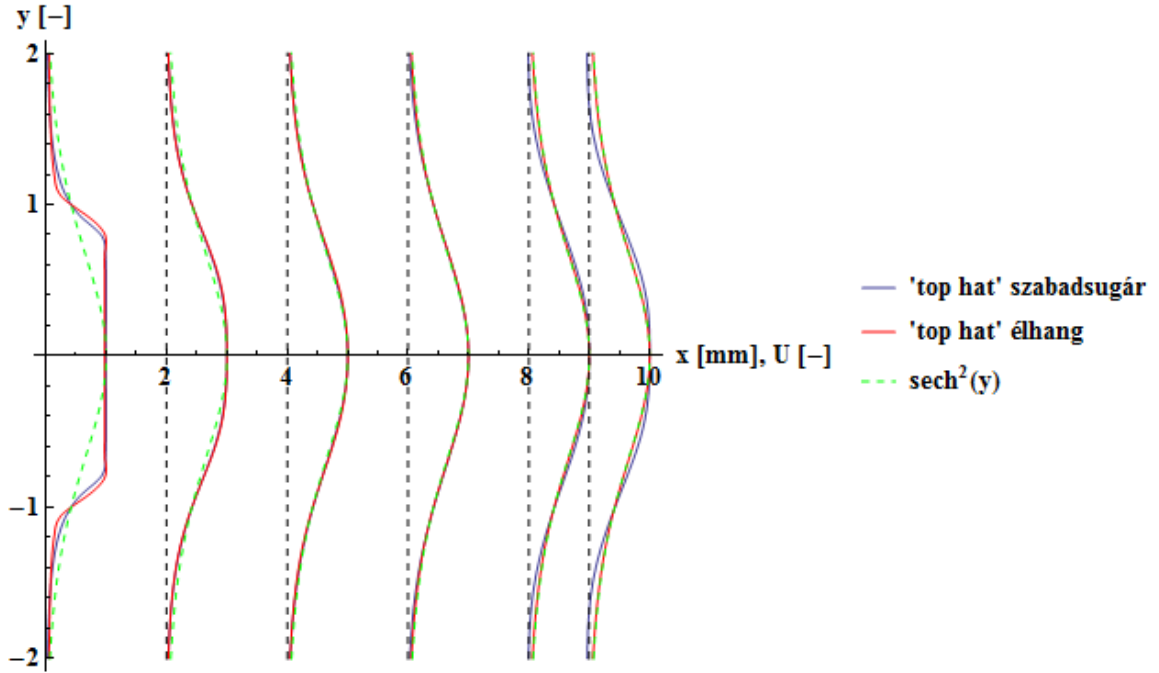
10. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár és élhang sebességprofiljai



11. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár és élháng dimenziótlan sebességprofiljai



12. ábra Az egyenletes kilépésű szabadsugár és élháng sebességprofiljai



13. ábra Az egyenletes kilépésű szabadsugár és élhang dimenziótlan sebességprofiljai

Ezek az ábrák (10.-13.) a kilépés típusától függetlenül jól látszik, hogy kilépés helyéhez közel ( $\sim 4$  mm-ig) az azonos kilépésű sebességprofilok közel megegyeznek mindkét konfigurációban. A következő szakaszban (4-8 mm) először kvantitatív eltérés tapasztalható. A sebességprofilok alakja felveszi a Bickley-profil (11., 13. ábrák), azonban a maximális sebesség az élhangban kicsit alacsonyabb lesz a szabadsugáréhoz képest az ék zavaró hatása miatt (10., 12. ábrák), míg a szélesség nagyobb. Végül az utolsó szakaszban (8-10 mm), az ék éléhez (ami 10 mm-re volt a nyílástól) közel, már kvalitatívan is különböznek (10., 12. ábrák). Az élhangban itt már nem alakul ki az egyensúlyi Bickley-profil az ék torzító hatása miatt.

## 2.4 A megoldás menete

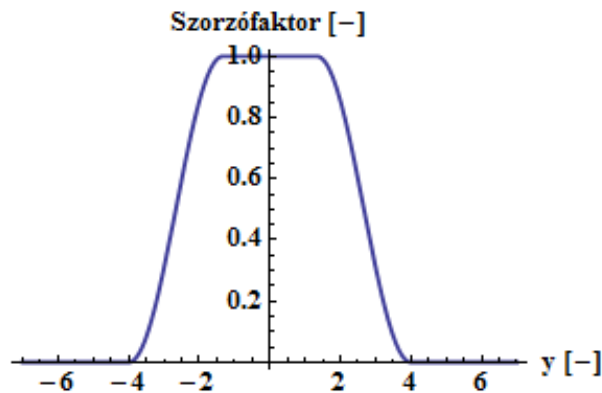
A stabilitásvizsgálat során meg kell határozni azokat a paramétereket, amelyek a peremfeltételeket kielégítik. Az Orr-Sommerfeld egyenlet negyedrendű, tehát négy peremfeltételt kell meghatározni, amik a következők lesznek:

$$\tilde{u}(\pm\infty) = \tilde{v}(\pm\infty) = 0 \quad (2.4.1)$$

Behelyettesítve a (2.1.7)-es egyenletbe, és kihasználva a kontinuitást (2.1.18), illetve azt, hogy  $e^{i(\alpha x + \beta y - \omega_0 t)}$  nem lehet nulla, a következő peremfeltételekhez jutunk:

$$\Phi'(\pm\infty) = \Phi(\pm\infty) = 0 \quad (2.4.2)$$

Ezek a peremfeltételek a CMM-ot használva, bármelyik végtelenből kezdve a megoldást automatikusan kielégülnek a kiindulópontban, ha a (2.2.20) kezdeti értékeket használjuk. Így adódik a lehetőség, hogy  $+\infty$ -tól indítjuk az integrálást  $-\infty$  felé, úgy, hogy az  $\tilde{\eta}$  változók  $-\infty$ -nél is (2.2.20)-as értékeket vegyék fel. Közben figyelniük kell arra, hogy CMM módszer függvényei a pozitív számsíkról a negatívra váltva megváltoznak, azonban ez technikailag csak előjelcserét jelent  $\alpha$ -n és  $Q$ -n. A végtelen numerikus megoldás során természetesen értelmezhetetlen, ezért Senguptához [7] hasonlóan, olyan  $y$ -ről indítottam a megoldást ahol az időben állandó sebesség komponens elhanyagolhatóan kicsi. Ezért az analitikus megoldások esetén  $y = \pm 12$ -t választottam a  $\pm\infty$ -nek, ahol a  $\text{sech}^2(y) \approx 10^{-10}$ . A CFD szimulációkból kapott sebességprofilok, a vizsgált tartományon, a numerikus hibák miatt nem értek el ilyen alacsony értéket, azonban a korábban ismertetett CMM módszer esetén feltételeztük, hogy a sebességprofil értéke a végtelenben zérus. A további numerikus hibák csökkentése céljából ezért ablakfüggvényt használtam, amely az  $y = \pm 4$  -en kívüli tartományt levágta. Végtelennek pedig  $y = \pm 5$ -öt választottam, ez tágabb mint az ablakfüggvény által meghagyott tartomány, azonban így biztosan 0 értékről indítjuk a megoldást, és a megoldási időt sem befolyásolja jelentősen, mert adaptív lépésközzel dolgozó integrátort használtam.



14. ábra A numerikus hibák csökkentésére használt ablakfüggvény

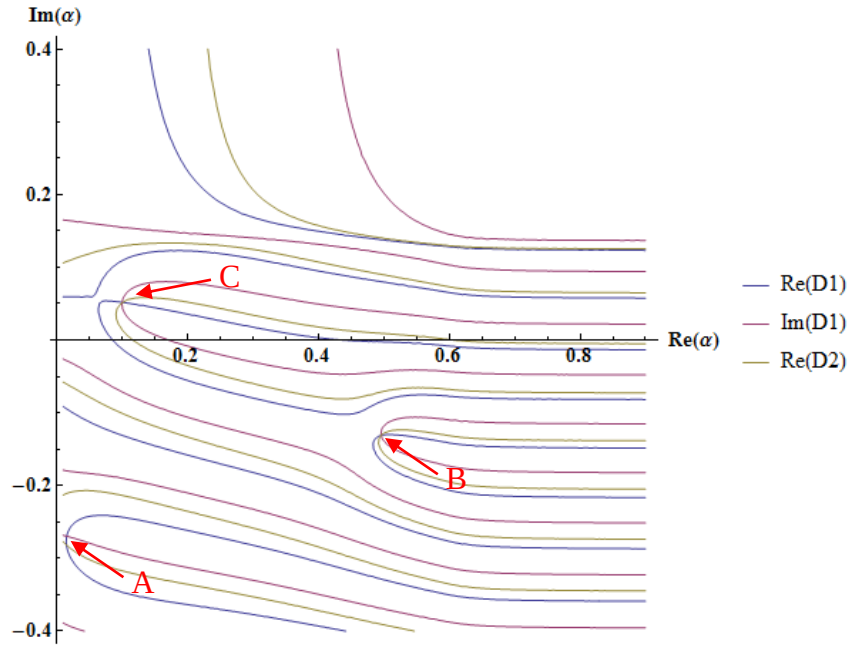
A numerikus szimulációból kapott sebességprofilokkal további probléma volt, hogy a megoldáshoz szükséges második derivált rendkívül zajos volt. Ennek csökkentésére Gauss-féle szűrési módszert használtam.

A dimenziótlan Orr-Sommerfeld egyenletben több paraméter is változtatható, azonban ezek közül csak három független. Számításaim során a következőket választottam:  $Re$ ,  $\omega$  és  $\alpha$ . Ezek közül a két utóbbi komplex szám is lehet, azonban ez túl sok különböző megoldást jelentene, ezért két fő stabilitásvesztési lehetőséget különböztetünk meg. Az első az úgynevezett időbeli stabilitásvesztés, ekkor feltételezzük, hogy  $\omega = \omega_r + \omega_i$  komplex, míg  $\alpha$  valós szám. Ekkor a (2.1.7)-es megoldási alak szerint a növekedési rátát  $\mu = -\omega_i$  jelenti. A másik pedig a térbeli, ebben az esetben az  $\alpha = \alpha_r + \alpha_i$  komplex, míg  $\omega$  valós szám a növekedési rátát pedig a  $\mu = -\alpha_i$  jelenti. A valóságban természetesen előfordulhat, hogy a stabilitásvesztés egyszerre időbeli és térbeli, azonban a tapasztalat azt mutatja, hogy a tisztán térbeli stabilitásvesztés szabadsugarak esetén jól közelíti a kísérleti eredményeket [5]. A munkám során ezért én is csak a térbeli stabilitásvesztéssel fogok foglalkozni.

Eszerint tetszőleges  $Re$ ,  $\omega$  valós számok esetén kell meghatározni azt a komplex  $\alpha$  értéket, amely esetén kielégítődnek a korábban ismertetett peremfeltételek. Defináljunk egy  $D(Re, \omega, \alpha)$  hatdimenziós függvényt, amely adott  $Re$ ,  $\omega$  és  $\alpha$  paraméterek esetén a mínusz végtelenben kiszámított,  $\tilde{\eta}(-\infty)$  és az elvárt,  $\tilde{\eta}_\infty$  érték (2.2.20) különbségét adja vissza:

$$D(Re, \omega, \alpha) = \tilde{\eta}(-\infty) - \tilde{\eta}_\infty \quad (2.4.3)$$

Ekkor a feladat felfogható úgy, hogy adott  $Re$ ,  $\omega$  esetén kell meghatározni  $D(Re, \omega, \alpha)$ , így már egyváltozós, hatdimenziós függvény gyökeit. A probléma ezzel az, hogy nincs olyan általam ismert módszer, amivel egy változó változtatásával egyszerre hat értéknél lehet a zérust biztosítani. Ezért első lépésben megvizsgáltam, hogy egy adott  $\alpha$  komplex síkon, a  $D$  függvény elemei hol veszik fel a nulla értéket, majd külön-külön ábrázoltam valós és képzetes részüket (15. ábra).



15. ábra  $A D$  függvény zérusértékű szintvonalai

A jobb láthatóság kedvéért csak az első elemet, illetve a második valós részét ábrázoltam. Bickley-profil esetén a többi változót is megvizsgáltam, és úgy találtam, hogy kielégítő ezt a három függvényt megvizsgálni. További matematikai vizsgálatokat nem végeztem, de úgy gondolom, annak az esélye, hogy három így definiált görbe egy pontban metszse egymást, és az adott pont ne egy saját-hullámszámhoz tartozzon, nagyon alacsony. Később, az eredmények ismertetésénél látható lesz, hogy nagy Reynolds-számok esetén megoldásom közel azonos a Rayleigh-egyenlet megoldásával, ebből arra következtethetünk, hogy a módszer működőképes.

Az 15. ábrán  $\text{sech}^2(y^2)$  profil szintvonalai látható láthatók  $Re = 100, \omega = 0.1$  esetén. Itt az A zéruspont egy fals találat lenne, mert a  $D_1$  zérus lenne, azonban a vektor többi eleme nem. A B pont lesz az első „saját-hullámszám”, míg C a második. (A hullámszámok sorrendiségét a képzetes részük szerint a legkisebbtől haladva a nagyobbak felé számoztam, hiszen annak a legnagyobb a növekedési rátája. A továbbiakban csak az első saját-hullámszámmal fogok foglalkozni.) Ezek után, hogy pontosítsam a megoldást, Newton-Raphson módszerrel végeztem gyökkeresést, melyet a szintvonalak megfelelő metszéspontjából indítottam. A  $Re$  és  $\omega$  paraméterek változtatása esetén már nem végeztem el az  $\alpha$  síknak a vizsgálatát, hanem feltételeztem, hogy kis paraméterváltozás esetén a saját-hullámszám értéke is csak kis mértékben változik. Így egy pontból kiindulva, és a továbbiakban az előző pont eredményéből indítva az újabb gyökkeresést, tudtam vizsgálni a kívánt  $\{Re, \omega\}$  paraméter tartományt.

Egy másik megoldás lehetne, hogy a vektor nagyságát  $|\mathbf{D}|$  vesszük figyelembe, ekkor minimum-keresést kellene végezni gyökkeresés helyett. Az ilyen algoritmusok azonban jóval lassabbak, és ebben az esetben sem biztosított, hogy az első „saját-hullámszámot” találjuk meg. Így a 15. ábrán is bemutatott, előzetes keresést ebben az esetben sem tudjuk kiküszöbölni.

A feladat megoldása során még kiszámoltam az instabilitás során létrejövő hullámok fázis-, illetve csoportsebességét. A fázissebességet ( $c$ ) csak egyszerű harmonikus hullámok esetén lehet fizikailag értelmezni. Ekkor erre a következő összefüggés adódik:

$$c = \frac{\lambda_w}{T} \quad (2.4.4),$$

ahol  $\lambda_w$  a dimenziótlan hullámhossz,  $T$  pedig a dimenziótlan periódusidő. Tudjuk, hogy  $\lambda_w = \frac{2\pi}{\alpha_{Re}}$  és  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  melyekből:

$$c = \frac{\omega}{\alpha_r} \quad (2.4.5),$$

ahol  $\alpha_r = \Re(\alpha)$ .

Általában azonban egy hullám több, akár végtelen sok (Fourier-transzformáció) egyszerű harmonikus hullámból állhat össze. Amennyiben ezen összetevők fázissebessége függ a körfrekvenciától, illetve a hullámszámtól, akkor úgynevezett diszperzív rendszerről beszélünk. Ilyen esetekben, ha élünk a feltételezéssel, hogy ezen összetevők egymástól függetlenül külön-külön vizsgálhatók (lineáris rendszer), akkor ilyen rendszerben is értelmezhető a hullámszámtól, illetve a körfrekvenciától függő fázissebesség. Nolle is így tesz, hisz ő egyszerre csak egy adott gerjesztési frekvencián vizsgálja a rendszert [5]. Ha azonban egyszerre jelen vannak a különböző sebességgel terjedő harmonikus összetevők, a fázissebesség használata jel-, információterjedés szempontjából értelmét veszti. Helyette a csoport sebességét érdemes használni, amelyet Brillouin szerint definiálva az energiaterjedési sebességét adja meg, és megegyezik a Rayleigh által definiált jelterjedési sebességgel [4]. Erre a következő összefüggést vezették le:

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \quad (2.4.6)$$

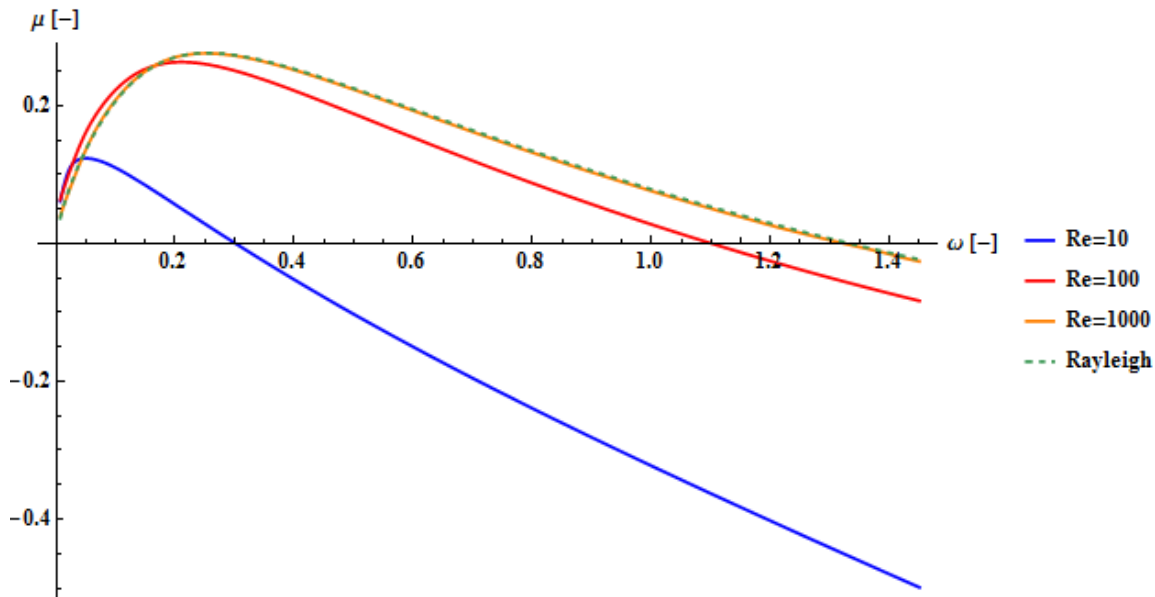
Mivel dolgozatomban térbeli instabilitásokat vizsgáltam, az eredményekben az  $\alpha$  volt  $\omega$  függvénye, illetve a terjedési sebességnek csak a valós része érdekelt, így a következő összefüggéssé alakítottam (2.4.6)-ot.

$$V_{gRe} = \Re e \left( \frac{1}{\frac{\partial \alpha}{\partial \omega}} \right) \quad (2.4.7)$$

## 2.5 Eredmények és értelmezésük

### 2.5.1. Az analitikus sebességprofilok stabilitása

Első lépésben a  $\text{sech}^2(y)$  profilon végzett stabilitásvizsgálat eredményeit hasonlítottam össze az Nolle által ugyanezen a profilon végzettel, ahol az Orr-Sommerfeld egyenlet helyett a súrlódásmentes Rayleigh egyenletet használták.

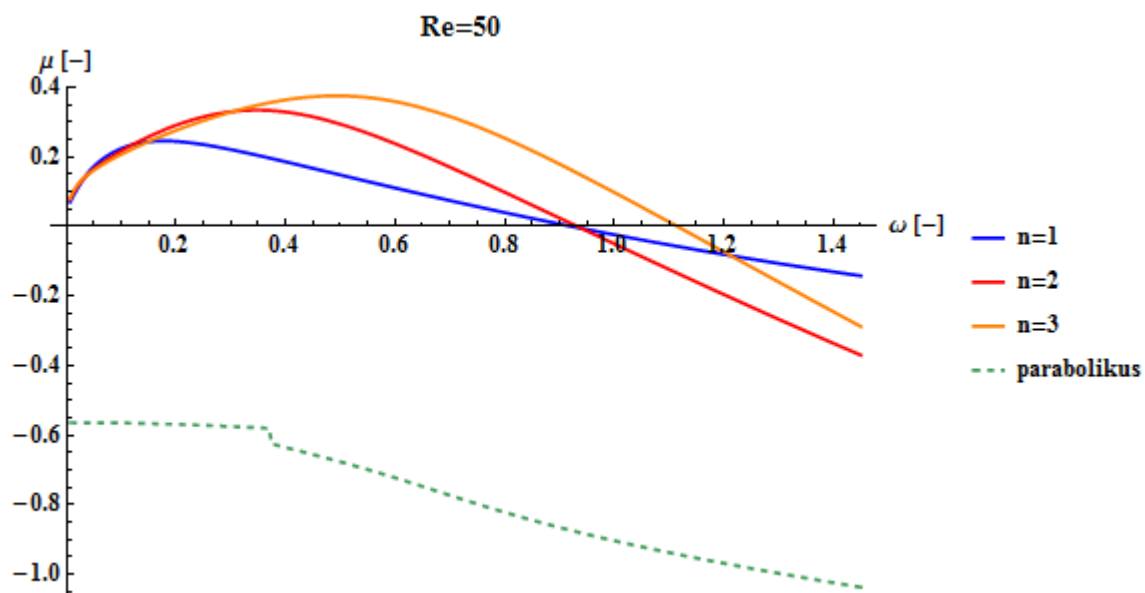


16. ábra A perturbáció amplitúdójának növekedési rátája  $\text{sech}^2(y)$  sebességprofil esetén

Az 16. ábrán az látható, hogy különböző Reynolds-számok esetén mennyire függ az instabilitás a körfrekvenciától. Az ábrán megfigyelhető, hogy 1000-es Reynolds-szám esetén az Orr-Sommerfeld egyenlet megoldása a Rayleigh egyenlet megoldásával egybevág. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy 1000-es Reynolds-szám felett a súrlódás a rendszer

stabilitásának szempontjából elhanyagolható. Ez a teljes  $\{Re, \omega\}$  síkot lefedő stabilitásdiagramokon (ú. n. hüvelykujj-görbéken) is jól látszik, melyek a függelékben elérhetők (30.- 36. ábra). Ezenkívül megfigyelhető az is, hogy mindhárom  $sech^2(y^n)$  profil instabilitása csökkent a Reynolds-szám csökkentésével, tehát ezekben az esetekben a súrlódás stabilizáló hatású. A Reynolds-szám csökkentésének másik hatása, hogy maximális növekedési rátához tartozó körfrekvencia egyre alacsonyabb, illetve a kritikus körfrekvencia, mely felett az áramlás nem veszíti el a stabilitását, is csökken.

A következő lépésben a dolgozat eredeti célja szerint megvizsgáltam a különböző profilú szabadsugarak stabilitását, megnézve hogy vajon nő-e az instabilitás a nyílás felé közeledve. Mivel a profilok egymásba történő átalakulására nincs pontos, analitikus közelítés, azonos Reynolds-számon hasonlítottam össze a profilokat, egyelőre elhanyagolva azt a tényt, hogy a Reynolds-szám a kilépéstől kezdve folyamatosan növekszik.



17. ábra A különböző profilok perturbációjának növekedési rátája  $Re=50$

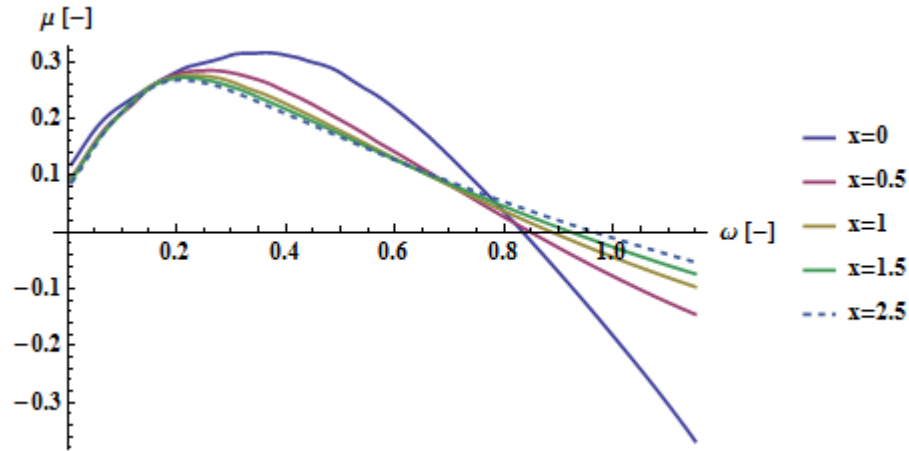
A 17. ábra illetve a Függelék 38.-39. ábráit tekintve, egyenletes sebességprofilú kilépés esetén jól látható, hogy a nagyobb  $n$  paraméterrel rendelkező profilok, melyek közelebb állnak a kilépési nyíláshoz, a tartomány nagy részén instabilabbak. Alacsony körfrekvenciák esetén figyelhető meg, hogy a távolabbi profilok elhanyagolható mértékben („vonalvastagságon belül a különbség) instabilabbak a kilépéshez közelihez képest. Az analitikus, egyenletes profilok esetén tehát sikerült magyarázatot találni a fokozott érzékenységre. Fontos még megemlíteni,

hogy a számításaim alapján a kritikus Reynolds-szám, ami az stabilitásvesztés alsó határa, mind a három profil esetén közelítőleg  $Re_{krit} = 4,3$  volt. Ez viszonylag alacsony értéknek számít, ami alapján kijelenthető, hogy a szabadsugár viszonylag könnyen elveszti a stabilitását. Ha azonban az alacsony Reynolds-számot a kis jellemző méret okozza, előfordulhat az is, hogy a saját-hullámszám rendkívül magas lesz, ami a kinetikus energia jelentős disszipációjával jár [4]. Ez a jelenség pedig stabilizáló hatású lehet, amit a számítások során nem vettünk figyelembe.

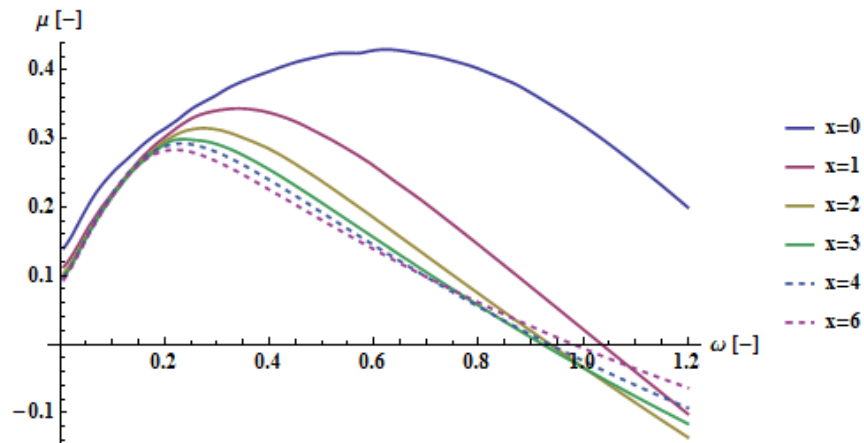
Az idealizált parabolikus profilt vizsgálva semmiféle instabilitást nem tapasztaltam. Lehetséges, hogy ez a profil túlságosan idealizált, és a kilépési körülményeket stabilitás szempontjából nem jól közelíti. Gondolok itt arra, hogy Rayleigh inflexiós pont elmélete szerint, súrlódásmentes esetben az instabilitás szükséges feltétele, hogy a sebességprofilnak inflexiós pontja legyen [4]. Kétségtelen tény, hogy az általam figyelembe vett viszkozitás destabilizáló hatású is lehet, azonban az inflexiós pont hiánya előjele lehet annak, hogy stabil marad az áramlás. Ez az inflexiós pont az idealizált parabolikus profilból is hiányzik, miközben a tényleges kilépés esetén lehetséges, hogy létrejön.

#### 2.5.2. A numerikus szimulációkból származó sebességprofilok stabilitása

A CFD szimulációkból kapott sebességprofilok vizsgálata során meglepő eredmények is születtek. Parabolikus profil esetén az analitikus profilnál kapott eredménnyel ellentétben, a sebességprofil már a kilépésnél is instabilitást mutat, sőt ez az instabilitás nagyobb a fűvóka közelében (18. ábra). Ennek magyarázata lehet, hogy az analitikus és a numerikus sebességprofil már alakjában is jelentősen eltér egymástól (1. ábra, 4. ábra). A numerikus szimuláció során elhanyagolhatóan vékony, súrlódásmentes falú fűvókát feltételeztünk, és így az áramlás már a kilépéstől kezdve jelentős mennyiségű folyadékot tud magával ragadni (4. ábra piros kör). Ez a korábban említett inflexiós pont kialakulásához vezet, ami magyarázat lehet az instabil viselkedésre. Fontos megjegyezni még, hogy a fűvóka falvastagságának figyelembe vételével, illetve megnövelésével ez a „magával ragadás” csökkenthető, ami további kutatásokat tesz szükségessé.



18. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár perturbációs sebességének növekedési rátája különböző távolságokra a nyílástól (CFD)



19. ábra Az egyenletes kilépésű szabadsugár perturbációs sebességének növekedési rátája különböző távolságokra a nyílástól (CFD)

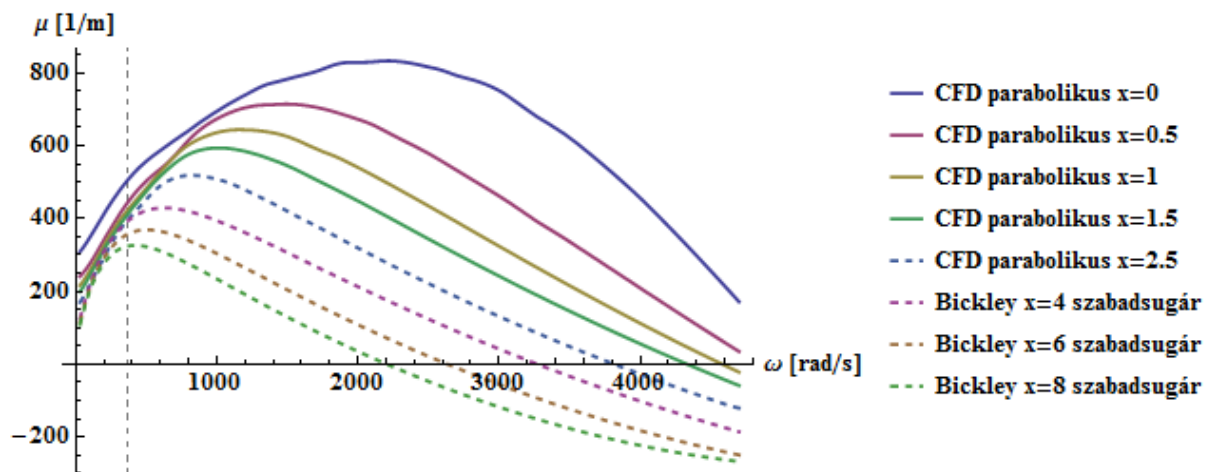
Az eredmények jól egyeznek az elvártakkal, (19. ábra) „top hat” sebességprofillal kilépő szabadsugár esetén. Ezen esetekben is megfigyelhető, hogy a kilépésnél a sebességprofil az alacsonyabb lokális Reynolds-szám ellenére sokkal instabilabb a kilépés közelében, hasonlóan a parabolikus kilépésű szabadsugárhoz (18. ábra).

Érdemes megfigyelni még azt is, hogy amíg analitikus profilok stabilitásának összehasonlítása során a kilépéstől távolabbi profilok perturbációs sebességének növekedési rátája alacsony körfrekvencián kicsit nagyobb volt, addig ez, a CFD szimulációkból kapott sebességprofilokra nem igaz, a közelebbi sebességprofilok minden körfrekvencián instabilabbak.

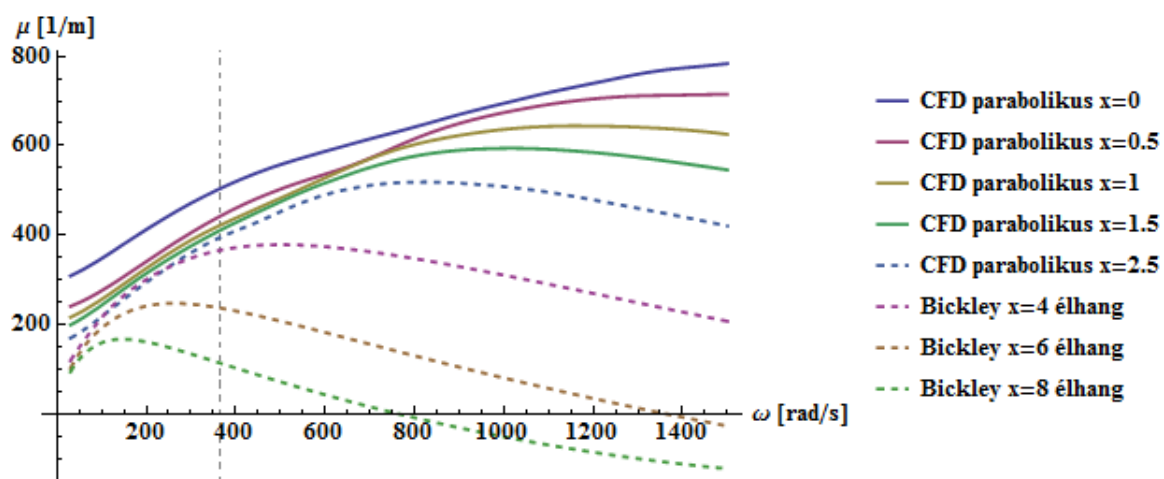
Ekkor alacsony körfrekvenciákon a görbék inkább érintik, mintsem metszik egymást. Ez abból adódhat, hogy a CFD segítségével előállított sebességprofiloknál, ellentétben az analitikus esetekkel, már figyelembe vettük a Reynolds-szám megváltozását a kilépés helyétől lévő távolság függvényében.

Az egyes sebességprofilokat összehasonlítottam a később kialakuló, egyensúlyi Bickley-profillal is azonos Reynolds-szám esetén. Ezek az ábrák a B. Függelékben megtekinthetők. Ezeken jól látszik, hogy a sebességprofilok instabilabbak, mint Bickley-profil ugyanakkora Reynolds-szám esetén. Azonban a különbség a várakozásnak megfelelően folyamatosan csökken mindkét esetben, ahogy távolodunk a kilépéstől, és a sebességprofilok is egyre jobban hasonlítanak egymásra.

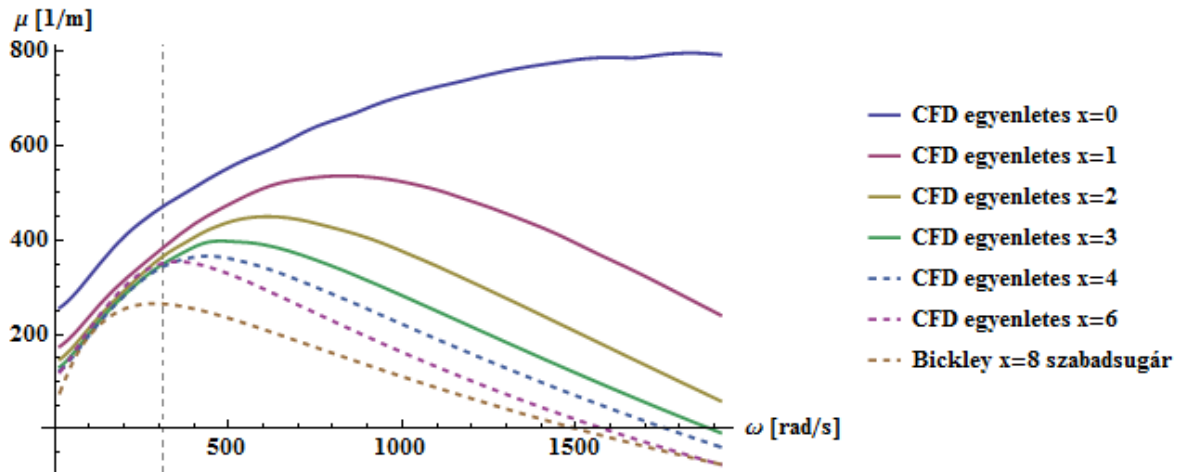
A dimenzótlantítás során a jellemző mennyiségek (sebesség, méret) folyamatosan változtak (6., 7. ábra), ezért érdemes megvizsgálni a stabilitásgörbék dimenziós alakjait is. Itt az egyes görbék már más-más lokális Reynolds-számoknak felelnek meg. Ezeknek a görbéknek az előállításához a kilépéshez közel a CFD szimulációk alapján számított stabilitás diagramokat használtam, a kilépési helytől távolabb pedig az analitikus számolásokból kapottakat használtam. Ezeket a vizsgálatokat elvégeztem mind a szabadsugárra, mind az élhangra. (A CFD szimulációs sebességprofilok stabilitásanalízisét csak szabadsugárra végeztem el. A kilépéshez közeli tartományon azonban, azonos sebességprofilú kilépés esetén a sebességprofilok hasonlóak voltak, ezért ezeket a stabilitás eredményeket használtam fel az élhangban is.) Az ábrákon szaggatott vonallal jelöltem az élhang alap módusának körfrekvenciáját, mely parabolikus kilépés esetén  $\sim 371$  rad/s, míg egyenletes profil esetén  $\sim 314$  rad/s volt.



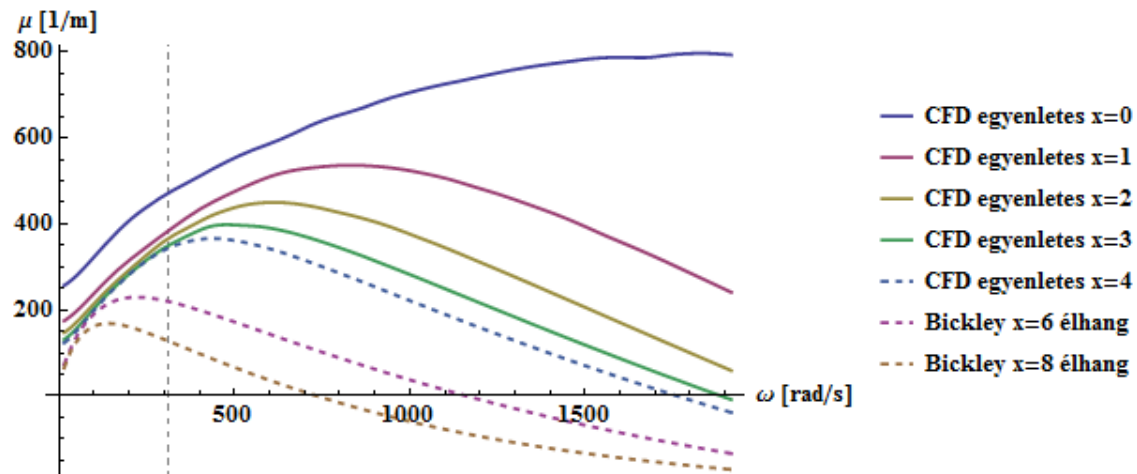
20. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár perturbációs sebességének növekedési rátája különböző távolságokra a nyílástól



21. ábra A parabolikus kilépésű élháng perturbációs sebességének növekedési rátája különböző távolságokra a nyílástól



22. ábra Az egyenletes kilépésű szabadsugár perturbációs sebességének növekedési rátája különböző távolságokra a nyílástól



23. ábra Az egyenletes kilépésű élhang perturbációs sebességének növekedési rátája különböző távolságokra a nyílástól

A 20-23. ábrákon látható, hogy a dimenziós stabilitás diagramok még inkább azt jelzik, hogy az áramlás a kilépésnél a legérzékenyebb. Illetve megfigyelhető az is, hogy az egyenletes profillal kilépő áramlások instabilitása kisebb, mint a parabolikus kilépésűeké, és a maximális növekedési rátához tartozó körfrekvenciák is alacsonyabbak adott távolságra a kilépéstől. Az élhangot és a szabadsugarat összehasonlítva is hasonló megfigyeléseket tehetünk, az élhang azonos távolságra a kilépés helyétől kevésbé instabil, mint a szabadsugár, és a maximális növekedési rátához tartozó körfrekvencia is alacsonyabb lesz élhang esetén. Ez a 2.3.2 alfejezetben kifejtett jelenséggel magyarázható, miszerint az élhang illetve az egyenletes profillal kilépő áramlások

jellemző sebessége kisebb, jellemző mérete pedig nagyobb, ebből következőleg jellemző időállandója is nagyobb, mint szabadsugar vagy parabolikus profilú kilépés esetén.

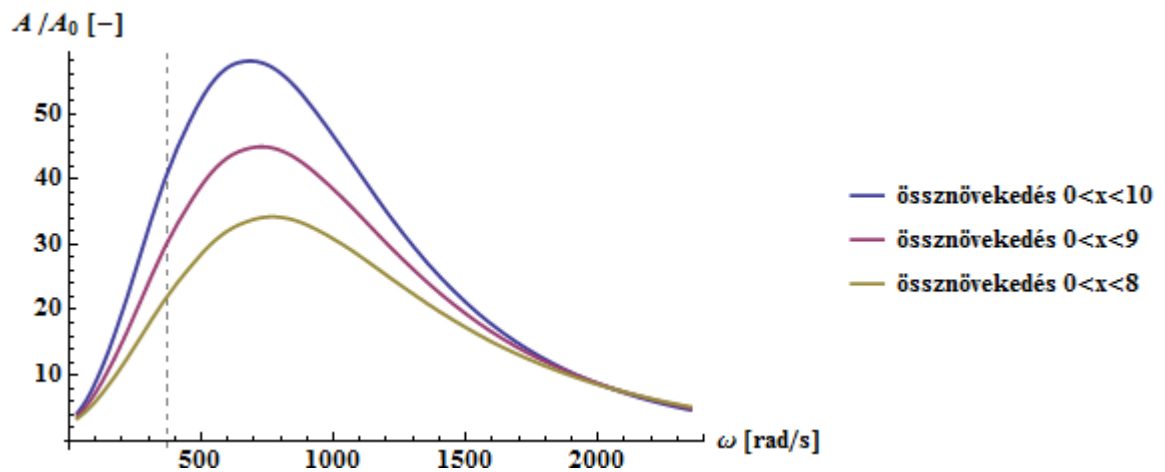
Utolsó lépésben megvizsgáltam, mi történik, ha minden körfrekvencián egységnyi amplitúdójú ( $A_{x=0} = A_0 = 1$ ) perturbációs sebességhullámot indítunk el a kilépéstől. Ez a meglévő növekedési ráta függvények, illetve a térbeli növekedési ráta definíciójából (2.5.1) kiindulva számítható.

$$\mu(x, \alpha, \omega) = \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \quad (2.5.1),$$

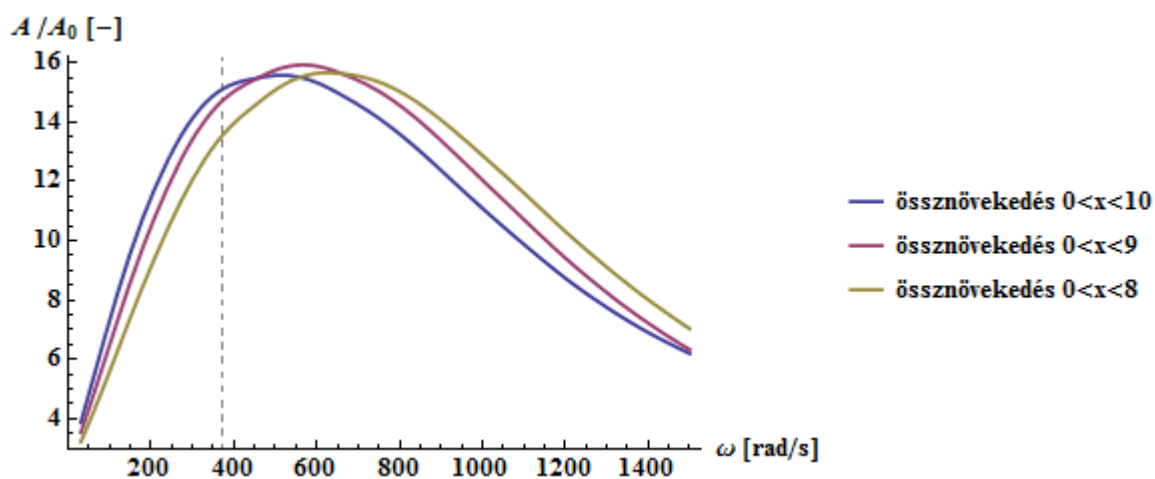
ahol  $A$  az amplitúdót jelöli. Ez az egyenlet a következő elsőrendű, változó együtthatós differenciálegyenletre alakítható:

$$\frac{dA}{dx} = \mu(x, \alpha, \omega) A \quad (2.5.2)$$

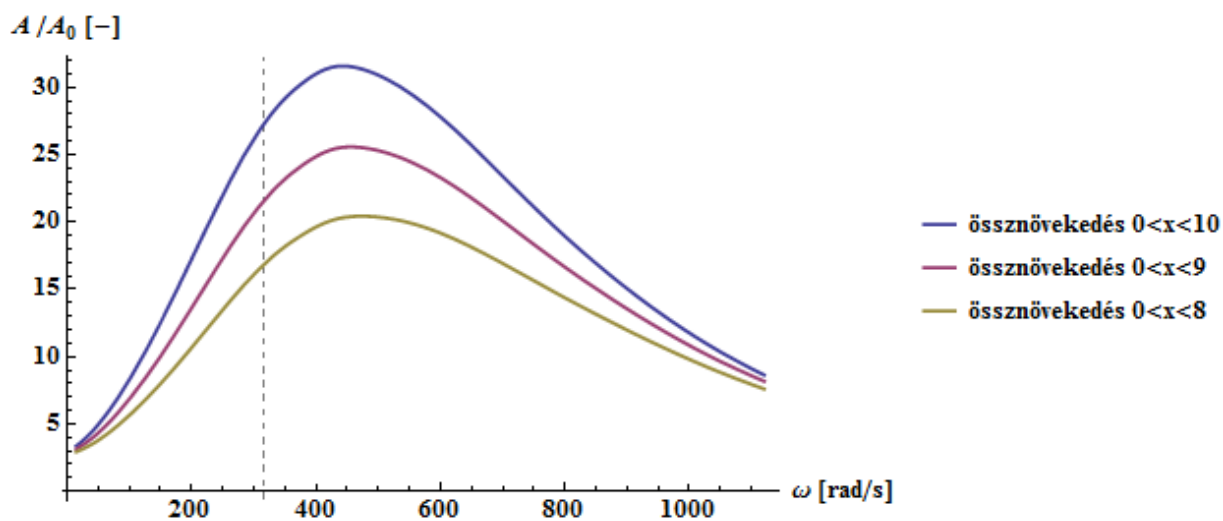
A számításaim során stabilitás vizsgálatot, nem pedig „fogékonyság” analízist végeztem, így a számított keresztmetszetekben csak egy adott körfrekvenciához tartozó komplex saját hullámszámot, illetve növekedési rátát kaptam eredményül, nem pedig egy spektrumot. A növekedési ráta hullámszám függésétől ezért eltekintettem, ami durva közelítés, de nagyságrendi becslésekre, illetve a különböző áramlások összehasonlítására alkalmas lehet. A kilépéstől csak bizonyos távolságokra számított növekedési rátákat pedig másodrendű ú. n. „spline” görbék illesztésével közelítettem a kiszámított pontok között.



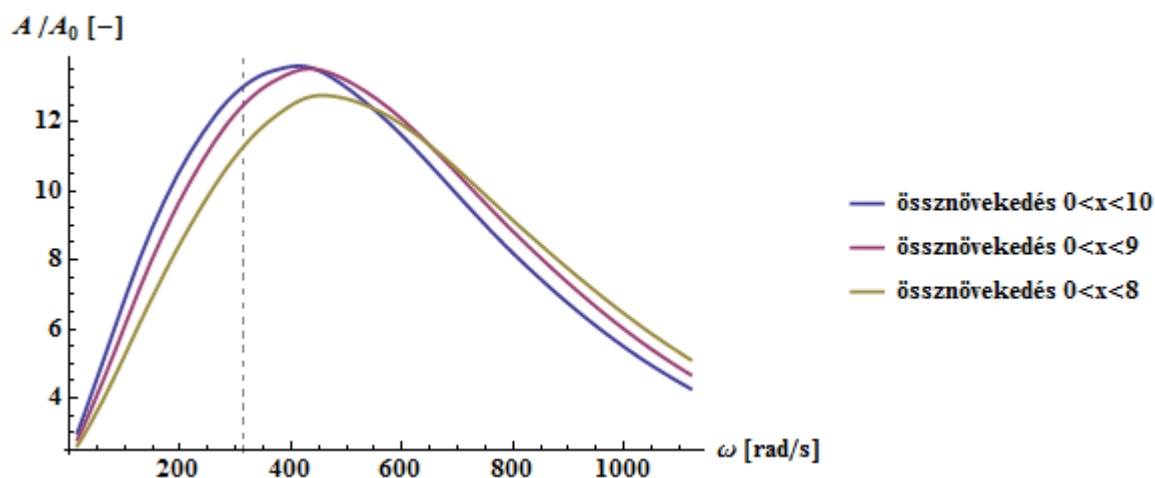
24. ábra A parabolikus szabadsugar perturbációs sebességének össznövekedése



25. ábra  $A$  parabolikus élháng perturbációs sebességének össznövekedése



26. ábra Az egyenletes kilépésű szabadsugár perturbációs sebességének össznövekedése



27. ábra Az egyenletes kilépésű élhang perturbációs sebességének össznövekedése

A 24.-27. ábrákon megfigyelhető, hogy szabadsugarakban a perturbációs sebesség-hullámok sokkal jobban felerősödnek, mint az élhangban. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a szabadsugár instabilabb lenne, hisz ott az élhanggal ellentétben, a zavarás nem jut vissza a kilépés helyéhez, így nem tud egy újabb ciklusban tovább erősödni. A másik érdekessége az ábráknak, hogy az élhangban az ékhez közel már csak az alacsonyabb körfrekvenciájú hullámok erősödnek, a magasabbak alig, vagy csökkenek. Az ábrákon látható az is, hogy az élhangban az élhang saját-körfrekvenciájának számított erősítése közel maximális. Ebből, mivel az élhang kialakulása a visszacsatolás miatt egy jóval bonyolultabb jelenség, korai lenne komolyabb következtetéseket levonni, de mindenképp jelzi, hogy számítások a sok közelítés és feltételezés (párhuzamos áramlás az Orr-Sommerfeld egyenletben, pár keresztmetszetből az egész tartományra levont következtetések, hullámszám függetlenség) ellenére kielégítő nagyságrendben maradtak.

### 3. Összefoglalás

Munkám során először ismertettem a stabilitásvizsgálat egyik alapegyenletét, az Orr-Sommerfeld egyenletet. Később bemutattam ennek egy lehetséges megoldási módszerét, az összetett mátrix módszert, amelyet adaptáltam szabadsugarakra. Ezek után a sík-szabadsugarakban előforduló analitikus sebességprofilokat ismertettem. A pontosabb átalakulási sebességprofilok elérése érdekében CFD szimulációkat végeztem szabadsugarakra, és a rendelkezésre álló élhang-szimulációk sebességprofiljait is elemeztem.

Ezek után elvégeztem a sebességprofilok stabilitásvizsgálatát. A vizsgálat fő célja az volt, hogy bizonyítsam, a szabadsugar a kilépőnyílás környezetében érzékenyebb, mint az attól távolabb eső részeken. Ezt a CFD szimulációkból kapott esetekben, a két különböző sebességprofilú (egyenletes és parabolikus) kilépés esetén, sikerült igazolni. Az analitikusan előállított sebességprofilokon végzett vizsgálatok egy kicsit árnyalják ezt a képet. Egyenletes kilépési profil esetén a CFD-sekhez hasonló eredményeket kaptam. A parabolikus kilépés esetén feltételezett, idealizált analitikus sebességprofil azonban teljesen stabilnak tűnt.

A stabilitás vizsgálat eredményeit végül dimenziós mennyiségekké alakítottam, melynek nyomán a fokozott érzékenység még inkább megmutatkozott a kilépés helyénél. A dimenziósított eredményekből az is kiderült, hogy az áramlások perturbációs sebességének maximális erősítése közel volt ahhoz a körfrekvenciához, amellyel az élhang a kísérletekben is lengett.

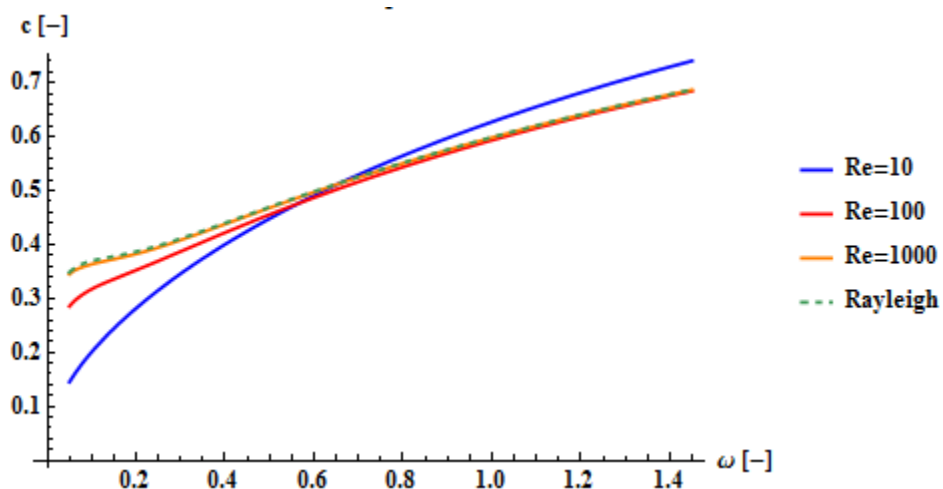
Az eddig ismertetett egyenletek, eredmények egy hosszabb kutatás első lépései voltak. A CFD modellek tovább pontosíthatók, hogy még jobban közelítsék a valós kilépési viszonyokat (fűvóka pontosabb modellezése). A CFD-s számításokat is érdemes lehet elvégezni további Reynolds-számokon, hogy az átalakulási fázisok Reynolds-szám függősége is vizsgálható legyen. Ezeken kívül az Orr-Sommerfeld egyenlet összetett mátrix módszerrel történő megoldása további, még kiaknázatlan lehetőségeket is kínál, mégpedig a „fogékonyság” vizsgálatot. Ennek segítségével lehetőség nyílik különböző gerjesztések esetén vizsgálni az áramlás választ, és megállapítani, hogy milyen típusú gerjesztésekre érzékenyebb az adott áramlás.

#### 4. Irodalomjegyzék

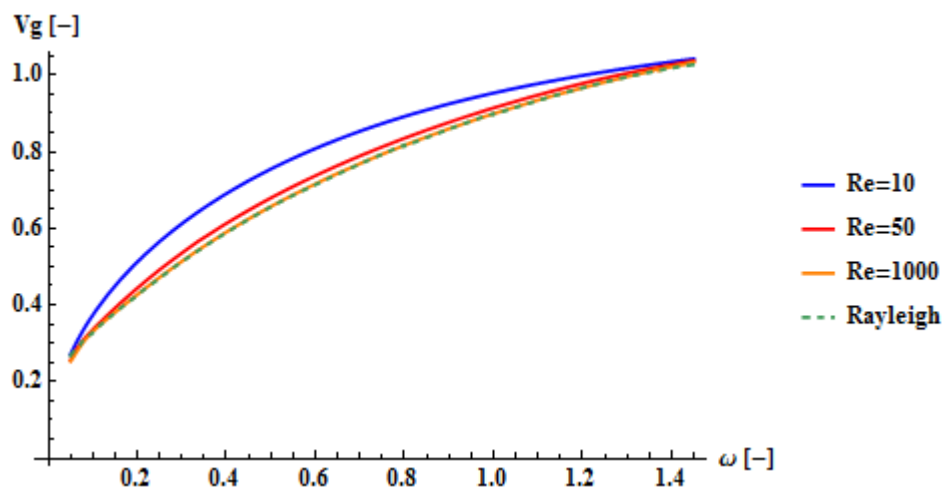
- [1] Alan Powell, "On the Edgetone," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 33, no. 4, p. 399, 1961.
- [2] E. J. Kerschen. (1996) RECEPTIVITY THEORY IN COMPRESSIBLE FLOW JET CONTROL. [Online]. <http://www.worldcat.org/title/receptivity-theory-in-compressible-jet-flow-control/oclc/227846486>
- [3] D. E. Parekh, A. B. Cain, and C. N. Vaporean. (1997) Characterization of Receptivity in jet flow control. [Online]. <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a332805.pdf>
- [4] T. K. Sengupta, *Instabilities of Flows and Transition to Turbulence*.: CRC Press, 2012.
- [5] H. Schlichting, "Laminare Strahlausbreitung," *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 13, pp. 260-263, 1933.
- [6] Bickley W., "The plane jet," *Philos. Mag.*, vol. 23, pp. 727-731, 1937.
- [7] E. N. da C. Andrade, "The velocity in a liquid-into-liquid jet, Part 2: The plane jet," *Roc. Phys. Soc. London*, vol. 51, pp. 784-794, 1939.
- [8] A. W. Nolle, "Sinuous instability of a planar air jet: Propagation parameters and acoustic excitation," *Acoustical Society of America*, pp. 3690-3705, June 1998.
- [9] Vaik István, "Flow and acoustics of the edge tone configuration," *Ph.D. dissertation*, 2013.
- [10] F. M. White, *Viscous fluid flow*.: McGraw-Hill, 1991.
- [11] T. K. Sengupta, Manish Ballav, and Sandeep Nijhawan, "Generation of Tollmien-Schlichting waves by harmonic excitation," *Phys. Fluids*, vol. 6, no. 3, pp. 1213-1222, March 1994.

## Függelék

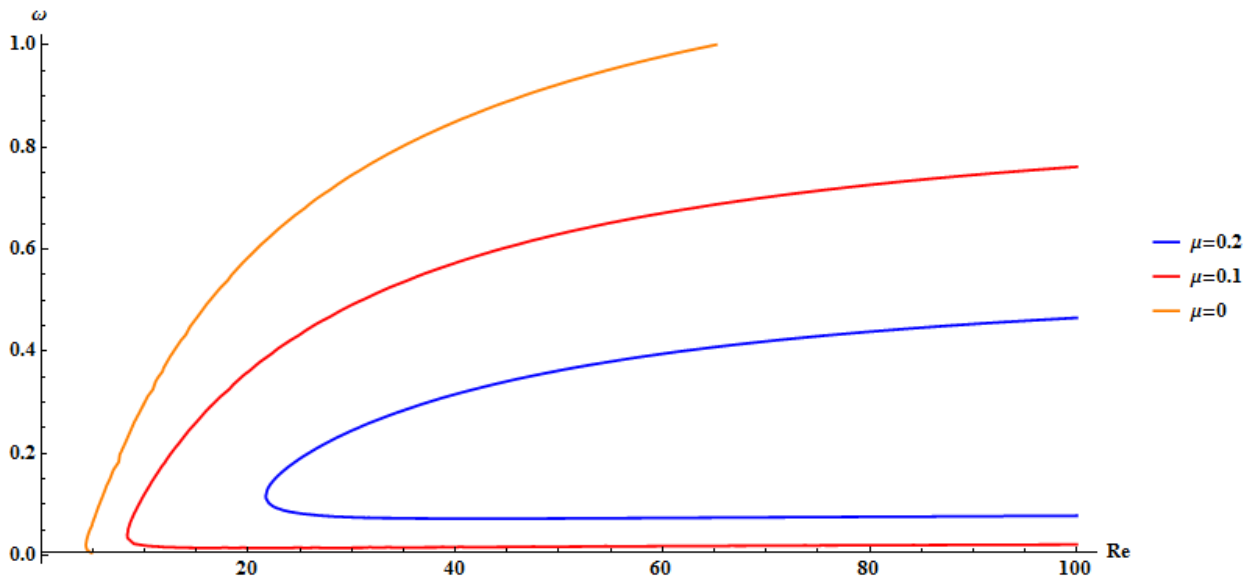
### A. Analitikus sebességprofilok stabilitása



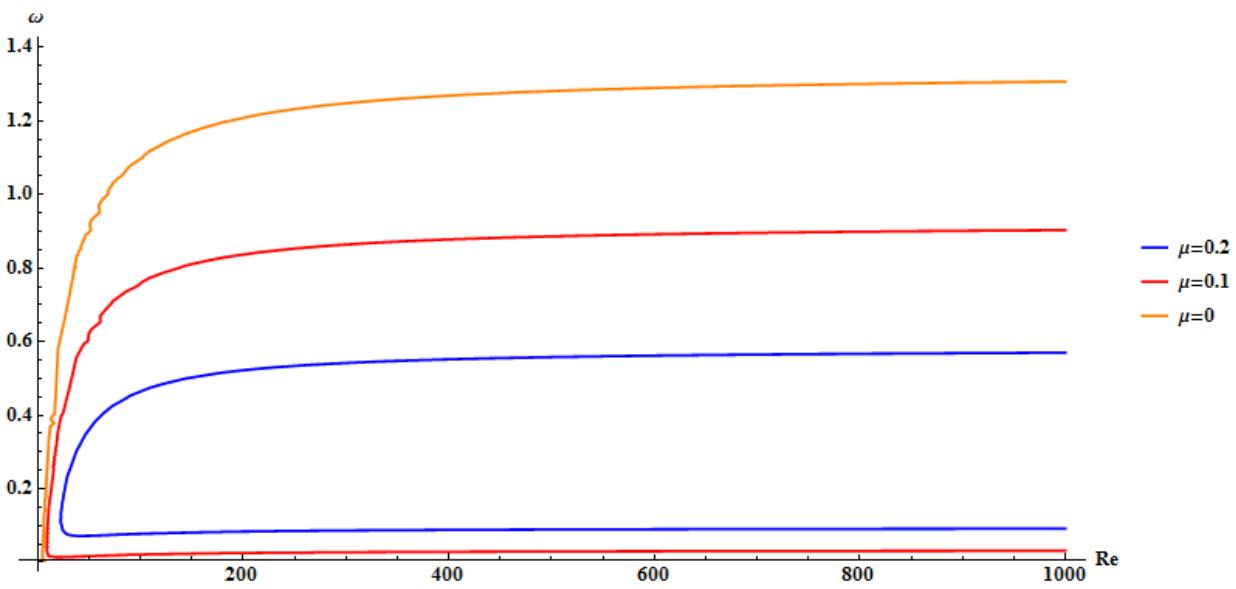
28. ábra A  $\text{sech}^2(y)$ profil fázissebességei különböző Reynolds-számok esetén



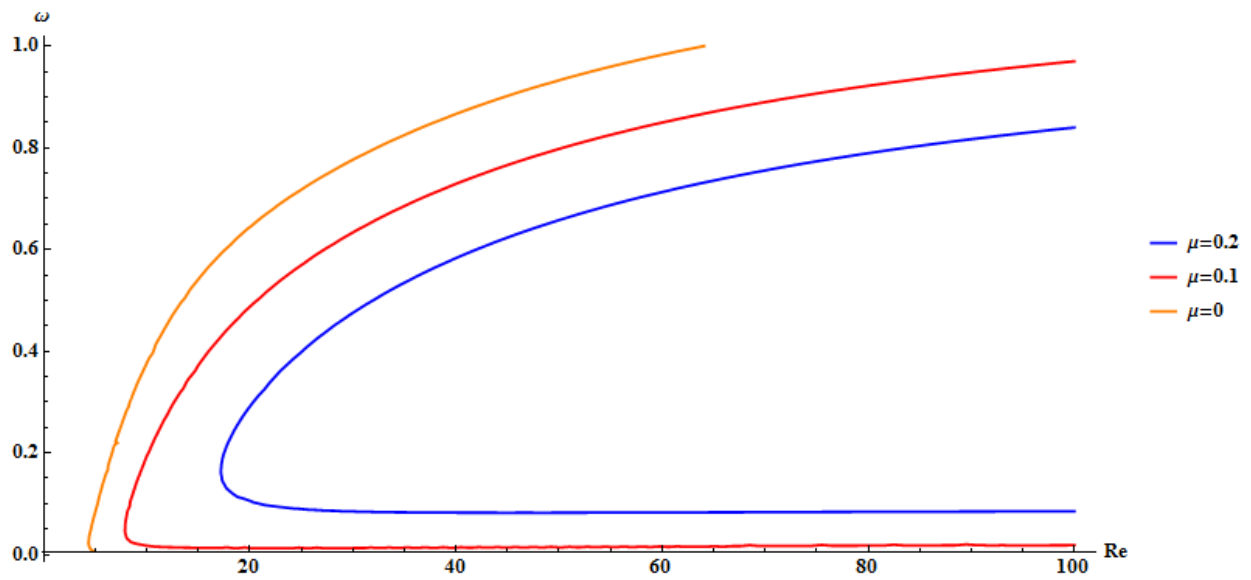
29. ábra A  $\text{sech}^2(y)$ profil csoportsebességei különböző Reynolds-számok esetén



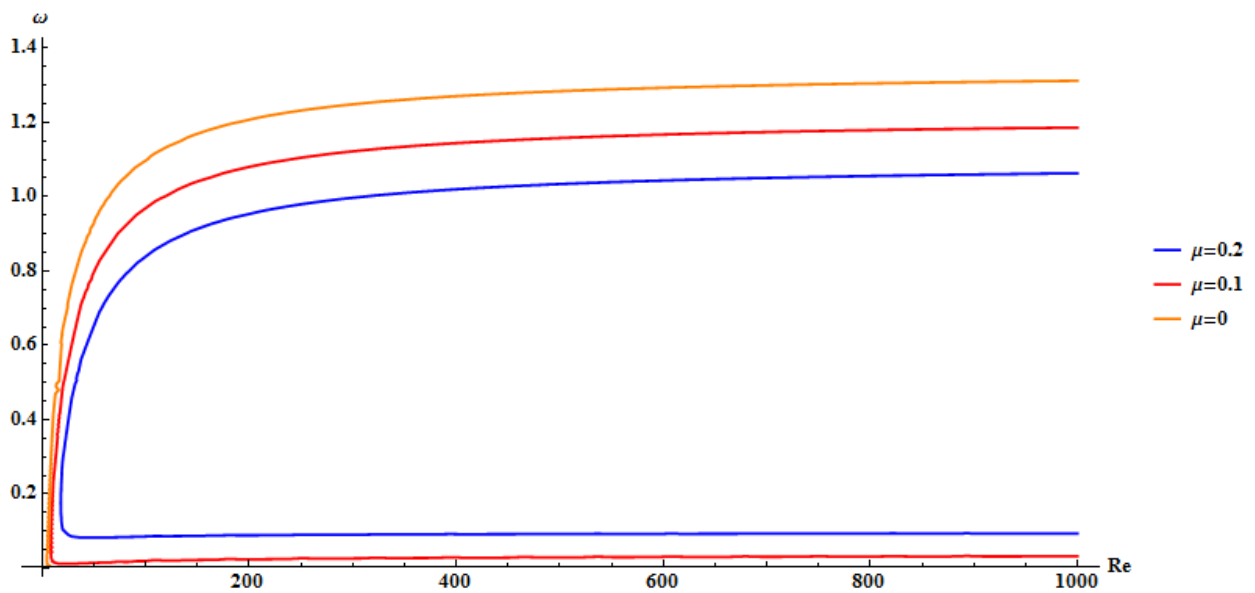
30. ábra A  $\text{sech}^2(y)$ profil stabilitásdiagramja, alacsony  $Re$  esetén



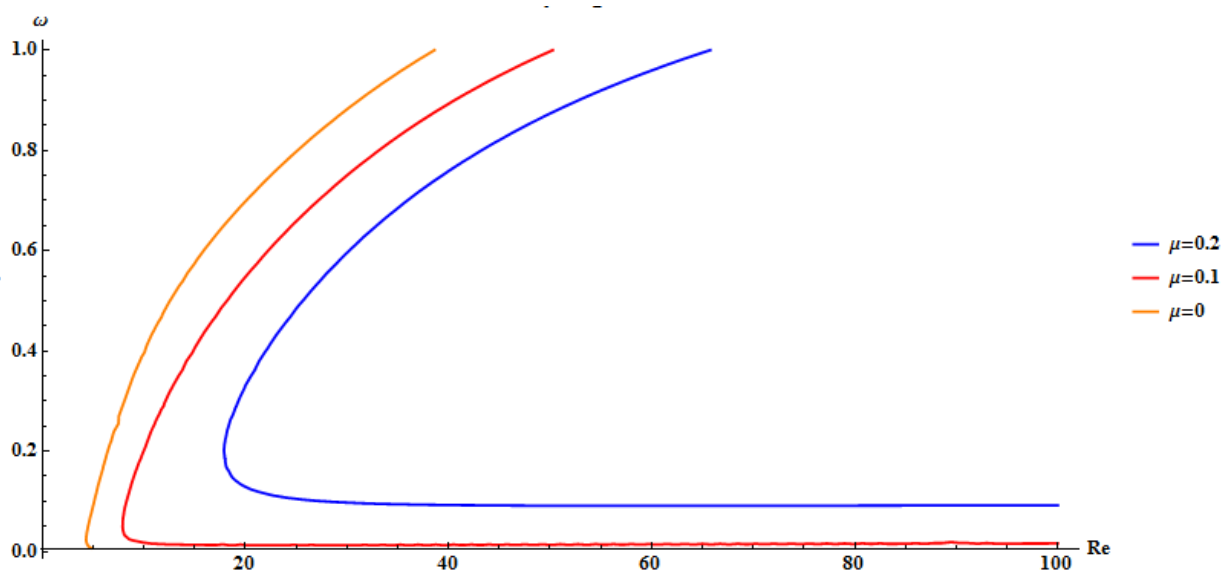
31. ábra A  $\text{sech}^2(y)$ profil stabilitásdiagramja, teljes



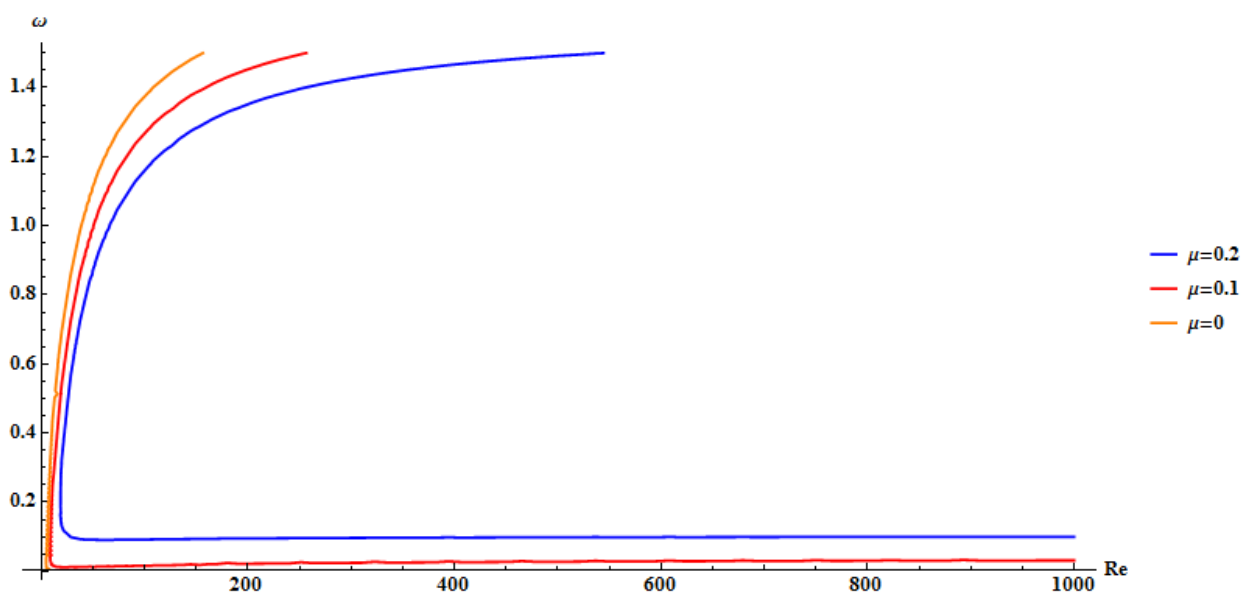
32. ábra A  $\text{sech}^2(y^2)$ profil stabilitásdiagramja, alacsony  $Re$  esetén



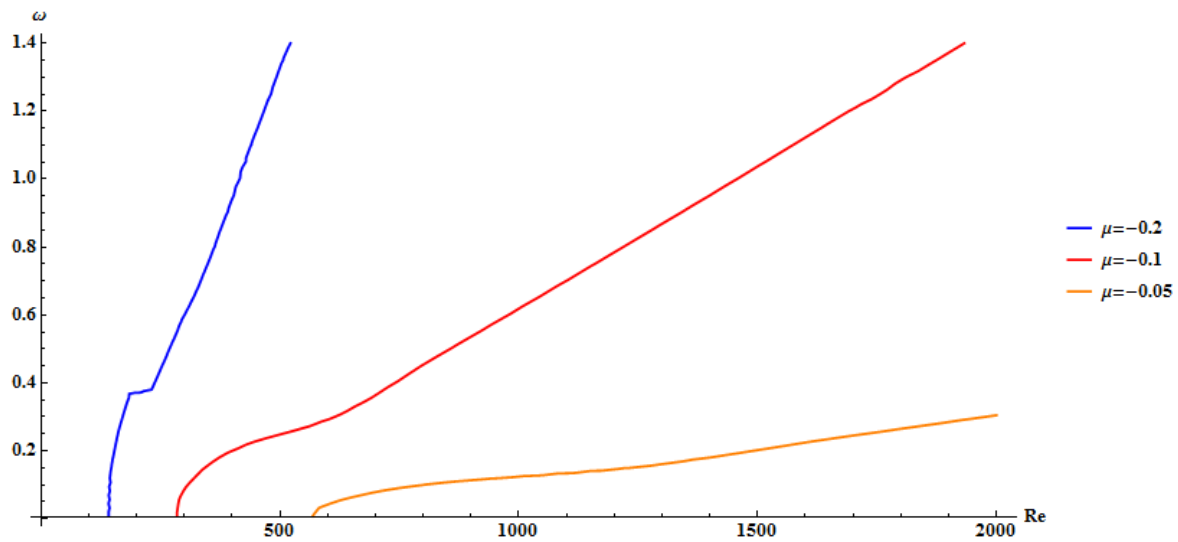
33. ábra A  $\text{sech}^2(y^2)$ profil stabilitásdiagramja, teljes



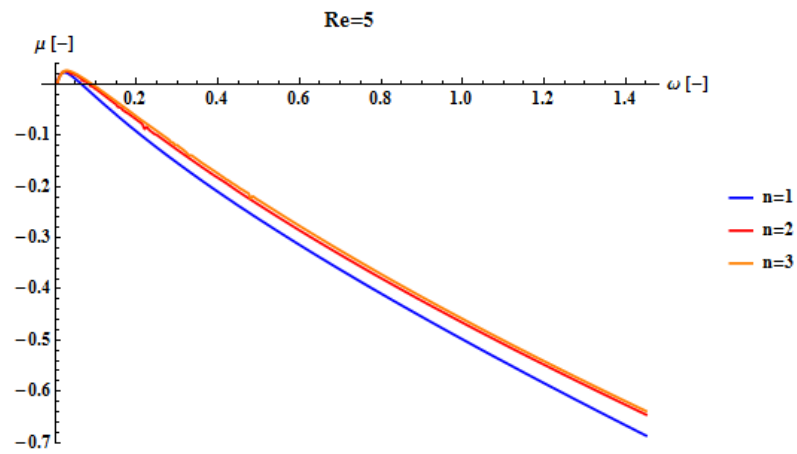
34. ábra A  $\text{sech}^2(y^3)$ profil stabilitásdiagramja, alacsony  $Re$  esetén



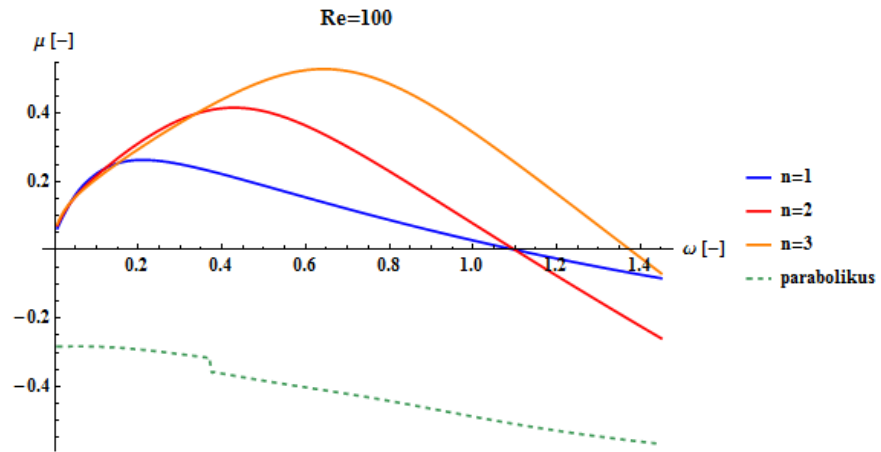
35. ábra A  $\text{sech}^2(y^3)$ profil stabilitásdiagramja, teljes



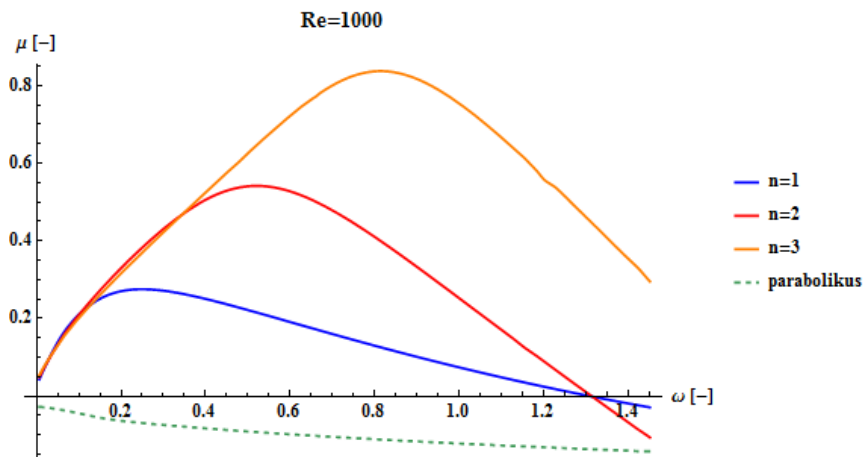
36. ábra Az idealizált parabolikus profil stabilitásdiagramja



37. ábra A különböző profilok perturbációjának növekedési rátája  $Re=5$

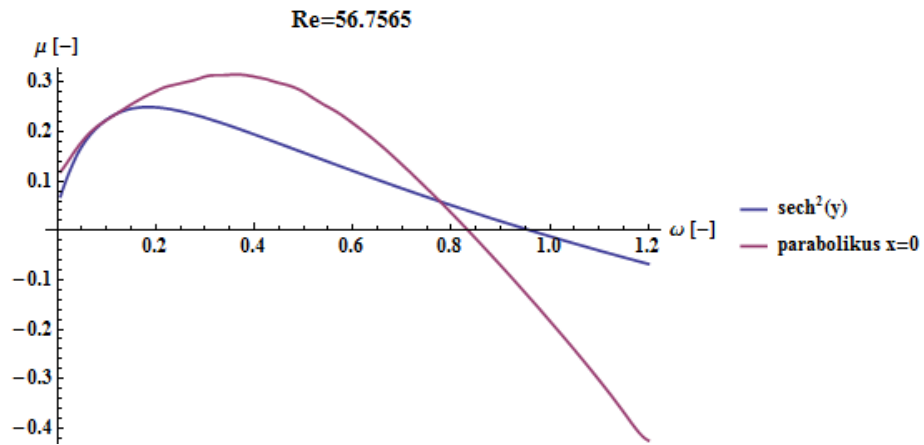


38. ábra A különböző profilok perturbációjának növekedési rátája  $Re=100$

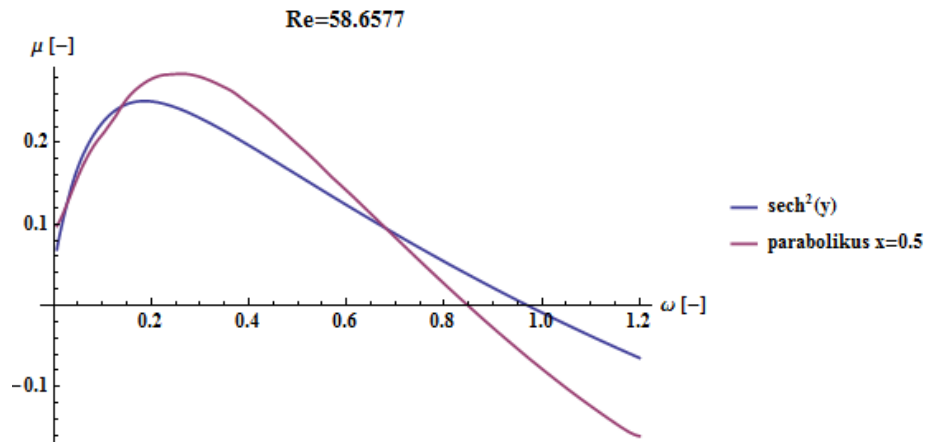


39. ábra A különböző profilok perturbációjának növekedési rátája  $Re=1000$

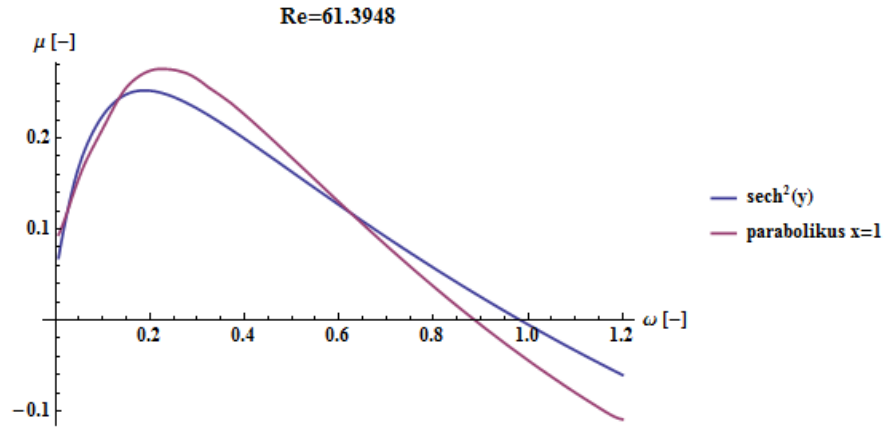
## B. Szimulációból származó sebességprofilok stabilitása



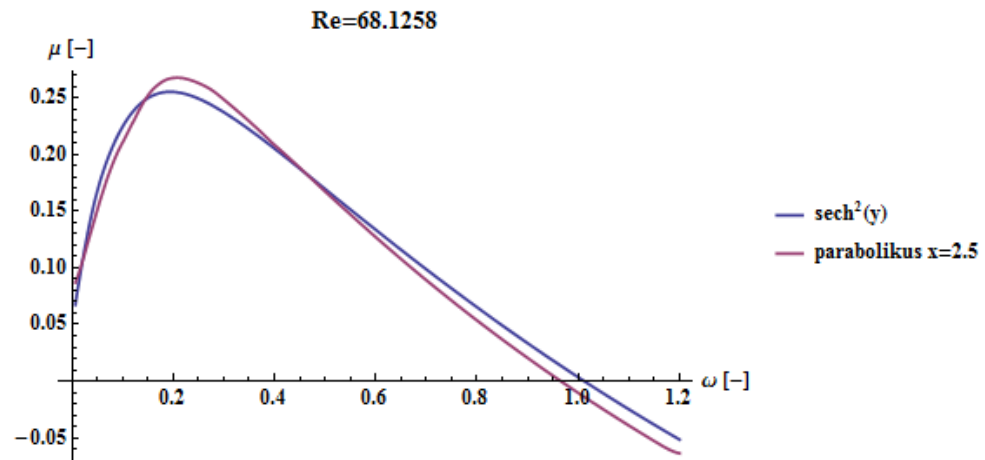
40. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora  $Re$  esetén  $x=0$  mm



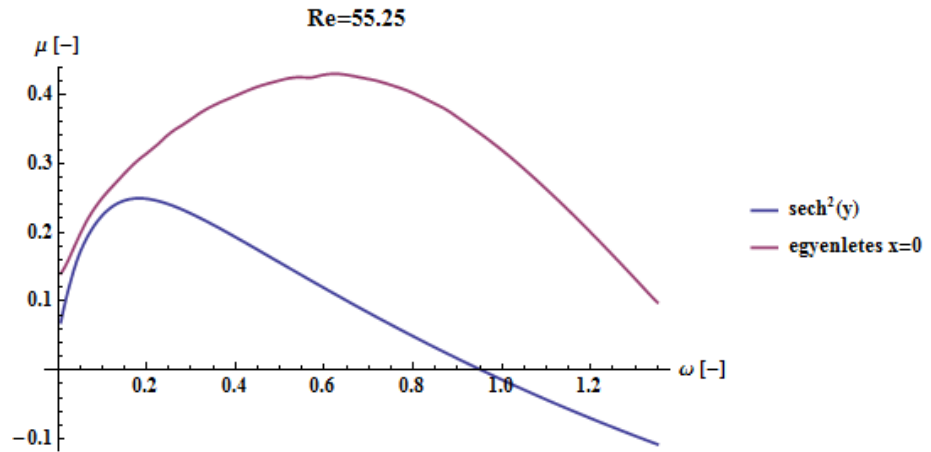
41. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora  $Re$  esetén  $x=0.5$  mm



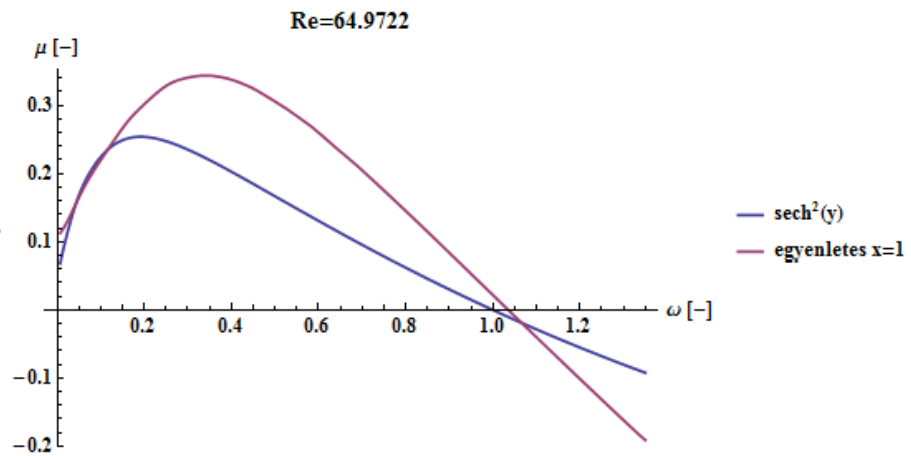
42. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora  $Re$  esetén  $x=1$  mm



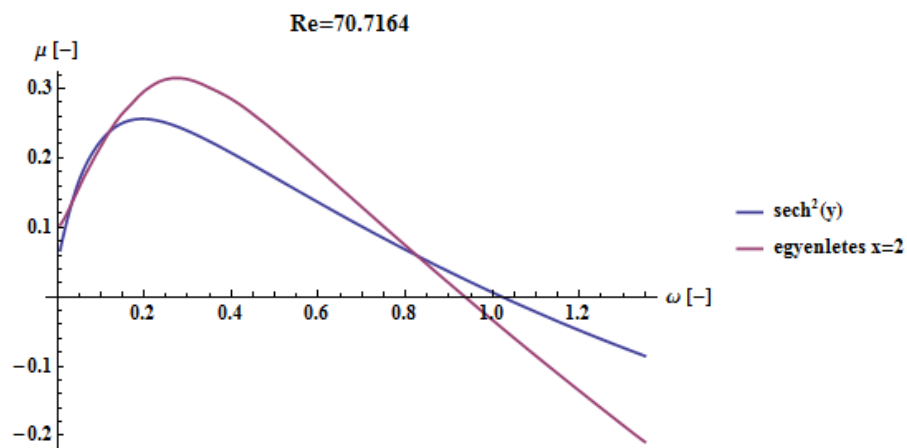
43. ábra A parabolikus kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora  $Re$  esetén  $x=2.5$  mm



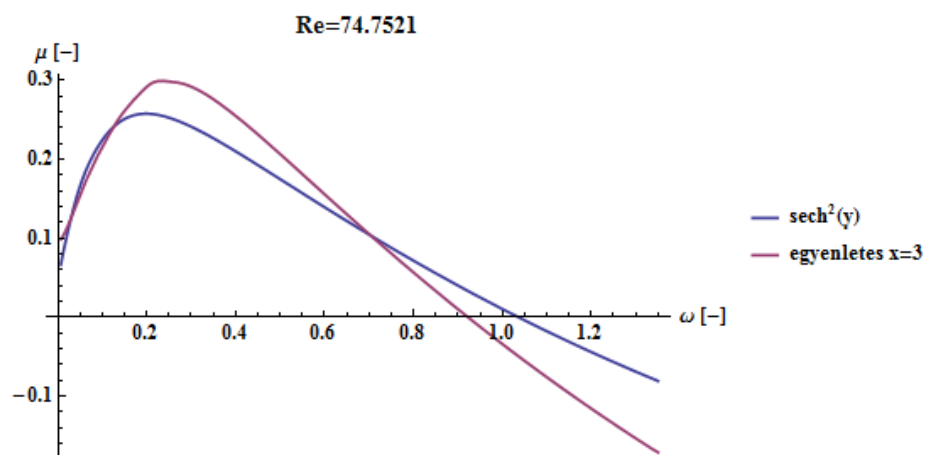
44. ábra A „top hat” kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora  $Re$  esetén  $x=0$  mm



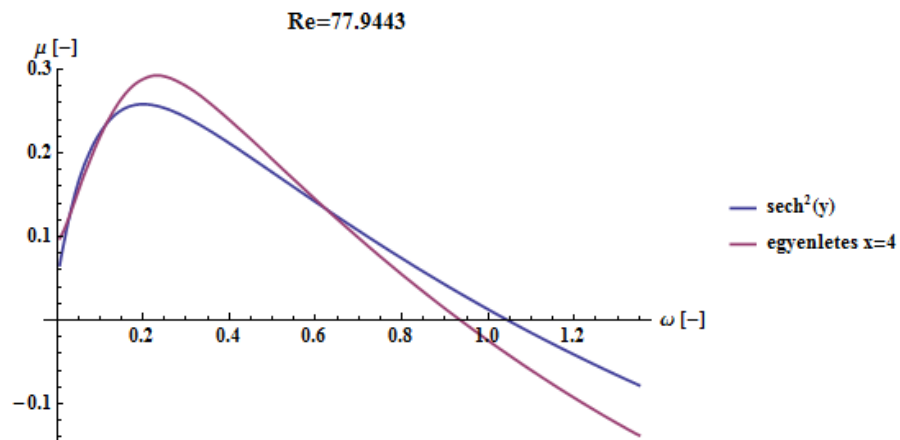
45. ábra A „top hat” kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora  $Re$  esetén  $x=1$  mm



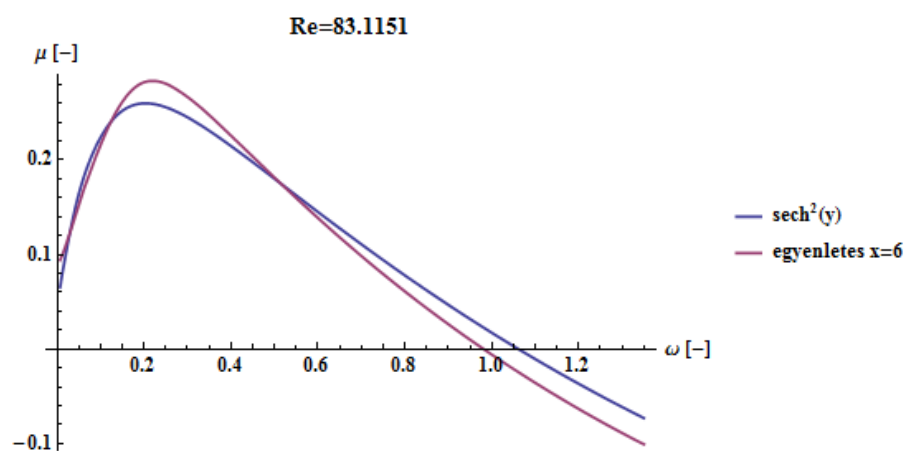
46. ábra A „top hat” kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora  $Re$  esetén  $x=2$  mm



47. ábra A „top hat” kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora  $Re$  esetén  $x=3$  mm



48. ábra A „top hat” kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora  $Re$  esetén  $x=4$  mm



49. ábra A „top hat” kilépésű szabadsugár stabilitásának összehasonlítása Bickley-profillal ugyanakkora  $Re$  esetén  $x=6$  mm