



**MISKOLCI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR**



TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

ÚJSÁGÁRUS MODELL ALAPÚ KÉSZLETGAZDÁLKODÁS

VARGA KRISZTIÁN
mérnök informatikus MSc
I. évfolyam

KONZULENS:

DR. NEHÉZ KÁROLY
egyetemi docens
Informatikai Intézet
Alkalmazott Informatikai Intézeti Tanszék

MISKOLC, 2013

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretném megragadni az alkalmat arra, hogy köszönetemet és tiszteletemet fejezzem ki mindenkinek, akik támogattak abban, hogy ez a tudományos diákköri dolgozat elkészüljön.

A bemutatott kutatómunka a Miskolci Egyetem stratégiai kutatási területén működő **Mechatronikai és Logisztikai Kiválósági Központ** keretében, a **TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001** jelű projekt részeként, az Európai Unió támogatásával és az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Továbbá hálás köszönetemet fejezem ki témavezetőmnek, **Dr. Nehéz Károly** egyetemi docensnek, a hosszú időn át tartó fáradozását, konzultációkon nyújtott messzemenő támogatását, szakmai iránymutatását.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném megköszönni szüleimnek, testvéremnek és barátaimnak azt, hogy mindvégig biztattak, mellettem álltak és mindenben segítettek.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
1.1. A készletgazdálkodási modellekről	6
2. Az egyperiódusos modell	7
2.1. Bevezetés	7
2.2. Matematikai modell	8
2.3. Az optimum meghatározása	11
2.4. Mintapéllda	21
2.5. Mintapéllda helyességének igazolása szimulációval	22
3. A kétperiódusos modell	25
3.1. Bevezetés	25
3.2. Matematikai modell	25
3.3. Optimumkeresés	28
3.4. Mintafeladat	32
3.5. Mintapéllda szimulációja a helyesség igazolására	34
4. A modell kiterjesztése n periódusra	36
4.1. Bevezetés	36
4.2. Matematikai modell	36
4.3. Optimumkeresés	37
4.4. Mintafeladat	41
4.5. Mintapéllda szimulációja a helyesség igazolására	42
5. A fajlagos profit számítása	44
5.1. Bevezetés	44
5.2. Mintapéllda	44

Jelölések jegyzéke

c_v	Egy termék gyártási költsége [Ft/darab]
c_r	Egy termék eladási ára [Ft/darab]
p	A ki nem elégített rendeléseknél felmerülő büntető költség termékenként (penalty cost) [Ft/darab]
h	A túlkínálat esetén megmaradó áruk kezelési költsége (handling cost) [Ft/darab]
D	Valószínűségi változó, amely a termék iránti keresletet fejezi az adott időszakra [darab]
q	Az adott periódus elején legyártott vagy rendelt termék mennyisége [darab]
$[a, b]^-$	$\min(a, b)$
$[a, b]^+$	$\max(a, b)$
$[a - b]^-$	$\min(a - b, 0)$
$[a - b]^+$	$\max(a - b, 0)$

*„Aki a matematikát nem érti,
még hozzá egyre magasabb szinten,
annak akkor sincs objektív fogalma, véleménye a világról,
ha az összes humán művet százszor olvasta, látta, hallotta.”*

Gyarmati István

1. fejezet

Bevezetés

Ha a vállalatok nem megfelelő készletgazdálkodási módszereket alkalmaznak, akkor ez jelentős veszteségeket okozhat, egyrészt a soha fel nem használt alapanyagok, eladatlan késztermékek, másrészt a nem teljesített megrendelések okozta bizalomvesztés miatt.

A dolgozatban ismertetett "újságáros modell" általánosságban olyan szerződéses viszonyban álló beszállító és értékesítő szervezett kapcsolatát vizsgálja, ahol az értékesítő hosszú távú igény előrejelzésekkel látja el a beszállítót és előre rögzített meghatározott időközönként termék-lehívásokat kezdeményez. A jelen tudományos diákköri munkában az optimális raktárszint folyamatos vezérlése, a megfelelő kiszolgálási szint biztosítása, valamint az előre tervezhető kielégítetlen rendelések mértékének kezelése lesz a cél.

Először a legegyszerűbb esetet, az egyperiódusú modellt vizsgálom, amely azt feltételezi, hogy a periódus kezdetén úgy készletezünk, hogy a bizonytalan vásárlási igényt maximális profit mellett elégítsük ki. Megkíséreljük ezt a modellt úgy kiterjeszteni, általánosítani, hogy képes legyen az optimális számú együttgyártási ciklus meghatározására.

A módszer helyességét matematikai levezetések részletes bemutatásával fogjuk igazolni. A fejezetek végén egy-egy számpélda segítségével bemutatjuk az elért eredményeket, ezután pedig Maple szoftverben fejlesztett szimulációval ellenőrizzük a számítások helyességét. A készített programok a <http://progmatt.hu/~krisz/TDK> helyen elérhetőek.

A kutatás a Miskolci Egyetem Alkalmazott Informatikai Intézeti Tanszékének korábbi készletgazdálkodási témájú munkáira támaszkodik, amelyek az újságáros modell költség optimalis vizsgálatát dolgozta ki [1]. A jelen dolgozatban egyfajta folytatásként a profit optimalizálás szemszögéből vizsgálom a problémát.

1.1. A készletgazdálkodási modellekről

Készletgazdálkodási modellekkel az alkalmazott matematika tudományágai, az operációkutatás és a valószínűségszámítás együttesen foglalkozik. A modellek feladata, hogy meghatározza egy adott célfüggvény vagy úgynevezett haszonfüggvény esetén az optimális rendelési/gyártási politikát [2].

Hasonlóan a természeti jelenségekhez, a készletezési modelleknek is két nagy csoportja létezik. Attól függően, hogy meghatározott feltételek teljesülésénél az adott esemény szükségszerűen bekövetkezik-e vagy sem, lehetnek *determinisztikusak* illetve véletlenszerűek, azaz *sztochasztikusak* [3]. Ennek alapján ennél a tématerületnél is beszélhetünk determinisztikus, illetve sztochasztikus modellekről. Az előbbi esetben minden adat előre adott a gyártással, kereslettel, költségekkel kapcsolatban, míg az utóbbinál csak statisztikai kimutatások alapján becsülhetünk. A valós világban az utóbbi modellek dominálnak, mivel a keresletet előre nem tudjuk pontosan meghatározni, így a gazdasági életben egy terméki iránti szükségletet valószínűségi változóval szoktuk jellemezni. Megjegyezzük, hogy nem minden olyan jelenség becsülhető valószínűségszámítási módszerekkel, amelyeknek a jövőbeli alakulását nem ismerjük. A matematikai statisztikával együtt viszont nagy segítséget jelent azokban az esetekben, amikor a vizsgált jelenséggel azonos típusúaknál már történt megfigyelés [4].

Másik csoportosítási szempont az, hogy az optimális készletezés egy vagy több periódus egymásutánjára vonatkozik-e. Ezek alapján az előbbit *statikus*-, míg az utóbbit *dinamikus* modelleknek nevezi a szakirodalom.

A jelen tudományos munkában vizsgált újságárus modell a sztochasztikus modelleken belül, a dinamikus készletgazdálkodási modellek családjában tartozik, tehát a keresletet valószínűségi változóként fogjuk kezelni. Az újságárus modellt először 1888-ban kezdték el vizsgálni. Az alapgondolat a következő: van egy újságárus, akinek azt kell eldöntenie, hogy mennyi újságot rendeljen naponta a kiadótól. Ha túl sok újságot rendel, akkor rajta marad, ami az eladott újságokból származó profitot csökkenti, ha keveset, akkor pedig profitvesztés éri. A kérdés: ismert kereslet eloszlás alapján, hány lapot rendeljen az újságárus a haszonfüggvény optimumának meghatározása érdekében?

A következő fejezetben az egyperiódusos esetet vizsgáljuk, ami azt jelenti, mintha az újságárus napilapokkal dolgozna és az optimumot minden napra külön-külön kell meghatároznia.

2. fejezet

Az egyperiódusos modell

2.1. Bevezetés

Egy termelő egységben, egy árucikk előállítási költsége c_v , valamint eladási ára c_r , és keressük azt az optimális (q) gyártási mennyiséget, amely a kereslet (D) kielégítése mellett az elérhető profit maximalizálására törekszik. A modellben a kereslet sztochasztikus jellemzőkkel bír, ezért egy olyan valószínűségi változóként kezeljük, amely általában egyenletes vagy normális eloszlású. Tegyük fel azt az esetet, hogy a termék iránti kereslet nagyobb, mint a megtermelt mennyiség, azaz $D > q$, ekkor nem tudjuk kielégíteni a megrendeléseket. Viszont, ha a megtermelt mennyiség nagyobb, mint a kereslet, azaz $q > D$, akkor eladatlan áru keletkezik. A modellben kielégítetlen rendeléseket "büntető költséggel" (p) terheljük, a túlgyártást viszont "kezelési költséggel" (h) sújtjuk, azért hogy elérjük a profit szempontjából optimális gyártási mennyiséget. A p és h modellparaméterek ellentétes hatást kiváltó korlátként viselkednek. Ha nem alkalmaznánk a p korlátot, akkor a h paraméter önmagában is állandó túlgyártást eredményezne, ezzel ellentétben a h paraméter figyelmen kívül hagyása folyamatos kielégítetlen megrendeléseket okozna.

Továbbá a p paramétert "elmaradt haszonként" is értelmezhetjük, mivel abban az esetben keletkezik, amikor az igény nagyobb, mint a rendelkezésre álló mennyiség, ezért a profit maximalizálás szempontjából ez az eset előnytelen.

Egy termékre vett h kezelési költség azt is jelentheti, hogy az eladatlan termékek tárolása egységenként h összegű, például hűtési költséget jelent a gyártónak. Más példával élve, egy eladatlan romlandó termék teljesen elveszti az értékét, amit a $h = c_v$ egyenlőséggel fejezhetünk ki.

A matematikai modell felállítása után, ahol külön-külön vizsgálni fogjuk a túlkereslet illetve a túlkínálat esetét, levezetjük az optimális gyártási darabszámot meghatározó képletet folytonos illetve diszkrét esetekre egyaránt, valamint egy mintafeladaton keresztül bemutatjuk az elért eredményeket.

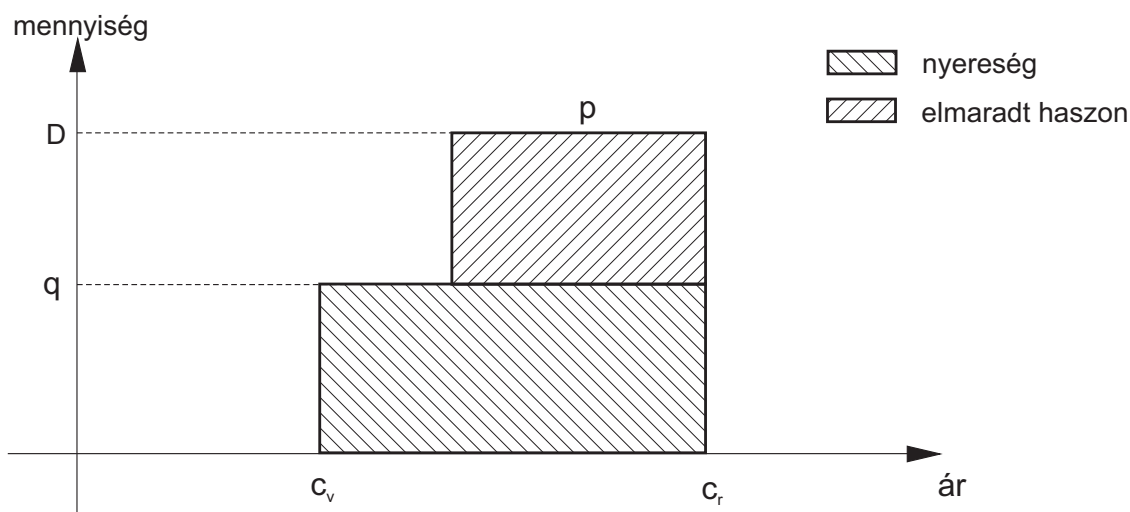
2.2. Matematikai modell

A következőkben vizsgáljuk meg a bevezetőben leírt két esetet, azaz amikor a kereslet több, illetve kevesebb, mint a rendelkezésre álló legyártott mennyiség (q). Ezután írjuk fel a periódus profitját meghatározó összefüggést, amelyet analitikus módszerekkel optimalizálni fogunk. A modell felállítása során a könnyebb érthetőség miatt a vizsgálatot ábrákkal illusztráljuk.

2.2.1. A profit elemzése túlkereslet esetén

Ahogy a 2.1. ábrán láthatjuk, a profit több részből tevődik össze. Az első részét, az eladott árukból származó profitot az eladási ár és a gyártási költség különbségének a raktáron lévő legyártott termékmennyiséggel való szorzata adja. Ilyenkor a raktáron lévő mennyiséget teljes mértékben eladjuk, tehát ezután adódik profitunk. Az ábra alapján látható, hogy ezt a nyereséget a balra sraffozott téglalap területe adja, azaz

$$\Pi_{(1)}^+ = q(c_r - c_v). \quad (2.1)$$



2.1. ábra. A profit alakulása túlkereslet esetén

Túlkereslet esetén a profit további részét az "elmaradt haszon" adja meg, amely a minimalizálásra bevezetett büntető költség függvényében változik. Tehát az elmaradt haszon a ki nem elégített darabszám és a büntető költség szorzata, azaz

$$\Pi_{(1)}^- = (D - q)p. \quad (2.2)$$

Újra megjegyezzük, hogy ez a büntető költség csak egy virtuális szám, ami arra kényszeríti a modellt, hogy a lehető legtöbb profitot hozzassuk ki termelési-eladási folyamata-

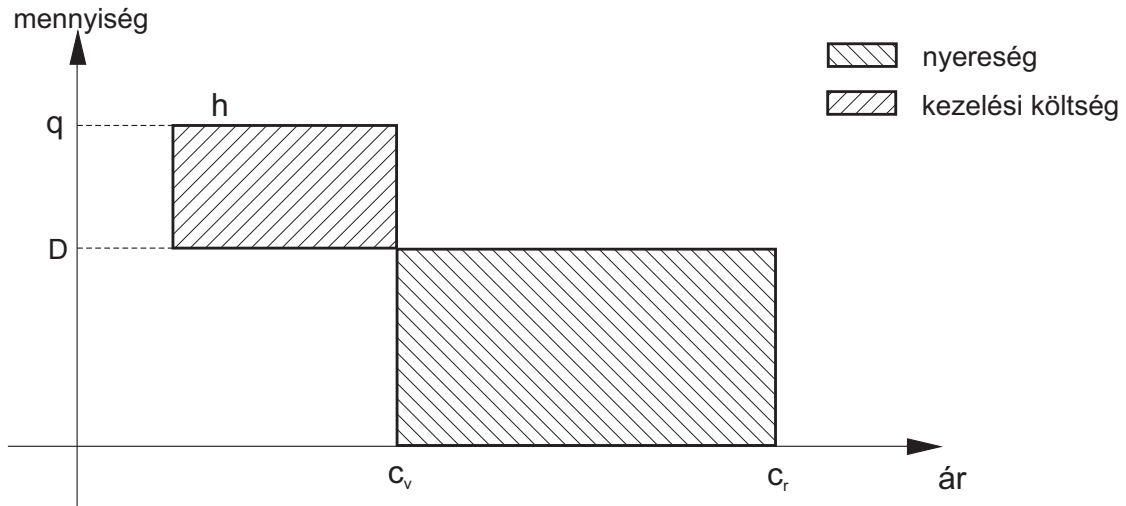
inkból. Ezért az elmaradt haszont le kell vonnunk a nyereségből. Tehát túlkereslet esetén a haszon

$$\Pi_{(1)}(q) = \Pi_{(1)}^+ - \Pi_{(1)}^- = q(c_r - c_v) - (D - q)p. \quad (2.3)$$

2.2.2. A profit elemzése túl kínálat esetén

Túl kínálat esetét a 2.2. ábrán láthatjuk. Hasonlóan az előbbi esethez, a periódus alatti profit több részből tevődik össze. Jobban belegondolva, hogy ha túl kínálat van, akkor az azt jelenti, hogy a legyártott mennyiség több, mint a periódus alatti vásárlói igény, azaz $q > D$. Tehát profitunk az eladott termékekből keletkezik, azaz

$$\Pi_{(2)}^+ = D(c_r - c_v). \quad (2.4)$$



2.2. ábra. A profit alakulása túl kínálat esetén

Továbbá kezelési költségünk keletkezik az el nem adott termékekből, mégpedig

$$\Pi_{(2)}^- = (q - D)h. \quad (2.5)$$

A kezelési költség az eladott áruk mennyiségéből származó profitot csökkenti, tehát túl kínálat esetén a periódusra jutó haszon

$$\Pi_{(2)}(q) = \Pi_{(2)}^+ - \Pi_{(2)}^- = D(c_r - c_v) - (q - D)h. \quad (2.6)$$

2.2.3. A periódus összes profitja

Jelöljük $\Pi_1(q)$ -vel az egy időszakra eső összes profitot, ekkor a (2.3) és (2.6) alapján a következőt írhatjuk:

$$\Pi_1(q) = \begin{cases} D(c_r - c_v) - (q - D)h, & \text{ha } D < q \\ q(c_r - c_v) - (D - q)p, & \text{ha } D \geq q \end{cases}. \quad (2.7)$$

Megjegyezzük, hogy a diszkrét esettel való számítás miatt $q = D$ fenn állása esetén a (2.6) képlet szerint számolunk.

Matematikai kezelhetőség szempontjából célszerű a képletet rövidebb alakra írni. Vegyük észre, hogy a $c_r - c_v$ tag mindkét feltétel teljesülése esetén jelentkezik, mégpedig pont azzal a szorzóval, amely a feltételben kisebb értékben van jelen. Ezért a $\min()$ függvény segítségével írhatjuk a következőt:

$$\min(D, q)(c_r - c_v). \quad (2.8)$$

Következő lépésként azt szeretnénk elérni az előző képletet kiegészítésével, hogy p és h paraméterek is megjelenjenek benne, de nem megfelelő feltételek esetén zérus legyen az értékük. Mivel kezelési költség csak $D < q$ esetben jelentkezik $q - D$ darabszámú termékre, illetve büntető költség csak $D > q$ állapotnál $q - D$ darabszámmal, ezért a $\max()$ függvény segítségével írhatjuk a következőt:

$$-\max(q - D, 0) \cdot h - \max(D - q, 0) \cdot p. \quad (2.9)$$

Tehát a (2.8) és (2.9) alapján a következőt kapjuk:

$$\Pi_1(q) = \min(D, q)(c_r - c_v) - \max(q - D, 0) \cdot h - \max(D - q, 0) \cdot p, \quad (2.10)$$

vagy rövidebb alakban

$$\Pi_1(q) = [D, q]^- \cdot (c_r - c_v) - [q - D]^+ \cdot h - [D - q]^+ \cdot p. \quad (2.11)$$

Megjegyezzük, hogy a modellnél valójában egy feltételes optimalizálási feladat megoldását kell meghatároznunk. Tekintsük a következő optimalizálási feladatot, ahol q a döntési változó:

$$\begin{aligned} \Pi_1(q) = \min(D, q)(c_r - c_v) &\rightarrow \max! \\ g_1(q) = (D - q)p &\leq 0 \\ g_2(q) = (q - D)h &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

A feltételes optimalizálási feladatok megoldásának egyik módja a büntetőfüggvényes módszerek. Ezek alapgondolata, hogy a feltételes optimalizálási feladatot visszaveztük feltétel nélküli optimalizálási feladat sorozatos megoldására. Mivel most numerikus módszer helyett analitikus módszerrel határozzuk meg az optimumot, ezért egy adott pontból kiindulva az optimális megoldáshoz való konvergencia helyett egy lépéssel határozzuk meg azt. Tehát a célfüggvény a következőképpen írható:

$$\begin{aligned}\Pi_1(q) &= \min(D, q)(c_r - c_v) - \max((D - q)p, 0) - \max((q - D)h, 0) \quad (2.13) \\ &= \min(D, q)(c_r - c_v) - \max(D - q, 0) \cdot p - \max(q - D, 0) \cdot h.\end{aligned}$$

Ha a feltételek egyenlőtlenségeket tartalmaznak, mint ebben a feladatban is, akkor a $\max$ függvényt használjuk, mivel két argumentuma közül a nagyobbikat kapja eredményül, így csak akkor van büntetés ha $g_i(q) > 0$ ($i = 1, 2$).

2.3. Az optimum meghatározása

Elméletileg szélsőértéke ott lehet egy $f(x)$ egyváltozós függvénynek, ahol az első deriváltja zérus, azaz $f'(x) = 0$. Ezeket a pontokat stacionárius pontoknak nevezzük. Vegyük észre, hogy ezek a pontok éppen a függvény deriváltjának zérushelyei. További feltétel, hogy a x_1 stacionárius pont, akkor a második deriváltjánál ez a pont ne legyen zérushely, azaz $f''(x) \neq 0$. A maximum pont létezéséhez azt kell vizsgálni, hogy a függvény az adott intervallumon konkáv legyen, azaz $f''(x_1) < 0$ teljesüljön. [10].

Következő lépésként meg kell határozni azt a q értéket, ahol a várható profit maximális. Ehhez először fel kell írunk a (2.11) függvény várható értékét. Valószínűség-számítási ismereteink alapján a sztochasztikus változók három csoportban tartozhatnak: lehetnek diszkrét, folytonosak, illetve keverték. Ennél a modellnél a diszkrét és folytonos esettel fogjuk megoldani a fenti problémát. Mindkét esetben először felírjuk a várható értéket, és analitikus módszerekkel meghatározzuk ennek a várható értéknek a szélsőértékeit, és megpróbáljuk belátni, hogy a talált szélsőérték maximumpont, valamint hogy csak egyetlen egy ilyen pont létezik. [5], [6], [7].

2.3.1. Folytonos eset

Az optimum kiszámításához tekintsük át a folytonos esettel kapcsolatos összefüggéseket, melyeket a levezetések során használni fogunk [1], [5], [6], [7].

A levezetésben használt összefüggések

1. Ha D folytonos valószínűségi változó, $f(x)$ sűrűségfüggvény és

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx$$

véges, akkor a várható érték

$$E(D) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \quad (2.14)$$

2. A várható érték lineáris leképezés a véges várható értékkel rendelkező valószínűségi változók lineáris terén, tehát két tulajdonság teljesül:

- (a) additív: ha $E(D_1)$ és $E(D_2)$ véges, akkor $E(D_1 + D_2)$ is véges, és

$$E(D_1 + D_2) = E(D_1) + E(D_2), \quad (2.15a)$$

- (b) homogén: ha $E(D)$ véges, és $c \in \mathbb{R}$, akkor $E(c \cdot D)$ is véges, azaz

$$E(c \cdot D) = c \cdot E(D). \quad (2.15b)$$

3. Ha D folytonos valószínűségi változó és $q, D \geq 0$, akkor

- (a) $\max(q - D, 0)$ várható értéke a következő:

$$\begin{aligned} E(q - D)^+ &= \int_0^{\infty} (q - x)^+ f(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^{\infty} \max(q - x, 0) f(x) dx \quad (2.16) \\ &\stackrel{(2)}{=} \underbrace{\int_0^q \max(q - x, 0) f(x) dx}_{=q-x} + \underbrace{\int_q^{\infty} \max(q - x, 0) f(x) dx}_{=0} \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_0^q (q - x) f(x) dx \stackrel{(4)}{=} q \int_0^q f(x) dx - \int_0^q xf(x) dx. \end{aligned}$$

Megjegyzés: A fenti egyenletet a (2)-es átalakításnál két intervallumra bontottuk q mentén. Mivel $q \geq 0$ minden esetben, ezért a $[q; \infty]$ integrálási intervallumon, (ahol értelemszerűen $x \geq q$) a $\max(q - x, 0)$ függvény mindig zérus értéket vesz fel. Ezzel ellenkezőleg a $[0; q]$ intervallumon pedig a

$\max(q - x, 0)$ esetében mindig az $q - x$ teljesül, ezért a $\max$ függvényt elhagyhatjuk, ahogy a (3)-as átalakításnál meg is tettük.

(b) $\max(D - q, 0)$ várható értéke a következő:

$$\begin{aligned}
 E(D - q)^+ &= \int_0^{\infty} (x - q)^+ f(x) dx = \int_0^{\infty} \max(x - q, 0) f(x) dx \quad (2.17) \\
 &= \underbrace{\int_0^q \underbrace{\max(x - q, 0)}_{=0} f(x) dx}_{=0} + \int_q^{\infty} \underbrace{\max(x - q, 0)}_{=x-q} f(x) dx \\
 &= \int_q^{\infty} (x - q) f(x) dx = \int_q^{\infty} x f(x) dx - q \int_q^{\infty} f(x) dx,
 \end{aligned}$$

(c) $\min(D, q)$ várható értéke az alábbi:

$$\begin{aligned}
 E(D, q)^- &= \int_0^{\infty} (D, q)^- f(x) dx = \int_0^{\infty} \min(x, q) f(x) dx \quad (2.18) \\
 &= \int_0^q \underbrace{\min(x, q)}_{=x} f(x) dx + \int_q^{\infty} \underbrace{\min(x, q)}_{=q} f(x) dx \\
 &= \int_0^q x f(x) dx + q \int_q^{\infty} f(x) dx.
 \end{aligned}$$

4. A sűrűségfüggvény integrálástartományának transzformációja esetén fennálló egyenlőség:

$$\int_q^{\infty} f(x) dx = 1 - \int_0^q f(x) dx. \quad (2.19)$$

5. A sűrűségfüggvény, a valószínűség és az eloszlásfüggvény kapcsolata

$$\int_0^q f(x) dx = P(D < q) = F(q). \quad (2.20)$$

6. A sűrűségfüggvények, illetve e függvények q -val szorzott integráltjainak a deriváltjai bizonyos intervallumokon:

$$\frac{d}{dq} \int_0^q f(x) dx = \frac{d}{dq}(F(q)) = f(q) \quad \text{és}$$

$$\frac{d}{dq} \int_0^q q \cdot f(x) dx = q \cdot \frac{d}{dq} \int_0^q f(x) dx = q \cdot \frac{d}{dq}(F(q)) = q \cdot f(q), \quad (2.21)$$

valamint

$$\frac{d}{dq} \int_q^\infty f(x) dx = \frac{d}{dq} \left(1 - \int_0^q f(x) dx \right) = -\frac{d}{dq}(F(q)) = -f(q) \quad \text{és}$$

$$\frac{d}{dq} \int_q^\infty q f(x) dx = \frac{d}{dq} \left(1 - \int_0^q q f(x) dx \right) = -q \frac{d}{dq}(F(q)) = -q f(q). \quad (2.22)$$

Az optimális q meghatározása

Ekkor a (2.11) képletet behelyettesítve, az egyperiódusú modell várható értéke folytonos esetben

$$E(\Pi_1(q)) = E([D, q]^- \cdot (c_r - c_v) - [q - D]^+ \cdot h - [D - q]^+ \cdot p). \quad (2.23)$$

A (2.15a) valamint a (2.15b) alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} E(\Pi_1(q)) &= E([D, q]^- \cdot (c_r - c_v)) - E([q - D]^+ \cdot h) - E([D - q]^+ \cdot p) \\ &= (c_r - c_v) \cdot E(D, q)^- - h \cdot E(q - D)^+ - p \cdot E(D - q)^+. \end{aligned} \quad (2.24)$$

A (2.16), (2.17) és (2.18) összefüggéseket behelyettesítve a következő adódik:

$$\begin{aligned} E(\Pi_1(q)) &= \underbrace{(c_r - c_v) \left(\int_0^q x f(x) dx + q \int_q^\infty f(x) dx \right)}_{E_1(\Pi_1(q))} \\ &\quad - \underbrace{h \left(q \int_0^q f(x) dx - \int_0^q x f(x) dx \right)}_{E_2(\Pi_1(q))} - \underbrace{p \left(\int_q^\infty x f(x) dx - q \int_q^\infty f(x) dx \right)}_{E_3(\Pi_1(q))}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Következő lépésként vennünk kell a maximum hely meghatározásához a $\frac{\partial E(\Pi_1(q))}{\partial q}$ parciális deriváltat [8], [9]. Mivel a kifejezés elsőre bonyolultnak tűnhet, ezért három részre bontottuk az összeget, $E_1(\Pi_1(q))$, $E_2(\Pi_1(q))$ és $E_3(\Pi_1(q))$ -ra, ahogyan a (2.25) képlet-nél jeleztük is. A három deriváltat külön-külön kiszámíthatjuk, majd a végén egyesítjük, mivel a deriválás additív, azaz ha $f(x)$ és $g(x)$ differenciálható függvények, akkor az összegfüggvény (különbségfüggvény) deriváltja megegyezik a tagok deriváltjainak az összegével (különbségével) [10]. Képletben:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \quad (2.26)$$

Továbbá homogén is, ami azt jelenti, hogy egy függvény konstansszorosának a deriváltja megegyezik a függvény deriváltjának a konstansszorosával [10]. Tehát, ha c konstans, akkor

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x). \quad (2.27)$$

Szorzat esetében a következőképpen differenciálunk [10]:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (2.28)$$

Az első tag deriválásánál $c_r - c_v$ konstans, tehát a (2.27) szabályt alkalmazzuk, míg a zárójelben található integrálösszeegnél a (2.26) alapján differenciálunk, ahol a második integrálnál a (2.28) összefüggést kell alkalmaznunk. Az integrálok deriválási értékeinek meghatározásaikor a (2.21) és (2.22) szabályok alapján járunk el, azaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1(\Pi_1(q))}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left[(c_r - c_v) \left(\int_0^q x f(x) dx + q \int_q^\infty f(x) dx \right) \right] \\ &= (c_r - c_v) \left(q f(q) + \int_q^\infty f(x) dx - q f(q) \right) = (c_r - c_v) \int_q^\infty f(x) dx \end{aligned} \quad (2.29)$$

A maradék két deriváltját is hasonlóképpen határozzuk meg, ahol h és p konstansként viselkednek. Az integrálösszegek első tagjainál a (2.28) szabályt használjuk fel, azaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_2(\Pi_1(q))}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left[h \left(q \int_0^q f(x) dx - \int_0^q x f(x) dx \right) \right] \\ &= h \left(q f(q) + \int_0^q f(x) dx - q f(q) \right) = h \int_0^q f(x) dx, \end{aligned} \quad (2.30)$$

valamint

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_3(\Pi_1(q))}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left[p \left(\int_q^\infty f(x)dx - q \int_q^\infty f(x)dx \right) \right] \\ &= p \left(-qf(q) - \int_q^\infty f(x)dx + qf(q) \right) = -p \int_q^\infty f(x)dx.\end{aligned}\quad (2.31)$$

A három deriváltat a (2.25) képlet alapján összefűzve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(\Pi_1(q))}{\partial q} &= \frac{\partial E_1(\Pi_1(q))}{\partial q} - \frac{\partial E_2(\Pi_1(q))}{\partial q} - \frac{\partial E_3(\Pi_1(q))}{\partial q} \\ &= (c_r - c_v) \int_q^\infty f(x)dx - h \int_0^q f(x)dx - \left(-p \int_q^\infty f(x)dx \right).\end{aligned}\quad (2.32)$$

A (2.19) képlet alapján behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{\partial E(\Pi_1(q))}{\partial q} = (c_r - c_v) \left(1 - \int_0^q f(x)dx \right) - h \int_0^q f(x)dx + p \left(1 - \int_0^q f(x)dx \right).$$

A (2.20) összefüggést használva adódik a következő:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(\Pi_1(q))}{\partial q} &= (c_r - c_v)(1 - F(q)) - hF(q) + p(1 - F(q)) \\ &= c_r - c_r F(q) - c_v + c_v F(q) - hF(q) - pF(q) + p.\end{aligned}\quad (2.33)$$

A fenti egyenlet zérushelyét megkeresve megkapjuk a lehetséges stacionárius pontot, tehát

$$\begin{aligned}0 &= c_r - c_r F(q) - c_v + c_v F(q) - hF(q) - pF(q) + p \\ hF(q) + pF(q) + c_r F(q) - c_v F(q) &= p + c_r - c_v \\ F(q)(h + p + c_r - c_v) &= p + c_r - c_v \\ F(q) &= \frac{p + c_r - c_v}{h + p + c_r - c_v}\end{aligned}\quad (2.34)$$

egyenlet megoldását adó q^* helyen. Mivel $F(q)$ eloszlás függvény és feltevés szerint folytonos, ezért szigorúan monoton növekvő, valamint 0 és 1 közé esik, ezért az egyenletnek egy megoldása van. Már csak azt kell bebizonyítani, hogy q^* helyen a függvénynek ma-

ximuma van. Ehhez képezzük a második deriváltat, azaz

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E(\Pi_1(q))}{\partial q^2} &= -hf(q) - pf(q) - c_r f(q) + c_v f(q) \\ &= (c_v - c_r - p - h)f(q) < 0.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Megvizsgálva a második deriváltat, könnyen láthatjuk, hogy $(c_v - c_r - p - h)f(q) < 0$ minden esetben, mivel az gyártási ár (c_v) és az eladási ár (c_r) különbsége negatív, amelyet tovább csökkentenek a p és h költségek, valamint a periódushoz tartozó sűrűségfüggvény pedig pozitív. Így tehát a második derivált konkáv az adott intervallumon.

2.3.2. Diszkrét eset

Hasonlóan a folytonos esethez, először írjuk fel a diszkrét valószínűségi változókkal kapcsolatos, levezetések során használt általános összefüggéseket.

A levezetésben használt összefüggések

1. Ha D diszkrét valószínűségi változó, és lehetséges értékeinek számossága megszámlálhatóan végtelen, azaz a lehetséges értékek

$$x_0, x_1, x_2, \dots, \quad \text{és} \quad t_k = P(D = x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

akkor a várható érték

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k t_k, \quad (2.36)$$

ha ez véges.

2. Legyen D diszkrét valószínűségi változó, $F(x)$ eloszlásfüggvény, valamint $q, D \geq 0$, akkor

(a) $\max(q - D, 0)$ várható értéke a következő:

$$\begin{aligned}E(q - D)^+ &= \sum_{k=0}^{\infty} (q - k)^+ t_k \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \max(q - k, 0) t_k \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=0}^{q-1} \underbrace{\max(q - k, 0)}_{=q-k} t_k + \underbrace{\sum_{k=q}^{\infty} \max(q - k, 0) t_k}_{=0} \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{k=0}^{q-1} (q - k) t_k \stackrel{(4)}{=} q \sum_{k=0}^{q-1} t_k - \sum_{k=0}^{q-1} k t_k.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Megjegyzés: Ahogy a (2.16) levezetésnél láthattuk, a (2)-es átalakításnál szét-szedtük a $[0; \infty]$ összegzési intervallumot q mentén két részre. Hasonló gondolatmenettel mint ott, a $[q; \infty]$ intervallum összegzésénél a $\max(q - k, 0)$ függvény mindig zérus értéket ad, tehát így elhagyható. Viszont $[0; q - 1]$ összegzési intervallumon a $\max(q - k, 0)$ pedig mindig a $q - k$ értéket fogja adni, tehát itt is elhagyhatjuk a $\max$ függvényt, helyette $q - k$ különbséget írva. Ezeket mind a $q, D \geq 0$ feltevés miatt tehetjük meg.

(b) $\max(D - q, 0)$ várható értéke az alábbi:

$$\begin{aligned}
 E(D - q)^+ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k - q)^+ t_k = \sum_{k=0}^{\infty} \max(k - q, 0) t_k \\
 &= \underbrace{\sum_{k=0}^{q-1} \max(k - q, 0) t_k}_{=0} + \sum_{k=q}^{\infty} \underbrace{\max(k - q, 0)}_{=k-q} t_k \\
 &= \sum_{k=q}^{\infty} (k - q) t_k = \sum_{k=q}^{\infty} k t_k - q \sum_{k=q}^{\infty} t_k.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

(c) $\min(D, q)$ várható értéke

$$\begin{aligned}
 E(D, q)^- &= \sum_{k=0}^{\infty} (D, q)^- t_k = \sum_{k=0}^{\infty} \min(k, q) t_k \\
 &= \sum_{k=0}^{q-1} \underbrace{\min(k, q)}_{=k} t_k + \sum_{k=q}^{\infty} \underbrace{\min(k, q)}_{=q} t_k \\
 &= \sum_{k=0}^{q-1} k t_k + q \sum_{k=q}^{\infty} t_k.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

3. Az eloszlás egy részének az összege kiszámítható a maradék részből, azaz

$$\sum_{k=q}^{\infty} t_k = 1 - \sum_{k=0}^{q-1} t_k. \tag{2.40}$$

4. Az eloszlás egy részének az összege, a valószínűség és az eloszlásfüggvény kapcsolata:

$$\sum_{k=0}^{q-1} t_k = P(D < q) = F(q). \tag{2.41}$$

Az optimalizálás q meghatározása

Felhasználva a (2.11) képletet, az egyperiódusú modell várható értéke diszkrét esetben

$$E(\Pi_1(q)) = E([D, q]^- \cdot (c_r - c_v) - [q - D]^+ \cdot h - [D - q]^+ \cdot p). \quad (2.42)$$

Átalakítva a jobb oldalt hasonlóan a folytonos esethez a (2.15a) alapján írhatjuk, hogy

$$E(\Pi_1(q)) = E([D, q]^- \cdot (c_r - c_v)) - E([q - D]^+ \cdot h) - E([D - q]^+ \cdot p), \quad (2.43)$$

valamint (2.15b) összefüggés szerint, azt, hogy

$$E(\Pi_1(q)) = (c_r - c_v) \cdot E(D, q)^- - h \cdot E(q - D)^+ - p \cdot E(D - q)^+. \quad (2.44)$$

Helyettesítsünk be (2.37), (2.38) és (2.39) alapján, így

$$\begin{aligned} E(\Pi_1(q)) &= \underbrace{(c_r - c_v) \left(\sum_{k=0}^{q-1} k t_k + q \sum_{k=q}^{\infty} t_k \right)}_{E_1(\Pi_1(q))} \\ &\quad - \underbrace{h \left(q \sum_{k=0}^{q-1} t_k - \sum_{k=0}^{q-1} k t_k \right)}_{E_2(\Pi_1(q))} - \underbrace{p \left(\sum_{k=q}^{\infty} k t_k - q \sum_{k=q}^{\infty} t_k \right)}_{E_3(\Pi_1(q))}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

A fenti egyenletet q szerint parciálisan deriválva megkapjuk a lehetséges szélsőérték helyet, és ha a második parciális derivált konkáv lesz az adott tartományon, akkor ez egyben maximum pont is lesz. Az egyenletet három részre bontottuk a könnyebb deriválás miatt, mely először bonyolultnak tűnhet. Kezdjük az első tag deriválásával, ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1(\Pi_1(q))}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left[(c_r - c_v) \left(\sum_{k=0}^{q-1} k t_k + q \sum_{k=q}^{\infty} t_k \right) \right] \\ &= (c_r - c_v) \sum_{k=q}^{\infty} t_k. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Mivel $c_r - c_v$ konstans, ezért (2.27) szabályt alkalmazzuk. A zárójelekben található tagok deriválásánál a (2.26) összefüggést kell használnunk, viszont az első tag nem függ q -tól, így deriváltja zérus. A második tagnál pedig a szummás kifejezés konstans, ezért újból a

(2.27) szabályt használjuk. A következő két tag deriváltja q szerint

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_2(\Pi_1(q))}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left[h \left(q \sum_{k=0}^{q-1} t_k - \sum_{k=0}^{q-1} k t_k \right) \right] \\ &= h \sum_{k=0}^{q-1} t_k,\end{aligned}\quad (2.47)$$

valamint

$$\frac{\partial E_3(\Pi_1(q))}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left[p \left(\sum_{k=q}^{\infty} k t_k - q \sum_{k=q}^{\infty} t_k \right) \right] = -p \sum_{k=q}^{\infty} t_k. \quad (2.48)$$

Egyesítve a három tagot, megkapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(\Pi_1(q))}{\partial q} &= \frac{\partial E_1(\Pi_1(q))}{\partial q} - \frac{\partial E_2(\Pi_1(q))}{\partial q} - \frac{\partial E_3(\Pi_1(q))}{\partial q} \\ &= (c_r - c_v) \sum_{k=q}^{\infty} t_k - h \sum_{k=0}^{q-1} t_k - \left(-p \sum_{k=q}^{\infty} t_k \right).\end{aligned}\quad (2.49)$$

Helyettesítsük be a (2.40) összefüggést, ekkor

$$\frac{\partial E(\Pi_1(q))}{\partial q} = (c_r - c_v) \left(1 - \sum_{k=0}^{q-1} t_k \right) - h \sum_{k=0}^{q-1} t_k + p \left(1 - \sum_{k=0}^{q-1} t_k \right). \quad (2.50)$$

Következő lépésként a (2.41) összefüggést felhasználva a következő egyenlőség fenn áll:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(\Pi_1(q))}{\partial q} &= (c_r - c_v)(1 - F(q)) - hF(q) + p(1 - F(q)) \\ &= -c_r F(q) + c_v F(q) - hF(q) - pF(q) + p + c_r - c_v.\end{aligned}\quad (2.51)$$

Analíziselmélet szerint a vizsgált függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol ez a derivált zérus, azaz

$$\begin{aligned}0 &= -hF(q) - pF(q) - c_r F(q) + c_v F(q) + p + c_r - c_v \\ hF(q) + pF(q) + c_r F(q) - c_v F(q) &= p + c_r - c_v \\ F(q)(h + p + c_r - c_v) &= p + c_r - c_v \\ F(q) &= \frac{p + c_r - c_v}{h + p + c_r - c_v}\end{aligned}\quad (2.52)$$

egyenlet megoldását adó q^* helyen. Hasonlóan a folytonos esethez itt is csak egy megoldás létezik. Az, hogy ez maximum pont, a második derivált segítségével belát-

hatjuk.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E(\Pi_1(q))}{\partial q^2} &= -hf(q) - pf(q) - c_r f(q) + c_v f(q) \\ &= (c_v - c_r - p - h)f(q) < 0.\end{aligned}\quad (2.53)$$

Maximum pont bizonyítása a (2.36) leírtakhoz szerint analóg módon igazolható.

2.4. Mintapélda

A következőkben tekintsünk egy mintafeladatot annak érdekében, hogy az elért eredmény gyakorlati felhasználásával az olvasó dolgát könnyebbé tegyük. Ebben a feladatban egy profit szempontjából optimális készletezési politikát fogunk meghatározni.

Feladat

Karácsony közeledtével fenyőfákat árulunk évről évre. Minden év december 15-én egyszer rendelünk, és az előző éves tapasztalatokból kiszámítottuk, hogy a fenyőfáink iránti kereslet egy olyan normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek várható értéke 220, szórása pedig 40. (Érdekességgéppen megjegyezzük, hogy az újságárus modellt néhol karácsonyfa modellként is szokták emlegetni.) A fenyő beszerzési költsége 750 Forint darabonként, eladási ára pedig 1350 Forint. A büntető költség legyen 500 Forint, míg a túlkészletezési költség pedig 550 Forint termékenként, mert az el nem adott árukat még 200 Ft-ért felvásárolja egy közeli ismerősünk. Hány fát rendeljünk a beszállítótól, ha karácsony alkalmából maximális profitra szeretnénk szert tenni a gazdag ünnepi vacsora reményében?

Megoldás

Először a bevezetőben megismert jelölésekkel vázoljuk fel a fontosabb tényezőket.

$$c_r = 1350, \quad c_v = 750, \quad p = 500, \quad h = 550, \quad m = 220, \quad \sigma = 40$$

Az optimális megoldást a (2.52) szerint számoljuk, tehát az

$$F(q) = \frac{1350 - 750 + 500}{1350 - 750 + 500 + 550} = \frac{23}{33} = 0,696969$$

egyenletből meghatározható. A kapott függvényérték inverz eloszlásfüggvényéből vissza-számolva kapjuk hogy

$$F(q) = \Phi\left(\frac{q - 220}{40}\right) = 0,696969.$$

A standard normális eloszlás táblázatából kikeresve kapjuk, hogy

$$\frac{q - 220}{40} = 0,515704794$$

melyből

$$q = 240,6282 \rightarrow 241 \text{ darab}$$

Tehát a rendelendő mennyiség, vagyis a függvény ily paraméterek mellett felvett optimuma $q^* = 241$ mennyiség esetén van.

2.5. Mintapélda helyességének igazolása szimulációval

Feladat

Szimuláljuk karácsonyi fa eladásunkat 10000 alkalommal, hogy megláthassuk, hogy az analitikus módszerrel optimumunk mennyire közelíti meg a szimulált környezetét.

Megoldás

1. Generáljuk 10000 elemű normális eloszlású mintát 220 várható értékkel, 40 szórással.

```
with(Statistics):
```

```
N:=10000:
```

```
X:=Sample(Normal(220,40),N):
```

2. Nézzük meg, hogy a generált véletlen számok valóban normális eloszlásúak-e a fentebb megnevezett paraméterekkel. Ehhez készítsük el az eloszlás sűrűségfüggvényét, ezután hisztogramon ábrázoljuk a generált számokat, majd rajzoljuk ki egymásra a két alakzatot.

```
P := DensityPlot(Normal(220, 40), color = "Niagara Red"):
```

```
Q := Histogram(X, averageshifted = 4, style = polygon,
               color = "LightBlue"):
```

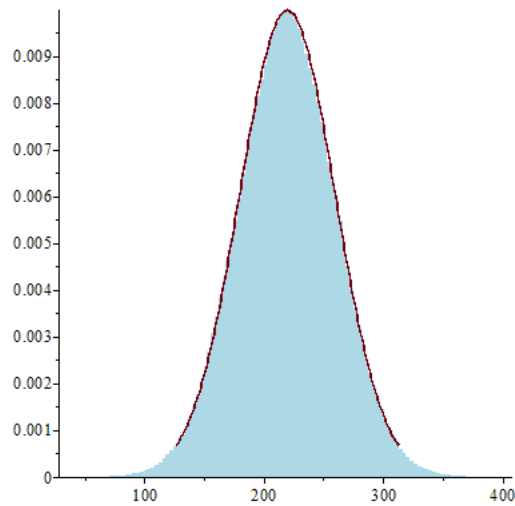
```
plots[display](P, Q)
```

3. Számoljuk ki mennyi lenne a profit, ha $q \in [241 - 100; 241 + 100]$ mennyiséget gyártatánk, majd jelenítsük meg. Ehhez 141-től 341-ig számítsuk ki a profitot a generált számok alapján, átlagoljunk, és rajzoljuk ki.

```
P := Vector(N): T := Vector(201):
```

```
for j from 141 to 341 do :
```

```
  for i from 1 to N do :
```

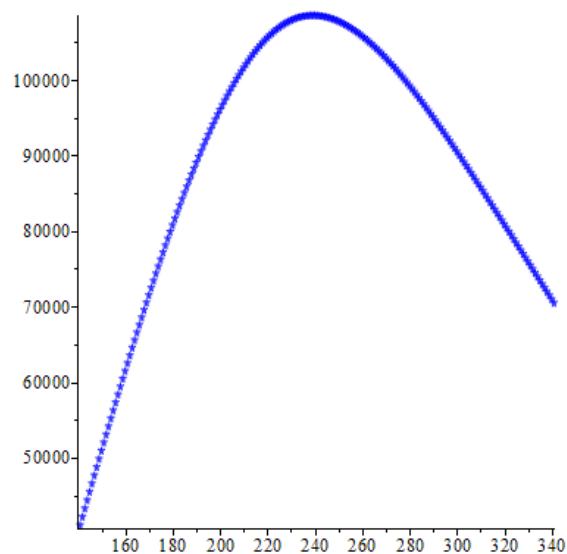


2.3. ábra. A generált eloszlásból jól látszik a kívánt várható érték a kívánt szórással

```

P[i] := 600*min(j, X[i]) - 500*max(j - X[i], 0)
      - 550*max(X[i] - j, 0) :
end do:
T[j-140] := Mean(P) :
end do:
R := Vector(201);
for i from 141 to 341 do :
  R(i-140) := i :
end do:
plot(R, T, style = point, symbol = asterisk, color = blue)

```



2.4. ábra. A profit alakulása különböző termelési mennyiségek esetén

4. Keressük meg, hány karácsonyfa rendelés esetén lesz maximális a profitunk, és mennyi profitra számíthatunk!

```
T_maxIndex := 141:
T_maxValue := T(1):
for i from 142 to 341 do :
    if T(i-140) > T(T_maxIndex-140) then
        T_maxIndex := i:
    end if:
end do:
```

A ciklus lefutása után $T_maxIndex$ értéke 241, melynél 108.709 Forint a várható profitunk.

3. fejezet

A kétperiódusos modell

3.1. Bevezetés

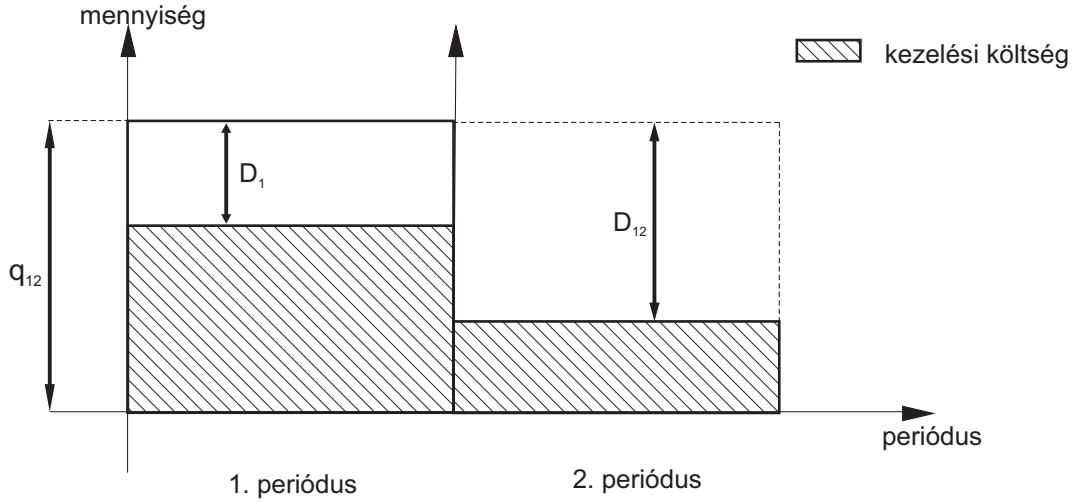
Az egyperiódusos modell tárgyalása után térjünk rá a kétperiódusos séma vizsgálatára, amellyel tovább alapozzuk a modell n periódusra való kiterjesztését. Tekintsünk egy olyan üzemet, ahol egy árucikk előállítási költsége c_v , valamint eladási ára c_r és keressük azt az optimális (q_{12}) gyártási mennyiséget, amely a két periódus alatti felmerülő együttes kereslet ($D_{12} = D_1 + D_2$) kielégítése mellett a profit maximalizálására törekszik. Tehát a kétperiódusos modell azt jelenti, hogy csak az első periódus elején történik gyártás, és a második periódusban az elsőből megmaradó termékekből gazdálkodhatunk. Feltezzük, hogy a periódusonkénti keresletek független valószínűségi változók. Hasonlóan az egyperiódusos esethez, túlkínálat esetén itt is h egységgel sújtjuk a kezelési költséget termékegységenként, valamint p büntető költséggel a túlkeresletet.

3.2. Matematikai modell

Az első periódusnál látottakhoz újból bontsuk két esetre a modellt, attól függően, hogy túlkínálat vagy túlkereslet lépett fel.

3.2.1. Profit elemzése túlkínálat esetén

Ahogy a 3.1. ábrán láthatjuk, ha az első gyártási periódusban D_1 igény keletkezik, akkor a periódus végéig $\max(q_{12} - D_1, 0)$ mennyiség után kell tárolási költséget fizetni. Látni kell, hogy a $\max()$ függvény tulajdonsága miatt ez a darabszám zérus lesz, amennyiben az igény nagyobb, mint a rendelkezésre álló legyártott mennyiség, azaz $D_{12} > q_{12}$. A második periódusban D_2 igény kielégítése esetén további $\max(q_{12} - D_{12}, 0)$ darab után kell tárolási költséget fizetni, de korábban ismertetett okok miatt csak abban az esetben, ha $D_{12} < q_{12}$.



3.1. ábra. A profit abban az esetben mikor a két periódusra sokat rendeltünk

Tehát a két periódus alatt összes kezelési költség

$$\Pi_{(12)}^-(q_{12}) = \max(q_{12} - D_1, 0) \cdot h + \max(q_{12} - D_{12}, 0) \cdot h. \quad (3.1)$$

Mivel ebben az esetben a két periódus alatt az összes terméket eladtuk, ezért e mennyiség után termelődik nyereségünk, azaz

$$\Pi_{(12)}^+(q_{12}) = D_{12}(c_r - c_v), \quad (3.2)$$

melyből a (3.1). képletből kiszámoltakat le kell vonnunk, hasonlóan, ahogy az első periódus modellezésénél tettük. Azaz ekkor a periódus alatt profit:

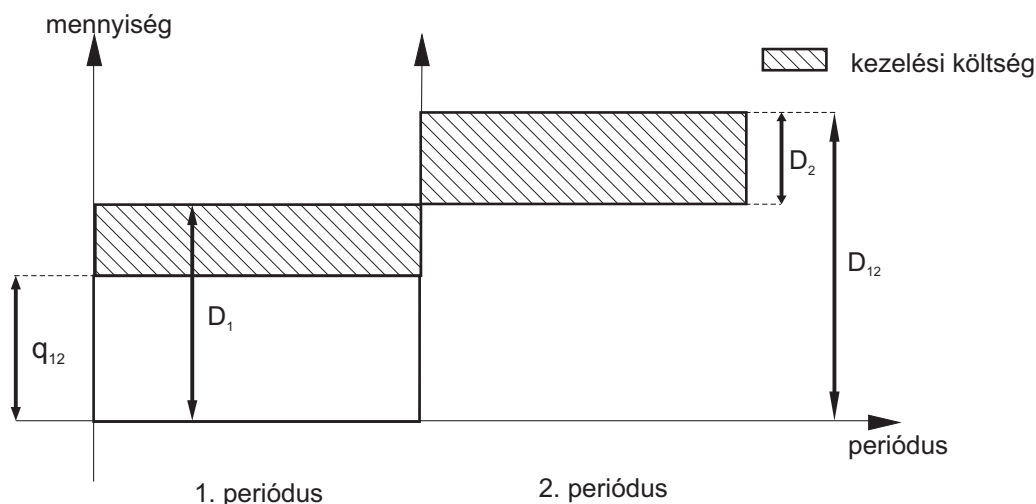
$$\Pi_{(12)}(q_{12}) = D_{12}(c_r - c_v) - \max(q_{12} - D_1, 0) \cdot h - \max(q_{12} - D_{12}, 0) \cdot h, \quad (3.3)$$

vagy rövidebb alakban

$$\Pi_{(12)}(q_{12}) = D_{12}(c_r - c_v) - h \cdot [q_{12} - D_1]^+ - h \cdot [q_{12} - D_{12}]^+. \quad (3.4)$$

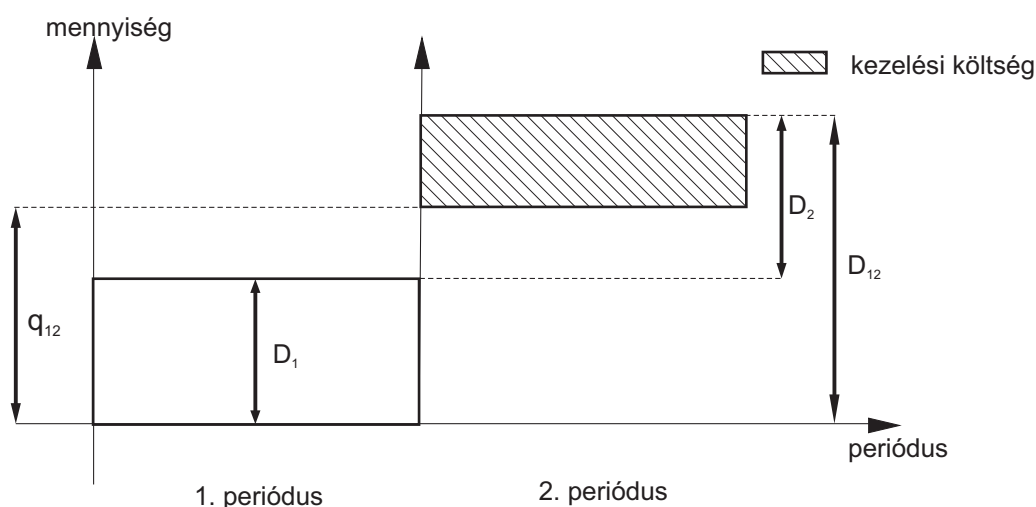
3.2.2. Profit elemzése túlkereslet esetén

Büntető költséget a modellben azért alkalmazunk, hogy a ki nem elégített megrendeléseket ellensúlyozzuk ezzel. Olyan ez, mintha a modellt ösztönöznénk az igények pontos kielégítésére. Ha nem használnánk büntető költséget, akkor a modellünk a tárolási költség minimalizálása miatt optimumként, a rendelések ki nem elégítésére „állna be”. A két periódus összevonása miatt lehet olyan eset, amikor olyan keveset gyártunk, hogy már az első periódusban lesz ki nem elégített rendelésünk, ekkor a 3.2. ábra alapján sraffozott téglalap magasságának a $\max(D_1 - q_{12}, 0)$ adódik.



3.2. ábra. A profit túlkereslet esetén, amikor már az első periódusban hiány van

A második periódusban maga D_2 adja a ki nem elégített rendelések számát, ami az ábráról is leolvasható. Viszont lehet olyan eset a 3.3. ábra szerint, amikor még az első héten nincsen büntetés a kielégítetlen rendelések miatt, ilyenkor viszont a második periódus képlete nyilván helytelen. Hogy feloldjuk ezt a problémát, olyan képletet kell keresnünk, ami egyszerre kielégíti a két lehetséges esetet. Ha a második periódusban $\max(D_2 + \min(D_1 - q_{12}, 0), 0)$ képlet alapján számolunk, akkor a korábbi esetet is tudjuk kezelni.



3.3. ábra. A profit túlkereslet esetén, amikor hiány csak a második periódusban lép fel

Feltételezésünk szerint az első és második periódusban két külön képlet határozza meg a büntetőköltséget, viszont az ábrákból az is látszik, hogy a képletek hibás eredményt adnak, ha az együttes igény kisebb, mint az együttesen legyártott darabszám, azaz akkor, ha $D_{12} < q_{12}$. Ilyenkor a második periódus mindenképpen D_2 mennyiségű kielégítetlen rendeltet mutatna, mivel D_2 q_{12} -től nem függ, ami természetesen hibás számításhoz vezetne. Viszont a két ábra azt is megmutatja, hogy az összevont feladatban nem kell a köztes periódusokban kiadódó büntetéseket számba venni, hiszen az utolsó periódusban ez mindenképpen a $\max(D_{12} - q_{12}, 0)$ képletből adódik.

Tehát abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy beláttuk, hogy az összevont periódusokban nem kell figyelni az egyes periódusokban kialakuló hiányra, hanem az utolsó periódust elég figyelembe venni. Így a $\max(D_{12} - q_{12}, 0)$ az alapadatokból szolgáltatja a periódusok végén kialakuló hiányt. Ezen a felismerésen felbuzdulva viszont hiába megyünk vissza a tárolási költség ábrájára, ott sajnos a költséget periódusonként kell számolni, ott nem lehet ilyen módon leegyszerűsíteni a modellt. Összefoglalva, túlkereslet esetén a periódusra jutó profit a következő:

$$\Pi_{(12)}(q_{12}) = q_{12}(c_r - c_v) - p \cdot [D_{12} - q_{12}]^+. \quad (3.5)$$

3.2.3. A periódusok összes profitja

Az előzőekben leírtak alapján összefoglalva az időszak alatt keletkező összes haszon a következőképpen adódik:

$$\Pi_{12}(q_{12}) = \min(q_{12}, D_{12})(c_r - c_v) - \max(q_{12} - D_1) \cdot h - \max(q_{12} - D_{12}) \cdot h - \max(D_{12} - q_{12}) \cdot p, \quad (3.6)$$

vagy rövidebb alakban

$$\Pi_{12}(q_{12}) = (c_r - c_v)[q_{12}, D_{12}]^- - h[q_{12} - D_1]^+ - h[q_{12} - D_{12}]^+ - p[D_{12} - q_{12}]^+. \quad (3.7)$$

3.3. Optimumkeresés

Az egy periódusos modellhez hasonlóan itt is levezetjük mind folytonos, mind diszkrét esetben az optimális gyártási mennyiséget meghatározó kifejezést.

$$E(\Pi_{12}(q_{12})) = E([q_{12}, D_{12}]^- \cdot (c_r - c_v) - [q_{12} - D_1]^+ \cdot h - [q_{12} - D_{12}]^+ \cdot h - [D_{12} - q_{12}]^+ \cdot p). \quad (3.8)$$

A (2.15a) összefüggés alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} E(\Pi_{12}(q_{12})) &= E([q_{12}, D_{12}]^- \cdot (c_r - c_v)) - E([q_{12} - D_1]^+ \cdot h) \\ &\quad - E([q_{12} - D_{12}]^+ \cdot h) - E([D_{12} - q_{12}]^+ \cdot p), \end{aligned} \quad (3.9)$$

valamint a (2.15b) tulajdonság miatt a következőt:

$$E(\Pi_{12}(q_{12})) = E[q_{12}, D_{12}]^- \cdot (c_r - c_v) - E[q_{12} - D_1]^+ \cdot h - E[q_{12} - D_{12}]^+ \cdot h - E[D_{12} - q_{12}]^+ \cdot p. \quad (3.10)$$

3.3.1. Folytonos eset

Használva a (2.16), (2.17) és (2.18) levezetéseket, kapjuk az alábbi:

$$\begin{aligned}
 E(\Pi_{12}(q_{12})) &= (c_r - c_v) \left(\int_0^{q_{12}} x_{12} f_{12}(x_{12}) dx_{12} + q_{12} \int_{q_{12}}^{\infty} f_{12}(x_{12}) dx_{12} \right) \\
 &- h \left(q_{12} \int_0^{q_{12}} f_1(x_1) dx_1 - \int_0^{q_{12}} x_1 f_1(x_1) dx_1 \right) \\
 &- h \left(q_{12} \int_0^{q_{12}} f_{12}(x_{12}) dx_{12} - \int_0^{q_{12}} f_{12}(x_{12}) dx_{12} \right) \\
 &- p \left(\int_{q_{12}}^{\infty} x_{12} f_2(x_{12}) dx_{12} - q_{12} \int_{q_{12}}^{\infty} f_{12}(x_{12}) dx_{12} \right). \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Differenciálva q_{12} szerint megkapjuk a stacionárius pontokat. Az első és utolsó sorban lévő második integrál, valamint a második és harmadik sorban található első integrálok deriválásánál a (2.28) pontnál leírt szorzási szabályt kell alkalmaznunk, továbbá a sorok között pedig a (2.26) képletben vázolt additivitási tulajdonság érvényesül. Az integrálok deriválásánál figyelembe vesszük a (2.21) és (2.22) összefüggéseket, azaz

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E(\Pi_{12}(q_{12}))}{\partial q_{12}} &= (c_r - c_v) \left(q_{12} f_{12}(q_{12}) + \int_{q_{12}}^{\infty} f_{12}(x_{12}) dx_{12} - q_{12} f_{12}(q_{12}) \right) \\
 &- h \left(\int_0^{q_{12}} f_1(x_1) dx_1 + q_{12} f_1(q_{12}) - q_{12} f_1(q_{12}) \right) \\
 &- h \left(\int_0^{q_{12}} f_{12}(x_{12}) dx_{12} + q_{12} f_{12}(q_{12}) - q_{12} f_{12}(q_{12}) \right) \\
 &- p \left(-q_{12} f_{12}(q_{12}) - \int_{q_{12}}^{\infty} f_{12}(x_{12}) dx_{12} + q_{12} f_{12}(q_{12}) \right). \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\Pi_{12}(q_{12}))}{\partial q_{12}} &= (c_r - c_v) \int_{q_{12}}^{\infty} f_{12}(x_{12}) dx_{12} - h \int_0^{q_{12}} f_1(x_1) dx_1 \\ &\quad - h \int_0^{q_{12}} f_{12}(x_{12}) dx_{12} + p \int_{q_{12}}^{\infty} f_{12}(x_{12}) dx_{12}. \end{aligned}$$

A (2.19) összefüggés alapján a következő egyenletté írhatjuk át:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\Pi_{12}(q_{12}))}{\partial q_{12}} &= (c_r - c_v) \left(1 - \int_0^{q_{12}} f(x_{12}) dx_{12} \right) - h \int_0^{q_{12}} f_1(x_1) dx_1 \\ &\quad - h \int_0^{q_{12}} f_{12}(x_{12}) dx_{12} + p \left(1 - \int_0^{q_{12}} f_{12}(x_{12}) dx_{12} \right). \end{aligned}$$

A (2.20) szabály alapján a következő adódik:

$$\frac{\partial E(\Pi_{12}(q_{12}))}{\partial q_{12}} = (c_r - c_v)(1 - F_{12}(q_{12})) - hF_1(q_{12}) - hF_{12}(q_{12}) + p(1 - F_{12}(q_{12})),$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\Pi_{12}(q_{12}))}{\partial q_{12}} &= c_r - c_r F_{12}(q_{12}) - c_v + c_v F_{12}(q_{12}) \\ &\quad - hF_1(q_{12}) - hF_{12}(q_{12}) + p - pF_{12}(q_{12}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

A vizsgált függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja zérust vesz fel, azaz

$$\begin{aligned} 0 &= c_r - c_r F_{12}(q_{12}) - c_v + c_v F_{12}(q_{12}) \\ &\quad - hF_1(q_{12}) - hF_{12}(q_{12}) + p - pF_{12}(q_{12}) \\ c_r F_{12}(q_{12}) - c_v F_{12}(q_{12}) + hF_{12}(q_{12}) + pF_{12}(q_{12}) &= c_r - c_v - hF_1(q_{12}) + p \\ F_{12}(q_{12})(c_r - c_v + h + p) &= c_r - c_v - hF_1(q_{12}) + p \\ F_{12}(q_{12}) &= \frac{c_r - c_v - hF_1(q_{12}) + p}{c_r - c_v + h + p} \end{aligned} \quad (3.14)$$

A profitfüggvény második deriváltja igazolhatja a maximum pont létezését, azaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E(\Pi_{12}(q_{12}))}{\partial q_{12}^2} &= -c_r f_{12}(q_{12}) + c_v f_{12}(q_{12}) - h f_1(q_{12}) - h f_{12}(q_{12}) - p f_{12}(q_{12}). \\ &= (c_v - c_r - h - p) f_{12}(q_{12}) - h f_1(q_{12}) < 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

A $c_v - c_r$ mindig negatív, mert az eladási ár mindig kevesebb mint az eladási ár, ezt tovább csökkenti a h és p paraméterek. Az $f_{12}(q_{12})$ az adott intervallumon mindig pozitív, így a $(c_v - c_r - h - p)f_{12}(q_{12})$ rész mindig negatív. Hasonlóan a másik taghoz, h mindig pozitív megszorozva a $f_1(q_{12})$ sűrűségfüggvénnyel, ami az adott intervallumon mindig pozitív. Negatív számból levonva egy pozitív számot továbbra is negatívot kapunk, tehát a maximum pont létezik.

3.3.2. Diszkrét eset

A (2.37), (2.38) és (2.39) egyenlőségeket behelyettesítve a (3.10) összefüggésbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 E(\Pi_{12}(q_{12})) &= (c_r - c_v) \left(\sum_{k_{12}=0}^{q_{12}-1} k_{12} t_{k_{12}} + q_{12} \sum_{k_{12}=q_{12}}^{\infty} t_{k_{12}} \right) \\
 &- h \left(q_{12} \sum_{k_1=0}^{q_{12}-1} t_{k_1} - \sum_{k_1=0}^{q_{12}-1} k_1 t_{k_1} \right) \\
 &- h \left(q_{12} \sum_{k_{12}=0}^{q_{12}-1} t_{k_{12}} - \sum_{k_{12}=0}^{q_{12}-1} k_{12} t_{k_{12}} \right) \\
 &- p \left(\sum_{k_{12}=q_{12}}^{\infty} k_{12} t_{k_{12}} - q_{12} \sum_{k_{12}=q_{12}}^{\infty} t_{k_{12}} \right).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Differenciálva q_{12} szerint meghatározzuk a lehetséges stacionárius pontokat, azaz azokat, ahol a függvénynek szélsőértéke lehet. Tehát

$$\frac{\partial E(\Pi_{12}(q_{12}))}{\partial q_{12}} = (c_r - c_v) \sum_{k_{12}=q_{12}}^{\infty} t_{k_{12}} - h \sum_{k_1=0}^{q_{12}-1} t_{k_1} - h \sum_{k_{12}=0}^{q_{12}-1} t_{k_{12}} + p \sum_{k_{12}=q_{12}}^{\infty} t_{k_{12}}. \tag{3.17}$$

A deriválás során az első és utolsó sor második, valamint a második és harmadik sor első szummás tagok deriválásánál a (2.27) szabályt alkalmaztuk. A maradék szummás tagok deriváltja q_{12} szerint zérus, mivel konstansok.

A (2.40) összefüggés alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E(\Pi_{12}(q_{12}))}{\partial q_{12}} &= (c_r - c_v) \left(1 - \sum_{k_{12}=0}^{q_{12}-1} t_{k_{12}} \right) - h \sum_{k_1=0}^{q_{12}-1} t_{k_1} \\
 &- h \sum_{k_{12}=0}^{q_{12}-1} t_{k_{12}} + p \left(1 - \sum_{k_{12}=0}^{q_{12}-1} t_{k_{12}} \right).
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Továbbá a (2.41) alapján átalakíthatjuk, ekkor

$$\frac{\partial E(\Pi_{12}(q_{12}))}{\partial q_{12}} = (c_r - c_v)(1 - F_{12}(q_{12})) - hF_1(q_{12}) - hF_{12}(q_{12}) + p(1 - F_{12}(q_{12})),$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\Pi_{12}(q_{12}))}{\partial q_{12}} &= c_r - c_r F_{12}(q_{12}) - c_v + c_v F_{12}(q_{12}) \\ &\quad - hF_1(q_{12}) - hF_{12}(q_{12}) + p - pF_{12}(q_{12}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ott lehet szélsőérték, ahol ennek a függvénynek zérushelye van, azaz

$$\begin{aligned} 0 &= c_r - c_r F_{12}(q_{12}) - c_v + c_v F_{12}(q_{12}) \\ &\quad - hF_1(q_{12}) - hF_{12}(q_{12}) + p - pF_{12}(q_{12}) \\ c_r F_{12}(q_{12}) - c_v F_{12}(q_{12}) + hF_{12}(q_{12}) + pF_{12}(q_{12}) &= c_r - c_v - hF_1(q_{12}) + p \\ F_{12}(q_{12})(c_r - c_v + h + p) &= c_r - c_v - hF_1(q_{12}) + p \\ F_{12}(q_{12}) &= \frac{c_r - c_v - hF_1(q_{12}) + p}{c_r - c_v + h + p}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

A második derivált konkávitása az adott intervallumon igazolja a maximum pont létezését, tehát

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E(\Pi_{12}(q_{12}))}{\partial q_{12}^2} &= -c_r f_{12}(q_{12}) + c_v f_{12}(q_{12}) - hf_1(q_{12}) - hf_{12}(q_{12}) - pf_{12}(q_{12}). \\ &= (c_v - c_r - h - p)f_{12}(q_{12}) - hf_1(q_{12}) < 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A (3.15) alapján a maximum pont létezése analóg módon igazolható.

3.4. Mintafeladat

Feladat

A következőkben a két periódusos együttes gyártás profit maximalizálására mutatunk példa feladatot. Adott egy gyár, ahol egy termék előállításával foglalkoznak. Tegyük fel, hogy a periódusok hetenként vannak, és statisztikai adatokból tudjuk az elkövetkezendő két hét eloszlását. Az első hét és a második hét rendre 220 és 280 várható értékkel, valamint 40 és 60 szórással leírható kereslet várható. A termék előállítása ára legyen 450 Forint, eladási ára pedig 850 Forint termékenként. A megmaradt termékek kezelési költsége periódusonként legyen 150 Ft, a büntető költség pedig 180 Ft termékegységenként.

Megoldás

Mivel a feladat bonyolultabb megoldani, mint egyperiódusos esetben, ezért a megoldást Maple segítségével fogjuk meghatározni. A lépések a következők:

1. Inicializáljuk a feladat adatai alapján a változóinkat.

```
with(Statistics):
E_1 := 220:
E_2 := 280:
D_1 := 40:
D_2 := 60:
c_r := 850:
c_v := 450:
X := RandomVariable(Normal(0, 1)):
```

2. Helyettesítsük be q^* helyére a számokat 0-tól kezdve egyesével, és ha $F_{12}(q_{12}^*)$ értéke nagy közelséggel éppen q^* lesz, akkor megtaláltuk az optimumot.

```
Van_Talalat := 0:
q := 0:
while Van_Talalat != 1 do:
    F1 := CDF(X, (q-E_1)/D_1, numeric):
    t := (-F1*h+c_r-c_v+p)/(c_r-c_v+h+p):
    RIGHT := 1-t:
    RIGHT := Quantile(X, RIGHT):
    F := -(D_1+D_2)*RIGHT+E_1+E_2:
    if q = floor(F) then
        Van_Talalat := 1:
    end if;
    q := q+1:
end do:
```

A lefuttatott program $q^* = 522$ eredményt adott.

3.5. Mintapélda szimulációja a helyesség igazolására

Feladat

Készítsünk szimulációt az előző feladathoz Maple segítségével!

Megoldás

1. Generáljuk 10000 elemű $\mathcal{N}(220, 40)$ valamint $\mathcal{N}(280, 60)$ eloszlású véletlen számokat.

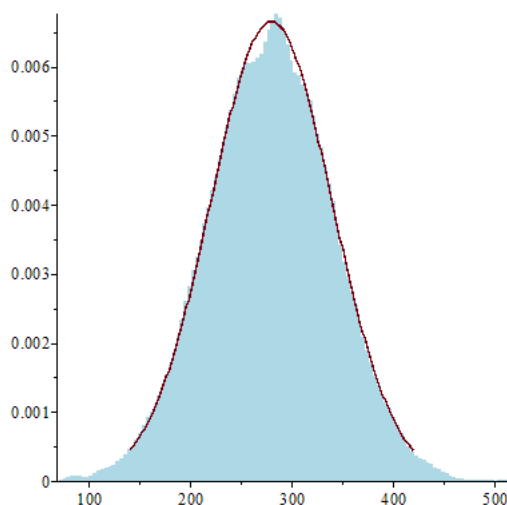
```
with(Statistics):
```

```
N:=10000:
```

```
X1:=Sample(Normal(220,40),N):
```

```
X2:=Sample(Normal(280,60),N):
```

2. Nézzük meg, hogy a generált véletlen számok valóban normális eloszlásúak a fentebb megnevezett paraméterekkel. Ehhez készítsük el az eloszlások sűrűségfüggvényeit, valamint hisztogramokon ábrázoljuk a generált számokat, majd rajzoljuk ki egymásra a két alakzatot eloszlásonként.



3.4. ábra. $\mathcal{N}(280, 60)$ paraméterű eloszlás

```
P1 := DensityPlot(Normal(220, 40), color = "Niagara Red"):
```

```
Q1 := Histogram(X1, averageshifted = 4, style = polygon,  
color = "LightBlue"):
```

```
plots[display](P1, Q1)
```

```
P2 := DensityPlot(Normal(280, 60), color = "Niagara Red"):
```

```
Q2 := Histogram(X2, averageshifted = 4, style = polygon,
```

```

    color = "LightBlue"):
plots[display](P2, Q2)

```

3. Mivel láthatjuk, hogy az optimum 522, ezért vizsgáljuk meg a [322;721] tartományt, azaz, hogy itt hol helyezkedik el a maximum pont.

```

P := Vector(N); T := Vector(400);
T_maxIndex := 322;
for i from 322 to 721 do:
    for j from 1 to N do :
        P[j] := (c_r-c_v)*min(i, X1[j]+X2[j]) -
            h*max(i-X1[j], 0)-h*max(i-X1[j]-X2[j], 0)-
            p*max(X1[j]+X2[j]-i, 0):
    end do:
    T[i-321] := Mean(P):
    if T[T_maxIndex-321] < T[i-321] then T_maxIndex := i:
    end if:
end do:

```

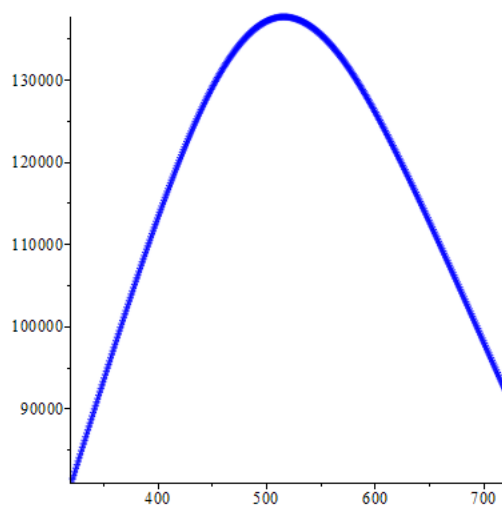
Szimulációnk futtatása után a $T_maxIndex$ értéke 516, ahol a várható profitunk 137.669 Forint.

4. Szemléltessük a vizsgált intervallumon a profit alakulását! Ehhez egészítsük ki programunkat!

```

R := Vector(400); for i from 322 to 721 do R(i-321) := i end do;
plot(R, T, style = point, symbol = asterisk, color = blue)

```



3.5. ábra. $\mathcal{N}(280, 60)$ paraméterű eloszlás

4. fejezet

A modell kiterjesztése n periódusra

4.1. Bevezetés

Az előző fejezetben bemutattuk a két periódusú modellt, melynek segítségével megpróbáljuk a modellt n periódus együttes kezelésére kiterjeszteni. Legyen adott egy termelő üzem, ahol ismert fogyasztási szokások alapján n darab periódust együtt akarnak gyártani. Jelöljük egyes periódusok alatti keresleteket $D_1, D_2, \dots, D_n$ valószínűségi változókkal, melyek páronként függetlenek egymástól. Továbbá az n periódus alatt felmerülő igény legyen $D_{12\dots n}$, azaz $D_{12\dots n} = D_1 + D_2 + \dots + D_n$. A legyártandó mennyiséget jelölje $q_{12\dots n}$. A kérdés továbbra is a következő: mennyit gyártsunk a n periódus lefedésére, hogy profit maximális legyen?

4.2. Matematikai modell

Ahogy a kétperiódusos modell esetén láthattuk, túlkínálat esetén a veszteséget periódusonként, túlkeresletnél a büntető költséget az összes periódust együttléve kezelhetjük.

Tehát az n periódusra jutó összes haszon a következőféleképpen számítható:

$$\Pi_{q_{12\dots n}}(D_{12\dots n}) = \min(q_{12\dots n}, D_{12\dots n}) \cdot (c_r - c_v) - \max(q_{12\dots n} - D_1) \cdot h \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & - \max(q_{12\dots n} - D_2) \cdot h - \dots - \max(q_{12\dots n} - D_{12\dots n}) \cdot h \\ & - \max(D_{12\dots n} - q_{12\dots n}) \cdot p, \end{aligned} \quad (4.2)$$

vagy rövidebben

$$\begin{aligned} \Pi_{q_{12\dots n}}(D_{12\dots n}) &= \min(q_{12\dots n}, D_{12\dots n}) \cdot (c_r - c_v) - \sum_{i=1}^n \max(q_{12\dots n} - D_{12\dots i}) \cdot h \\ & - \max(D_{12\dots n} - q_{12\dots n}) \cdot p. \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.3. Optimumkeresés

A fenti egyenlet várható értéke, valamint e várható érték (2.15a) és (2.15b) képleteknél tárgyalt összefüggése alapján, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} E(\Pi_{12\dots n}(q_{12\dots n})) &= E[q_{12\dots n}, D_{12\dots n}]^- \cdot (c_r - c_v) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n E[q_{12\dots n} - D_{12\dots i}]^+ \cdot h - E[D_{12\dots n} - q_{12\dots n}]^+ \cdot p \end{aligned} \quad (4.4)$$

Kiszámolva a $\frac{\partial E(\Pi_{12\dots n}(q_{12\dots n}))}{\partial q_{12\dots n}}$ parciális deriváltat, megkapjuk, hogy ennek a függvénynek hol lehetnek szélsőértékei. Ehhez először tekintsük a folytonos esetet.

4.3.1. Folytonos eset

Használva a (2.16), (2.17) és (2.18) levezetett összefüggéseket, írhatjuk a következőt:

$$\begin{aligned} E(\Pi_{12\dots n}(q_{12\dots n})) &= (c_r - c_v) \left(\int_0^{q_{12\dots n}} x_{12\dots n} f(x_{12\dots n}) dx_{12\dots n} + q_{12\dots n} \int_{q_{12\dots n}}^{\infty} f(x_{12\dots n}) dx_{12\dots n} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n h \left(q_{12\dots n} \int_0^{q_{12\dots n}} f_{12\dots i}(x_{12\dots i}) dx_{12\dots i} - \int_0^{q_{12\dots n}} x_{12\dots i} f_{12\dots i}(x_{12\dots i}) dx_{12\dots i} \right) \\ &\quad - p \left(\int_{q_{12\dots n}}^{\infty} x_{12\dots n} f_{12\dots n}(x_{12\dots n}) dx_{12\dots n} - q_{12\dots n} \int_{q_{12\dots n}}^{\infty} f_{12\dots n}(x_{12\dots n}) dx_{12\dots n} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ennek a $q_{12\dots n}$ szerinti parciális deriváltját a (2.21) és (2.22) egyenlőségek alapján számoljuk, azaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\Pi_{12\dots n}(q_{12\dots n}))}{\partial q_{12\dots n}} &= (c_r - c_v) \left(q_{12\dots n} f_{12\dots n}(q_{12\dots n}) + \int_{q_{12\dots n}}^{\infty} f(x_{12\dots n}) dx_{12\dots n} - q_{12\dots n} f_{12\dots n}(q_{12\dots n}) \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n h \left(q_{12\dots n} f_{12\dots i}(q_{12\dots n}) + \int_0^{q_{12\dots n}} f_{12\dots i}(x_{12\dots i}) dx_{12\dots i} - q_{12\dots n} f_{12\dots i}(q_{12\dots n}) \right) \\ &\quad - p \left(-q_{12\dots n} f_{12\dots n}(q_{12\dots n}) - \int_{q_{12\dots n}}^{\infty} f_{12\dots n}(x_{12\dots n}) dx_{12\dots n} + q_{12\dots n} f_{12\dots n}(q_{12\dots n}) \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\Pi_{12\dots n}(q_{12\dots n}))}{\partial q_{12\dots n}} &= (c_r - c_v) \int_{q_{12\dots n}}^{\infty} f(x_{12\dots n}) dx_{12\dots n} - \sum_{i=1}^n h \int_0^{q_{12\dots n}} f_{12\dots i}(x_{12\dots i}) dx_{12\dots i} \\ &+ p \int_{q_{12\dots n}}^{\infty} f_{12\dots n}(x_{12\dots n}) dx_{12\dots n}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A (2.19) összefüggést kihasználva írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\Pi_{12\dots n}(q_{12\dots n}))}{\partial q_{12\dots n}} &= (c_r - c_v) \left(1 - \int_0^{q_{12\dots n}} f(x_{12\dots n}) dx_{12\dots n} \right) \\ &- \sum_{i=1}^n h \int_0^{q_{12\dots n}} f_{12\dots i}(x_{12\dots i}) dx_{12\dots i} \\ &+ p \left(1 - \int_0^{q_{12\dots n}} f_{12\dots n}(x_{12\dots n}) dx_{12\dots n} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\quad (4.9)$$

Továbbiakban a (2.20) egyenlet alapján behelyettesíthetünk, tehát

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\Pi_{12}(q_{12\dots n}))}{\partial q_{12\dots n}} &= (c_r - c_v)(1 - F_{12\dots n}(q_{12\dots n})) - \sum_{i=1}^n h F_{12\dots i}(q_{12\dots n}) \\ &+ p(1 - F_{12\dots n}(q_{12\dots n})) \end{aligned} \quad (4.10)$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\Pi_{12\dots n}(q_{12\dots n}))}{\partial q_{12\dots n}} &= c_r - c_r F_{12\dots n}(q_{12\dots n}) - c_v + c_v F_{12\dots n}(q_{12\dots n}) \\ &- \sum_{i=1}^n h F_{12\dots i}(q_{12\dots n}) + p - p F_{12\dots n}(q_{12\dots n}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

Hasonlóan az eddigi szélsőérték számításokhoz, a vizsgált függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol ez a derivált zérus, azaz

$$\begin{aligned} 0 &= c_r - c_r F_{12\dots n}(q_{12\dots n}) - c_v + c_v F_{12\dots n}(q_{12\dots n}) \\ &- \sum_{i=1}^n h F_{12\dots i}(q_{12\dots n}) + p - p F_{12\dots n}(q_{12\dots n}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

Rendezzük úgy az egyenletet, hogy bal oldalt csak $F_{12\dots n}(q_{12\dots n})$ legyen, ehhez először bontsuk szét a szummás kifejezést, azaz

$$\begin{aligned} 0 &= c_r - c_r F_{12\dots n}(q_{12\dots n}) - c_v + c_v F_{12\dots n}(q_{12\dots n}) \\ &\quad - h \sum_{i=1}^{n-1} F_{12\dots i}(q_{12\dots n}) - h F_{12\dots n}(q_{12\dots n}) + p - p F_{12\dots n}(q_{12\dots n}), \end{aligned} \quad (4.13)$$

melyből adódik, hogy

$$F_{12\dots n}(q_{12\dots n}) = \frac{c_r - c_v - h \sum_{i=1}^{n-1} F_{12\dots i}(q_{12\dots n}) + p}{c_r - c_v + h + p}. \quad (4.14)$$

Tehát az egyenlet megoldását adó $q_{12\dots n}^*$ helyen lehet, hogy van maximum pont. Mivel F eloszlásfüggvény, ennek értéke 0 és 1 közé esik, valamint egyik tulajdonsága az, hogy szigorúan monoton növekvő. Ebből következik, hogy csak egy szélsőértéke lehet a vizsgált függvénynek. Hogy ez maximumpont, meg kell vizsgálnunk a második parciális deriváltat, amely

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E(\Pi_{12}(q_{12\dots n}))}{\partial q_{12\dots n}^2} &= -c_r f_{12\dots n}(q_{12\dots n}) + c_v f_{12\dots n}(q_{12\dots n}) \\ &\quad - h \sum_{i=1}^{n-1} f_{12\dots i}(q_{12\dots n}) - h f_{12\dots n}(q_{12\dots n}) - p f_{12\dots n}(q_{12\dots n}) \\ &= (c_v - c_r - h - p) f_{12\dots n}(q_{12\dots n}) - h \sum_{i=1}^{n-1} f_{12\dots i}(q_{12\dots n}) < 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Hasonlóan az eddigi elemzésünkhöz, a $c_r - c_v$ mindig negatív lesz, amelyet tovább csökkentenek a h és p paraméterek. Ezt szorozva a pozitív $f_{12\dots n}(q_{12\dots n})$ sűrűségfüggvénnyel az eredmény továbbra is negatív lesz. Ezenfelül a szummás kifejezésben összeadott sűrűségfüggvények szintén pozitívak, mely végül a pozitív h kezelési költséggel szorozva ismét nemnegatív eredményt kapunk. A kapott eredményt levonva az először számolt negatív számból, továbbra az érték továbbra is negatív, tehát a kapott pont maximumpont.

Előfordulhat a (4.14) számításakor, hogy a számláló negatív értéket vesz fel, azaz amikor a periódusonként számolt kezelési költségek összege meghaladja a $c_r - c_v + p$ értéket. Ebben az esetben nincs optimális megoldás.

4.3.2. Diszkrét eset

A következőkben a (4.4) függvény szélsőértékét fogjuk meghatározni diszkrét esetben. Ehhez helyettesítsük be a (2.38), (2.37) valamint a (2.39) pontokban levezetett képleteket, ekkor kapjuk a következőt:

$$\begin{aligned} E(\Pi_{12\dots n}(q_{12\dots n})) &= (c_r - c_v) \left(\sum_{k_{12\dots n}=0}^{q_{12\dots n}-1} k_{12\dots n} t_{k_{12\dots n}} + q_{12\dots n} \sum_{k_{12\dots n}=q_{12\dots n}}^{\infty} t_{k_{12\dots n}} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n h \left(q_{12\dots n} \sum_{k_{12\dots i}=0}^{q_{12\dots n}-1} t_{k_{12\dots i}} - \sum_{k_{12\dots n}=0}^{q_{12\dots n}-1} k_{12\dots n} t_{k_{12\dots n}} \right) \\ &\quad - p \left(\sum_{k_{12\dots n}=q_{12\dots n}}^{\infty} k_{12\dots n} t_{k_{12\dots n}} - q_{12\dots n} \sum_{k_{12\dots n}=q_{12\dots n}}^{\infty} t_{k_{12\dots n}} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Differenciáljunk $q_{12\dots n}$ szerint, ekkor adódik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\Pi_{12\dots n}(q_{12\dots n}))}{\partial q_{12\dots n}} &= (c_r - c_v) \sum_{k_{12\dots n}=q_{12\dots n}}^{\infty} t_{k_{12\dots n}} - \sum_{i=1}^n h \sum_{k_{12\dots i}=0}^{q_{12\dots n}-1} t_{k_{12\dots i}} \\ &\quad + p \sum_{k_{12\dots n}=q_{12\dots n}}^{\infty} t_{k_{12\dots n}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

A (2.40) összefüggést felhasználva írhatjuk a következőt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\Pi_{12\dots n}(q_{12\dots n}))}{\partial q_{12\dots n} - 1} &= (c_r - c_v) \left(1 - \sum_{k_{12\dots n}=0}^{q_{12\dots n}-1} t_{k_{12\dots n}} \right) - h \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k_{12\dots i}=0}^{q_{12\dots n}-1} t_{k_{12\dots i}} \right) \\ &\quad + p \left(1 - \sum_{k_{12\dots n}=0}^{q_{12\dots n}-1} t_{k_{12\dots n}} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

A jobb oldalt F eloszlásfüggvénnyel is kifejezhetjük a (2.41) alapján, tehát

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\Pi_{12}(q_{12\dots n}))}{\partial q_{12\dots n}} &= (c_r - c_v)(1 - F_{12\dots n}(q_{12\dots n})) - h \sum_{i=1}^n F_{12\dots i}(q_{12\dots n}) \\ &\quad + p(1 - F_{12\dots n}(q_{12\dots n})) \end{aligned} \quad (4.19)$$

A vizsgált függvénynek ott lehet zérusértéke, ahol a kapott $\frac{\partial E(\Pi_{12}(q_{12\dots n}))}{\partial q_{12\dots n}} = 0$, tehát

$$\begin{aligned} 0 &= (c_r - c_v)(1 - F_{12\dots n}(q_{12\dots n})) - h \sum_{i=1}^n F_{12\dots i}(q_{12\dots n}) \\ &\quad + p(1 - F_{12\dots n}(q_{12\dots n})) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Rendezzük az egyenletet úgy, hogy bal oldalt csak $F_{12\dots n}(q_{12\dots n})$ legyen. Ehhez először bontsuk fel a szummás kifejezést, azaz

$$0 = (c_r - c_v)(1 - F_{12\dots n}(q_{12\dots n})) - h \sum_{i=1}^{n-1} F_{12\dots i}(q_{12\dots n}) - h F_{12\dots n}(q_{12\dots n}) \quad (4.21) \\ + p(1 - F_{12\dots n}(q_{12\dots n})),$$

majd a zárójeleket is, tehát

$$0 = c_r - c_r F_{12\dots n}(q_{12\dots n}) - c_v + c_v F_{12\dots n}(q_{12\dots n}) - h \sum_{i=1}^{n-1} F_{12\dots i}(q_{12\dots n}) \quad (4.22) \\ - h(F_{12\dots n}(q_{12\dots n}) + p - p F_{12\dots n}(q_{12\dots n})).$$

Kifejezve $F_{12\dots n}(q_{12\dots n})$ -t adódik, hogy

$$F_{12\dots n}(q_{12\dots n}) = \frac{c_r - c_v - h \sum_{i=1}^{n-1} F_{12\dots i}(q_{12\dots n}) + p}{c_r - c_v + h + p}. \quad (4.23)$$

Szélsőértéke a fenti egyenletet kielégítő $q_{12\dots n}^*$ helyen van. Hasonlóan a (4.14) pontban leírtakhoz, analóg módon igazolható, hogy a fenti függvénynek egy legfeljebb egy szélsőértéke lehet, és hogy ez a szélsőérték maximumpont.

4.4. Mintafeladat

Feladat

Legyen adott egy termelő üzem, ahol minden hét elején szoktak gyártani, és a következő három hét keresletének az eloszlása ismert. Ezek legyenek normális eloszlású valószínűségi változók és következő táblázat megadja a következő három hét várható értékét és szórását. A termék előállítási, eladási ára, kezelési költsége, büntető költsége legyen rendre 450, 850, 100, 160 Forint termékenként. Hány darabot gyártsuk, hogy profitunk maximális legyen?

Hét	Várható érték	Szórás
1.	220	40
2.	280	60
3.	260	80

Megoldás

A feladatot oldjuk meg Maple segítségével, ahogyan a kétperiódusú modellnél is tettük. A q^* optimumot a következő algoritmus adja meg:

```
with(Statistics);
E_1 := 220; E_2 := 280; E_3 := 260;
D_1 := 40; D_2 := 60; D_3 := 80;
c_r := 850; c_v := 450; p := 160; h := 100;
X := RandomVariable(Normal(0, 1));
Van_Talalat := 0;
q := 0;
while Van_Talalat <> 1 do
    F1 := CDF(X, (q-E_1)/D_1, numeric);
    F2 := CDF(X, (q-E_1-E_2)/(D_1+D_2), numeric);
    t := (-F1*h-F2*h+c_r-c_v+p)/(c_r-c_v+h+p);
    RIGHT := 1-t;
    RIGHT := Quantile(X, RIGHT);
    F := -(D_1+D_2+D_3)*RIGHT+E_1+E_2+E_3;
    if q = floor(F) then Van_Talalat := 1 end if;
    q := q+1
end do;
```

A program lefutása után az optimális mennyiség 780 darab.

4.5. Mintapélda szimulációja a helyesség igazolására

Feladat

Generáljunk 10000 elemű normális eloszlásokat, és nézzük meg, hogy a szimuláció alapján mennyi terméket kellene gyártanunk, és ez esetben mennyi lenne a profitunk!

Megoldás

Tekintsük a következő, Mapleban írt algoritmust.

```
with(Statistics);
N := 10000; c_r := 850;
c_v := 450; p := 160;
h := 100;
X1 := Sample(Normal(220, 40), N);
X2 := Sample(Normal(280, 60), N);
```

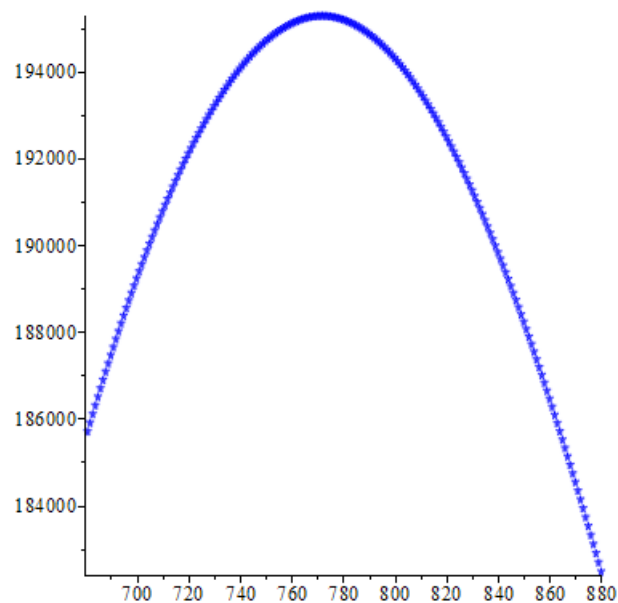
```

X3 := Sample(Normal(260, 80), N);

T := Vector(200);
T_maxIndex := 681;
FT := 0;
for i from 681 to 880 do
    for j to N do
        P[j] := (c_r-c_v)*min(i, X1[j]+X2[j]+X3[j])–
                h*max(i–X1[j], 0)–h*max(i–X1[j]–X2[j], 0)–
                h*max(i–X1[j]–X2[j]–X3[j], 0)–
                p*max(X1[j]+X2[j]+X3[j]–i, 0)
    end do;
    T[i–680] := Mean(P);
    if T[T_maxIndex–680] < T[i–680] then
        T_maxIndex := i;
        FT := T[i–680]
    end if
end do;

```

A szimuláció lefutása után $q = 775$ adódott, amely esetben 196276 Ft profitunk termelődne.



4.1. ábra. A profit változása q függvényében

5. fejezet

A fajlagos profit számítása

5.1. Bevezetés

Mikroökonómiában fajlagos profit alatt egy kibocsátott jószágegységre jutó profitot nevezzük. Legyen adott egy termelő üzem, ahol előre ismert n periódusra a várható vásárlási igény. Határozzuk meg azon együtt gyártási periódusok számát, ahol a fajlagos profit maximális. Ehhez a

$$\max \left(\frac{E(\Pi_1(q_1))}{q_1}, \frac{E(\Pi_{12}(q_{12}))}{q_{12}}, \dots, \frac{E(\Pi_{12\dots n}(q_{12\dots n}))}{q_{12\dots n}} \right)$$

értéket kell meghatároznunk.

5.2. Mintapéllda

Adott egy gyár, ahol előrejelzési adatok alapján tudják az elkövetkezendő 6 hét forgalmának jellemzőit. Megállapították, hogy az ezzel jellemezhető valószínűségi változó normális eloszlást követ, melyek függetlenek egymástól. A termék gyártási költsége 4500 Ft, eladási ára 9500 Ft, büntető költsége 3000 Ft, hűtési (kezelési) költsége periódusonként 100 Ft. Hány periódust vonjunk össze, hogy az egy termékre jutó profitunk maximális legyen?

hét	várható érték	szórás
1.	50	5
2.	90	10
3.	110	12
4.	120	17
5.	105	20
6.	108	25

Megoldás

A következőkben a n periódusnál levezetett képlet segítségével végigszámoljuk egyesével összevonva a periódusokat, és megállapítjuk, hogy a fajlagos profit hol volt a maximális. Ehhez segítségül a következő Maple programot használjuk:

```
with(Statistics);
N := 6; h := 100; p := 3000;
c_r := 9500; c_v := 4500;
_E := Vector([50, 90, 110, 120, 105, 108]);
_D := Vector([5, 10, 12, 17, 20, 25]);
SUM_E := Vector(N);
SUM_D := Vector(N);
for i to N do
    s_e := 0; s_d := 0;
    for j to i do s_e := s_e+_E[j]; s_d := s_d+_D[j] end do;
    SUM_E[i] := s_e; SUM_D[i] := s_d
end do;
X := RandomVariable(Normal(0, 1));
Q := Vector(N);
for i to N do
    q := 0; Van_Talalat := 0;
    F := Vector(i-1);
    while Van_Talalat <> 1 do
        for j to i-1 do
            F[j] := CDF(X, (q-SUM_E[j])/SUM_D[j], numeric)
        end do;
        H_sum := 0;
        for j to i-1 do
            H_sum := h*F[j]+H_sum
        end do;
        RIGHT := 1-(c_r-c_v-H_sum+h)/(c_r-c_v+h+p);
        F_LAST := Quantile(X, RIGHT);
        F_LAST := -F_LAST*SUM_D[i]+SUM_E[i];
        if q = floor(F_LAST) then
            Van_Talalat := 1
        end if;
        q := q+1
    end do;
    Q[i] := q-1; end do
```

Az algoritmus lefutása után a következő optimumértékek adódnak:

Első X hét összevonása	Optimális gyártási mennyiség (q^*)
1.	51
2.	144
3.	257
4.	380
5.	487
6.	598

Magyarázat: Ha egy hetet akarunk összevonni, akkor 51 darabot kell gyártanunk. Két hét összevonása esetén pedig 144 darabot.

Ezután szimuláljuk az egyes heteket, és nézzük meg, hogy ez alapján mennyit érdemes gyártani, ekkor mennyi lesz a hasznunk, valamint a fajlagos profitunk. Ehhez tekintsük a következő algoritmust.

```

M := 10000; X := Vector(N); Y := Vector(N);
for i to N do
    X[i] := Sample(Normal(_E[i], _D[i]), M);
    Y[i] := Vector(M)
end do;
for i to M do
    Y[1][i] := X[1][i];
    for j from 2 to N do
        Y[j][i] := Y[j-1][i] + X[j][i]
    end do
end do;

FT := Vector(N); T_MAX := Vector(N);
for i to N do
    P := Vector(M); DB := 200; T := Vector(DB+1);
    DB := (1/2)*DB; T_maxIndex := Q[i]-DB; Max_FT := 0;
    for j from Q[i]-DB to Q[i]+DB do
        for k to M do
            PROFIT := min(Y[i][k], j)*(c_r-c_v);
            for n to i do
                PROFIT := PROFIT-h*max(j-Y[n][k], 0)
            end do;
            PROFIT := PROFIT-p*max(j-Y[i][k], 0);
            P[k] := PROFIT
        end do;
    end do;

```

```

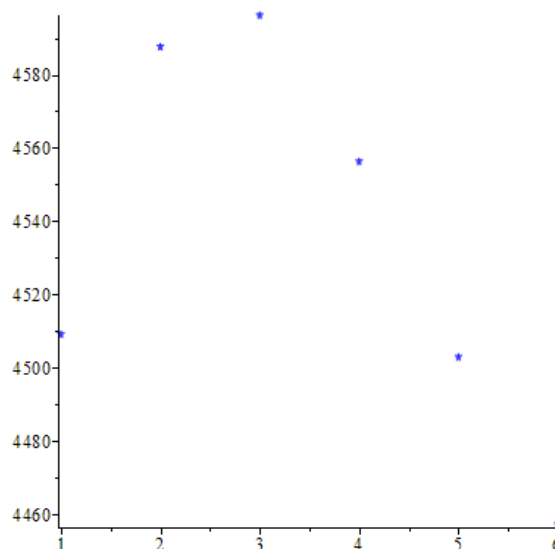
T[j-Q[i]+DB+1] := Mean(P);
if T[j-Q[i]+DB+1] > T[T_maxIndex-Q[i]+DB+1] then
    T_maxIndex := j;
    Max_FT := T[j-Q[i]+DB+1]
end if
end do;
T_MAX[i] := T_maxIndex;
FT[i] := Max_FT;
end do;

```

Az algoritmus lefutása után a következő értékek adódnak:

Első X hét összevonása	Gyártási mennyiség [darab]	Profit [Ft]	Fajlagos profit [Ft/darab]
1	52	234.475,64	4509,14
2	143	656.028,03	4587,60
3	254	1.167.439,19	4596,21
4	375	1.708.606,60	4556,28
5	481	2.165.911,18	4502,93
6	588	2.620.867,98	4457,25

Láthatjuk, hogy a fajlagos profit maximumához három hét összevonásával jutunk.



5.1. ábra. A fajlagos profit alakulása a hetek összevonásának függvényében

Irodalomjegyzék

- [1] Dr. Mileff Péter: Kiterjesztett újságárus modell alkalmazása az igény szerinti tömeggyártás készletgazdálkodási problémáiban. Phd disszertáció. Miskolc, 2007
- [2] Dr. Fegyverneki Sándor, Dr. Raisz Péter: Sztohasztikus modellezés. Nemzeti Tankönyvkiadó. Miskolc, 2010-2011
- [3] Denkinger Géza: Valószínűségszámítás. Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest
- [4] Dr. Sztrik János: Raktározási és kiszolgálási problémák matematikai modellezése. Egyetemi jegyzet. Debrecen, 2004
- [5] Dr. Fegyverneki Sándor: Valószínűség-számítás és matematikai statisztika. Miskolc, 2007
- [6] Dr. Fazekas István: Valószínűségszámítás és statisztika. Kelet-Magyarországi Informatika Tananyag Tárház. Debrecen, 2012
- [7] Dr. Prékopa András: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal. Műszaki könyvkiadó. Budapest, 1974
- [8] Dr. Nagy Tamás: Feltétel nélküli optimalizálás. Miskolci Egyetem, 2012
- [9] Dr. Házy Attila: Nemlineáris optimalizálás. Kelet-Magyarországi Informatika Tananyag Tárház. Miskolc, 2012
- [10] Dr. Rontó Miklós, Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia: Kalkulus. Nemzeti Tankönyvkiadó. Miskolc, 2011.
- [11] Kovács Zoltán: Rövid bevezetés a Maple használatába. 2004