

Miskolci Egyetem
Gépészmérnöki és Informatikai Kar
Gép- és Terméktervezési Intézet

Evolvens , egyenes fogazatú fogaskerekek fogalakjának meghatározása



Készítette:
Debreczeni Dániel

Konzulens:
Dr. Kamondi László
egyetemi docens

Miskolc, 2013.11.03.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	2.
Jelmagyarázat	3.
1. Matematikai alapok	5.
1.1. Koordináta rendszerek közötti transzformáció	5.
2. Maag eljárás	8.
2.1. Alaprofilok	8.
2.2. Szerszám geometria	9.
3. Fogprofil geometriai szakaszai	11.
3.1. Körevolvens származtatása és matematikai leírása	11.
3.2. Fogtőgörbe származtatása és matematikai leírása	15.
4. Gyártási interferenciák	20.
4.1. Fogkihegyesedés	20.
4.2. Alámetszés	20.
5. Fogprofilszakaszok egymáshoz illesztése	22.
5.1. Körevolvens relatív helyzetének meghatározása	22.
5.2. Fogtőgörbe relatív helyzetének meghatározása	22.
6. Fogprofilok kirajzolása	24.
7. Összefoglalás	27.

Bevezetés

Az alábbi munkában egy lefejtő eljárással készült, evolvens, egyenes fogazatú, hengeres fogaskerék fogalakjának matematikai leírásával foglalkozom. A vizsgálatok során Maag eljárással való megmunkálást feltételezek. Ezen választás célszerűsége számos szempont alapján megmutatkozik. Ezek közül a legfontosabbak a viszonylag egyszerű szerszámgeometria és a lefejtés viszonylag könnyen leírható mozgásvizonyai. Természetesen az eltérő lefejtő eljárások eltérő fogalakokat eredményeznek, azonban ennek a munkának a keretében nem áll módunkban a bonyolultabb geometriákhoz tartozó leképezési eljárásokkal foglalkozni. Vizsgálataim elején ki fogok térni a legfontosabb matematikai megoldásokra, amelyek használata nélkülözhetetlen a számítások során. Ezenkívül áttekintem a Maag eljárás legfontosabb jellemzőit, valamint a fésűs és különböző metszetiben megfigyelhető alaprofiljait és azok geometriai paramétereit is. Az előzetes megállapítások után elvégezem az egyes fogprofilszakaszok származtatását, majd pedig ezekből kialakítom a tényleges profilalakot. Vizsgálataim a fogazás során előforduló interferenciákra, továbbá az ezekhez tartozó határfeltételekre is ki fognak terjedni. Az eredmények segítségével egy Excel táblát is készítettem, amely Maag eljárás esetén tetszőleges paraméterek esetén képes az evolvens, egyenes fogazatú fogaskerék fogalakjának modellezésére. Ezek az eredmények fontos kiindulási pontjai a fogaskerek szilárdsági méretezésének, amellyel a közeljövőben foglalkozni szeretnék.

Jelmagyarázat

Latin kisbetűk

c^*	fejmagasság tényező
d	szerszám középvonalának és egyenes profilszakaszának fejtér felüli határpontjának távolsága
e	osztóköri fogárok vastagság
h_a^*	fejmagasságtényező
m	modul
r_a	fejkör sugara
r_b	alapkör sugara
r_y	tetszőleges sugár
r_2	fogazott kerék osztóköri sugara
r_3	szerszám élének lekerekítési sugara
s_n	osztóköri normálmetszeti fogvastagság
s_t	osztóköri homlokmetszeti fogvastagság
s_y	tetszőleges köri fogvastagság
s_0	szerszám osztóköri fogvastagsága
x	profileltolási-tényező
z	fogsorszám

Latin nagybetűk

A	fejkör és a használható profilszakasz közös pontja
F	láb kör tetszőleges pontja
G	szerszám egyenes oldalszakaszának és éllekerekítésének határpontja
J	kör evolvens tetszőleges pontja
K_1	fogtő görbe és láb kör közös pontja
K_2	fogtő görbe és használható profilszakasz közös pontja
N	evoluta tetszőleges pontja

Görög kisbetűk

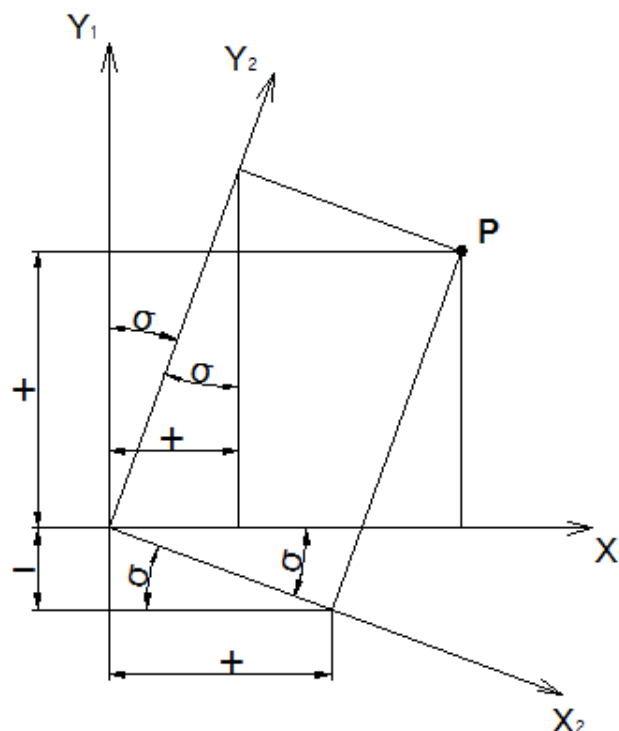
α	tetszőleges profilszög
α_a	fejköri profilszög
α_i	alapprofilszög
α_{it}	homlok-alapprofilszög
β	fogferdeségi szög
σ	elfordulási szög koordináta transzformáció esetén
φ	elfordulási szög görbeszármaztatás esetén
ω	szögsebesség

1. Matematikai alapok

Mielőtt elkezdenénk a fogprofil matematikai leírását célszerű áttekintenünk a geometriai leképezésnél használt fontosabb formulákat. Így az alkalmazott gondolatmenet illetve megoldások könnyebben áttekinthetőké válnak. Az ebben a fejezetben tárgyalt transzformációs módszer többek között nélkülözhetetlen lesz a fogtőgörbe meghatározásánál illetve a profilszakaszok relatív helyzetének megadásánál is. Így a későbbiekben többször is alkalmazni fogjuk ezt az eljárást.

1.1. Koordináta rendszerek közötti transzformáció

Az elkövetkező számítások során többször is szükségünk lesz a koordináta transzformációkra, vagyis hogy ugyanazt a görbét több előre definiált koordináta-rendszerben is megadhassuk vagy esetleg tetszőlegesen mozgathassuk. Ez az eljárás egy adott görbéhez tartozó burkológörbe előállításánál is alkalmazható. Az utóbbival a fogtőgörbe leírásánál részletesen is megismerkedünk. Vizsgálataink során mi csak kétdimenziós esettel fogunk találkozni, ezért a továbbiakban most is erre a típusra fektetjük a hangsúlyt. A tárgyalt formulák azonban könnyedén kiterjeszthetők a háromdimenziós esetre is. A kiterjesztés módjára a fejezet végén röviden majd kitérünk.



1.1. ábra: Koordináta transzformáció

A könnyű kezelhetőségből adódóan két koordináta-rendszer kapcsolatát mátrixos alakban szoktuk megadni. Vegyük szemügyre az 1.1. ábrát. Látható hogy a két rendszer közötti kapcsolat csupán a középponti szögelfordulás mértékével leírható. Tehát a transzformáció egy 2x2-es mátrixban foglalható össze. A továbbiakban a következő jelölést fogjuk használni. Az M_{12} alak azt a mátrixot jelöli, amely az 2-es koordináta-rendszerből a 1-esbe való áttérést szolgálja. Ennek fényében az M_{12} az (1.1.) összefüggésnek megfelelően áll elő.

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma \\ -\sin \sigma & \cos \sigma \end{bmatrix} \quad (1.1.)$$

A két koordináta rendszer közötti kapcsolatot így egyértelműen definiáltuk, vagyis a két koordináta rendszer egymásba egyértelműen átranzformálható. A transzformációs művelet az (1.2.) egyenlet analógiájára könnyedén alvégezhető.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma \\ -\sin \sigma & \cos \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (1.2.)$$

Azonban megváltozik a helyzet, ha a koordináta rendszerek origója nem esik egybe. Ekkor ugyanis a mátrixba be kell építenünk a két koordináta-rendszer kezdőpontjai között fennálló viszony mérőszámait. Másképpen meg kell adnunk a két pont egymáshoz képesti koordináta tengelyeken mért távolságát. Ennek következtében a transzformációs mátrix az (1.3.) alakot ölti.

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma & A \\ -\sin \sigma & \cos \sigma & B \end{bmatrix} \quad (1.3.)$$

Látszik, hogy a mátrix jelenlegi alakjával az (1.2.) formula nem használható, mivel a transzformációs mátrix oszlopainak száma nem egyezik meg a vele szorzandó vektor sorainak számával. Ezt a problémát homogén koordináták előállításával fogjuk megszüntetni. Az új koordináták előállítását az (1.4.) egyenletek szemléltetik. Látható, hogy a régi paramétereket egy tetszőleges konstanssal szorozzuk, így kapva meg a homogén tagokat.

$$x^* = l \cdot x; \quad y^* = l \cdot y \quad (1.4.)$$

Az l paraméter értékét célszerűen 1-nek vesszük, így a másik koordinátarendszerbe való áttérés után nem kell foglalkozni a koordináták visszaszámolásával. A már homogén koordinátákat tartalmazó (1.5.) mátrix láthatóan már alkalmas a műveletek elvégzéséhez.

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & A \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & B \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5.)$$

Természetesen a transzformáció elvégzéséhez az transzformálandó vektort is homogén koordinátákkal kell felírni. A művelet pedig az (1.6.) egyenletnek megfelelően végezhető el.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & A \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & B \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ l \end{bmatrix} \quad (1.6.)$$

Az előzőekben meghatároztuk a 2-es rendszerből az 1-esbe való áttéréshez szükséges mátrixot. Azonban a későbbiekben találkozni fogunk olyan esettel is, amikor éppen a az M_{12} mátrix M_{21} reciprokmátrixára van szükség. Ezt a mátrixot az előző előállításának analógiájára könnyedén megkaphatjuk. Homogén alakjára végül pedig az (1.7.) összefüggést nyerjük.

$$M_{21} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & -A \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & -B \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.)$$

A fejezet elején szó volt róla, hogy röviden ki fogunk térni a háromdimenziós típus tárgyalására. Ez az eset is hasonlóan kezelhető csak ebben az esetben nem 3x3-mas, hanem 4x4-es mátrixszal dolgozunk. Csupán szem előtt kell tartanunk, hogy a transzformációs mátrix azon elemei, amelyek a koordináta-rendszerek közötti elforgatást írják le, másképpen az utolsó sor és oszlop elhagyásával megmaradó elemek, nem mások mint az új és az eredeti rendszer tengelyei által bezárt szögek koszinuszai.

$$M_{21} = \begin{bmatrix} \cos(x_2, x_1) & \cos(x_2, y_1) & -A \\ \cos(y_2, x_1) & \cos(y_2, y_1) & -B \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8.)$$

2. Maag eljárás

Ebben a fejezetben evolvens fogazatú fogaskerekék fésűs késsel történő fogazásának geometriai vizsgálatával fogunk foglalkozni. Ugyanis a későbbi fejezetekben ezt az eljárást fogjuk választani a fogazat előállításához. Ez a megmunkálási forma a legegyszerűbben egy egyenes profilszakaszokkal rendelkező fogaslécnek egy adott körön való legördítéseként írható le. Ebből adódóan mind a szerszámprofil, mind a munkadarab és a szerszám relatív mozgása viszonylag egyszerűnek tekinthető. Ehhez a fogazási típushoz viszonylag bonyolult berendezésre van szükség. Emellett pedig a módszer nem is tekinthető túlzottan termelékenynek. Azonban a szerszámgeometria egyszerűen megadható, pontossága könnyen ellenőrizhető. Ennek következtében az előállított fogazat pontossága a lefejtő eljárások alaptípusai között a legjobbnak mondható.

2.1. Alaprofilok

A szerszám alaprofilját a fogazat alaprofilja határozza meg. Az utóbbinak a fogazáselméletben azt a profilt tekintjük, amelynek egyenközű lineáris kiosztása esetén előállnak az eredeti profilok kapcsolódásbeli burkológörbéi. Másképpen fogalmazva a fogazat alaprofilja egy olyan fogasléc, amely képes kapcsolódni a vizsgált kerékkel. A szerszám alaprofil minden esetben a kés normálmetszetében értelmezzük. Ebből adódóan a szerszám alaprofil mind egyenes mind pedig ferde fogazatú esetben megegyezik. A fogazat alaprofiljának lábvonala a szerszám alaprofiljával való egymásba helyezéskor minden esetben megegyezik annak fejevonalával. Azonban a szerszámprofil lábvonala az esetek többségében nem egyezik meg a fogazat alaprofiljának fejevonalával. Az egybeesés csak nagyon kis modulok esetén jön létre. Ebben az esetben a szerszám nem csak a fogaskerék lábkörét és a fogak oldalsó profiljait, hanem a fejkört is létrehozza. Vagyis zárt profilú szerszámról beszélhetünk. A fogazószerszám másik nevezetes metszetét, a lefejtő alaprofil a szerszám alaprofilhoz hasonlóan származtatjuk. Azzal a különbséggel, hogy ezt az alaprofil a kés homlokmetszetében értelmezzük. Tehát míg egyenes fogazat esetén a két alaprofil egybeesik, addig ferde fogazat esetén eltérhetnek egymástól. Ferde fogazatot Maag eljárással két féleképpen alakíthatunk ki. Az első esetben az egyenes fogú fésűs kést a fogferdeségi szögnek megfelelően beállított löketfejbe a forgácsoló főmozgásra merőlegesen fogják be. A másik megoldás, hogy a foghajlásszögnek megfelelő kést fognak a ferdére állított löketfejbe, úgy hogy a szerszám hossziránya a fogazandó kerék homloksíkjába essen.

Ebben az esetben a szerszám homlokosztása megegyezik a fogaskerék homlokosztásával, míg magassága megegyezik a fogaskerék alapprofiljával. A fésűs kés homlok-alapprofilszöge és osztóköri homlokvastagsága a (2.1.) és (2.2.) egyenletek alapján határozható meg.

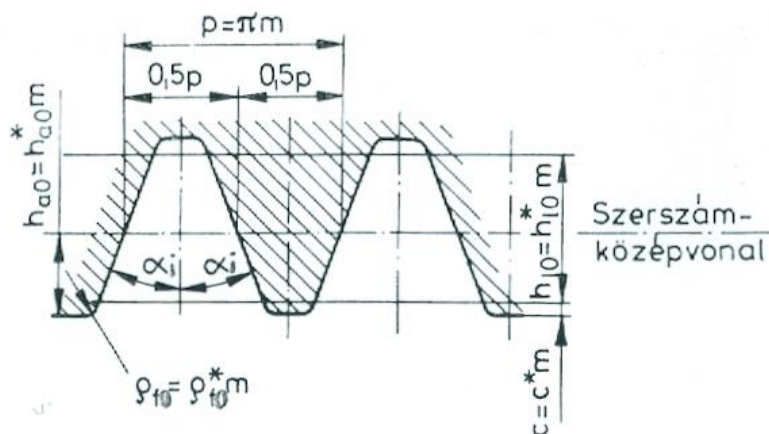
$$s_t = \frac{s_n}{\cos \beta} \quad (2.1.) [2]$$

$$\tan \alpha_{it} = \frac{\tan \alpha_i}{\cos \beta} \quad (2.2.) [2]$$

A továbbiakban egyszerűsítési okokból csak egyenes fogazatú fogaskerekkel foglalkozunk.

2.2. Szerszám geometria

A későbbi számítások gyakorlatban való alkalmazásához elengedhetetlen a használt szerszám geometriai paramétereinek pontos ismerete. Illetve olyan összefüggések megléte, amelyek segítségével egy tetszőleges paraméterekkel rendelkező fogaskerékhez tartozó lefejtőszerszám, a mi esetünkben Maag típusú, geometriai viszonyai megadhatók. A fogazószerszám azon paramétereivel, amelyek a megmunkálás során a megfelelő mechanikai és termikus viszonyok biztosításához szükségesek, nem foglalkozunk. Másképpen fogalmazva figyelmen kívül hagyjuk a szerszám élgeometriáját. Hiszen a burkológörbe előállításához csak a szerszám normálmetszetének geometriája szükséges. Ezeknek a paramétereknek a meghatározása egyszerűen elvégezhető. Számításaink kezdetén tételezzük fel, hogy az előállítani kívánt fogaskerék adatai ismertek. A Maag típusú szerszám alapprofilit a 2.1. ábra mutatja.



2.1. ábra: Maag típusú lefejtőszerszám alapprofilja [2]

A szerszámnak a fogazás során a gyártott fogaskerék osztókörén vett fogvastagsága megegyezik a fogaskerék osztóköri fogárokszélességével. Ennek a meghatározásnak fontos szerepe lesz a fogprofil alkotó görbék egymáshoz illesztésében.

$$s_0 = e = 2r \left[\frac{1}{z} \left(\frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha_i \right) \right] \quad (2.3.)$$

A szerszám alapprofilszöge természetesen megegyezik a fogaskerék alapprofilszögével.

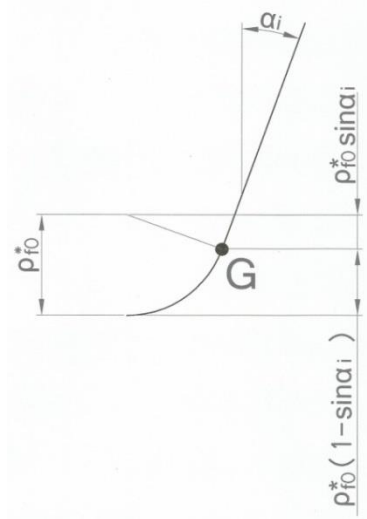
$$\alpha_i = 20^\circ$$

A következő fontos paraméter a szerszám oldalsó egyenes profilszakaszának a szerszám gördülővonalától mért magassága. Vizsgáljuk meg először a nem lekerekített szerszám esetét. Ekkor a fésűskés fogfejmagassága megegyezik egyenes profilszakaszának magassági méretével, valamint a fogazott kerék lábmagasságával.

$$d = h_a^* m + c^* m - x m \quad (2.4.)$$

Ha azonban a szerszám elé lekerekített ez az érték csökkenni fog. A G határpont és a szerszám fejevonala közti távolság pontosan megegyezik a fogaskerék lábhezagával. Ezt figyelembe véve jutunk el a (2.5.) egyenlethez.

$$d = h_a^* m - x m \quad (2.5.)$$



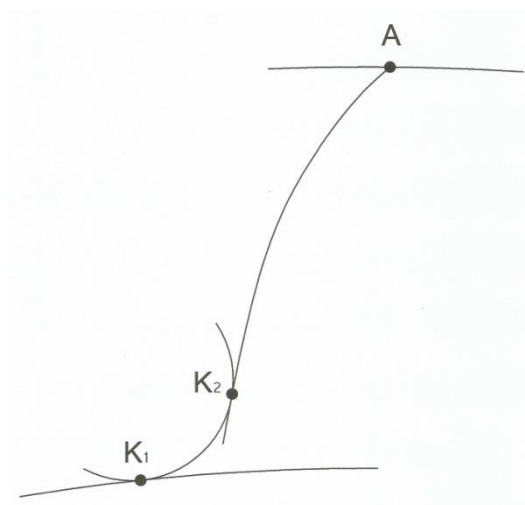
2.2. ábra: Maag típusú szerszám éllekerekítésének geometriája

Hasonló elgondolással állapíthatjuk meg lekerekítési sugár egységnyi modulra vonatkoztatott értékét.

$$\rho_{f0}^* = \frac{c^*}{1 - \sin \alpha_i} \quad (2.6.) [2]$$

3. Fogprofil geometriai szakaszai

Ebben a fejezetben a fogprofil szakaszainak származtatásával, matematikai leírásával fogunk foglalkozni. Az így nyert a görbék relatív helyzetének meghatározásáról a későbbi fejezetekben lesz szó. Egy lefejtő eljárással létrehozott fogprofil négy nevezetes szakaszra osztható. A fogprofilt felülről a fejkör, alulról pedig a lábkör határolja. Az A - K_2 szakasz a használható fogprofil, ami a mi esetünkben egy körevolvenst ír le. Ez a szakasz vesz részt a mozgás átvitelében. Az K_2 - K_1 szakasz az úgynevezett fogtőgörbe, ami az evolvens profilt köti össze a lábkörrel. A profil ezen szakasza a lefejtő eljárás járulékos görbéjének is tekinthető. Azonban vizsgálata a szilárdsági méretezések szempontjából kiemelkedően fontos lehet. Valamint alámetszés esetén a fogtőgörbe az, amely belemetsz az evolvens profilszakaszba így lerövidítve a használható profilszakaszt. A lábkör és az alapkör meghatározása egyszerű, elemi számításokkal történik, ezért ezekkel külön nem foglalkozunk. Vizsgálataink során a körevolvens és a fogtőgörbe származtatását, matematikai leírását, valamint a két görbe relatív helyzetének pontos meghatározását fogjuk tárgyalni.



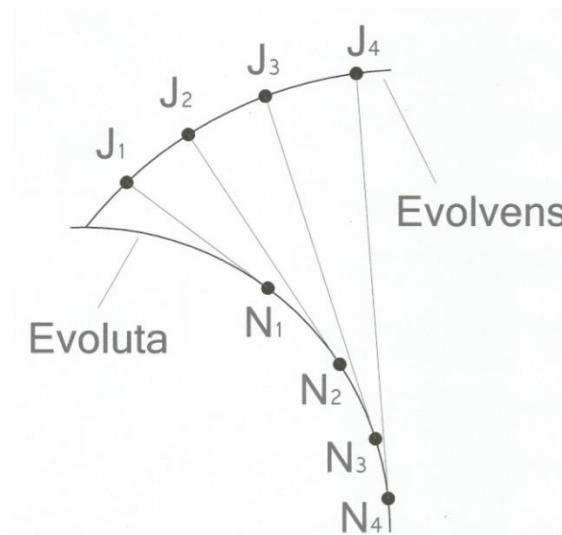
3.1. ábra: Fogprofil szakaszai

3.1. Körevolvens származtatása és matematikai leírása

A körevolvens fogazat alkalmazásának lehetőségét Euler vetette fel a 18. században. Az evolvens profilú, azonos modullal és alapprofilszöggel rendelkező hajtás azonban csak a 19. században született meg. Megalkotója Willis a kapcsolódási alaptétel névadója. A körevolvens fogazat elterjedését számos előnnyel magyarázhatjuk. A szerszám alapprofil egyszerű, jól ellenőrizhető. Ebből adódóan az előállított fogazat megfelelő pontosságát egyszerűbb elérni. Egy fontos előnye továbbá, hogy ez a profiltípus nem érzékeny a

tengelytávvaltozásra, illetve bizonyos mértékű változtatást anélkül hajthatunk végre, hogy a hajtás kinematikai viszonyai megváltoznának. Emellett lehetőség van profileltolások fogazatok létrehozására is. Evolvens profilú kerek alkalmazása esetén a kapcsolódó fogprofilok elmozdulási viszonyai is kedvezőek. Ugyanis a profilok egymáson való legördülése mellett fellépő relatív csúszás viszonylag kis mértékű. További nagy előnyük, hogy bármely evolvens fogazatú fogazott elem, ha az alapvető geometriai feltételek teljesülnek, bármely másik evolvens fogazatú elemmel képes kapcsolódni, amennyiben azonos modullal rendelkeznek.

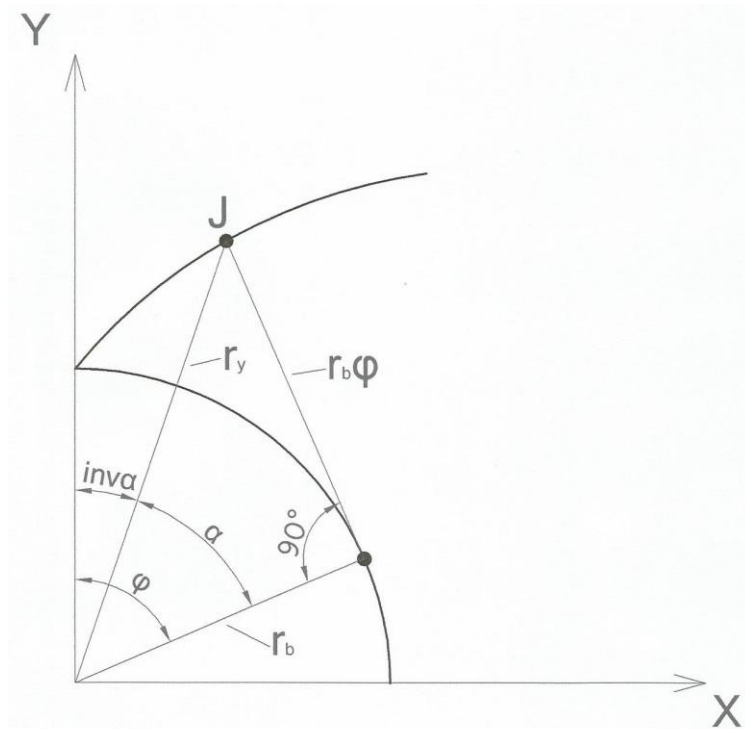
Körevolvensnek nevezzük azt a görbét, amely kör alakú evolutával rendelkezik. Az evoluta nem más, mint az adott görbe görbületi középpontjainak mértani helye. Másképpen fogalmazva evolutának nevezzük azt a görbét, amelynek a vizsgált görbe profilmerőlegesei minden esetben érintői. Ez az állítás magában hordozza az evoluta egyik leképezési módját. Vagyis hogy az evoluta előállítható az alapgörbe profilmerőlegeseinek borkulógörbéjeként. Hengeres fogaskerek esetén az evolutát alapkörnek nevezzük.



3.2. ábra: Evoluta származtatása

Az alapkört felhasználva, valamint megfordítva az előzőekben ismertetett leképezési eljárást az evolvens könnyen kifejezhetővé válik. Alakja a legkönnyebben polárkoordinátákkal adható meg.

$$r_y = \frac{r_b}{\cos \alpha} \quad (3.1.)$$

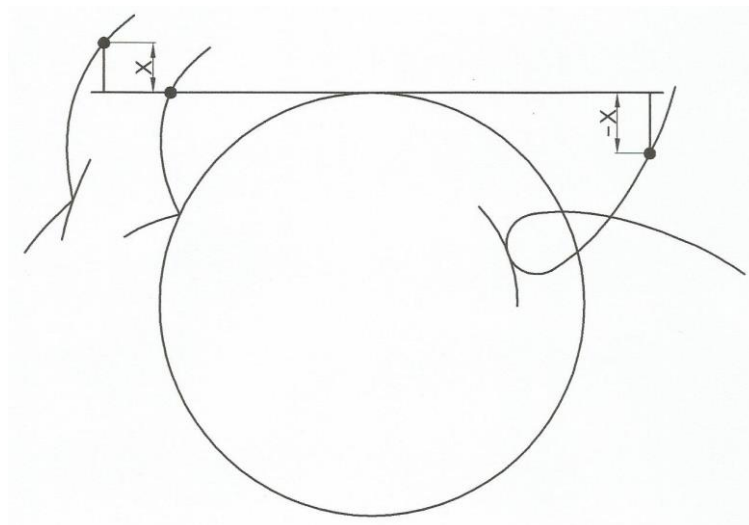


3.3.ábra: Körevolvens polár-koordinátás származtatása

Az α szög értéke a (3.2.) összefüggés szerint változik. Továbbá minden esetben teljesül a (3.3.) egyenlőség.

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{r_b \varphi}{r_b} \right) \quad (3.2.)$$

$$\varphi = \alpha + \text{inv } \alpha \quad (3.3.)$$



3.4. ábra: Evolvens alaptípusai

Profileltolás esetén azonban a görbe egyenlete megváltozik. Vegyük szemügyre a 3.4. ábrát. Az alap esetbeli közösleges körevolvens pozitív profileltolásának esetén

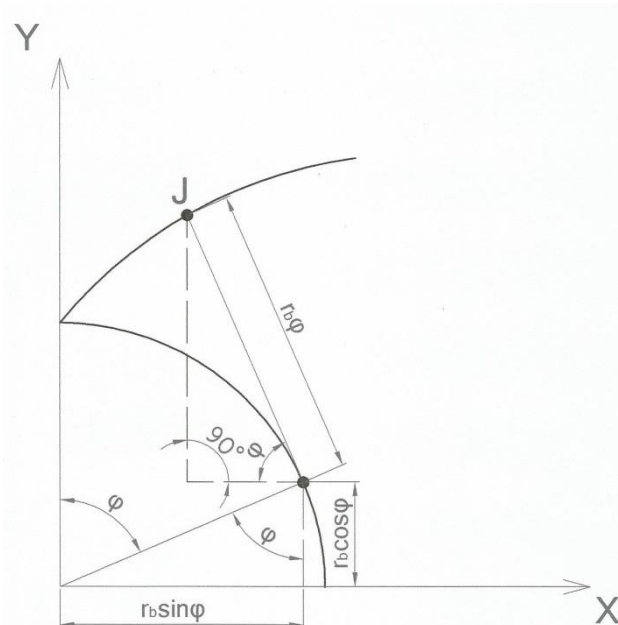
megfigyelhető, hogy a létrehozott görbe alakjának megváltozása mellett nem nyúlik le az alapkörig. Míg a szerszámot az evolúthoz közelítve egy hurkolt evolvenst kapunk. Ezek egyenletét a (3.4.) és (3.5.) összefüggések írják le, amelyekben kettős előjel esetén a felső a nyújtott, az alsó pedig a hurkolt evolvensre vonatkozik.

$$r_y = \frac{r_b \pm x}{\cos \alpha} \quad (3.4.)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{r_b \varphi}{r_b \pm x} \right) \quad (3.5.)$$

A fogprofil kirajzolásánál azonban mi csak a közösleges körevolvenst fogjuk használni. Mivel mind a nyújtott mind pedig a hurkolt evolvens alapkör feletti szakasza, ugyanis a hurkolt evolvens visszahajlása az alapkör alatt található, leírható a közösleges körevolvenssel. Ugyan a leképezés során a helyettesítő görbe használható profilt kijelölő szakaszának elhelyezkedése nem fog megegyezni az eredeti evolvensével, de mivel úgyis utólag fogjuk a fogprofil-szakaszokat a megfelelő relatív helyzetbe hozni, ezért ez számunkra nem lényeges szempont. A két szakasz pedig egyszerű középponti elforgatással fedésbe hozható.

Ezek után határozzuk meg a közösleges körevolvens egyenletét a Descartes-koordináta rendszerben. Vizsgáljuk meg a 3.5. ábrát. Látható, hogy az evolúta tetszőleges pontjából kiindulva egy egyenest legördítve, valamint az egyenes hosszát a középponti szög függvényében lineárisan növelve előállíthatjuk az evolvenst. Mivel az egyenes minden egyes pontban merőleges az előállított evolvensre, az utóbbi paraméteres alakja könnyen előállítható.



3.5. ábra: Körevolvens Descartes-koordinátás származtatása

A görbét a függőleges tengelytől az óramutató járásával megegyező pozitív irányban felvett középponti szög függvényében írjuk le. A 3.3. ábrán feltüntetett geometriai viszonyok segítségével az evolvens a (3.6.) és (3.7.) paraméteres egyenletek szerint határozható meg.

$$x = r_b \sin \varphi - r_b \varphi \cos \varphi \quad (3.6.)$$

$$y = r_b \cos \varphi + r_b \varphi \sin \varphi \quad (3.7.)$$

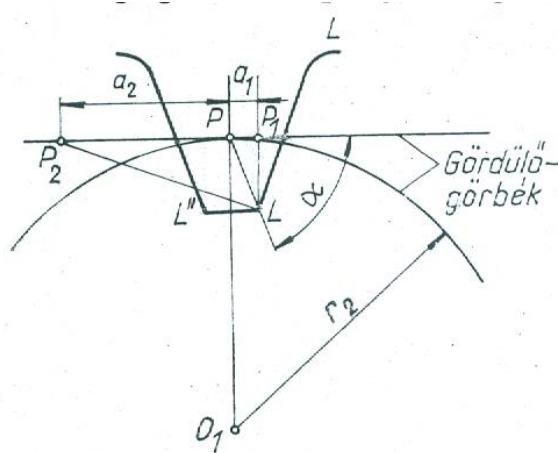
A származtatásból következik, hogy az alapkör alatt nem lehetséges használható fogprofil szakaszt létrehozni.

3.2. Fogtőgörbe származtatása és matematikai leírása

A fogtőgörbe alakulásával általában a szakirodalom is csak érintőlegesen foglalkozik és csak speciális témakörök tárgyalása esetén kerül előtérbe. Ennek oka, mint ahogy már a fejezet elején szó volt róla, hogy ez a görbeszakasz járulékos görbének tekinthető. Azonban, ahogy már szintén említettük, a fogtőgörbe alakulása egyes szilárdsági számítások esetén lényeges szempont. A vizsgálatokat nehezíti, hogy a különböző lefejtő eljárások eltérő fogtőgörbe típusokat eredményeznek. Ezt az eltérést a szerszámok különböző alaprofiljai, továbbá a szerszám és a fogazott kerék relatív mozgásának eltérő volta magyarázza. Ennek következtében például Fellows eljárás esetén külső fogazásnál hurkolt epiciklois, belső fogazásnál hurkolt hipociklois, míg Maag eljárás esetén a fogtőgörbe hurkolt evolvensként jelenik meg. Ebből adódóan a különböző lefejtő eljárások különálló számítási módussal tárgyalhatók. Mi a Maag eljáráshoz tartozó modellt fogjuk tárgyalni. Vizsgálatainkat kezdjük az éllekerekítés nélküli szerszámprofilú fésűs késsel történő fogazással. Ekkor a fogtőgörbe a szerszámfogcsúcs pályájaként áll elő. Ez a példa csupán elméleti jelentőségű, mivel mint ahogy később kitérünk rá ilyen profilt nem alkalmaznak a gyakorlatban.

Vegyük szemügyre a 3.1. és a 3.6. ábrát. A szerszám a fogazás során lineárisan mozog. Azonban a fogazott kerék forgásából adódóan, a munkadarabhoz képest forgó mozgást is végez. Mégpedig úgy hogy képzeletbeli forgásközéppontja folyamatosan változik. A fogazás során létrejött fogtőgörbén két nevezetes pont található. Ezek a görbe használható profilszakasszal érintkező K_2 és a lábkörrel érintkező K_1 határpontjai. Ezek a pontok abból a szempontból is különlegesek, hogy a hozzájuk tartozó pillanatnyi relatív forgáspont egyértelműen meghatározható. Ezek a pontok a szerszámprofil oldalaira vett, a fésűs kés adott profiloldal fogazásában résztvevő csúcsából kiinduló profilmerőlegeseinek és a szerszám

kapcsolóvonalának metszéspontjaiként állnak elő. A P_1 és P_2 pontok által alkotott szakaszon helyezkednek el a közbenső gördülési középpontok. A gördülési sugarakat az adott gördülési középpont pont és a szerszám csúcsa közti szakasz adja meg. A fogtőgörbe minden pillanatban az éppen aktuális kör érintőjeként áll elő. Egy adott gördülési középpont akkor válik aktuálissá, ha egybeesik a P főponttal.

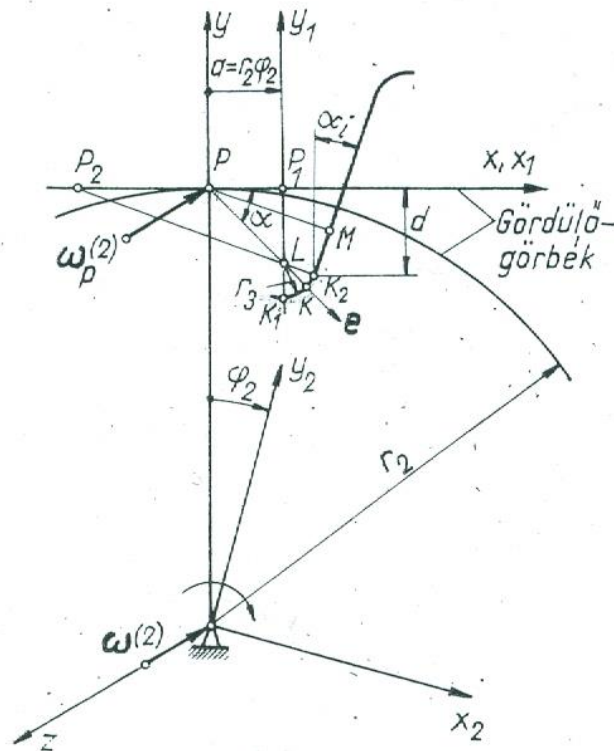


3.6. ábra: Éllekerekítés nélküli szerszám gördülési középpontjainak meghatározása [1]

A fentiek alapján célszerűnek tűnik a fogtőgörbe körívvel való közelítése. A kapcsolódási egyenlet felhasználása nélkül, pusztán egyszerű geometriai szemlélettel vizsgáljuk meg ezen egyszerűsítés helyességét. A feltételezett körív helyzete a következő képen adható meg. Áthalad a K_1 illetve K_2 ponton, valamint K_1 -beli érintője megegyezik a lábkör K_1 pontbeli érintőjével. Ha nincs alámetszés, a fogtőgörbének a K_2 pontbeli érintője is közös az evolvens K_2 -beli érintőjével. Ebben az esetben a kör túlhatározott, vagyis igazolja azt az állítást, hogy a görbe nem körív, hanem csak durván közelíthető vele. Alámetszés esetén a K_2 pontbeli érintő nem közös, így e kör nem lesz túlhatározott. Azonban ebben az esetben különösen fontos a görbe alakjának típusa, mivel ez nagymértékben meghatározza majd a fogba való bemetszés mélységét. Tehát pontos számítások elvégzéséhez ennek a közelítésnek az alkalmazása nem vezet kellően pontos eredményhez.

Mivel a fogtőgörbe lekerekítése nem alkalmazható elő kell állítanunk a tényleges fogtőgörbét. Matematikai ismeretinkből jól tudjuk, hogy bármely fogazott elempárt is vizsgálunk, a hajtás átvitelekor mindkét elem fogprofilja nem más mint az ellenpár profiljának burkológörbéje. Hiszen a profil bármely kapcsolódási helyzetében érintője lesz az ellenprofilnak. Ez nincs másként fogazás közben sem, ugyanis ebben az esetben az előállítandó profil a szerszámprofil burkológörbéje lesz. Természetesen matematikai értelemben ez fordítva is igaz. A burkológörbe előállítására több matematikai módszer is

születetett. Mi a burkológörbét a koordináta-rendszerek közötti transzformáció alkalmazásával fogjuk előállítani, úgy hogy a burkolóprofilt létrehozó görbe és a kapcsolódási egyenlet ismeretében a munkadarabhoz kötött koordináta rendszerben megállapítjuk az aktuális érintkezési pontokat. A továbbiakban vizsgálatainkat kiterjesztjük lekerekített profilú szerszámokra. A gyakorlatban ilyen szerszámokat használnak, ugyanis a szerszám élének lekerekítése kedvező hatással van mind a szerszám élettartamára mind pedig a rovátkahatás csökkentésével a fogtőszilárdságra. Ilyen szerszámok esetén a fogtőgörbe az éllekerekítés középpontja által leírt pálya egyenközű görbéjeként áll elő. A következőkben ismertetett számításokkal a lekerekítés nélküli eset is könnyen modellezhető, amennyiben a lekerekítési sugarat végtelenül kicsinek vesszük.



3.7. ábra: Fogtőgörbe leképezése lekerekített élű szerszám esetén [1]

A leképezést a 3.7. ábra alapján fogjuk elvégezni. Az alap, index nélküli, álló koordináta-rendszer középpontja a kapcsolódás P főpontja. Ehhez képest az 1-es indexű koordináta-rendszer a szerszámmal megegyező lineáris mozgást végez. Helyzete pedig a rögzített rendszerben a paraméter segítségével határozható meg. A 2-es indexű koordináta-rendszert a megmunkálandó fogaskerék forgásközéppontjához rögzítjük. Az álló koordináta-rendszerhez

vonatkoztatott relatív helyzetét pedig a φ_2 középponti szög segítségével adhatjuk meg. A fogtőgörbét a szerszám lekerekített élének burkológörbéjeként állítjuk elő. A lekerekítés geometriai leírása az 1-es koordináta-rendszerben a (3.8.) és (3.9.) egyenletek alapján adható meg.

$$x_1 = r_3 \cos \alpha \quad (3.8.) [1]$$

$$y_1 = -d + r_3(\sin \alpha_i - \sin \alpha) \quad (3.9.) [1]$$

Ugyanezt a szakaszt az álló koordináta-rendszerben a (3.10.) és (3.11.) összefüggések segítségével határozhatjuk meg.

$$x = r_3 \cos \alpha + r_2 \varphi_2 \quad (3.10.) [1]$$

$$y = -d + r_3(\sin \alpha_i - \sin \alpha) \quad (3.11.) [1]$$

A kapcsolódás alapegyenletét egyszerű geometriai megfontolással állíthatjuk elő. Mégpedig abból kiindulva, hogy az aktuális gördülési sugár kezdőpontja mindig egybeesik a P főponttal.

$$\tan \alpha = \frac{P_1 L}{PP_1} = \frac{(d - r_3 \sin \alpha_i)}{r_2 \varphi_2} \quad (3.12.) [1]$$

A burkológörbét az éllekerekítés egyenleteinek álló koordináta-rendszerből a 2-es indexű koordináta rendszerbe való átranzformálásával kapjuk. A tranzformációs mátrixot a (3.13.) összefüggés mutatja.

$$M_{20} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & -r_2 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & r_2 \cos \varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13.) [1]$$

A tranzformációt az első fejezetben ismertetettekhez hasonlóan a (3.14.) és (3.15.) formulák alapján végezhetjük el.

$$x_2 = M_{20} x \quad (3.14.)$$

$$y_2 = M_{20} y \quad (3.15.)$$

A 2-es koordináta-rendszerbe való áttérés után megkapjuk a fogtőgörbét leíró egyenleteket.

$$x_2 = (r_3 \cos \alpha + r_2 \varphi_2) \cos \varphi_2 + [d - r_3(\sin \alpha_i - \sin \alpha)] \sin \varphi_2 - r_2 \sin \varphi_2 \quad (3.16.) [1]$$

$$y_2 = (r_3 \cos \alpha + r_2 \varphi_2) \sin \varphi_2 - [d - r_3(\sin \alpha_i - \sin \alpha)] \cos \varphi_2 + r_2 \cos \varphi_2 \quad (3.17.) [1]$$

Látható, hogy a fogtőgörbe nem adható meg csupán a (3.16.) és (3.17.) összefüggésekkel, hanem szükség van a (3.18.) kapcsolódási egyenletet tartalmazó képletre is.

$$r_2 \varphi_2 \tan \alpha - (d - r_3 \sin \alpha_i) = 0 \quad (3.18.) [1]$$

A behelyettesítés elvégzése után eljutunk a keresett alakokhoz, amelyek alkalmazása esetén a fogtőgörbe csupán a két Descartes-koordináta paraméteres egyenletével kifejezhető.

$$\begin{aligned} x_2 = & \left(r_3 \cos(\tan^{-1} \frac{d - r_3 \sin \alpha_i}{r_2 \varphi_2}) + r_2 \varphi_2 \right) \cos \varphi_2 \\ & + \left[d - r_3 \left(\sin \alpha_i - \sin(\tan^{-1} \frac{d - r_3 \sin \alpha_i}{r_2 \varphi_2}) \right) \right] \sin \varphi_2 \\ & - r_2 \sin \varphi_2 \quad (3.19.) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 = & \left(r_3 \cos(\tan^{-1} \frac{d - r_3 \sin \alpha_i}{r_2 \varphi_2}) + r_2 \varphi_2 \right) \sin \varphi_2 \\ & - \left[d - r_3 \left(\sin \alpha_i - \sin(\tan^{-1} \frac{d - r_3 \sin \alpha_i}{r_2 \varphi_2}) \right) \right] \cos \varphi_2 \\ & + r_2 \cos \varphi_2 \quad (3.20.) \end{aligned}$$

4. Gyártási interferenciák

Vannak olyan esetek, amelyek fennállásakor a megmunkálás során nem kívánatos jelenségek alakulnak ki. Ilyen interferenciákról beszélhetünk a kihegyesedés és az alámetszés esetében. Ebben a fejezetben ezeknek a jelenségeknek a határfeltételeivel fogunk megismerkedni.

4.1. Fogkihegyesedés

Fogkihegyesedésről akkor beszélhetünk, amennyiben a fogaskerék fogprofiljának fejszalagvastagsága nullára csökken. A gyakorlatban gyakran írnak elő egy minimális fejszalagvastagságot is. Az alábbi számítások ezen előírás teljesítésének ellenőrzésére is alkalmasak. A fogaskerék tetszőleges köréhez tartozó fogvastagsága a (4.1.) összefüggéssel adható meg.

$$s_y = 2r_y \left[\frac{1}{z} \left(\frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha_i \right) + \text{inv } \alpha_i - \text{inv} \left(\cos^{-1} \frac{r_b}{r_y} \right) \right] \quad (4.1.)$$

$$\text{inv } \alpha = \text{inv} \left(\cos^{-1} \frac{r_b}{r_y} \right) \quad (4.2.)$$

A képletbe a fejkörhöz tartozó sugarat behelyettesítve megkapjuk a tetőszalagi fogvastagságot. A kehegyesedés feltétele a (4.1.) és (4.2.) egyenletek alapján a (4.3.) és (4.4.) formulákkal határozható meg.

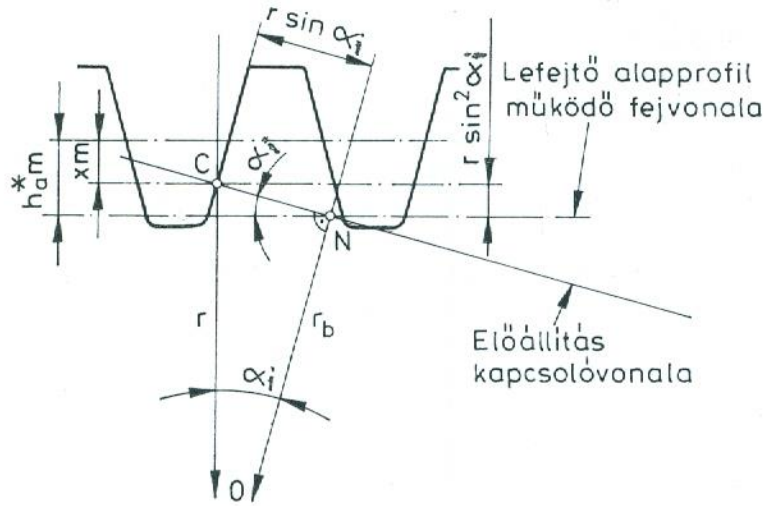
$$\text{inv } \alpha_a = \frac{1}{z} \left(\frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha_i \right) + \text{inv } \alpha_i \quad (4.3.)$$

$$r_a = \frac{r_b}{\cos \alpha_a} \quad (4.4.)$$

4.2. Alámetszés

Az alámetszés az a gyártási interferencia, amely esetében a körevolvens egy részét a fogazószerszám eltávolítja. Ez a jelenség akkor alakul ki, amikor a szerszám használható fogprofil létrehozó szakasza benyúlik az alapkör alá. Ebből következik, hogy az alámetszés

feltétele az egyes eljárások esetén más és más, mivel a határeset a szerszámgeometria függvénye lesz. Mi most is a Maag eljárás esetét fogjuk tárgyalni. Vizsgáljuk meg a 4.1. ábrát.



4.1. ábra: Alámetszés határesetek lekerekített szerszámú Maag eljárás esetén [2]

Lekerekített élű szerszámmal történő megmunkálás alámetszési határesetének azt az esetet tekintjük, amikor a fésűs és működő fejevonala a kapcsolódás N határpontján halad keresztül. Ekkor a szerszám bármilyen kis mértékű negatív profileltolása már alámetszést eredményez. A geometria figyelembevételével az alámetszés feltételei könnyen meghatározhatók.

$$z_{lim} = \frac{2(x - h_a^*)}{\cos^2 \alpha_i - 1} \quad (4.5.)$$

$$x_{lim} = \frac{z(\cos^2 \alpha_i - 1)}{2} + h_a^* \quad (4.6.)$$

Hegyes csúcsú fésűs és alkalmazása esetén a határesethez tartozó paraméterek a (4.7.) és (4.7.) összefüggésekkel adhatók meg.

$$z_{lim} = \frac{2(x - h_a^* - c^*)}{\cos^2 \alpha_i - 1} \quad (4.7.)$$

$$x_{lim} = \frac{z(\cos^2 \alpha_i - 1)}{2} + h_a^* + c^* \quad (4.8.)$$

5. Fogprofil létrehozása, fogprofilszakaszok egymáshoz illesztése

Az előzőekben megvizsgáltuk a körevolvens és a fogtőgörbe származtatását. A fogazat kirajzolásához azonban elengedhetetlen ezen görbék relatív helyzetének pontos meghatározása. Célszerűségi okokból azt a helyzetet szeretnénk előállítani, amely esetén a fogaskerek fogárkának szimmetriai tengelye függőleges irányba esik. A görbék elforgatását a megfelelő transzformációs mátrixok előállításával fogjuk elvégezni.

A fogprofil létrehozásánál figyelembe kell venni, hogy a szerszám ki- (pozitív) és befele (negatív) mozgatása korlátokkal kell hogy rendelkezzen. Ezek a korlátok a fogazathatárok vizsgálatából derülnek ki. Pozitív irányú elmozdulás esetén a fog kihegyesedik, tehát az egyik határt a fogkihegyesedés fogja jelenteni. Negatív irányú elmozduláskor a fogazat alámetsződik. Ennek mértéke fogja megszabni a másik határesetet, amelynek bekövetkezése esetén a két fogtőgörbe összeér, ami a fog leesését eredményezi.

5.1. Körevolvens relatív helyzetének meghatározása

Mint ahogy a 3.5. ábrán látható, az evolvens kezdőpontja az y tengelyen található. Az elforgatás szögét megkaphatjuk, ha az osztókör fél fogárokszélességéhez tartozó középponti szögből kivonjuk az alaprofilszög kiegészítő szögét.

$$\sigma = \frac{m \left(\frac{\pi}{2} - 2x \tan \alpha_i \right)}{2r_2} - \text{inv } \alpha_i \quad (5.1.)$$

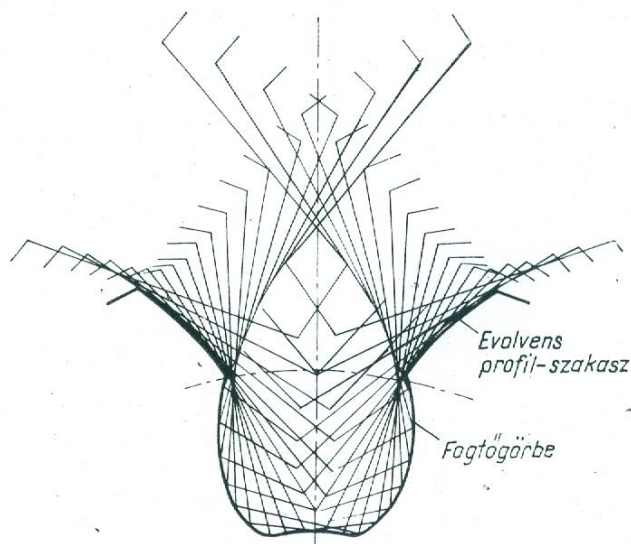
Ezt a szöget beillesztve a transzformációs mátrixba elvégezzük az elforgatást. A transzformációs mátrixot az (5.2.) összefüggés mutatja.

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma \\ -\sin \sigma & \cos \sigma \end{bmatrix} \quad (5.2.)$$

5.2. Fogtőgörbe relatív helyzetének meghatározása

A fogtőgörbe relatív helyzetének megadását a körevolvens elforgatásához hasonlóan fogjuk elvégezni. Azonban az ehhez tartozó szög megállapítása már nehezebb. Tekintsük először az éllekerekítés nélküli szerszámmal történő fogazást. Az eddig elvégzett számításink alapján a fogtőgörbe kezdeti, lábkörrel érintkező pontja a függőleges tengelyen helyezkedik

el. Vizsgálatainkhoz használjuk fel az 5.1. ábrát. A fogtőgörbét képzeletben úgy is származtathatjuk, mintha álló kerék mellett a szerszám foga végezné gördülő mozgást.



5.1. ábra: A szerszámfog mozgása lefejtéskor [1]

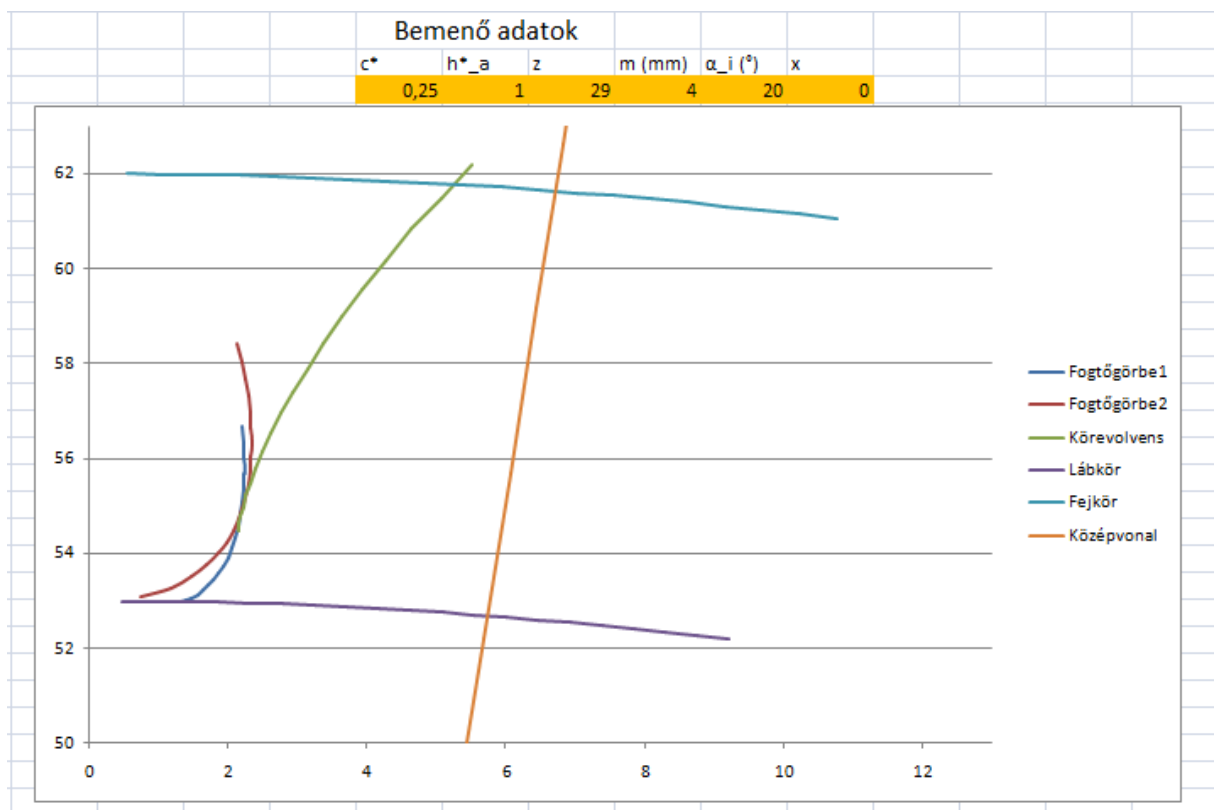
Így az általunk keresett esetben, amikor a kimunkált fogárok szimmetria tengelye egybeesik az álló koordináta rendszer függőleges tengelyével, a 3.6. ábra mutatná a gördülés középhelyzetét. Világos, hogy a szerszámprofil jobb oldali csúcsa a feltüntetett helyzetig nem munkál ki szakaszt a végleges profilrészből, hiszen eddig leírt pályája végig a fogárokbán haladt. Tehát a fogtőgörbét az ábrán feltüntetett időpillanatot követően kezdi kialakítani. A kezdeti K_1 pont pedig az ábra geometriai viszonyaiból jól meghatározható. Hasonló analógiával és a 3.7. ábra felhasználásával a lekerekített szerszám esetében fennálló elforgatási szög is meghatározható. Ezek alapján az (5.3.) összefüggés a lekerekítés nélküli, míg az (5.4.) a lekerekítéses esethez tartozó elforgatási szöget fejezi ki.

$$\sigma = \frac{\frac{m \left(\frac{\pi}{2} - 2x \tan \alpha_i \right)}{2} - d \tan \alpha_i}{r_2} \quad (5.3.)$$

$$\sigma = \frac{\frac{m \left(\frac{\pi}{2} - 2x \tan \alpha_i \right)}{2} - d \tan \alpha_i - r_3 \cos \alpha_i}{r_2} \quad (5.4.)$$

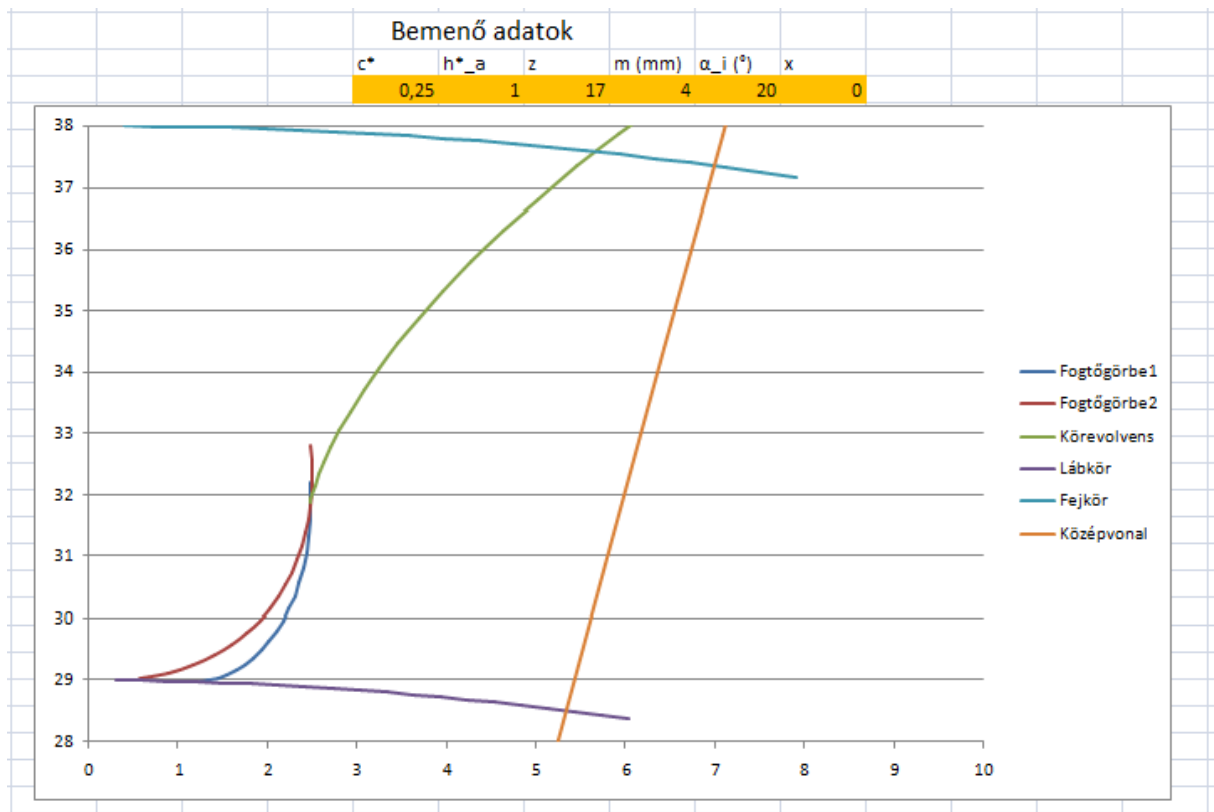
6. Fogprofilok ábrázolása

Az ismertett számítási eredmények alapján Excel táblát is készítettem. Ebben a fejezetben az elkészített program segítségével szeretnék néhány fogalakot bemutatni. Mindegyik ábrán feltüntetésre került az adott esethez tartozó kiindulási paraméterek. A kirajzolt profilokon Fogtőgörbe1 elnevezés a lekerekítés nélküli szerszámmal való fogazás esetét, míg a Fogtőgörbe2 a lekerekítéses esetet jelöli. Látható, hogy a lekerekítést tartalmazó esetben alámetszés nélküli fogazat esetén a használható profilszakasz rövidebb, mintha nem lekerekített szerszámot alkalmaztunk volna. Alámetszés esetén azonban a hegyes csúcsú szerszám több anyagot távolít el a fogaskerék fogtővéből. A 6.1. ábra egy klasszikus elemi fogazatot mutat.

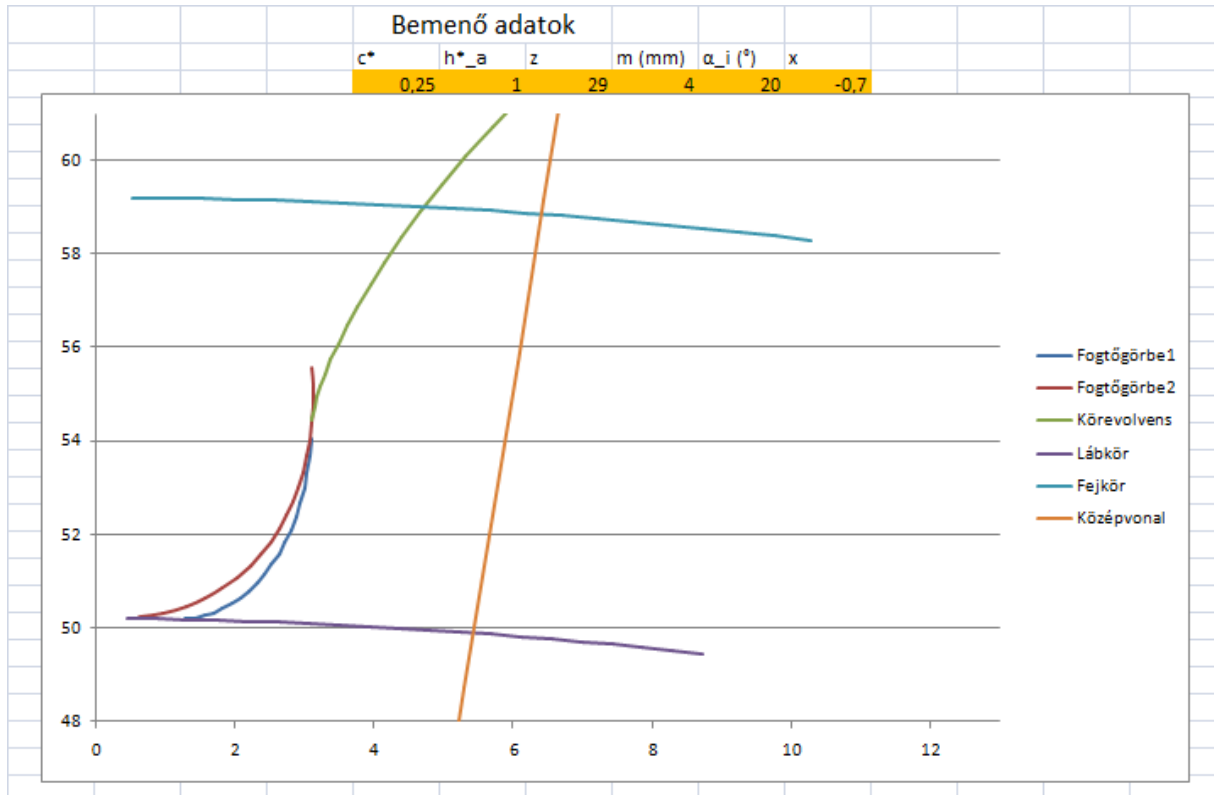


6.1. ábra: Elemi fogazat fogprofilja

A következőkben az alámetszés határeseteit láthatjuk. A (4.5.) és (4.6.) formulák segítségével megállapítva a határesetekhez tartozó paramétereket, kirajzolhatjuk az ezekhez tartozó fogalakokat. A 6.2. ábra a kritikus fogszám, míg a 6.3. ábra a kritikus profileltolásnál egy kicsivel nagyobb alkalmazásának esetét mutatja be.

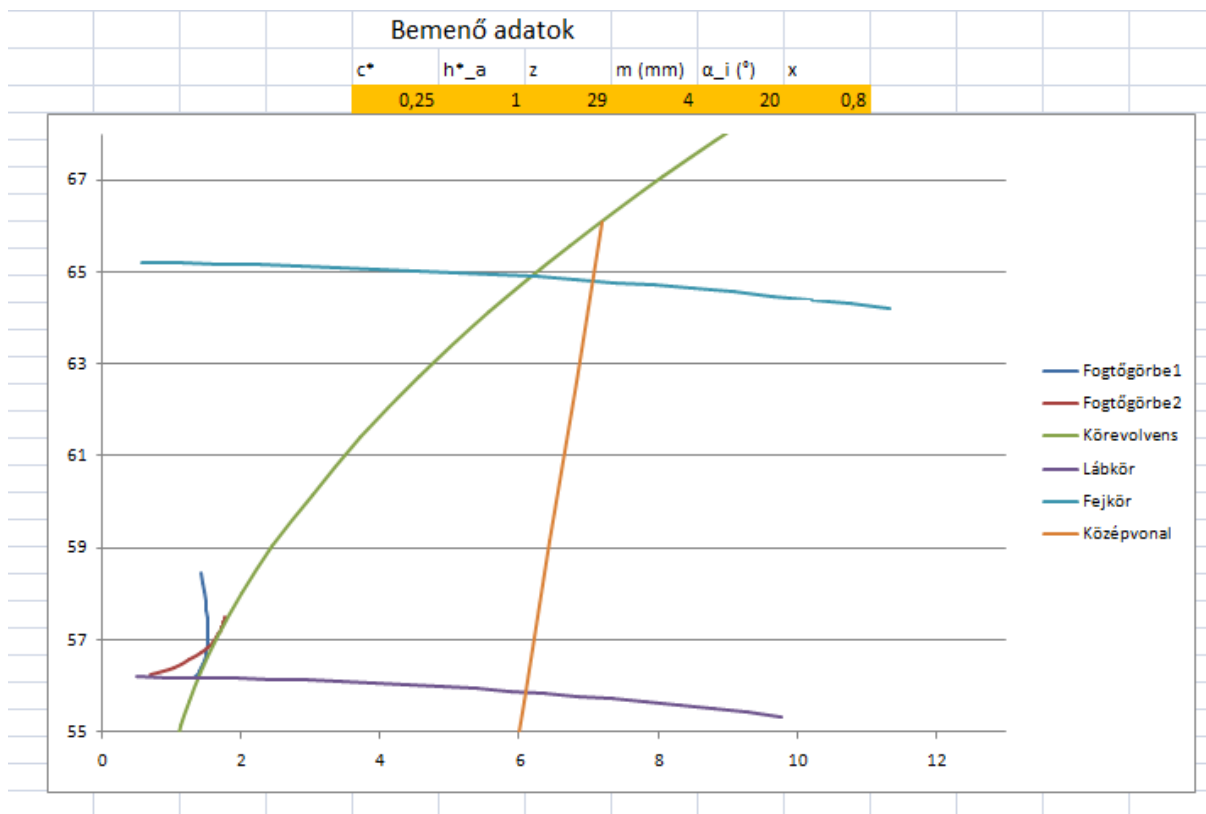


6.2. ábra: Alámetszés határfogszáma esetén kialakuló fogprofil



6.3. ábra: Alámetszés határ-profileltolásánál kicsivel nagyobb profileltolás alkalmazása esetén kialakuló fogprofi

Végül rajzoljunk meg egy olyan esetet, amely során a nagy pozitív profileltolásnak köszönhetően a fejszalag vastagsága nagymértékben lecsökken. Az ehhez tartozó paramétereket és fogalakot a 6.4. ábra mutatja.



6.4. ábra: Túlzott pozitív profileltolás esetén kialakuló fogprofil

7. Összefoglalás

Munkám során áttekintettem azokat az ismereteket, amelyek segítségével Maag eljárással történő fogazás esetén képesek vagyunk megállapítani egy egyenes, evolvens fogazatú, hengeres kerék fogprofilját. Elsőként a koordináta-rendszerek közötti transzformációs eljárást ismertettem, mivel a számítások során ennek a módszernek az alkalmazására többször szükség van. Ezt követően a vizsgálataim alapjául szolgáló lefejtő eljárás legfontosabb jellemzőit tekintettem át. Kiemelten foglalkoztam a választott szerszámhoz tartozó alaprofilokkal és azok geometriájával. Ennél a pontnál kitértem mind az egyenes mind pedig a ferde fogazás esetére is. Munkám további részében azonban már csak az egyenes profilú kerekek esetét tárgyaltam. Az alapok áttekintése után a fogprofil geometriai felosztását ismertettem, majd az egyes profilszakaszok matematikai leírását mutattam be. Megvizsgáltam a különböző evolvens típusok geometriai tulajdonságait, kitérve a nyújtott és hurkolt evolvensok körevolvenssel való helyettesíthetőségére is. A fogtőgörbe kapcsán egyaránt elemeztem az elméleti jelentőségű hegyes csúcsú és a gyakorlatban alkalmazott lekerekített élű szerszámmal történő megmunkálás esetét. Megvizsgáltam ennek a profilszakasznak körívvel való helyettesíthetőségét is. A görbeszakaszok előállítását után a gyártási interferenciákkal foglalkoztam. Ennek keretein belül kitértem mind a fogkihegyesedéshez mind pedig az alámetszéshez tartozó határeset matematikai leírására. Ezek után az egyes profilszakaszok egymáshoz illesztését ismertettem. Külön-külön mindegyik szakaszhoz meghatároztam a származtatási alaphelyzethez vonatkoztatott szükséges elforgatási szöveget, hogy mindegyik a kívánt relatív helyzetbe kerüljön. A számítások alapján Excel táblát is készítettem, amelynek segítségével az előállítani kívánt fogaskerék alapadatának felhasználásával megvizsgálhatjuk a várható fogprofil. Néhány fontosabb határesetre be is mutattam a kialakuló fogalakokat. Ez a program jó lapként szolgál a kívánt fogaskerék fogainak szilárdsági vizsgálatához, hiszen a várható fogalak pillanatok alatt előállítható. A továbbiakban én is ebben az irányban szeretném folytatni vizsgálódásomat.

Irodalomjegyzék

- [1] F. L. Litvin: A fogaskerékkapcsolás elmélete, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, pp. 11-583.
- [2] Erney György: Fogaskerek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983, pp. 17-441.
- [3] Terplán Zénó: Gépelemek II., Tankönyvkiadó, Budapest, 1985, pp. 5-116.
- [4] Obádovics J. Gyula – Szarka Zoltán: Felsőbb matematika, Scolar Kiadó, Budapest, 1999, pp. 17-690.
- [5] Drágár, Zs. – Kamondi, L.: Nem szabványos alapprofilú fogaskerek tervezési kérdései
GÉP 62: (7-8) pp. 35-38. (2011)
- [6] Kamondi L. - Takács, Á.: Objektum szemléletes géptervezés. Szakmérnöki jegyzet. (Társ-szerző: Takács Ágnes). Készült: „A felsőoktatás szerkezeti és tartalmi fejlesztése”
CAD/CAM/FEM kompetencia kurzusok projekt keretében (HEFOP-3.8-P-2004-06-0012). Miskolc, 2006