

NYÍREGYHÁZI FŐISKOLA

MŰSZAKI ÉS AGRÁRTUDOMÁNYI INTÉZET

Műszaki alapozó, Fizika és Gépgyártástechnológia Tanszék

Gépészmérnöki alapszak

NYÍREGYHÁZA

**Kerékfelfüggesztések mozgásának dinamikai vizsgálata
személygépkocsiknál**

TDK DOLGOZAT

Készítette: Varga István

Konzulens: Dr. Dezső Gergely

2013.

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	2
1. Bevezetés	3
Motiváció	3
Célkitűzés.....	3
A dolgozat felépítése	4
2. Szakirodalmi és módszertani áttekintés	5
A gépjárművek futóműveiről általában	5
A gépjárművek negyedmodellje	8
Mozgásegyenlet, fázistér	9
A mozgásegyenletek numerikus megoldása	10
Fázisportré, a szabad harmonikus oszcillátor példája.....	12
Fixpontok a kétdimenziós fázistérben	13
A csillapítás hatása: csillapított harmonikus oszcillátor	14
Poincaré-leképezések.....	16
A gerjesztett harmonikus oszcillátor.....	17
A kaotikus mozgások jellemzői	19
Attraktorok, természetes eloszlás	21
A mozgásegyenletek dimenziótlanítása.....	21
Az anharmonikus oszcillátor	22
Az anharmonikus oszcillátor viselkedése gyenge gerjesztés esetén.....	24
Az anharmonikus oszcillátor viselkedése erős gerjesztés esetén.....	26
3. A téma feldolgozása.....	29
A számításokhoz használt szoftver felépítése.....	29
Még egyszer a harmonikus oszcillátorról	30
A lineáris negyedmodell vizsgálata	31
Az anharmonikus oszcillátor rezonanciagörbéje	33
Az anharmonikus rugókat tartalmazó negyedmodell	35
Az ANM viselkedése gyenge gerjesztés esetén.....	36
Az ANM mozgásának vizsgálata a fázistérben	38
4. Köszönetnyilvánítás.....	43
5. Összefoglalás	44
6. Irodalomjegyzék	45
7. Melléklet	47

1. Bevezetés

Motiváció

Napjainkban a gépjárművek fejlesztése tudományos és technikai szempontból egyaránt élénken kutatott terület. Nem csak a felhasználók kényelme, de az erős verseny, az energiaforrások szűkössége, és a fokozódó biztonsági követelmények is indokolják ezt.

A gépjárművek futóműve napjainkban már igen összetett mechatronikai rendszerré fejlődött. Működésének megértéséhez egyaránt szükségesek a mechanikai, hidrodinamikai, automatizálási, és sok esetben az informatikai ismeretek. Mégis, a futómű elsősorban mechanikai rendszer.

Érdeklődésem középpontjában azok a mechanikai alapelvek kerültek, amelyek meghatározzák egy futómű viselkedését. Ezért választottam dolgozatom témájának azokat a lineáris és nemlineáris, egy- és két szabadsági fokú rendszereket, amelyek a gépjárművek menettulajdonságainak modellezésekor használatosak, illetve felmerülhetnek.

Célkitűzés

Célul tűztem ki az alábbiakat:

1. Az általam vizsgálni kívánt dinamikai rendszerek vizsgálatához szükséges egyenletek felírását, azok átalakítását a számítógépes vizsgálatra legalkalmasabb formába.
2. Olyan szoftver kifejlesztését, amely alkalmas a fázisdiagram, a stroboszkopikus leképezés és a rezonanciagörbe (átviteli függvény) numerikus számítására.
3. A szoftver tesztelését olyan rendszereken, amelyek megoldása ismert.
4. A nemlineáris rugókkal felépített negyedmodell mozgásainak vizsgálatát, átviteli függvényének kiszámítását.

A dolgozat felépítése

A dolgozat bevezető részében az egyes témaköröket a „felfedezés sorrendjébe” rendeztem el. Ez azért hasznos, mert segíti a fogalmak fokról-fokra történő megismerését azzal, hogy azonnal illusztrációt is nyújt azokhoz. Magam is így ismerkedtem meg a témával, ezért azt gondolom, hogy a témában esetleg kevésbé jártas olvasó számára is ez lesz a legcélravezetőbb elrendezés.

A forrásművek közül kiemelem Tél Tamás – Gruiz Márton: Kaotikus dinamika című művét, amelyből különösen sokat merítettem.

A saját munkát bemutató rész logikailag egyenes folytatása a bevezetőnek.

A dolgozatban, még a bevezető részben is szereplő, számítási eredményeket közlő ábrák, mind a saját számításaim eredményeit mutatják be. A bevezető fejezetekhez készített ábrák nagyrészt akkor készültek, amikor a szoftver fejlesztése során a teszteket végeztem. Így kettős céllal tudtam azokat felhasználni.

2. Szakirodalmi és módszertani áttekintés

A gépjárművek futóműveiről általában



Amikor a lovakat leváltották a motorok, és nőni kezdett a sebesség, a tengelyenkénti egy-egy keresztben álló rugólap mellett megjelent előbb a kemény, tömör gumi abroncs, majd a levegős kerék, a tízes évekre pedig a kerekek fel-le mozgását olajkavarással elsimító korai karos lengéscsillapítók.

<i>Modern keresztlengőkaros futómű általános emelt felső kar és az azt a kerékaggyal összekötő J alakú elem</i>	<i>kettős első ma már a magasra emelt felső kar és az azt a kerékaggyal összekötő J alakú elem</i>
---	--

Az első világháború alatt az alapképlet már így nézett ki: elől, az autó hossztengegyében megcsapágyazott, keresztirányban billegő (mérleghintaszerű) acélprofil



rúdra rögzítették az elforgatható (kormányozható) kerékagyakat, a billegést laprugókkal és – a drágább autókra – karos csillapítókkal fékeztek. Hátról teljesen merev tengely forgott, úgy, hogy az alvázhoz csak a laprugók és a csillapítók kapcsolódtak. Az első billegő tengelyt a középső csapágyazás oldalirányban is megvezette, de hátról a teljes futómű szinte szabadon kilenghetett oldalra, rontva az egyenesfutás minőségét és a kanyarstabilitást.

<i>Robusztus keretre épített oldalankénti több lengőkaros hátsó felfüggesztés, ebben a kialakításban légrugókkal.</i>

A 40-es évekre a tervezők arra is rájöttek, nem jó, ha a két oldal kerekei között merev a kapcsolat, azaz, ha az egyik berugózásakor a másik kirugózik. Megjelentek az első független (a korai kettős keresztlengőkaros) első futóművek. Ez az egyik ma is használt alapséma.



Kettős kereszt-lengőkaros, légrugós első szerkezet egy terepjáróból.

A kerékagyak oldalanként két, egy alsó és egy felső, az autó hossz tengelyével párhuzamos csapok körül lengő háromszög alakú karon mozoghattak fel-le. Az alsó karokra csöves lengéscsillapítók támaszkodtak, körülöttük vagy mellettük többnyire tekercsrugókkal. A 80-as évekre ez a megoldás a felső- és a középkategória privilégiumává vált, különösen, hogy a felső lengőkar miatt nem volt egyszerű mérnöki feladat az elsőkerék-hajtás féltengelyeit átvezetni. Az olcsóbb autókban egy, már a 40-es évek óta létező, szándéka szerint olcsó és elsőkerék-hajtásra ideális rendszer, a McPherson terjedt el. Tervezője egy Fiat-mérnök, Fornaca még a 20-as években kidolgozta a rendszert, de az amerikai Earl McPherson tette nagy sorozatban gyárthatóvá, így róla nevezték el.

Ebben a ma általános és lassan a felsőbb kategóriákban is terjedő szerkezetben csak az alsó keresztlengőkarok találhatók meg, a felsők szerepét a lengéscsillapítók és a köréjük szerelt rugók veszik át, úgy, hogy a kormányzáshoz külön csuklópontok (a kerékagyakra) csak alul, a megmaradt lengőkaron szükségesek, fent az egész lengéscsillapító-rugó egység (gólyaláb) elfordul a bekötése körül a toronycsapágyon. Ez a kialakítás szabad utat enged a féltengelyeknek, könnyű és egyszerű, de a kormányzás és a rugózás-lengéscsillapítás korábban egyértelműen különválasztott elemeit némiképp összevonja. Ennek kiküszöbölésére született meg az ún. pseudo-McPherson szerkezet, ebben a gólyalábak nem fordulnak, csak rugóznak, a kerékagyak külön csapokon mozognak (*első kép*).

Elsőkerék-hajtással is létezik kettős keresztlengőkaros első futómű, de ezekben a felső kart általában jelentősen lerövidítik, és jóval magasabbra szerelik.

Hátul sokáig a merev tengely volt az uralkodó típus. Egyszerű, olcsó, és főleg hátsókerék-hajtásnál praktikus. A teljes differenciálmű együtt leng a kerekekkel és a féltengelyekkel, nem indokolt a bonyolult csukló szerkezet. Az oldalirányú megvezetést javítandó a gyárak több megoldást dolgoztak ki; általánossá vált a két, az autó hossz tengelyével párhuzamosan lengő bekötőkar. Ezek mellett Európában a ma már nem létező Panhard autómárka szerkezete terjedt el: a merev tengelyt a rugókon és a csillapítókon túl egy átlós merev, de végein csuklós-szilentblokkos rúddal kapcsolták a karosszériához. Watt megoldása kifinomultabb volt, mert a kétrudas, oldalanként egy-egy bekötéssel határozottabbá vált az oldalirányú megvezetés.

A függetlenül rugózó kerekek problémájára azonban egyik megoldás sem felelt meg, a merev tengely akármilyen bekötéssel merev tengely maradt. Arról nem is szólva, hogy a kerekekkel együtt lengő differenciálmű jelentősen növelte a lengéskényelmet rontó rugózatlan futóműtömeget. Az első független hátsó futóművet a francia DeDion tervezte meg. Az elv meglepően egyszerű, ugyanakkor zseniális: kettős keresztlengőkarok, (pont úgy, mint elől), differenciálmű rögzítve a karosszéria alján, úgy, hogy a hajtás csuklós féltengelyeken jut a kerekre. A féltengelyek ennél fogva ugyan drágábbakká váltak, ám mivel a differenciálmű nem leng együtt a futóművel, a kardántengely kialakítása egyszerűbbé válhatott. Ez a megoldás hajtás nélkül is kiválóan működik hátul, így elsőkerék-hajtásokhoz is megfelel. Sőt a lengőkarok száma tetszőlegesen növelhető, formájuk alakítható, ezért ma már nem ritkák az oldalanként öt-hat karos (multilink) kivitelek sem. A legegyszerűbb, ritkán használt független hátsó felfüggesztés a hátsó McPherson. Ez ugyanolyan elemekből áll, mint az első, de nincs kornányzás.



Hagyományos, elforuló gólyaláb, toronycsapágyas első McPherson-felfüggesztés lemezből formázott segédvázal.

A leggyakoribb – az alsó-középkategóriáig általános, de feljebb is egyre elfogadottabbá váló – hátsó futómű a csatolt lengőkaros. Ebben a kerekeket az autó hossztengegyével párhuzamosan (fel-le) lengő hosszirányú rudak, lengőkarok vezetik, a rugózás és a csillapítás szabadon választható. A két oldal karjait (és így a két hátsó kereket is) rugalmas rúd, vagy deformálódni képes acélprofil köti össze. Ez a két oldal összekapcsolásával csökkenti a kanyarodási oldaldőlést, így javítja a stabilitást.

Ilyen oldalbillenés elleni szerkezetet elől és hátul is régóta használnak, a neve kanyarstabilizátor. Az általános alapképletben – a futómű kialakításától függetlenül – az alsó lengőkarokat kötik össze egy rúddal. Úgy, hogy amikor kanyarban a külső oldal berugózik, a rúdon át nyomóerő ébred a belső oldal karján, ezáltal annak – és vele a keréknek – felemelkedési hajlama csökken.

A manapság egyre inkább terjedő segédkeretes megoldások – amikor a futómű alkatrészeit nem közvetlenül a padlólemezre, hanem külön keretre szerelik – egyik fő feladata a padlólemez erősítése és ezzel a csavarodási merevség javítása. Különös gondot fordítanak az összeszerelés egyszerűsítésére is: a keretekkel a gyárban az előre összeépített komplett felfüggesztések egy lépésben az autó aljára rögzíthetők [11].



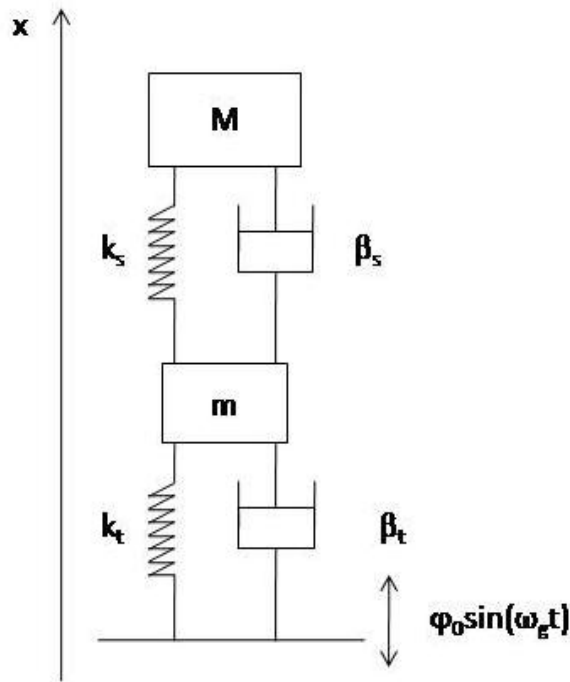
*Merevtengelyes hátsó futómű.
A differenciálmű is együtt mozog
a kerekkel, a hosszirányú
lengőkarokat kanyarstabilizátor
köti össze.*

A gépjárművek negyedmodellje

Az autómodellezés rendkívül fontos egység a járművek dinamikájának megértéséhez. Az autók struktúrája egy igen bonyolult rendszer számos szabadsági fokkal. Számos módja lehetséges a mérnöki modelltípusok kialakítására, ám a teljes jármű figyelembe vétele a modellalkotásnál nagyon komplikált, idő- és költségigényessé teszi a dinamikai vizsgálatokat.

A műszaki gyakorlat hamar rámutatott, hogy az egyszerűsített modellek, melyek nem feltétlenül vesznek figyelembe minden tényezőt – csak az adott vizsgálat számára indokoltakat –, jó közelítéssel pontos eredményeket jeleznek vissza az adott rendszerről. Így egy adott jármű futóművének vizsgálatánál elegendőnek bizonyult, ha mindössze egyetlen kereket és annak járulékos elemeit vesszük figyelembe.

Ennél a dinamikai analízisnél már csak két-, egyszerűsített változatában egyetlen szabadságfokú a rendszer, melyben a rugózatlan tömeget a kerék és a hozzá kapcsolódó tengely testesíti meg (m) – bár az elnevezés ellenére a gumiabroncs és a talaj között természetesen rugós kapcsolat áll fenn (k_t) –, felfelé haladva találjuk a valódi rugót (k_s) és a hozzá tartozó csillapítást (β_s), alatta a gumiabroncs csillapítását (β_t), legfelül pedig a rugózott tömeg látható (M). [3]



A gépjárművek lineáris negyedmodellje

Mozgásegyenlet, fázistér

A következő fejezetek a [4,5] forrásművek felhasználásával készültek.

Egy véges sok szabadsági fokú rendszert, amelyben a mozgásállapot változása csak a rendszer pillanatnyi állapotától függ, differenciál-egyenlettel vagy -egyenletrendszerrel írunk le. Az ilyen egyenletek általában tartalmazzák a változók első vagy magasabb időderiváltjait. A mechanikában például megjelennek a koordináták első deriváltjai, a sebességek, és második deriváltjai, a gyorsulások. Az ilyen egyenletrendszerek az időderiváltaknak új változóként való bevezetésével

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (1)$$

alakra hozható, ahol $\bar{x} = [x_1, x_2 \dots x_n]$ egy n -dimenziós vektor, $\bar{f}(\bar{x})$ pedig n számú függvény. Az idő szerinti deriválást ponttal jelöljük. Autonóm rendszernek nevezzük azt az elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert, amelyben az $\bar{f}(\bar{x})$ függvények egyike sem függ expliciten az időtől. Ha az időtől expliciten függenek az $\bar{f}(\bar{x})$ függvények, a rendszer akkor is autonómmá tehető az $x_{n+1} = \alpha t$ új változó bevezetésével, amivel

$$f_k(x_1, x_2 \dots x_n, t) = f_k(x_1, x_2 \dots x_n, x_{n+1}/\alpha) \quad (2)$$

alakba írható. Ez később lényeges lesz a dolgozatban, hiszen ebből az következik, hogy egy időfüggő gerjesztésnek kitett n -dimenziós (gerjesztés nélkül autonóm) rendszer $n+1$ dimenziós autonóm rendszerként írható le, vagyis az időfüggő gerjesztés eggyel növeli a rendszer dimenzióját.

Az autonóm rendszer a fizikai rendszer mozgásának egy n -dimenziós térbeli pont mozgását felelteti meg. Az x_i koordinátateret fázistérnek nevezzük. A fázistérbeli koordináták a fizikai rendszer helyzetét megadó skalár mennyiségek (koordináták, vagy általánosított koordináták) és azok idő szerinti első deriváltjai, a (általánosított) sebességek. A differenciálegyenlet-rendszer a fázistér minden egyes pontjához egy (fázistérbeli) mozgást rendel, ami hasonló a valóságos folyadékok áramlásához. Ezért azt mondjuk, hogy az autonóm rendszer a fázistérben „áramlási teret” vagy „folyamot” definiál.

Itt nem részletezzük, de ezzel kapcsolatos Liouville tétele, mely szerint konzervatív rendszerekben a fázistérfogat állandó. Disszipatív (jellemzően súrlódást tartalmazó) rendszerekben a fázistérfogat összehúzódik.

A mozgásegyenletek numerikus megoldása

A dinamikai rendszerek analitikus megoldása speciális esetekben ismert. Általában numerikus módszerek szükségesek a megoldás közelítéséhez. A feladat az, hogy a t_0 időpillanatban ismert $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ vektor esetén megadjuk a fizikai rendszer mozgását leíró $\bar{x}(t)$ függvényt egy bizonyos $[t_0, t_1]$ intervallumban. Az így megfogalmazott feladatot kezdetiérték-feladatnak nevezzük. A kezdetiérték-feladatok megoldására számos módszer ismert, itt csak a dolgozatban is használt negyedrendű Runge-Kutta módszert ismertetem.

A közönséges differenciálegyenletek széles osztályainak kezdetiérték-feladata egyértelmű megoldással rendelkezik. Ezt közelítik a numerikus módszerek. Általában elmondható, hogy a numerikus módszerek a folytonosan változó időt kicsiny, Δt időlépekre osztják, és a megoldásfüggvény közelítését csak bizonyos időpontokban adják meg, diszkrét értékek sorozataként (nem folytonos függvényként). Ha elegendően kicsinyek az időlépek, akkor a megoldás hibája is kicsiny. Ugyanakkor fontos, hogy a numerikus közelítésnek mindig van hibája, és a hiba becslése fontos része az eljárásnak. Általában a számítás elején kell rögzíteni, hogy legfeljebb mekkora becsült hibát fogadunk el. A numerikus módszerek Δt időlépéseinek nagysága függővé tehető a becsült hibától, így adaptív lépésköz változtatás is megvalósítható.

A Runge–Kutta módszerek családja a differenciálegyenletek numerikus analízisének széles körben ismert és alkalmazott közelítő eljárása, amelyet Carl Runge és Martin Kutta német matematikusok dolgoztak ki 1900 körül.

A kezdetiérték feladatok numerikus megoldásának fő elvét csak egydimenziós rendszerre és a részleteket elhagyva írom le. Feladat a

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t) \quad (3)$$

egyenlet megoldása az $x(0)=x_0$ kezdeti feltétel mellett. Az eljárás a megoldásfüggvény x_n értékeit a diszkrét $t_n=t_0+nh$ pillanatokban adja meg (közelíti). Az a cél, hogy az x_n ismeretében meg tudjuk adni az x_{n+1} értéket. Fejtsük Taylor-sorba az x_n körül a megoldásfüggvényt:

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k x}{dt^k} h^k \quad (4)$$

Az idő szerinti deriváltak kifejezhetők az $f(x,t)$ segítségével. A numerikus eljárás során végtelen számú műveletet nem tudunk elvégezni, ezért a sorfejtést meg kell szakítanunk valahol. Ha az N -edik tagnál szakítjuk meg a sort, akkor az elhagyott tagok miatt h^{N+1} nagyságrendű hibát követünk el. Minél nagyobb az N , annál kisebb ez a hiba, de annál több számítást kell végeznünk. Ez az a kompromisszum, amelyet minden numerikus módszer alkalmazása esetén el kell fogadnunk. Ha a Taylor-sorfejtést az N -edik tagnál szakítjuk meg, akkor azt mondjuk, hogy N -edrendű módszert alkalmazunk, melynek a hibája a h $N+1$ -edik hatványával arányos. Ne feledjük, hogy a hiba a h időlépés kisebbitésével is csökkenthető (nem csak a módszer rendjének növelésével), ugyanakkor ez is a számítási munka növekedéséhez vezet.

Megemlítjük, hogy $N=1$ esetén az ún. Euler-módszerhez jutunk. Ez igen szemléletes, az x_{n+1} számításához csak az első deriváltat használja fel

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_n, t_n). \quad (5)$$

Az Euler-módszer csekély számításigénnyel jár, ugyanakkor a h -ban másodrendű hiba általában túl nagynak bizonyul, így a megoldásnak csak igen durva közelítését kaphatjuk meg (hacsak a magasabb időderiváltak nem elegendően kicsinyek, de ez ritka eset).

A negyedrendű Runge-Kutta módszer iterációs formulái a következők.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ ahol} \quad (6)$$

$$k_1 = h \cdot f(x_n, t_n), \quad k_2 = h \cdot f\left(\frac{x_n + k_1}{2}, t + \frac{h}{2}\right), \quad (7)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right), \quad k_4 = h \cdot f(x_n + k_3, t_n + h). \quad (8)$$

A szakirodalom szerint a módszer jól alkalmazható a legtöbb dinamikai rendszer, ezek között a kaotikus problémák szimulálására.

A hibabecslés egyik elterjedt módja az, hogy az x_{n+1} értéket az x_n -ből két, $\Delta t/2$ lépéssel is kiszámítjuk, majd megvizsgáljuk az így kapott érték eltérését az eredeti x_{n+1} -től. Ebből a hiba becsülhető. Ezen alapul az adaptív lépésköz változtatás. Ha a hiba nagyobb egy előre rögzített értéknél, akkor az eredeti Δt lépésköz helyett $\Delta t/2$ lépésközzel folytatjuk az iterálást. Ha viszont kisebb egy másik küszöbszámnál, akkor megnöveljük a lépésközt $\Delta t \cdot 2$ -re. Az adaptív lépésköz változtatás előnye az, hogy adott hibahatár mellett minimalizálható a számításigény. Adaptív lépésköz változtatást nem alkalmazhatunk, ha időben egyenletes eloszlású adatsorra van szükségünk, mint például a későbbiekben szóba kerülő természetes eloszlás számításánál.

A numerikus számítások során duplapontos aritmetikát használunk.

Fázisportré, a szabad harmonikus oszcillátor példája

Az n -dimenziós fázistérben mozgó pont, a fázispont mozgása a rendszer mozgásának teljes leírását adja. A fázispontnak a fázistérbeli pályáját trajektóriának nevezzük. A dinamikai rendszer megoldásának egyértelműségéből következik, hogy a trajektóriák soha nem metszik egymást. Ha a fizikai rendszer egy szabadsági fokú (x), azaz a fázistér két dimenziós (x, v), akkor a papír síkján könnyen szemléltethető a trajektória. Magasabb dimenziós rendszerek esetén a mozgás vizsgálatához leképezéseket szokás alkalmazni.

A szabad harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (9)$$

ahol x az egyensúlyi helyzettől való kitérés, m a tömegpont tömege, k a rugóállandó. Az

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ sajátfrekvencia bevezetésével ez az

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad (10)$$

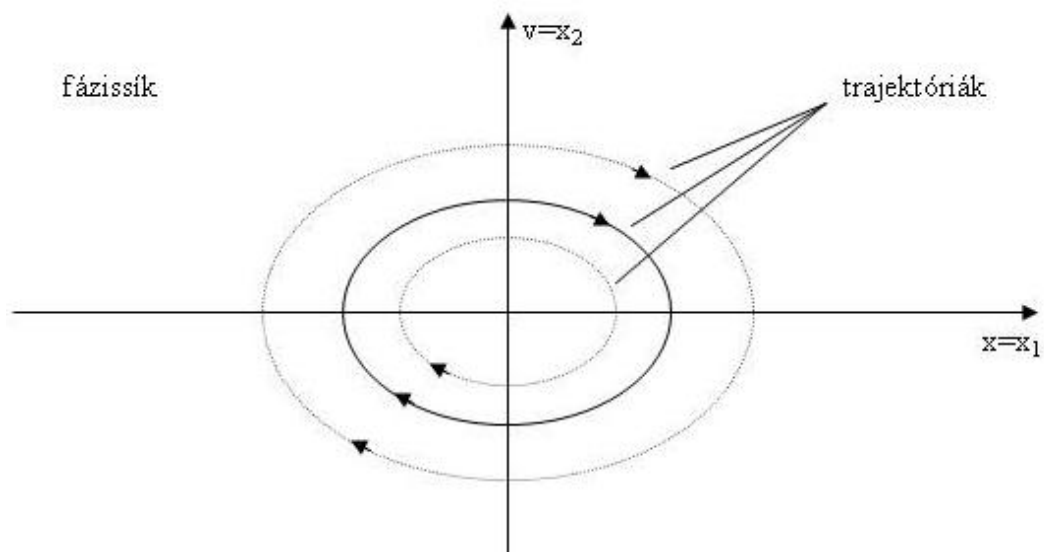
alakban írható. Autonóm rendszerré az $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ jelölések bevezetésével alakítható, és az alábbi egyenletrendszer formájában adható meg:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Ennek a rendszernek ismerjük a megoldását:

$$\begin{aligned} x_1 &= x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \\ x_2 &= v = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (12)$$

A fázistér kétdimenziós, ezért a papír síkján könnyen szemléltethető, a trajektória ellipszis. A vízszintes tengelyen a kitérést, a függőleges tengelyen a sebességet ábrázoljuk (1. ábra).



1. ábra A harmonikus oszcillátor fázisdiagramja

Az 1. ábrán látható ellipszisek közül egyszerre csak egy lehet a tömegpont trajektóriája, hiszen egy pont csak egy mozgásban tud részt venni. A halványabban rajzolt trajektóriákat a példa kedvéért tüntettük fel. Nagyobb energia esetén az ellipszis mérete is nagyobb. A lehetséges trajektóriák összessége a fázistérkép. Ebben az esetben a trajektóriák olyan ellipszisek, amelyek geometriai értelemben hasonlóak, és körüljárnak az origót. Az origó elliptikus fixpont.

Fixpontok a kétdimenziós fázistérben

Fixpontnak nevezzük azokat a fázistérbeli pontokat, amelyekben az időderiváltak eltűnnek, azaz

$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{0}}. \quad (13)$$

A trajektóriák ide befutnak, más szóval, a fázisfolyam itt eltűnik. A fixpontok fontos jellemzője a stabilitás. Ezt úgy vizsgáljuk, hogy a fixpont kis környezetében a dinamikai rendszer linearizált alakját írjuk fel, ami kis elmozdulásokra jó közelíti a rendszer viselkedését. Csak kétdimenziós esettel foglalkozunk. A fixpontot jelöljék az (x_1^*, x_2^*) koordináták. A dinamikai rendszer linearizált alakja:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_1^*) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) \\ (x_2 - x_2^*) &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) \end{aligned} \quad (14)$$

vagy

$$\dot{\Delta \bar{x}} = A \Delta \bar{x} \quad (15)$$

ahol

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

A linearizált mozgásegyenletek megoldásait exponenciális alakban keresve azt találjuk, hogy az A mátrix sajátértékei határozzák meg a fixpont jellegét. Ha a megoldás valós, akkor exponenciális közeledés vagy távolodás zajlik a fixpont környezetében a fixponthoz viszonyítva. Képzetes sajátértékek esetén a megoldás periodikus jellegű a fixpont környezetében. A fixpontok stabilitását és tulajdonságait a két sajátérték együttesen jellemzi. A lehetséges esetek a következők.

Csomópontattraktor: mindkét sajátérték valós és negatív.

Hiperbolikus pont: a sajátértékek valósak, egyik pozitív, a másik negatív.

Elliptikus pont: mindkét sajátérték képzetes.

Spirális attraktor: a sajátértékek komplexek, valós részük negatív.

Az ún. invertált dinamikában, ha az idő visszafelé telik, megjelenhet a csomópontrepellor és a spirális repellor is, de ezzel itt nem foglalkozunk.

A csillapítás hatása: csillapított harmonikus oszcillátor

Ha a tömegpontra a kitéréssel arányos ún. harmonikus erőn kívül a sebességgel arányos súrlódás (csillapítás) is hat, akkor a rendszert csillapított harmonikus oszcillátornak nevezzük, mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}, \quad (17)$$

ahol x az egyensúlyi helyzettől való kitérés, m a tömegpont tömege, k a rugóállandó. A

tömeggel való osztás után az egyenletben megjelenik a szabad rezgés $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ frekvenciája

és az $\alpha = \beta/m$ fajlagos csillapítási tényező

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \alpha \dot{x} \quad (18)$$

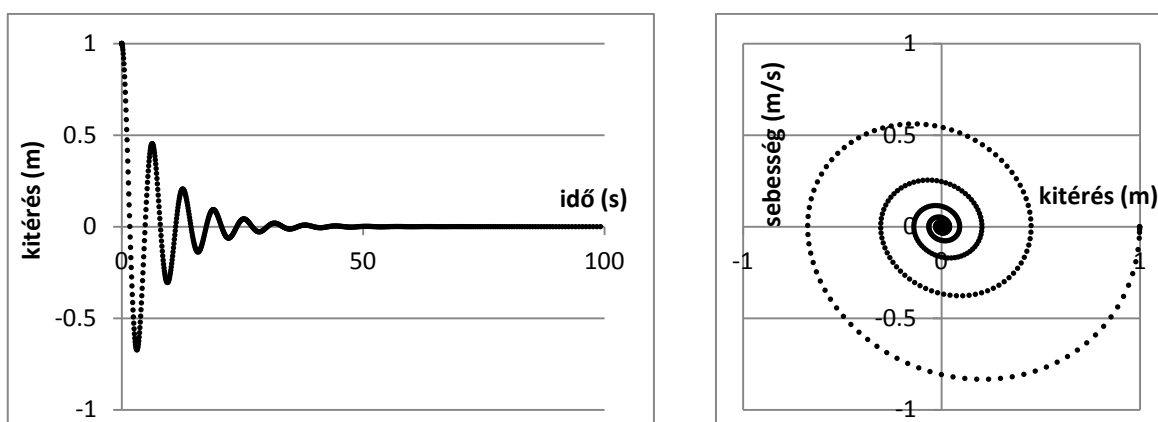
alakban írható. Autonóm rendszerré az $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ jelölések bevezetésével alakítható, és az alábbi egyenletrendszer formájában adható meg:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 - \alpha x_2. \end{aligned} \quad (19)$$

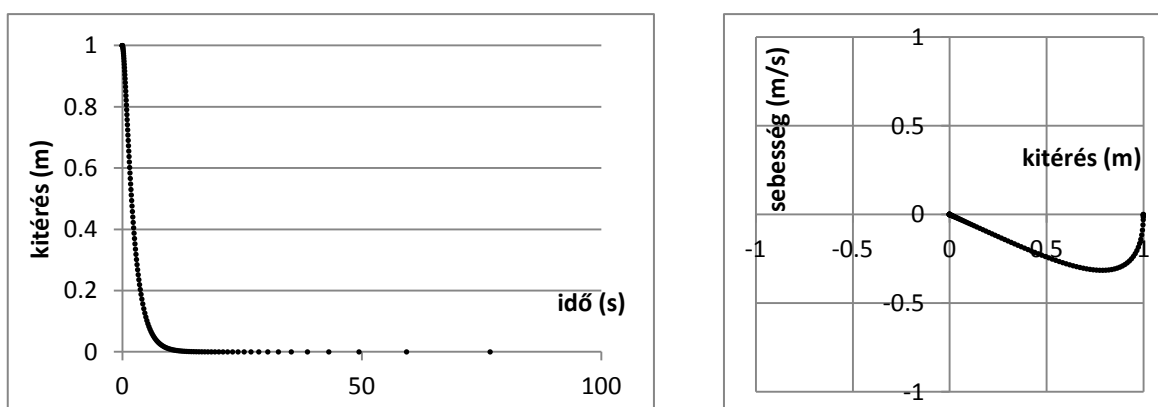
Ennek a rendszernek is ismerjük a megoldását:

$$x_1 = x = Ae^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\omega_\alpha t + \varphi_0), \quad \omega_\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4}}. \quad (20)$$

A csillapított rezgés közelítőleg felfogható úgy, mint egy exponenciálisan csökkenő amplitúdójú, ω_α körfrekvenciájú rezgés, amely az idővel tart az egyensúlyi helyzethez, végtelen hosszú idő elteltével megáll. Ha a csillapítás kicsi, akkor a rendszer többször áthalad az egyensúlyi helyzeten, mielőtt megáll, ha nagy, akkor egyszer sem, ezt aperiodikus mozgásnak hívjuk.



2. ábra A csillapított harmonikus oszcillátor kitérés-idő függvénye és fázisdiagramja gyenge csillapítás esetén



3. ábra A csillapított harmonikus oszcillátor kitérés-idő függvénye és fázisdiagramja erős csillapítás esetén

A csillapított harmonikus oszcillátor fázisterében az origó egy fixpont, spirális attraktor.

Poincaré-leképezések

Jules Henri Poincaré (1854-1912), aki a doktori dolgozatát a differenciálegyenletek szinguláris pontjairól írta, a mechanikai rendszerek hosszú távú stabilitásával is foglalkozott. Ő alkalmazta először a róla elnevezett leképezéseket.

A leképezések használata elsősorban azért célszerű, mert leegyszerűsíti a bonyolult mozgások tanulmányozását. A trajektóriák helyett csak bizonyos pontokat vizsgálunk. N-dimenziós autonóm rendszerek esetén egy N-1 dimenziós hiperfelület és a trajektóriák metszéspontjainak sorozatát állítjuk elő. Mivel az autonóm rendszer egyenletei elsőrendűek, minden egyes pont egyértelműen meghatározza a következőt:

$$\bar{x}_{i+1} = P(\bar{x}_i) \quad (21)$$

itt P a Poincaré-leképezés.

Az olyan speciális

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) \quad (22)$$

nem-autonóm rendszerek esetén, amelyekben az $\bar{f}(\bar{x}, t)$ az időnek periodikus függvénye, a gyakorlatban fontos lehetőség van Poincaré-leképezés definiálására. Legyen a periódusidő T, azaz $\bar{f}(\bar{x}, t) = \bar{f}(\bar{x}, t + T) = \bar{f}(\bar{x}, t + iT)$. Ekkor az $x_{n+1} = \sin \frac{2\pi}{T}t$ koordinátával kiegészített n+1 dimenziós fázistérben a trajektóriáknak az $x_{n+1} =$ állandó összefüggéssel meghatározott hiperfelülettel képzett metszéspontjai a Poincaré-leképezés pontjai. Ez más szóval azt jelenti, hogy az eredeti, n-dimenziós fázistérbeli mozgásról T időnként készítünk pillanatképet, és az így kapott ponthalmaz lesz a mozgás Poincaré-leképezése. Ez az oka annak, hogy gerjesztett rendszerek esetén mindig a gerjesztés periódusideje határozza meg a leképezést. A Poincaré-leképezéseknek ezt az osztályát stroboszkopikus leképezéseknek is nevezzük. A stroboszkóp egy olyan speciális lámpa, amely pontosan előre beállított időközönként villan fel. Ha sötét szobában használjuk, akkor a pillanatképekkel lehetőséget ad gyors periodikus mozgások mozgások tanulmányozására. Innen a leképezés elnevezése: csak bizonyos, előre adott időközönként bekövetkező állapotokban vizsgáljuk a fázispontot.

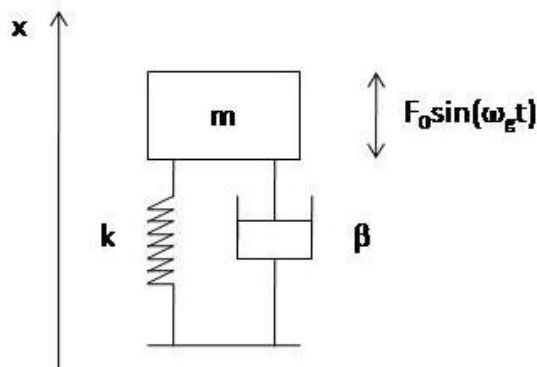
A leképezések elméletében fontos az invariáns sokaság fogalma. Invariáns sokaságot alkotnak azok a pontok, amelyek a leképezés többszöri alkalmazásával egymásba képeződnek le a következők szerint:

$$\begin{aligned} P(\bar{x}_1) &= \bar{x}_2 \\ P(\bar{x}_2) &= \bar{x}_3 \\ &\vdots \\ P(\bar{x}_{k-1}) &= \bar{x}_k \\ P(\bar{x}_k) &= \bar{x}_1 \end{aligned} \quad (23)$$

Az $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k$ vektorok összessége egy k pontból álló ciklus, más szóval egy invariáns sokaság. A k értéke lehet 2, bármilyen pozitív egész szám, de invariáns sokaság lehet egy görbe (azaz végtelen sok pontot tartalmazó folytonos sokaság) is.

A gerjesztett harmonikus oszcillátor

A gerjesztett és csillapított harmonikus oszcillátor elvi vázlatát az alábbi ábra szemlélteti.



A csillapított és gerjesztett harmonikus oszcillátor

Az ábra elrendezését az indokolja, hogy később a járműdinamikában ismert negyedmodellt szeretném vizsgálni, amelyben az út alul van, ehhez igazodik ez az elrendezés is. A rendszer természetesen egy szabadsági fokú, tehát az m tömeg csak függőleges irányban mozoghat, oldalra nem. A rugó a rugóerőt, a stilizált lengéscsillapító a csillapítást jelképezi.

A gerjesztett harmonikus oszcillátor példáján jól illusztrálható a stroboszkopikus leképezés. A mozgásegyenlet a csillapított harmonikus oszcillátornál már bevezetett jelölésekkel:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \alpha \dot{x} + f_g \cos(\omega_g t + \varphi_0) \quad (24)$$

alakban írható. f_g a tömegegységre jutó gerjesztési amplitúdó, ω_g a gerjesztés frekvenciája, ebből $T = \frac{2\pi}{\omega_g}$. Autonóm rendszerré az $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ jelölések bevezetésével alakítható, és az alábbi egyenletrendszer formájában adható meg:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 - \alpha x_2 + f_g \cos(\omega_g t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (25)$$

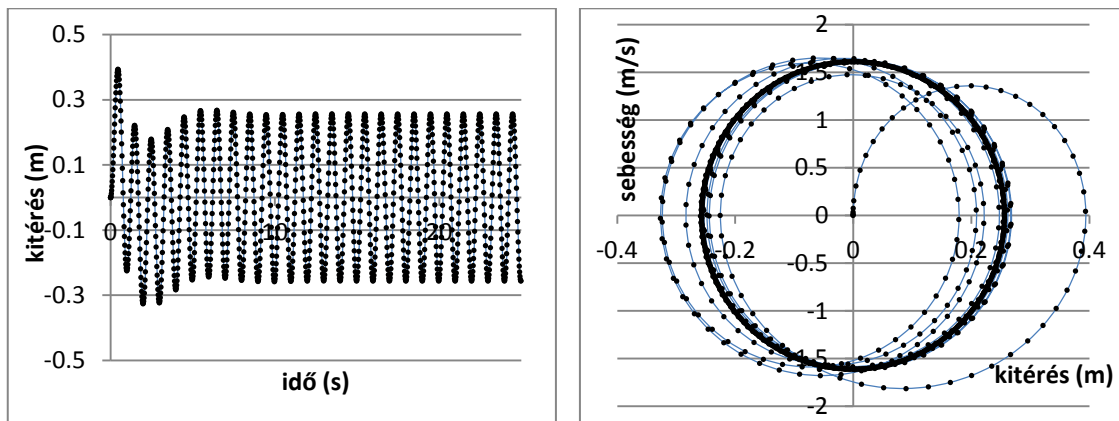
A megoldás ismert:

$$x(t) = A \cos(\omega_g t + \varphi_0 - \delta) + A_1 e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos(\omega_\alpha t + \varphi_1)$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + \alpha^2 \omega_g^2}}$$

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha \omega_g}{\omega_0^2 - \omega_g^2} \right) \quad (26)$$

A második tag az ún. tranziens (átmeneti) része a mozgásnak, amely az idővel exponenciálisan csökkenve eltűnik. Az első tag marad meg hosszú távon, ez a gerjesztési frekvenciával azonos frekvenciájú szinuszos rezgés, állandósult tagnak is nevezzük.

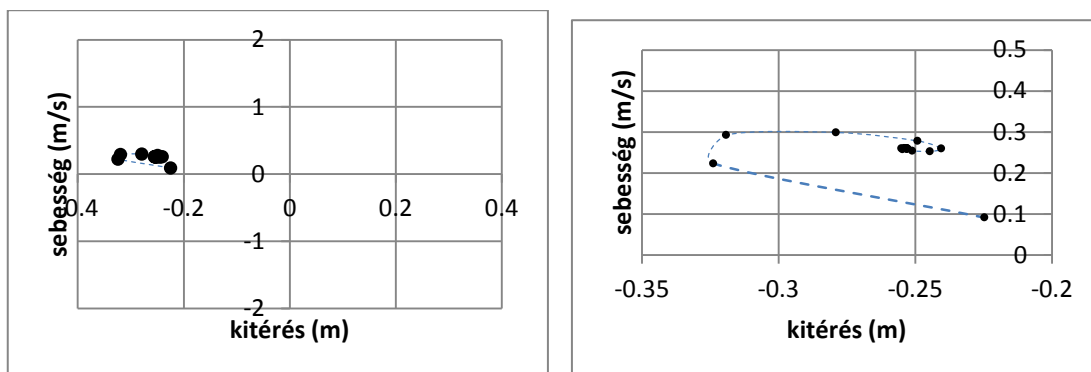


4. ábra A gerjesztett és csillapított harmonikus oszcillátor kitérés-idő függvénye és fázisdiagramja

Bár a 4. ábra csak egy kezdőfeltétel esetén mutattuk meg a mozgást, az bármilyen kezdőfeltétel esetén a szinuszosan változó rezgőmozgáshoz tart, aminek a fázisdiagramon az ellipszis felel meg. Minden trajektória az ellipszishez simul. Az ellipszis ezért egy különleges halmaz a fázissíkon, mely magához vonzza a trajektóriákat. Ebből ered a neve is: határciklus attraktor. Általában attraktornak nevezzük a fázistérnek azon részhalmazát, amelyet minden trajektória elér.

Mivel a gerjesztett oszcillátor nem autonóm rendszer, de autonómmá tehető az időnek, mint változónak a bevezetésével, a dimenziószáma valójában nem 2, hanem 3. Ezt sejteti az is, hogy a fázisdiagramon a trajektóriák látszólag metszik egymást, holott ez nem történhet meg. A 4. ábrán bemutatott fázisdiagram a rendszer fázistérének egy kétdimenziós vetülete, egészen pontosan az elmozdulás-sebesség síkra vett vetülete. Annak érdekében, hogy a mozgás jellege könnyebben vizsgálható legyen, elkészítjük a Poincaré-leképezését. Az (x, v)

fázisikon csak azokat a pontokat ábrázoljuk, amelyek iT , $i = 1, 2, 3 \dots$ stb. időpontban jellemzik a rendszert. Az ilyen leképezést stroboszkópikus leképezésnek is nevezzük. Mivel a megoldás ismert, most nincs más feladatunk, mint a fentebb bemutatott ponthalmazból a megfelelő pontokat kiválogatni.



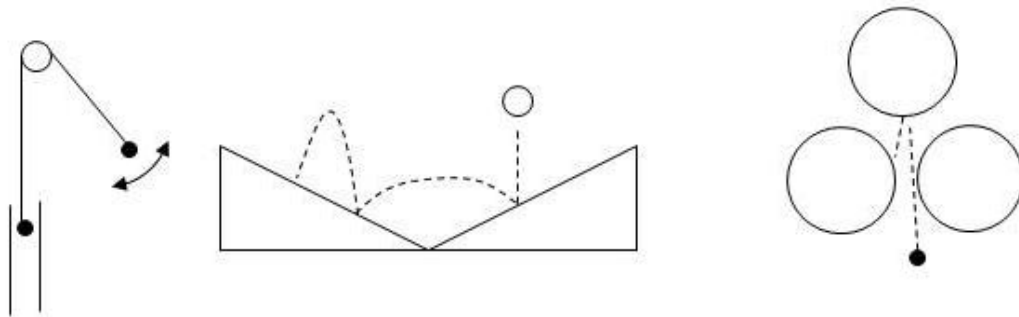
5. ábra A gerjesztett és csillapított harmonikus oszcillátor mozgásának stroboszkópikus leképezése. A jobb oldali ábra nagyított a jobb láthatóság érdekében. A pontokat csak az *egymásutániség* követése érdekében kötöttük össze, ezek a vonalak *nem* trajektóriák.

Az 5. ábrán megfigyelhető, hogy a leképezés pontjai fokozatosan közelednek egy, a határcikluson levő ponthoz. A fázisdiagramon a határciklus egy zárt görbe, a leképezésen a határciklusnak egyetlen pont felel meg, ez egy pontattraktor. Általában elmondható, hogy a leképezésen az attraktorok eggyel alacsonyabb dimenziós alakzatok, mint a fázistérben.

A kaotikus mozgások jellemzői

A harmonikus oszcillátor példái alkalmasak voltak arra, hogy számos fogalmat és módszert bemutassunk. Ugyanakkor ezeknek a rendszereknek ismerjük az analitikus megoldásukat, amely kevésbé függ a kezdeti feltételektől, ezért tetszőleges időtartamra előre jelezhető a viselkedésük.

A mechanikai (és általában dinamikai) rendszereknek van egy olyan csoportja, amelyre ez nem jellemző. Ilyen például a csigán lengő test, a szemben fekvő lejtőkön pattogó labda, vagy a korongok között pattogó golyó.



6. ábra A kezdeti feltételekre érzékeny rendszerek: a csigán lengő tömegpont, a lejtőkön pattogó labda és a korongok között pattogó golyó.

A 6. ábrán szemléltetett rendszerek mindegyikére igaz, hogy bár a mozgástörvényük egyszerűen megadható, a mozgás erősen érzékeny a kezdeti feltételekre, ami miatt a mozgás hosszú távon nem jelezhető előre. Például a korongok között pattogó golyót, ha két, egymáshoz közeli helyzetből indítjuk (két külön alkalommal), akkor a két mozgás egy ideig hasonlóan megy végbe, azonban rövid időn belül annyira eltérővé válhatnak, hogy azonos idő elteltével teljesen más korong közelébe kerülhet a golyó, és egészen más sebességgel mozoghat a két esetben. A rendszer teljesen determinisztikus, mégsem lehetséges a mozgásának hosszú távú előrejelzése, mert a kezdeti feltételekben jelentkező kis hiba rövid idő alatt a mozgásban igen nagy eltéréseket okozhat. A fázistérbeli trajektóriák egymástól exponenciálisan távolodnak. Az ilyen mozgást determinisztikus káosznak, a rendszert kaotikusnak nevezzük. A káosz tehát *nem* azért alakul ki, mert a rendszer „véletlenszerű” törvényeknek engedelmeskedik.

A determinisztikus káosz fő jellemzői:

- a dinamikai rendszer megoldásai egyértelműek bármilyen kezdőfeltételre, ezért végtelen pontossággal megadott kezdőfeltételek esetén a rendszer viselkedése elvileg hosszú távon is előre jelezhető,
- a dinamikai rendszer mozgása igen érzékeny a kezdeti feltételekre, a trajektóriák egymástól exponenciálisan távolodnak, a rendszer „hibaerősítő” tulajdonságú,
- a fenti tulajdonság oka a rendszerben fellépő nemlinearitás és az instabilitás.

Determinisztikus káosz nem csak nagy szabadsági fokú, bonyolult rendszerekben alakulhat ki, hanem egyszerű, de nemlineáris dinamikával rendelkező rendszerekben.

A kaotikus viselkedés szükséges feltétele, hogy a dinamikai rendszer

- legyen nemlineáris,
- mozgását legalább három független, elsőrendű autonóm differenciálegyenlet írja le.

Attraktorok, természetes eloszlás

Az eddigiekből kitűnik, hogy a dinamikai rendszerek leírásában fontos szerepet játszanak az attraktorok. Kaotikus rendszerek esetén ezek nem mindig pontok, ellipszisek vagy egyszerű alakzatok. Számos esetben fraktál alakzatok a Poincaré-leképezéseken megjelenő attraktorok.

Természetes eloszlásnak nevezzük azt az időtől független valószínűség-eloszlást, mely megadja, hogy a kaotikus attraktor, a kaotikus sáv, vagy a kaotikus nyereghalmaz egyes pontjait milyen gyakran látogatja a hosszú ideje kaotikus mozgást végző pont.

A természetes eloszlás úgy számítható, hogy a rendszer mozgását hosszú időintervallumban numerikus módszerrel kiszámítjuk, és minden egyes pontról feljegyzést készítünk, hol található. Így a fázistér kis térfogatrészeiben megszámlálható a „meglátogatások” száma, ebből pedig relatív gyakoriság is számítható. A relatív gyakoriság tart a valószínűséghez, amint a mintavételek száma (a vizsgált időintervallum hossza) tart a végtelenhez.

A fenti eljárásnak korlátai is vannak. Mivel a kaotikus attraktorok gyakran fraktál szerkezetűek, a numerikus pontosság nem biztos, hogy elegendő a fraktálok finomszerkezetének ábrázolásához. Ezért a természetes eloszlás csak a numerikus pontosság erejéig számítható.

A mozgásegyenletek dimenziótlanítása

A fizikai rendszereket leíró egyenletekben mértékegységgel rendelkező mennyiségek szerepelnek. Az egyenletek átírhatók olyan alakra, amelyben már sem a paraméterek, sem a változók nem rendelkeznek mértékegységgel. Ez két okból fontos.

A dimenziótlanított alak megmutatja a rendszer független paramétereinek a számát, ami általában kevesebb, mint a fizikai paraméterek száma. Az egyenlet megoldásainak paraméterfüggése hozzá tartozik a megoldáshoz, ami ebben az alakban tanulmányozható.

A numerikus módszerek alkalmazásakor a számítógépek puszta számokkal, dimenziótlan mennyiségekkel dolgoznak. A fizikai mennyiségek mértékegységének puszta elhagyása nem megfelelő eljárás, mert nagyon megnehezíti a független paraméterek terének feltérképezését.

Egydimenziós rendszer esetén az x helykoordináta és a t idő helyett bevezetjük az x' és t' dimenziómentes mennyiségeket a rendszerre jellemző, egyelőre nem meghatározott L hosszúság és T időegység bevezetésével:

$$x = Lx' \quad t = Tt'. \quad (27)$$

A sebesség és a gyorsulás a következők szerint alakul:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{Ldx'}{Tdt'} = \frac{L}{T}\dot{x}' \quad \text{és} \quad \ddot{x} = \frac{L}{T^2}\ddot{x}'. \quad (28)$$

Legyen adott a mozgásegyenlet az alábbi formában:

$$\ddot{x} = a(x, \dot{x}, t, \mu). \quad (29)$$

Itt μ jelöli a paraméterek halmazát. Az új változókkal az eredeti egyenlet a következő alakban írható:

$$\ddot{x}' = \frac{T^2}{L} a(Lx', \frac{L}{T}\dot{x}', Tt', \mu). \quad (30)$$

Az így kapott kifejezésben L és T még mindig szabadon választható, értéküket úgy határozzuk meg, hogy minél több helyen legyen 1 az együttható. Ezzel a módszerrel legfeljebb kétfelével csökkenthető a paraméterek száma, ezek halmazát jelölje μ' . Az L és T megválasztása után a mozgásegyenlet

$$\ddot{x}' = a(x', \dot{x}', t', \mu'). \quad (31)$$

Ha ennek a feladatnak a megoldása $x'(t') = f(x'_0, v'_0, t', \mu')$, akkor az eredeti változókkal a megoldás kifejezhető:

$$x(t) = Lf\left(\frac{x_0}{L}, \frac{Tv_0}{L}, \frac{t}{T}, \mu'\right). \quad (32)$$

Fontos, hogy az eredeti probléma megoldása is megadható a μ' dimenziótlan paraméterekkel, melyeknek száma kevesebb, mint az eredeti egyenletben a μ paraméterek száma.

Az anharmonikus oszcillátor

Az anharmonikus oszcillátorról szóló anyagot a [4,7,8,9,10] forrásokból merítettem.

Anharmonikusnak akkor nevezzük az erőtvénnyt (és a hatására kialakuló rezgőmozgást) ha az eltér a lineáris erőtvénnytől. Ez az eltérés jellemzően két módon valósul meg. Az

$$F = -kx - \varepsilon x^3 \quad (33)$$

erőtvénnyel megőrzi a függvény szimmetriáját, az

$$F = -kx - \varepsilon x^2 \quad (34)$$

alakú erőtvénnyel viszont nem. Mi csak a szimmetrikus esettel foglalkozunk. Amennyiben a nemlineáris tag (ε) előjele negatív, akkor az erőtvénnyel a lineáris rugóhoz viszonyítva mindig

nagyobb erőt fejt ki, sőt a különbség a kitéréssel növekszik. Az ilyen rugót keményedő rugónak is hívják. Pozitív anharmonikus tag esetén lágyuló rugóról beszélhetünk.

A progresszív rugózás olyan elemet tartalmaz, amelynek erőtvénnye eltér a lineáristól a keményedő rugó módjára. Egy olyan pont mozgásegyenlete, amely keményedő rugóhoz kapcsolódik, csillapítás és gerjesztés is hat rá:

$$m\ddot{x} = -kx - \varepsilon x^3 - \beta \dot{x} + F_g \cos(\omega_g t). \quad (35)$$

Az ilyen egyenlettel leírt rendszert Duffing-oszcillátornak is nevezik, lineáris viszkózus csillapítással. Az egyenletnek ebben a formájában a fizikai paraméterek szerepelnek, amelyeknek mértékegysége is van. A dimenziótlanítás első lépéseként elosztjuk az egyenletet a tömeggel.

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \varepsilon_0 x^3 - \alpha \dot{x} + f_g \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (36)$$

Itt a szokásos módon $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{m}$, $\alpha = \frac{\beta}{m}$, $f_g = \frac{F_g}{m}$, $\omega_g = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_g}$. A dimenziótlanítást a hosszúság és az idő átskálázásával folytatjuk, az x és t mennyiségekről a vesszőt elhagyjuk:

$$\ddot{x} = \frac{T^2}{L} \left(-\omega_0^2 L x - \varepsilon_0 L^3 x^3 - \alpha \frac{L}{T} \dot{x} + f_g \cos\left(\frac{2\pi}{T} T t\right) \right) \quad (37)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 T^2 x - \varepsilon_0 T^2 L^2 x^3 - \alpha T \dot{x} + \frac{T^2}{L} f_g \cos(2\pi t) \quad (38)$$

Az idő szorzóját máris azonosnak választottuk a gerjesztés T periódusidejével, az L hosszúságfaktort még szabadon megválaszthatjuk. Az a cél, hogy minél több helyre kerüljön 1 együttható. Legyen $\frac{T^2}{L} f_g = I$ a gerjesztés dimenzió nélküli amplitudója, és az L mennyiséget válasszuk a következőképpen: $L = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\varepsilon_0}}$. Ezzel

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 T^2 (x + x^3) - \alpha T \dot{x} + I \cos(2\pi t). \quad (39)$$

Bár az eredeti mozgásegyenletben látszólag 6 szabadon választható paraméter van, valójában három független paraméterrel lehet definiálni a rendszert, ezek: $\omega_0^2 T^2$, αT , I . Ha ezeket ismerjük, és a valódi rendszer gerjesztésének T periódusidejét és az L térbeli skálázási együtthatót megadjuk, akkor az eliminált fizikai paraméterek így számíthatók ki:

$$\omega_g = \frac{2\pi}{T}, \varepsilon_0 = \frac{\omega_0^4}{L^2}, f_g = \frac{IL}{T^2}. \quad (40)$$

Ezek a formulák azért fontosak, mert segítenek a dimenziótlanított rendszerre kapott eredményeket megfeleltetni a valóságos rendszereknek, adott esetben a járműveknek.

A Duffing-oszcillátorról szóló szakirodalom igen gazdag. Ez a rendszer igen egyszerű, de már alkalmas arra, hogy a nemlineáris rendszerekben fellépő jelenségek megmutatkozzanak

benne. Ezek közül a két legfontosabb a gyenge gerjesztés esetén megfigyelhető ún. hiszteretikus rezonancia, a másik az erős gerjesztés esetén megjelenő kaotikus viselkedés. A „gyenge” és az „erős” gerjesztés közötti átmenet során a rendszer megoldásai igen sokszínű alakot öltenek, számos, egyre magasabbrendű ciklus jelenik meg a mozgásban, amelyek megfelelnek a Poincaré-leképezés invariáns sokaságainak.

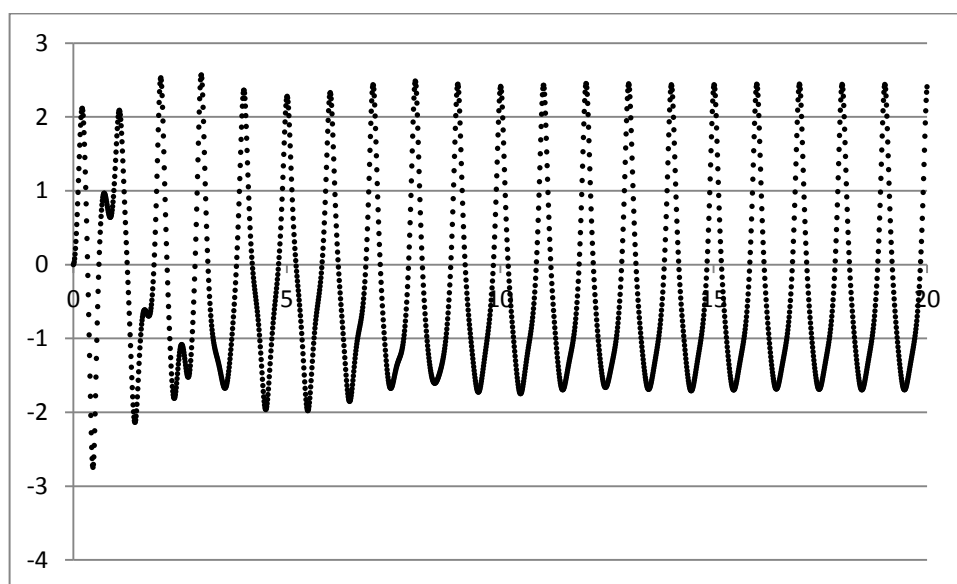
Az anharmonikus oszcillátor viselkedése gyenge gerjesztés esetén

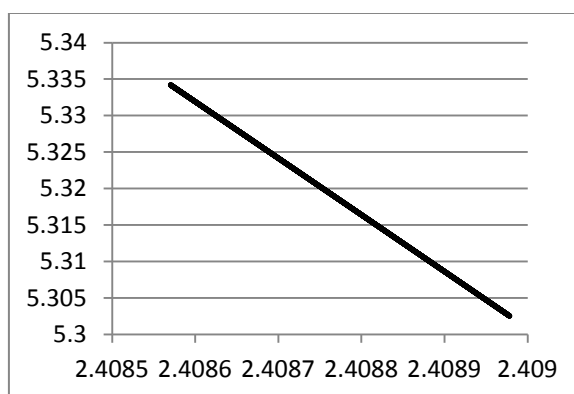
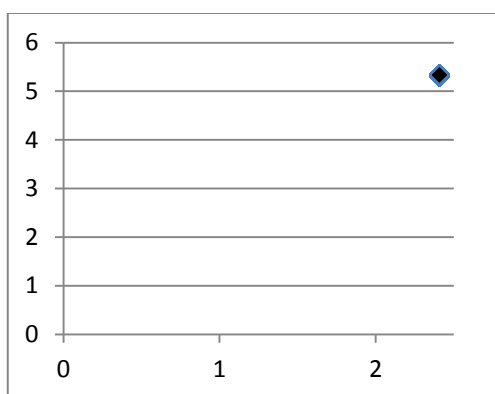
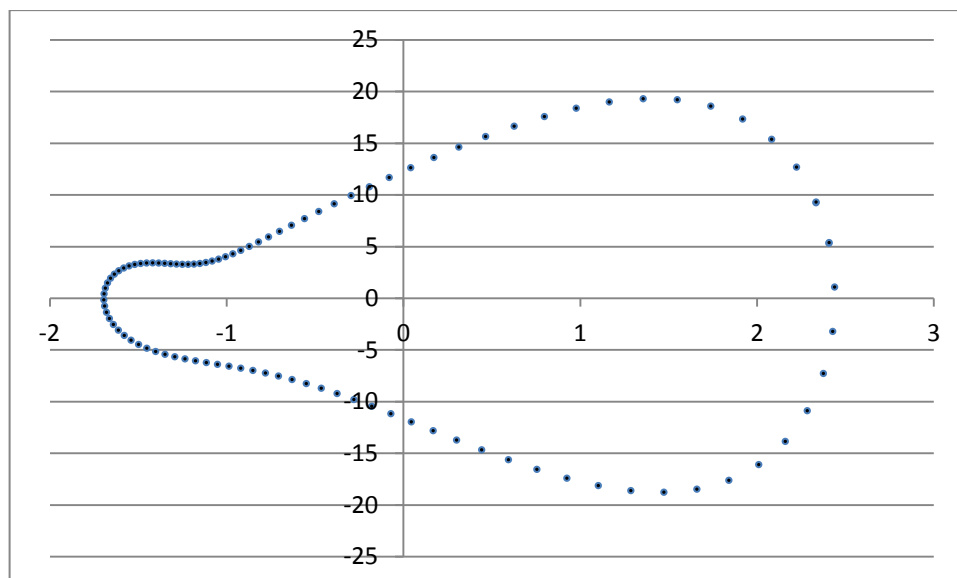
Gyenge gerjesztéskor az oszcillátornak határciklusa van, akárcsak a lineáris oszcillátornak. A határciklus azonban nem ellipszis, hanem egy általánosabb alakú zárt görbe az (x,v) fázissíkon.

A paraméterek következő értékeire végeztem mintaszámítást:

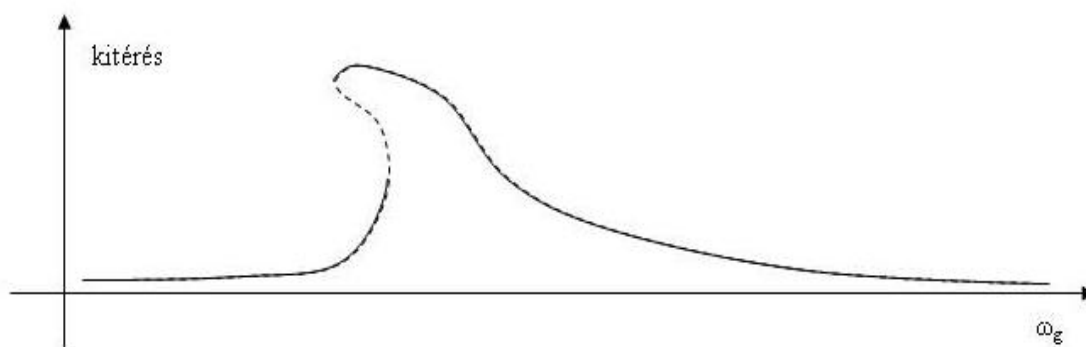
$$\omega_0 T = 6, \alpha T = 0.6, I = 180$$

A számítás dimenziótlán időtartama 20 egység. A kitérés-idő grafikonról látható, hogy az első 10 időegység alatt a tranziens összetevő nagy része kihalt. A 20. időegység alatti mozgás fázisdiagramján látható a határciklus alakja. A stroboszkopikus leképezéshez 5000 időegység hosszú számítást végeztem, amelyből csak a leképezés pontjait írtam ki. A tranziens elhagyásával a leképezés lényegében egy pontból áll. Erős nagyításban (jobb oldali kép) az látható, hogy a pont lassan vándorol. Ezt a számítások során fellépő numerikus hibáknak tulajdonítom, például annak, hogy a π értékét csak véges pontossággal tudom ábrázolni.





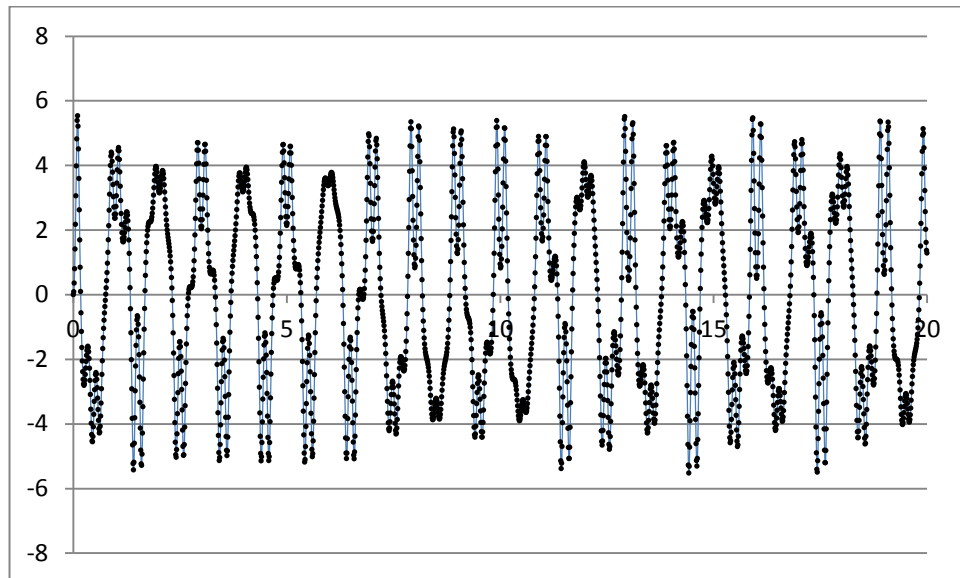
A Duffing-oszcillátor legnagyobb kitérése rezonanciagörbéhez hasonló függést mutat a gerjesztő frekvenciától azzal a lényeges eltéréssel, hogy megjelenik benne egy olyan tartomány, amelyben a „függvény” nem egyértékű (7. ábra). A szaggatott vonalnak megfelelő állapotok instabilak, és zavaró hatás esetén azonnal az alacsonyabb kitérésű állapotba kerül a rendszer. Keményedő rugó esetén balra hajlik a csúcs, lágyuló rugó esetén jobbra.



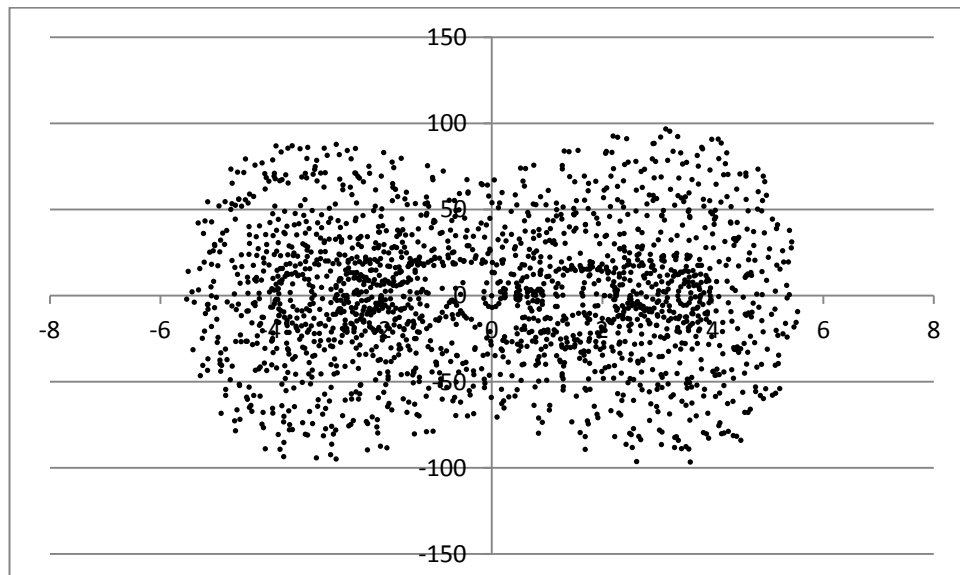
7. ábra Az anharmonikus oszcillátor rezonanciagörbéjének jellege keményedő rugó esetén

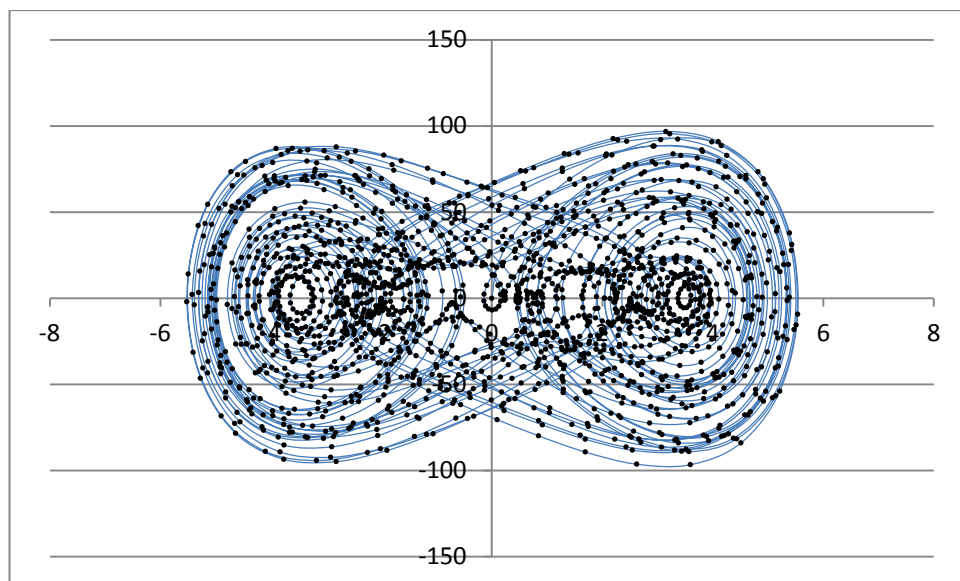
Az anharmonikus oszcillátor viselkedése erős gerjesztés esetén

Legyen $\omega_0 T = 6$, $\alpha T = 0.6$, $I = 1800$. Az I gerjesztési paraméter nagy értéke mutatja, hogy erős gerjesztésről van szó. Ebben az esetben a rendszer kitérés-idő függvénye és fázisdiagramja a $t \in [0, 20]$ (dimenziótlanított!) időintervallumban az alábbi ábrák mutatják.

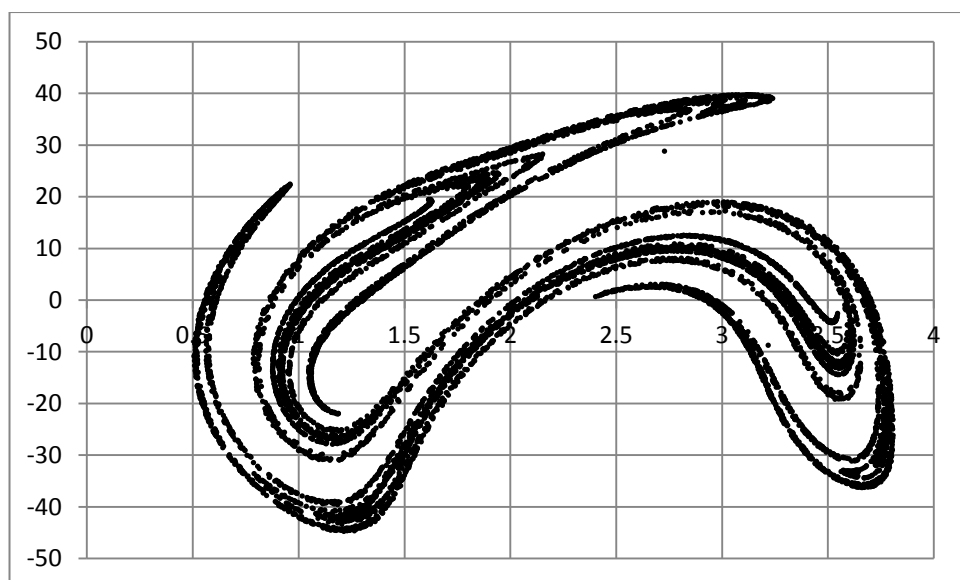


8. ábra Az anharmonikus oszcillátor kitérés-idő grafikonja $\omega_0 T = 6$, $\alpha T = 0.6$, $I = 1800$

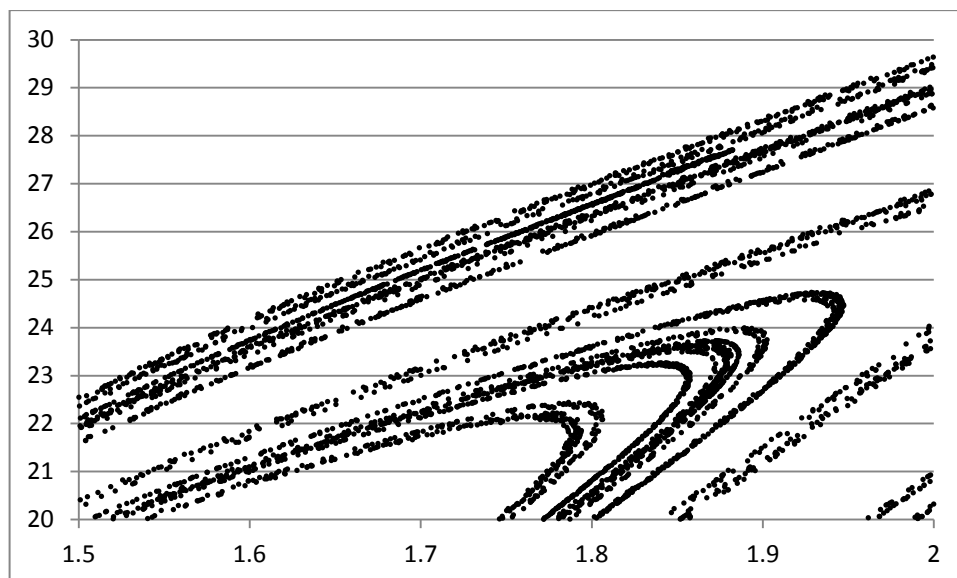




9. ábra A trajektóriák pontjai és a pontok összekötve $\omega_0 T = 6, \alpha T = 0.6, I = 1800$



10. ábra A stroboszkopikus leképezés $\omega_0 T = 6, \alpha T = 0.6, I = 1800$



11. ábra A stroboszkopikus leképezés $\omega_0 T = 6, \alpha T = 0.6, I = 1800$

Az anharmonikus oszcillátor mozgása erős gerjesztés esetén kaotikussá válik. Ennek a kaotikus mozgásnak azonban van attraktora, más szóval a fázistérben létezik egy olyan ponthalmaz, amelyhez minden trajektória hozzásimul. A kaotikus attraktor stroboszkopikus leképezése egy jellegzetes fraktál alakzat, melynek szerkezete végtelen sok, egyre finomabb szálal tartalmaz, ún. Cantor-szálás szerkezetű. A fenti két ábra azt illusztrálja, hogy a kaotikus attraktor geometriai szempontból önhasonló tulajdonságú. Ez azt jelenti, hogy ha egy kis részletét kiválasztjuk és felnagyítjuk, akkor a kép az eredeti halmaz képéhez lesz hasonló. Ez az önhasonlóság bármilyen nagyságrendben fennáll, azonban szemléltetni csak a számítási pontosság erejéig tudjuk. Ez a különleges geometriai szerkezet a „rend a káoszban”. Ezzel kapcsolatos, hogy a kaotikus mozgások is egzaktul leírhatók az arra alkalmas eszközrendszerrel annak ellenére, hogy időbeli lefolyásuk hosszútávú előrejelzése nem lehetséges.

Érdekes, hogy a kaotikus attraktor alakja, és egyáltalán a mozgás kaotikus jellege erősen függ a paraméterektől. Számításokat végeztem a paraméterek alábbi értékeinek minden lehetséges kombinációjára:

$$\omega_0 T = 5 - 6 - 7, \quad \alpha T = 0.5 - 0.6 - 0.7, \quad I = 1700 - 1800 - 1900.$$

Számításaim eredményét a mellékletben közlöm. Találtam számos kaotikus attraktort, de találtam nem kaotikus mozgásokat is, amelyek hármas vagy hatos ciklusokat tartalmaznak.

Bízom abban, hogy az olvasó is kedvét leli majd az attraktorok sokszínűségében és gazdag információ tartalmában.

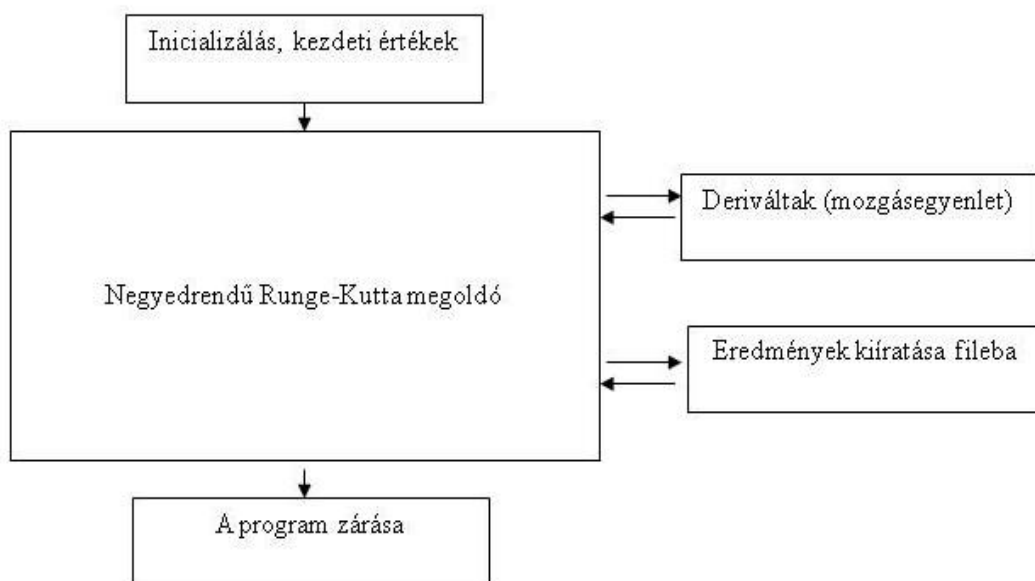
3. A téma feldolgozása

A számításokhoz használt szoftver felépítése

A saját munkám során fontos szerepet játszottak azok a saját fejlesztésű szoftverek, amelyekkel a számításokat végeztem. A kiindulásul használt alapprogram forráskódja Fortran nyelven állt rendelkezésre, ezért a fejlesztéseket, módosításokat magam is ugyanezen a nyelven végeztem el. Az előző, bevezető fejezeteknek a számolási eredményeket közlő ábrái is ezekkel a szoftverekkel készültek.

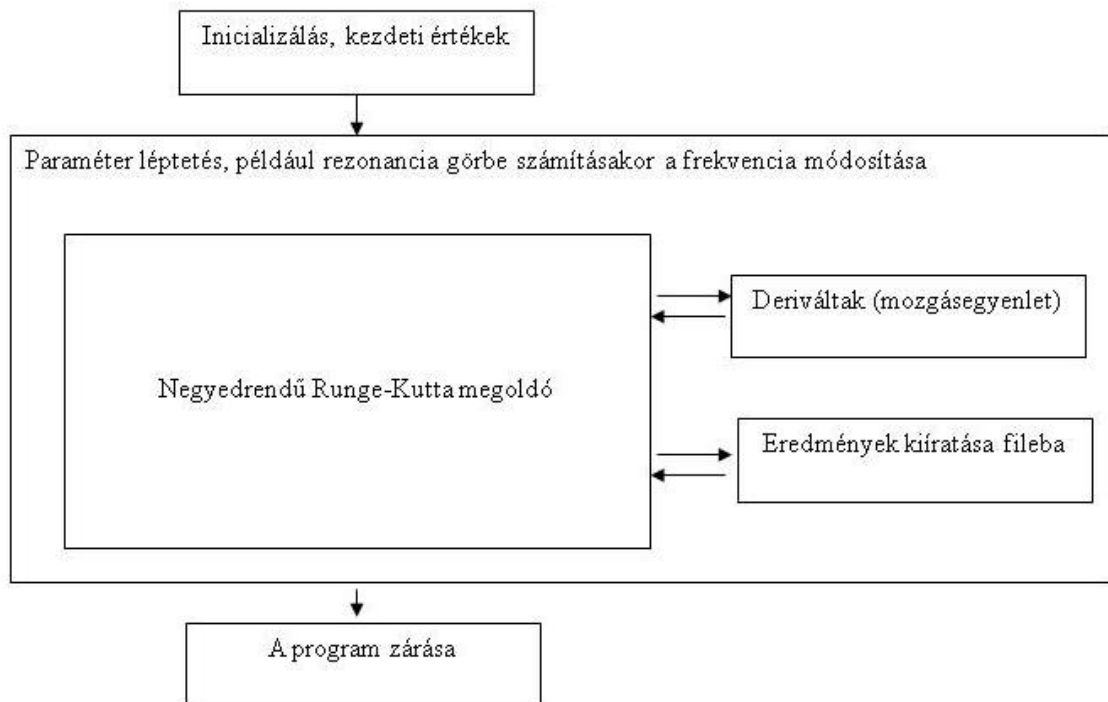
A szoftverek magja egy negyedrendű Runge-Kutta módszert alkalmazó numerikus megoldó rutin. Ezt kiegészíti egy olyan szubrutin, amelyben a mozgásegyenletből származtatott autonóm (vagy általában dinamikai) rendszert lehet definiálni.

Az eredményeket egy olyan fájlba írja a program, amelynek nevét a felhasználó adhatja meg.



12. ábra A számításokhoz használt alapprogram szerkezete

Azt, hogy pontosan milyen eredményeket ír ki a program, mi választhatjuk meg. Kiírható minden időlépésben minden változó értéke. Leképezések számíthatók úgy, hogy csak a megfelelő időlépéshez tartozó adatokat írjuk ki. A rezonanciagörbék számításához a megoldó részt még egy nagyobb ciklusba kellett illeszteni, amelynek ciklusváltozójától függ a gerjesztő frekvencia.



13. ábra A rezonanciagörbék számításához használt szoftver szerkezete

Még egyszer a harmonikus oszcillátorról

A csillapított és gerjesztett harmonikus oszcillátorról már korábban esett szó. Megoldása ismert, ezért alkalmas arra, hogy munkamódszerünket bemutassuk rajta. Továbbá arra is alkalmas volt, hogy a fejlesztés során a programjainkat teszteljük rajta. Ez utóbbi szempont rendkívül fontos. A számítógépes alkalmazások fejlesztésekor mindig szükség van legalább egy olyan feladatra, amelynek megoldását pontosan ismerjük, így kipróbálhatjuk vele, hogy a kifejlesztett szoftver helyesen működik-e, és ha nem, akkor a hibakeresést is nagyban segíti.

A rendszer már ismert

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \alpha \dot{x} + f_g \sin(\omega_g t) \quad (41)$$

differentiálegyenletét a $T=T_g=2\pi/\omega_g$, $I=f_g T^2/L$ jelölésekkel és $L = 1 \frac{1}{m}$ választással az alábbi dimenziótlan alakba írhatjuk:

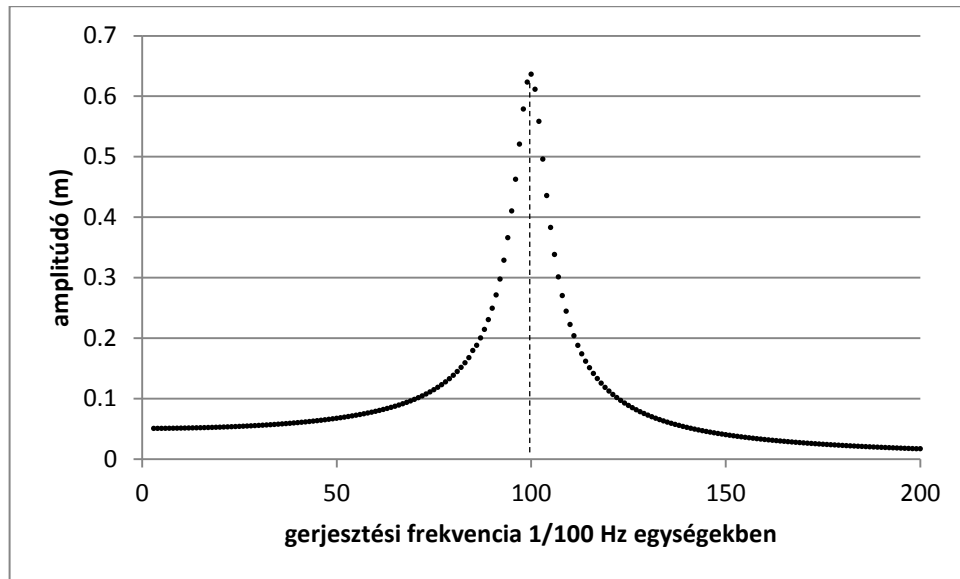
$$\ddot{x} = -\omega_0^2 T_g^2 x - \alpha T_g \dot{x} + I \sin(2\pi t) \quad (42)$$

Ez az alak alkalmas arra, hogy a rezonanciagörbét hatékonyan kiszámítsuk. Az $v_g=\omega_g/2\pi$ gerjesztési rezgésszámot változtatjuk az általunk kiválasztott tartományban az általunk meghatározott lépésekkel. Például 0 és 2 Hz között 0,01 Hz lépésekkel. Minden egyes

rezgésszám esetén $T_g = 1/\nu_g$ könnyen kiszámítható, és a differenciálegyenlet-rendszerbe helyettesíthető. Kellő számú ciklusidő elteltével az állandósult mozgás amplitúdója rögzíthető. Így megkapható a rezonanciagörbe.

Próbaszámításunkban a paraméterek értéke a következők voltak:

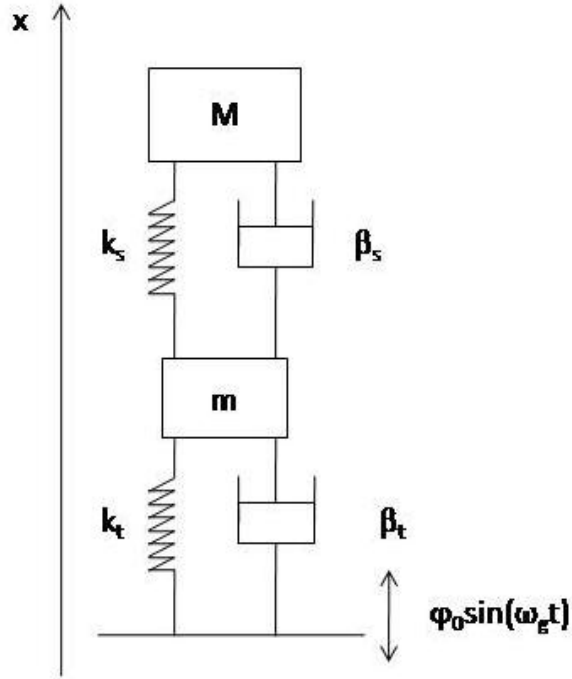
$\omega_0 = 2\pi \frac{1}{s}$, $\alpha = 0.5 \frac{1}{s}$, $I = 2$, melyekkel $\omega_g = 2\pi \frac{1}{s}$, azaz $\nu_g = 1$ Hz esetén $A = 0.63661$ m amplitúdó várható. Ezzel a számításunk 5 értékes jegy pontossággal megegyezett.



14. ábra A csillapított és gerjesztett harmonikus oszcillátor rezonanciafüggvénye, adatok a szövegben olvashatók

A lineáris negyedmodell vizsgálata

A lineáris negyedmodell két szabadsági fokú rendszer. Útgerjesztést alkalmazunk, és figyelembe vesszük a csillapítást is. Itt megismételjük a rendszer vázlatát szemléltető ábrát.



15. ábra A gépjárművek lineáris negyedmodellje

A gépjármű más részeiről áttérjedő hatásokat elhanyagoljuk. A differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 &= -k_s(x_1 - x_2) - \beta_s(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m\ddot{x}_2 &= k_s(x_1 - x_2) + \beta_s(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_t(x_2 - \varphi(t)) + \beta_t(\dot{x}_2 - \dot{\varphi}(t)) \end{aligned} \quad (43)$$

Itt a $\varphi(t)$ az útgerjesztést jelöli. Vizsgálatainkban az útgerjesztés szinuszos időfüggésű, azért az alábbi alakba írjuk: $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_g t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_g} t\right)$, amiből következik, hogy $\dot{\varphi}(t) = \varphi_0 \omega_g \cos(\omega_g t) = \varphi_0 \frac{2\pi}{T_g} \cos\left(\frac{2\pi}{T_g} t\right)$. Az egyenlet paramétereinek száma hárommal csökkenthető a dimenzióatlanítással, ami esetünkben 8 paraméter helyett 5 független paramétert jelent. Osszuk végig az egyenleteket a bal oldalukon szereplő tömeggel, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mu = \frac{M}{m}, \lambda_s^2 = \frac{k_s}{M}, \alpha_s = \frac{\beta_s}{M}, \lambda_t^2 = \frac{k_t}{M}, \alpha_t = \frac{\beta_t}{M}, \quad (44)$$

továbbá legyen az időlépték $T = T_g$, a hosszúságlépték $L = \varphi_0$. Ezekkel az egyenlet így írható:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\lambda_s^2 T_g^2 (x_1 - x_2) - \alpha_s T_g (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ \frac{1}{\mu} \ddot{x}_2 &= \lambda_s^2 T_g^2 (x_1 - x_2) + \alpha_s T_g (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \lambda_t^2 T_g^2 (x_2 - \sin(2\pi t)) + \alpha_t T_g (\dot{x}_2 - \frac{2\pi}{T_g} \cos(2\pi t)) \end{aligned} \quad (45)$$

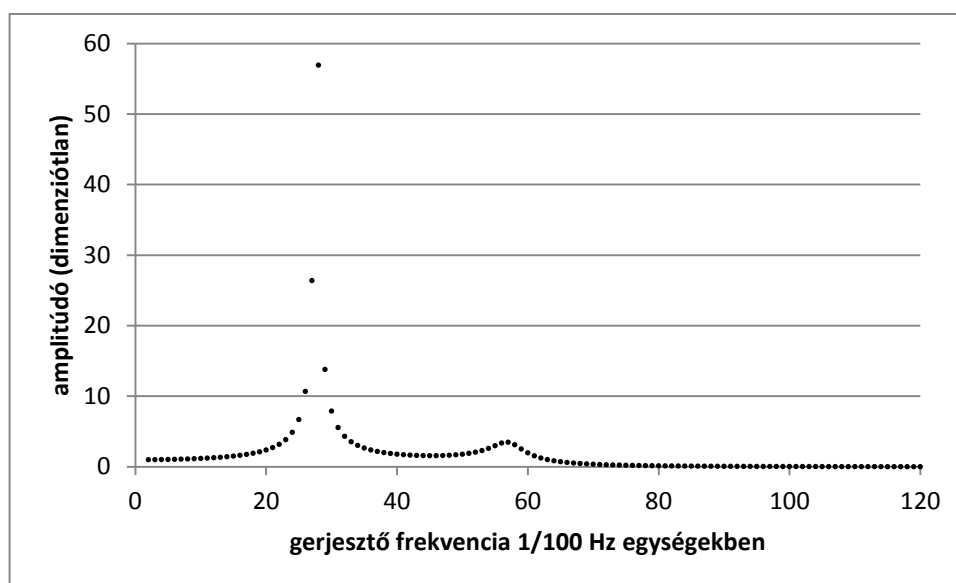
Az öt független paraméter: $\lambda_s^2 T_g^2$, $\alpha_s T_g$, μ , $\lambda_t^2 T_g^2$, $\alpha_t T_g$ mind a rendszerre jellemző mennyiségekkel kapcsolatos. Mivel a paraméterek az eredeti fizikai jellemzőktől összetett módon függenek, az alábbi táblázat néhány számpéldával is megmutatja a jellemző értékeiket.

M	m	k_s	β_s	k_t	β_t	T_g	MU	$\lambda_s^2 T_g^2$	$\alpha_s T_g$	$\lambda_t^2 T_g^2$	$\alpha_t T_g$
[kg]	[kg]	[N/m]	[Ns/m]	[N/m]	[Ns/m]	[1/s]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]
400	10	5000	125	50000	20	0,1	40	0,125	0,03125	1,25	0,005
400	10	5000	125	50000	20	1	40	12,5	0,3125	125	0,05
400	10	5000	125	50000	20	2	40	50	0,625	500	0,1
400	10	5000	200	50000	20	0,1	40	0,125	0,05	1,25	0,005
400	10	5000	200	50000	20	1	40	12,5	0,5	125	0,05
400	10	5000	200	50000	20	2	40	50	1	500	0,1

A próbaszámítást az alábbi fizikai jellemzőkkel végeztem:

$M=400\text{kg}$, $m=10\text{ kg}$, $k_s=5000\text{ N/m}$, $\beta_s=200\text{ Ns/m}$, $k_t=50000\text{ N/m}$, $\beta_t=10\text{ Ns/m}$

A rezonanciagörbe:

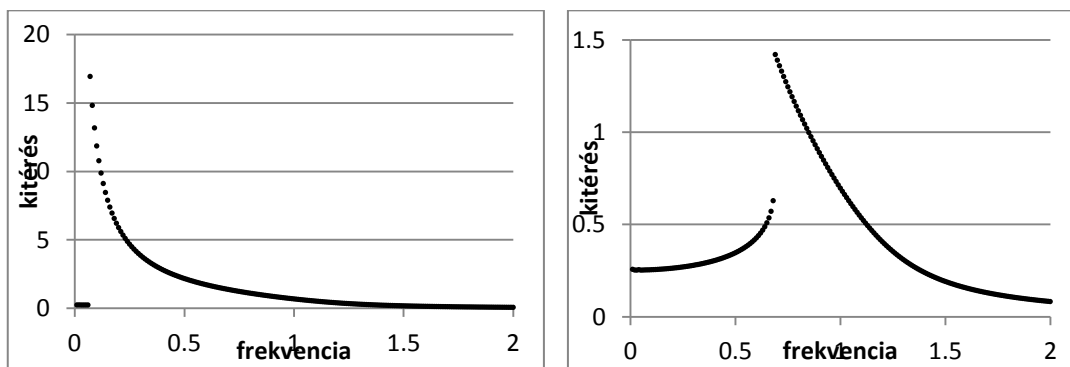


Az anharmonikus oszcillátor rezonanciagörbéje

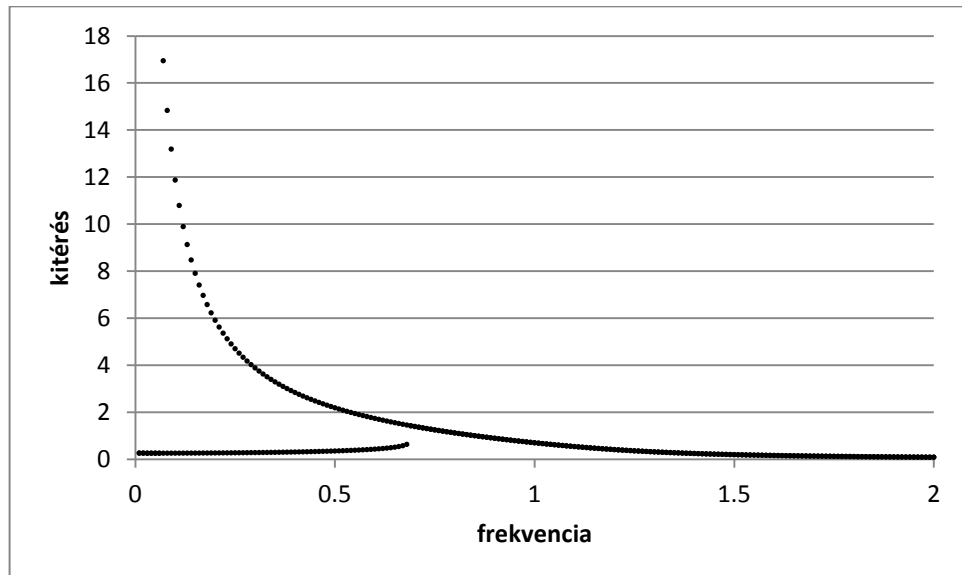
A Duffing-oszcillátor rezonanciagörbét numerikus módszerrel vizsgáltam. Olyan stratégiát kellett felépíteni, amely biztosítja azt, hogy a vizsgálatok során ne csak a stabil mozgásokat, hanem legalább részben az instabil mozgásformákat is tanulmányozhassam. Az instabil mozgások viszonylag kis beavatkozásra is összeomlanak és a rendszer a stabil

mozgásba vált át. Az oszcillátor kezdeti értékeinek beállítása egy új frekvencia vizsgálatakor erős beavatkozásnak számít, ezt igyekeztem elkerülni. A gerjesztési frekvencia módosításakor nem inicializáltam újra a mozgást, hanem mozgás közben léptettem a frekvenciát. Így az instabil tartományba is sikerült eljutni. Ebből az is adódik, hogy két számítássorozatra volt szükség. Az egyik esetben az alacsony frekvenciák felől haladtam a nagyobbak felé, a másik esetben visszafelé.

Az oszcillátor paraméterei: $\omega_0 = 2\pi \frac{1}{s}$, $\alpha = 0.5 \frac{1}{s}$, $I = 10$.



16. ábra A rezonanciagörbe csökkenő és növekvő frekvenciák esetén

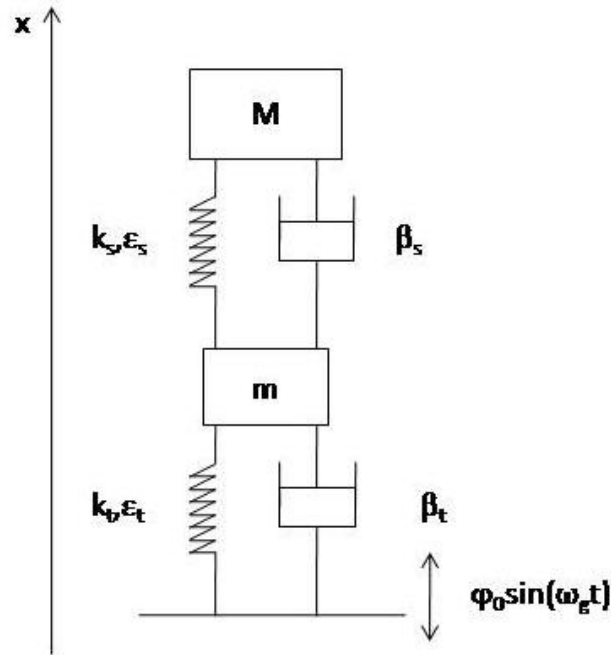


17. ábra A két számítás eredményeinek összesítése

Amikor az anharmonikus oszcillátor instabil tartományban rezeg, akkor kis zavarás esetén is átvált a stabil mozgásra. Ez a rezgőmozgásban amplitúdó ugrást eredményez. Hasonló jelenség elektronikai rendszerekben is lezajlik, amit Kipp-jelenségnek is hívnak.

Az anharmonikus rugókat tartalmazó negyedmodell

Az anharmonikus rugókat tartalmazó negyedmodellre a dolgozat hátralevő részében az ANM rövidítést használom.



18. ábra Az anharmonikus rugókat tartalmazó negyedmodell elvi vázlata

Dolgozatom célkitűzése volt a negyed járműmodell vizsgálata abban az esetben, ha az nemlineáris rugókat tartalmaz. A rendszer rezonanciagörbét a korábbiakban bemutatott, és egyszerűbb feladatokon kipróbált módszerrel vizsgáltam. A frekvenciát ebben az esetben is két módon változtattam, ahogy az egy szabadsági fokú anharmonikus oszcillátor esetén, hogy nagyobb esélyem legyen az instabil állapotok felismerésére.

A rendszer két szabadsági fokú, a mozgásegyenlet-rendszere:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 &= -k_s(x_1 - x_2) - l_s(x_1 - x_2)^3 - \beta_s(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m\ddot{x}_2 &= k_s(x_1 - x_2) + l_s(x_1 - x_2)^3 + \beta_s(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ &\quad - k_t(x_2 - \varphi(t)) - l_t(x_2 - \varphi(t))^3 - \beta_t(\dot{x}_2 - \dot{\varphi}(t)) \end{aligned} \quad (46)$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\mu = \frac{M}{m}, \lambda_s^2 = \frac{k_s}{M}, \alpha_s = \frac{\beta_s}{M}, \lambda_t^2 = \frac{k_t}{M}, \alpha_t = \frac{\beta_t}{M}, \varepsilon_s = \frac{l_s}{M}, \varepsilon_t = \frac{l_t}{M}, \varepsilon = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_s}. \quad (47)$$

Észrevehető, hogy az új jelölések közül az első négy azonos a lineáris negyedmodellnél bevezetett jelölésekkel. A gerjesztés ebben az esetben is szinuszos, azaz $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_g t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_g} t\right)$. Legyen az időlépték $T = T_g$, a hosszúságlépték $L = \frac{\lambda_s}{\sqrt{\varepsilon_s}}$. Ezekkel az egyenlet így alakul:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\lambda_s^2 T_g^2 ((x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)^3) - \alpha_s T_g (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ \frac{1}{\mu} \ddot{x}_2 &= \lambda_s^2 T_g^2 ((x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)^3) - \alpha_s T_g (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ &\quad - \lambda_t^2 T_g^2 (x_2 - I \sin(2\pi t)) - \lambda_s^2 T_g^2 \varepsilon (x_2 - I \sin(2\pi t))^3 - \alpha_t T_g (\dot{x}_2 - I \frac{2\pi}{T_g} \cos(2\pi t)) \end{aligned} \quad (48)$$

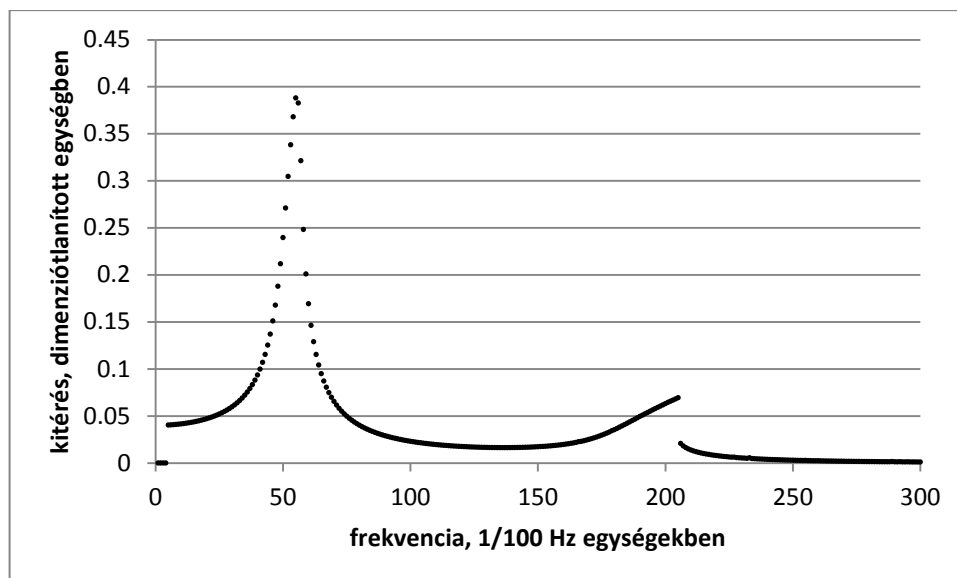
A rendszer az eredeti egyenletben szereplő 10 paraméter helyett hét független paraméterrel jellemezhető, ezek: $\lambda_s^2 T_g^2$, $\alpha_s T_g$, μ , $\lambda_t^2 T_g^2$, $\alpha_t T_g$, ε , $I = \frac{\varphi_0 \sqrt{\varepsilon_s}}{\lambda_s}$.

Az ANM viselkedése gyenge gerjesztés esetén

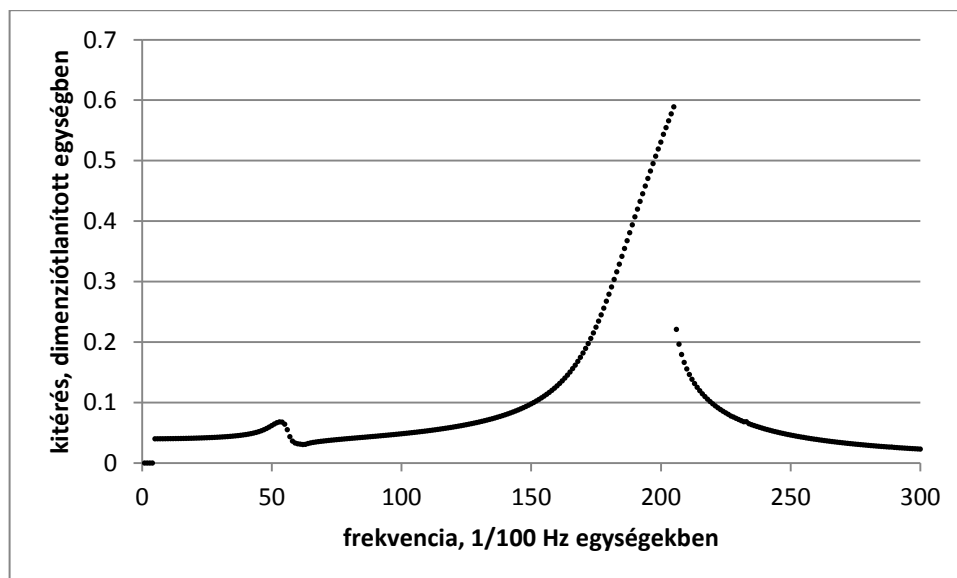
A lineáris negyedmodell esetében használt paraméterkészletet átvéve, és a nemlinearitást leíró mennyiségekkel kiegészítve, a próbaszámításoknál az alábbi fizikai paramétereket használtam:

$$\begin{aligned} M &= 400 \text{ kg}, m = 10 \text{ kg}, k_s = 5000 \text{ N/m}, \beta_s = 200 \text{ Ns/m}, k_t = 50000 \text{ N/m}, \beta_t = 10 \text{ Ns/m}, \\ \varepsilon_s &= 100 \text{ 1/m}^2 \text{s}^2, \varepsilon_t = 1000 \text{ 1/m}^2 \text{s}^2, \varphi_0 = 0,05 \text{ m}. \end{aligned}$$

A rezonanciagörbe az alábbi:



19. ábra A rugózott tömeg rezonanciagörbéje, azaz az x_1 koordináta időfüggésének amplitúdója a gerjesztő frekvencia függvényében



20. ábra A rugózatlan tömeg rezonanciagörbéje, azaz az x_2 koordináta időfüggésének amplitúdója a gerjesztő frekvencia függvényében

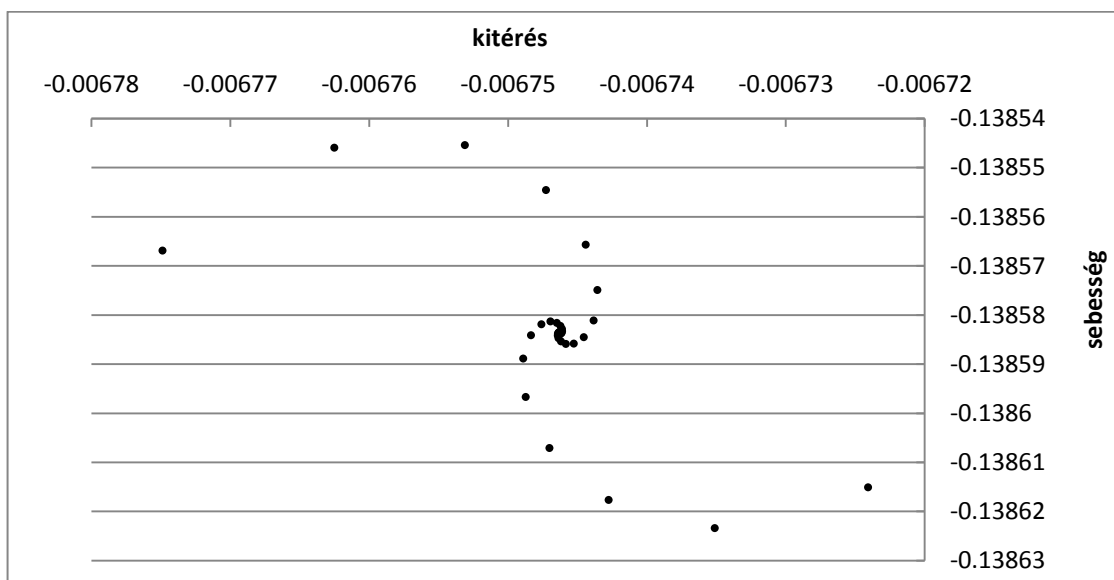
A rugózott M tömeg (jármű karoszéria) rezonancia függvényében két maximumot figyelhetünk meg. Az egyik megfelel a lineáris rendszer nagyobbik maximumának. A másik azonban az egydimenziós nemlineáris oszcillátornál megfigyelt szakadásos maximumhoz hasonló. Annyiban tér el attól, hogy most számítással nem érhetők tetten az instabil állapotok. Ennek nyilvánvaló oka, hogy a hozzá csatolt rugózatlan tömeg elegendő zavaró hatást fejt ki az instabil állapotok kialakulásának megakadályozásához.

Megállapítható, hogy a nemlineáris rugókból felépített negyedmodell átviteli függvénye (rezonanciagörbéje) hasonlít a lineáris negyedmodellhez annyiban, hogy két maximuma van, amelyek közül az egyik lényegesen nagyobb a másikonál. Ugyanakkor az ANM nemlineáris viselkedést is mutat azzal, hogy az egyik maximum szakadós.

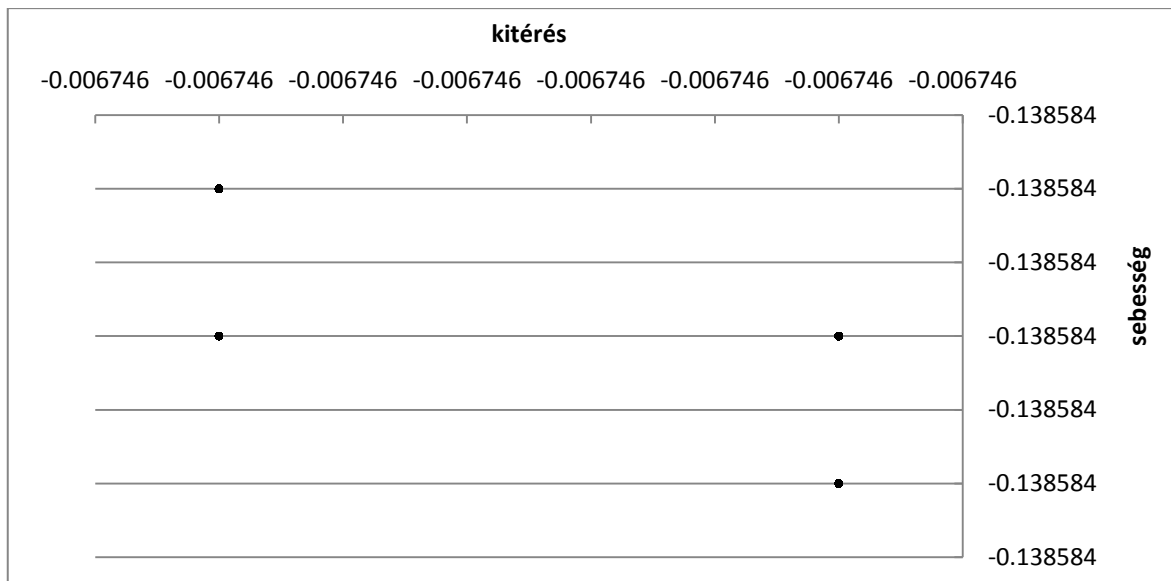
Az ANM mozgásának vizsgálata a fázistérben

Nem csak a rezonanciagörbét számítottam ki, hanem a rendszer elemeinek mozgását is vizsgáltam. Az előző fejezetben megadott paraméterekkel rendelkező rendszer mozgását részletesebben elemeztem 1 Hz gerjesztő frekvencia esetén. Mivel a mechanikai rendszer most két szabadsági fokú, és időfüggő gerjesztést is tartalmaz, a megfelelő autonóm rendszer öt dimenziós. Ezt szemléltetni papíron már nem lehetséges. A leképezéseket kénytelen voltam egyszer az egyik, másszor a másik tömeg fázissíkjaára korlátozni annak érdekében, hogy könnyen értelmezhetővé váljanak az ábrák. Itt azonban nem szabad megfeledkezni arról, hogy az egyes ábrák csak a rendszer bizonyos részeinek mozgását mutatják be, nem az egész rendszerét.

A stroboszkopikus leképezések estén mindig 5000 pontot számítottam ki.

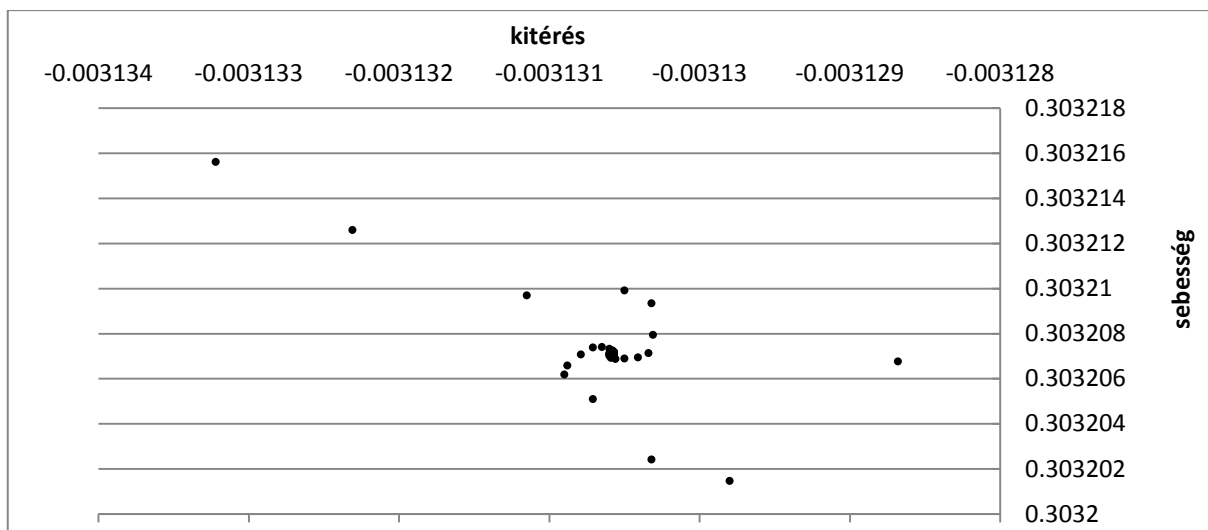


21. ábra A rugózott tömeg mozgásának stroboszkopikus leképezése, vagyis az $(x_1, \dot{x}_1)$ síkra vetített stroboszkopikus leképezés, az első 34, erősen tranzienst pont elhagyásával

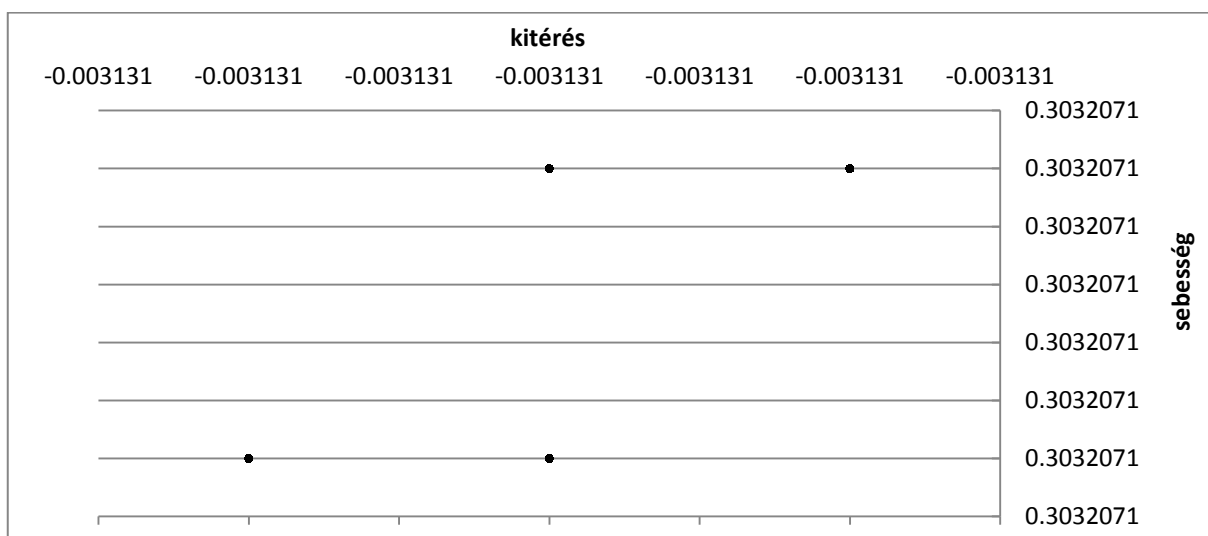


22. ábra A rugózott tömeg mozgásának stroboszkopikus leképezése, vagyis az $(x_1, \dot{x}_1)$ síkra vetített stroboszkopikus leképezés, az állandósult állapotban, az első 200 pont elhagyásával

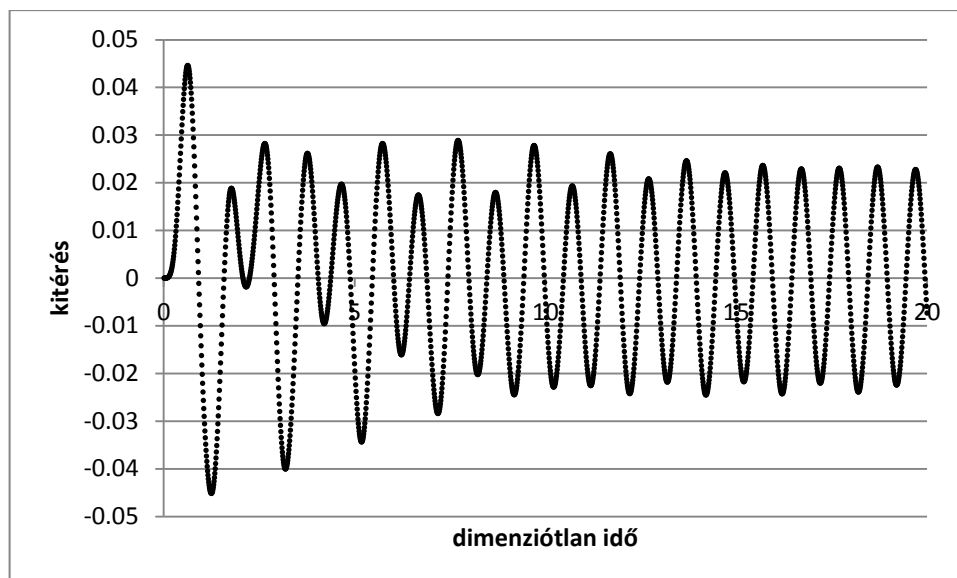
A rugózott tömeg stroboszkopikus leképezéséről két ábrát is készítettem. Az egyik esetben az első 34, a másik esetben az első 200 pontot hagytam le, amelyek a tranziensek miatt még nem illeszkednek pontosan a fázistérbeli attraktorra. A 22. ábrán valójában nem 4 db, hanem 4800 db számított pont képe látható, de azok pontosan a 4 elemű invariáns sokaság pontjaira illeszkednek. A tranziensek kihalását követően készült pontok elhelyezkedéséből jól látható tehát, hogy a mozgás attraktora egy négyes ciklus. A koordináták csekély eltéréséből ugyanakkor az is látható, hogy a négyes ciklus egyes ciklusai egymástól nem térnek el nagymértékben.



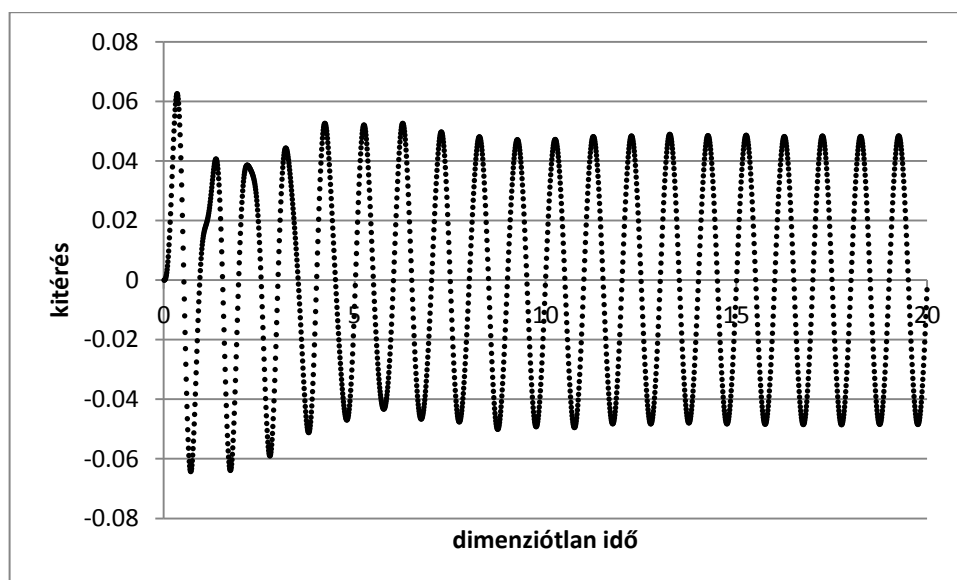
23. ábra A rugózatlan tömeg mozgásának stroboszkopikus leképezése, vagyis az $(x_2, \dot{x}_2)$ síkra vetített stroboszkopikus leképezés, az első 34, erősen tranzienst pont elhagyásával



24. ábra A rugózatlan tömeg mozgásának stroboszkopikus leképezése, vagyis az $(x_2, \dot{x}_2)$ síkra vetített stroboszkopikus leképezés, az állandósult állapotban, az első 200 pont elhagyásával



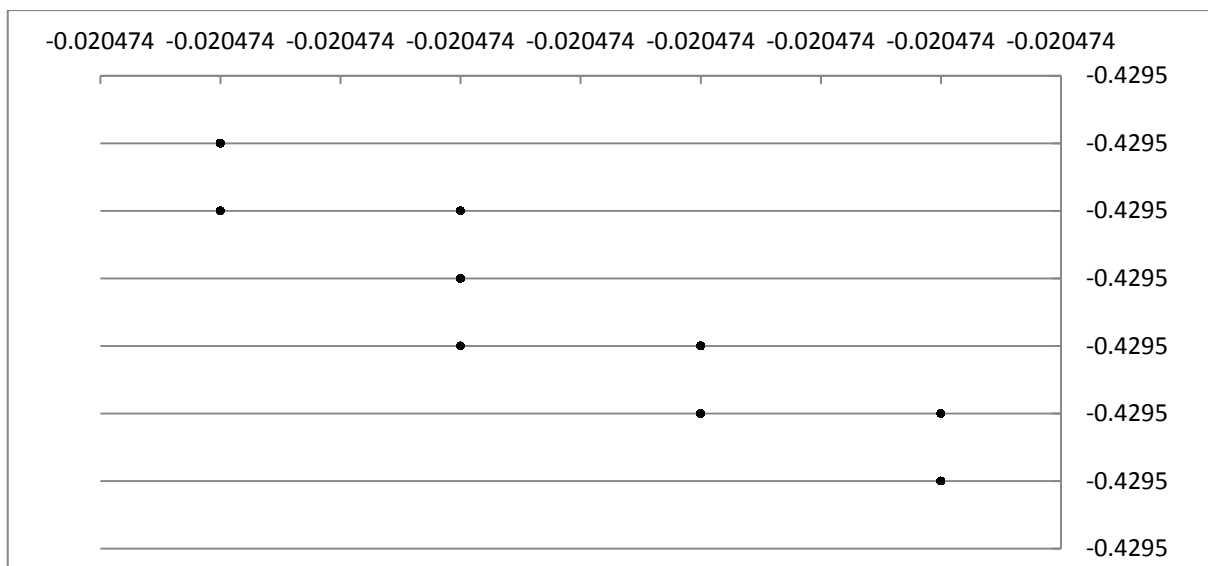
25. ábra A rugózott tömeg kitérés-idő függvénye



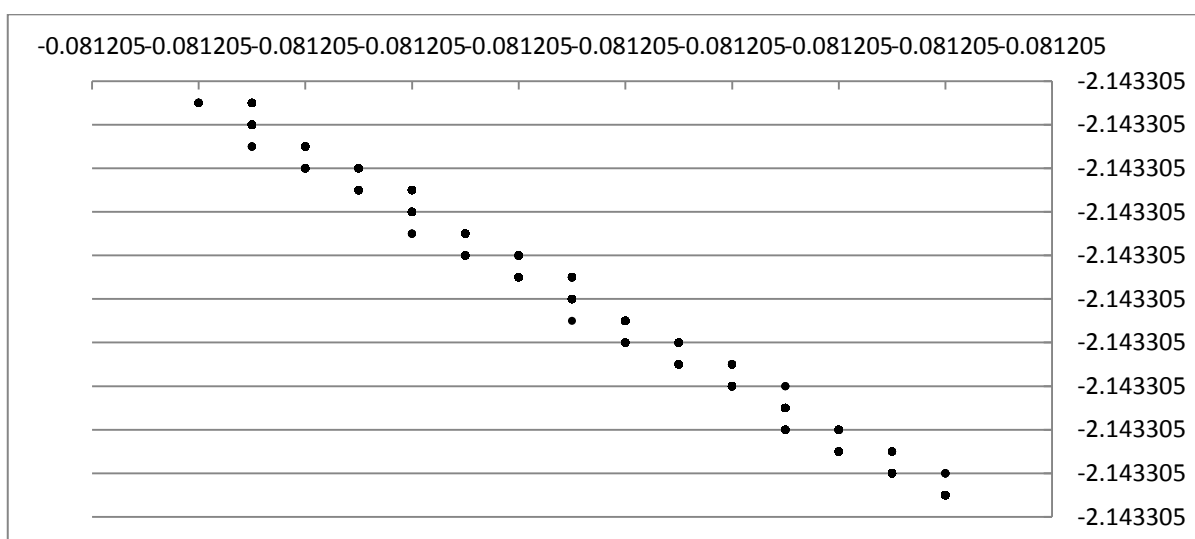
26. ábra A rugózatlan tömeg kitérés-idő függvénye

A rugózatlan tömeg állandósult mozgása hasonló jellegű a rugózott tömeg mozgásához, szintén négyes ciklust tartalmaz.

Megvizsgáltam a rendszert nagyobb gerjesztési amplitúdó esetén is. Az eredmény látványos. A növekvő gerjesztési intenzitás a stroboszkopikus leképezésen növekvő elemszámú invariáns sokaságokat, azaz a fázistérben egyre nagyobb tagszámú ciklusokból álló attraktorokat eredményez.



27. ábra Nagyobb gerjesztés esetén a rugózott tömeg mozgásának stroboszkopikus leképezése, vagyis az $(x_1, \dot{x}_1)$ síkra vetített stroboszkopikus leképezés, az első 200 pont elhagyásával



28. ábra A gerjesztési amplitudó növelésével elértem egy 33 elemű invariáns sokaságot a stroboszkopikus leképezésen

4. Köszönetnyilvánítás

Dolgozatom elkészítéséhez nagy segítséget kaptam dr. Kovács Zoltán főiskolai adjunktustól és Krajnyik Károly műszaki oktatótól.

5. Összefoglalás

A gépjárművek futóművének mechanikai modellezése egy olyan összetett feladat, amely jelentősen segítheti egy járműipari termék fejlesztését. Ezzel együtt hozzájárulhat egy cég versenyképességéhez.

A felfüggesztés kapcsolata az abronccsal és az úttal sok szempontból speciális, talán sokkal inkább, mint azt elsőre gondolnánk. A szerkezet elmozdulása ugyan meghatározott keretek között valósul meg, mértéke előre mégis megjósolhatatlan, hiszen az út minősége folyamatosan változik.

A gépjármű és az út kölcsönhatása következtében a jármű több dimenziós gerjesztett és csillapított rezgőmozgást végez. Ez a mozgás dinamikai szempontból determinisztikus, ugyanakkor általában erősen érzékeny a kezdőfeltételekre, ezért hosszú távon nem jelezhető előre. Az ilyen típusú mozgásokat a kaotikus dinamika módszereivel írjuk le.

Dolgozatomban a gépjárművek negyedmodelljének több változatát elemeztem.

Felírtam azok mozgásegyenlet-rendszerét, majd azt a számítógépes vizsgálatok számára leginkább alkalmas alakra hoztam.

Olyan szoftvereket fejlesztettem és alkalmaztam, amelyek lehetővé teszik dinamikai rendszerek numerikus szimulálását. Ezek a szoftver eszközök alkalmasak a jövőben további vizsgálatokra, ezért elkészítésük is olyan eredménynek tekinthető, amely a jövőben hasznosítható.

A kifejlesztett szoftverek segítségével vizsgáltam a lineáris és a nemlineáris rugókkal felépített gépjármű negyedmodell viselkedését, kiszámítottam azok átviteli függvényét.

A kapott megoldásokat szemléltettem, összehasonlítottam és elemeztem.

Kimutattam, hogy a nemlineáris rugókkal felépített negyedmodell átviteli függvénye gyenge gerjesztés esetén a lineáris negyedmodellhez hasonlóan két maximummal rendelkezik, azonban az egyik maximum a nemlineáris rendszerekre jellemző szakadással rendelkezik.

A nemlineáris negyedmodell fázisterének vizsgálata során. a gerjesztéstől függően sok elemű invariáns sokságokat találtam a stroboszkopikus leképezésen, amelyek a fázistérben többrendű határciklusoknak felelnek meg.

Mindezek alapján elmondható, hogy a nemlineáris rugókkal felépített negyedmodell kis anharmonicitás és gyenge gerjesztés esetén a lineáris negyedmodellhez hasonló mozgásformákat mutat, de még ebben az esetben is rendelkezik a nemlineáris rendszerekre jellemző különleges tulajdonságokkal.

6. Irodalomjegyzék

Nyomtatott források

- [1] M. Csizmadia Béla, Nándori Ernő: Modellalkotás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003, ISBN 963 19 4525 1
- [2] Wilfried Staudt: Gépjárműtechnika, „OMÁR” Könyvkiadó, Székesfehérvár, 1988, ISBN 963 85108 03
- [3] DUKKIPATI, V. R. et al. (2008): Road Vehicle Dynamics. SAE International, ISBN 978-0-7680-1643-7
- [4] Tél Tamás, Gruiz Márton: Kaotikus dinamika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002, ISBN 963 19 3280 5
- [5] Szépfalusi Péter, Tél Tamás (szerk.): A káosz, véletlenszerű jelenségek nemlineáris rendszerekben, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1982, ISBN 963 05 3208 5
- [6] James Gleick: Káosz, egy új tudomány születése, Göncöl Kiadó, Budapest, 1999, ISBN 963 9183 07 5

Interneten elérhető elektronikus források

- [7] Tamás Kalmár-Nagy, Balakumar Balachandran: Forced harmonic vibration of a Duffing oscillator with linear viscous damping, in: I. Kovacic and M. J. Brennan (eds.): The Duffing equation: Nonlinear oscillators and their behaviour, First Edition, 2011 John Wiley and Sons Ltd. ISBN 978-0-470-71549-9, internetes forrás:
<http://aero.tamu.edu/sites/default/files/faculty/kalmarnagy/Forced%20harmonic%20vibration%20of%20a%20Duffing%20oscillator%20with%20linear%20viscous%20damping.pdf>,
letöltve 2013. november 5-én
- [8] http://www.scholarpedia.org/article/Duffing_oscillator , a Duffing-oszcillátor leírása, viselkedésének elemzése gyenge és erős gerjesztések esetén egyaránt, letöltve több alkalommal, 2013. október-november hónapokban

- [9] <http://www.cs.umd.edu/portfolios/marneson/Documents/Duffing.pdf> a Duffing-oszcillátor viselkedésének elemzése, letöltve 2013. november
- [10] <http://mathworld.wolfram.com/DuffingDifferentialEquation.html> a Duffing-oszcillátor differenciálegyenletének megadása, letöltve 2013. november
- [11] <http://www.azauto.hu/2009/03/16/futomu-alaptipusok/> Futómű típusok kronológiai áttekintése, a jelenkor szerkezeti kialakításai, letöltve 2013. szeptember

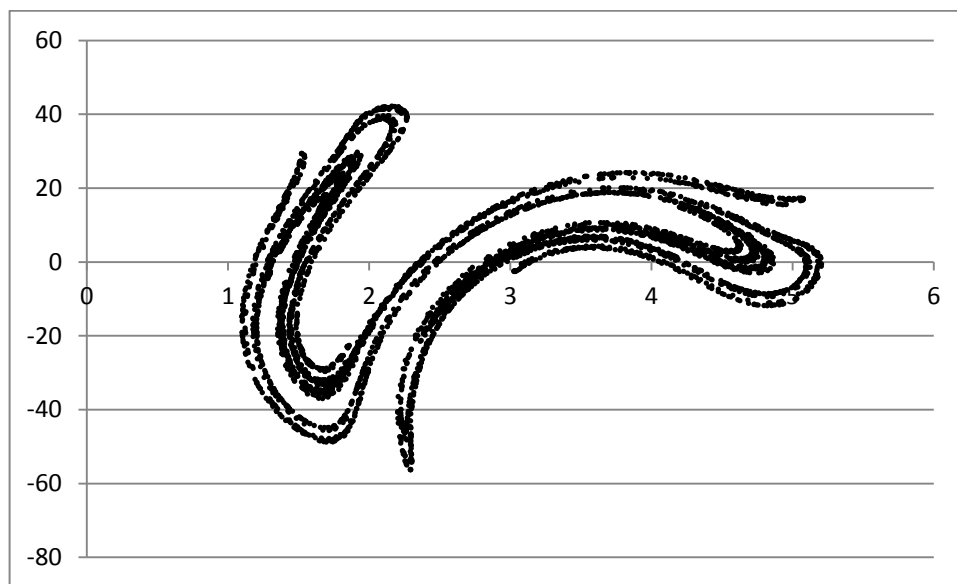
7. Melléklet

Ez a melléklet a gerjesztett és csillapított anharmonikus oszcillátor fázisdiagramjainak stroboszkopikus leképezéseit mutatja be különböző paraméterek esetén. A paraméterek értékeit az alábbiak szerint változtattam:

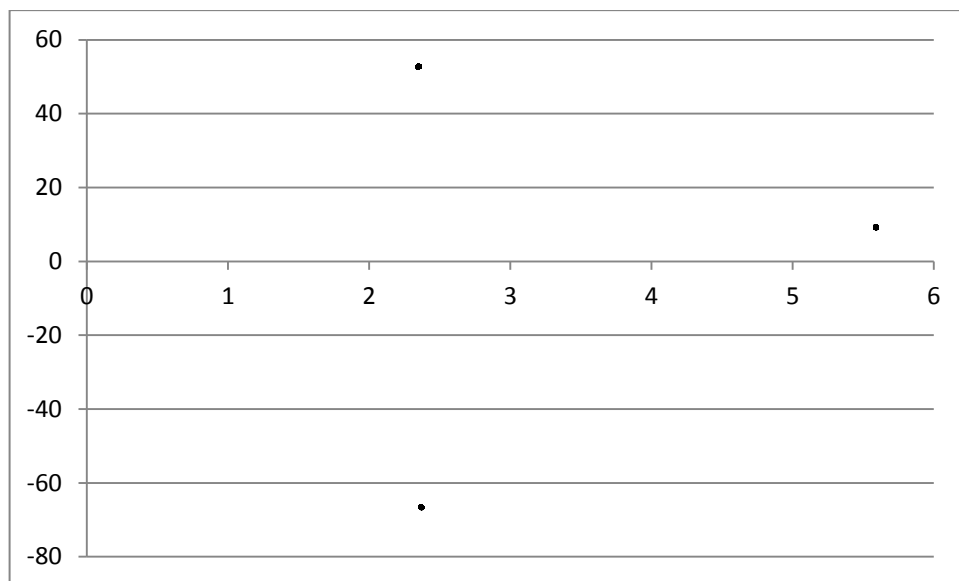
$$\omega_0 T = 5 - 6 - 7, \quad \alpha T = 0.5 - 0.6 - 0.7, \quad I = 1700 - 1800 - 1900.$$

ezek minden lehetséges kombinációjára elvégeztem a számítást. A dolgozat bevezető fejezetében az $\omega_0 T = 6, \alpha T = 0.6, I = 1800$ paraméter értékekre kapott eredményt mutattam be.

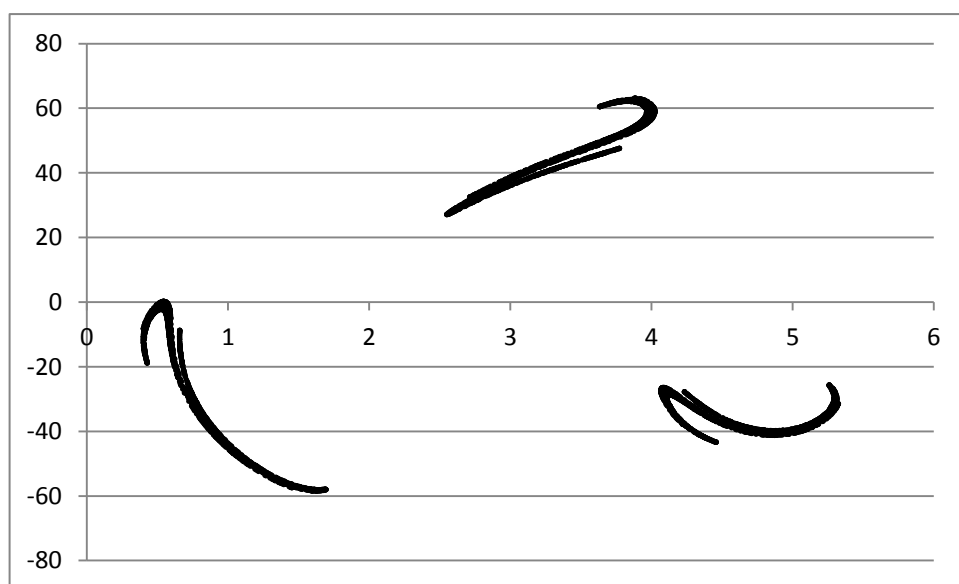
Minden egyes ábrán a vízszintes tengelyen a dimenzióatlanított egységekben mért kitérést, a függőleges tengely mentén pedig a dimenzióatlanított sebességet ábrázoltuk. A kép alatt olvashatók a paraméterek értékei.



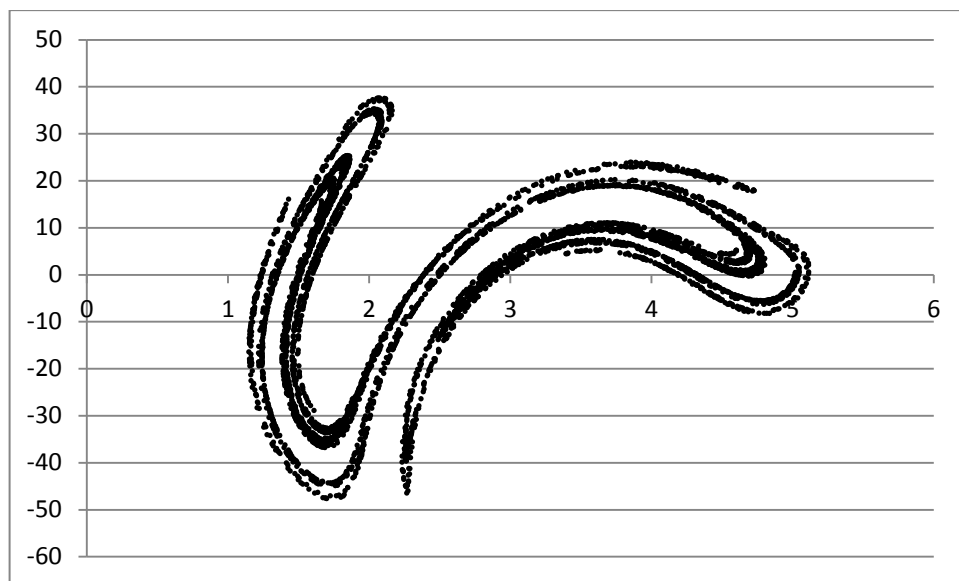
$\omega_0=5; \alpha=0,5; I=1700$, kaotikus



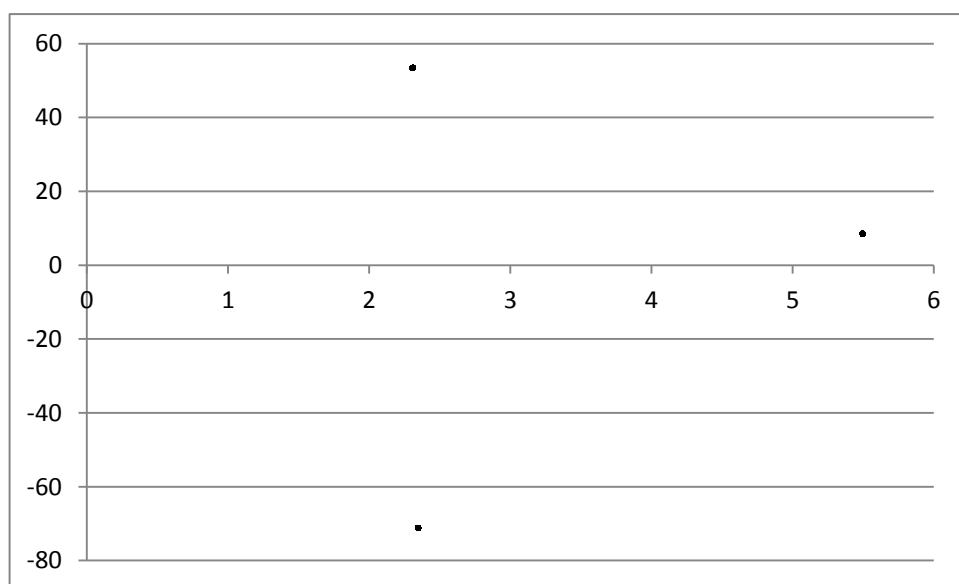
$\omega_0=5$; $\alpha=0,5$; $I=1800$, hármaskör



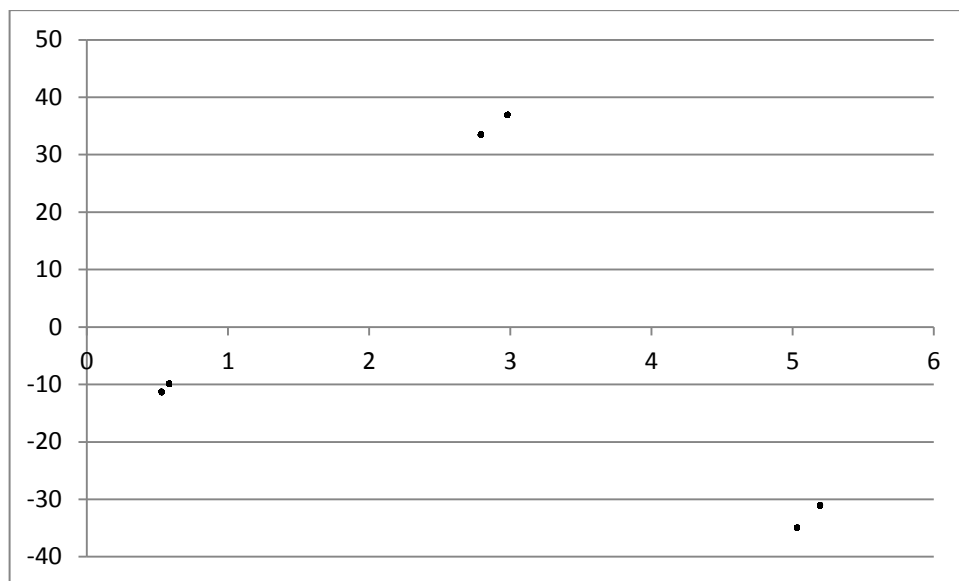
$\omega_0=5$; $\alpha=0,5$; $I=1900$, kaotikus



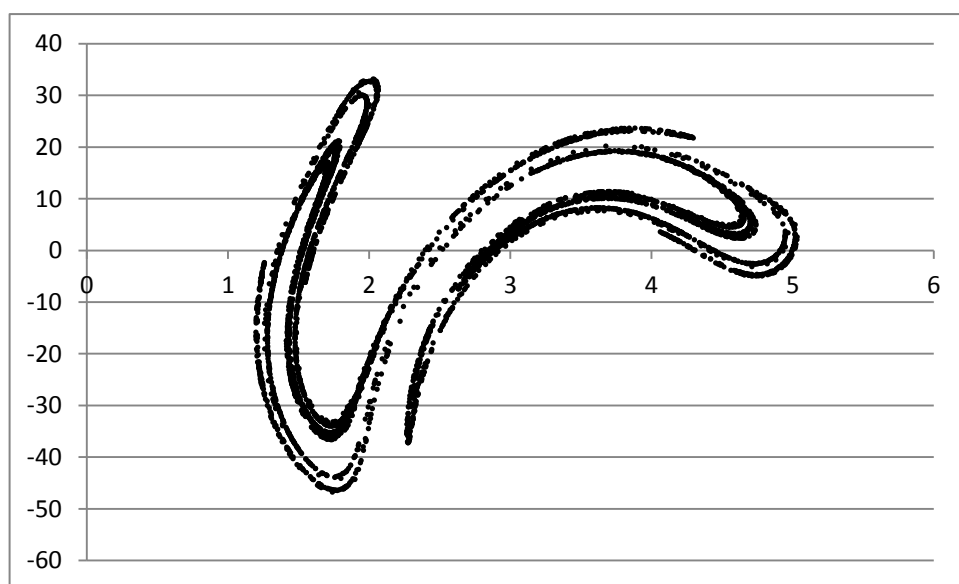
$\omega_0=5$; $\alpha=0,6$; $I=1700$, kaotikus



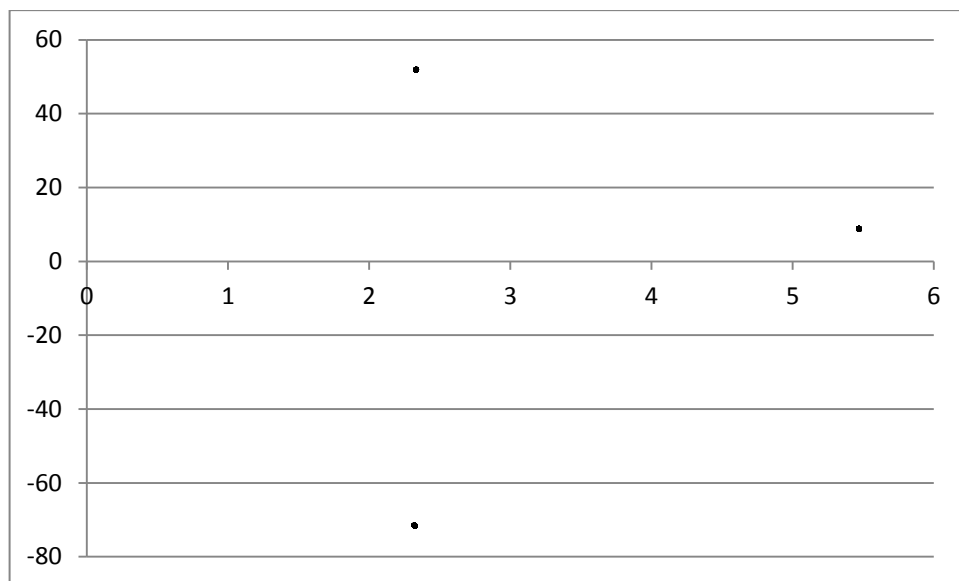
$\omega_0=5$; $\alpha=0,6$; $I=1800$, hármass ciklus



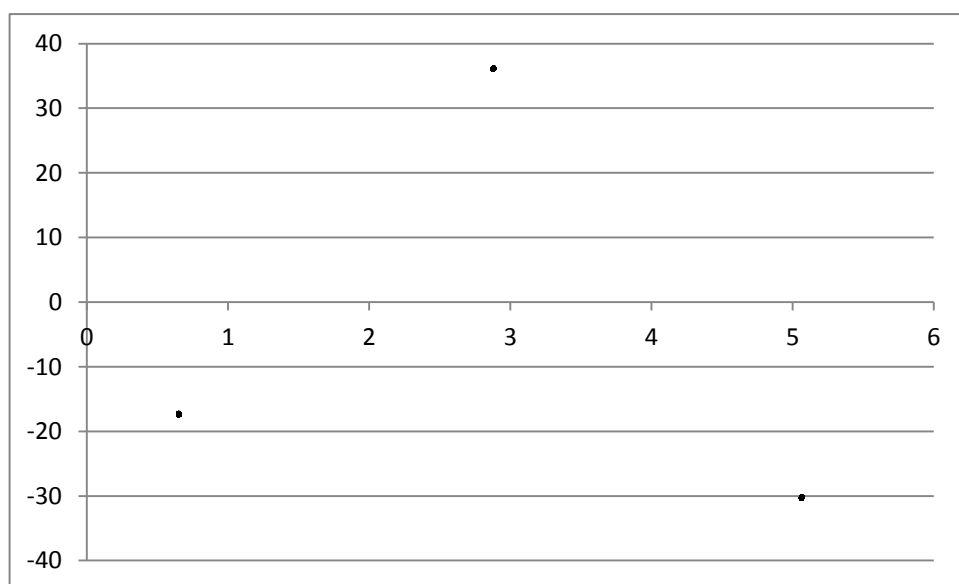
$\omega_0=5$; $\alpha=0,6$; $I=1900$, hatos ciklus



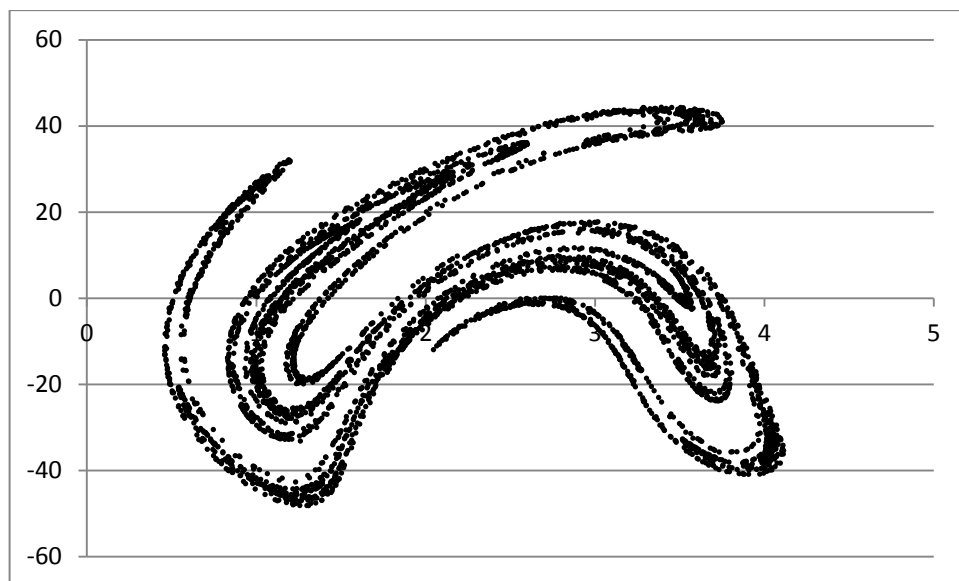
$\omega_0=5$; $\alpha=0,7$; $I=1700$, kaotikus



$\omega_0=5$; $\alpha=0,7$; $I=1800$, hármass ciklus



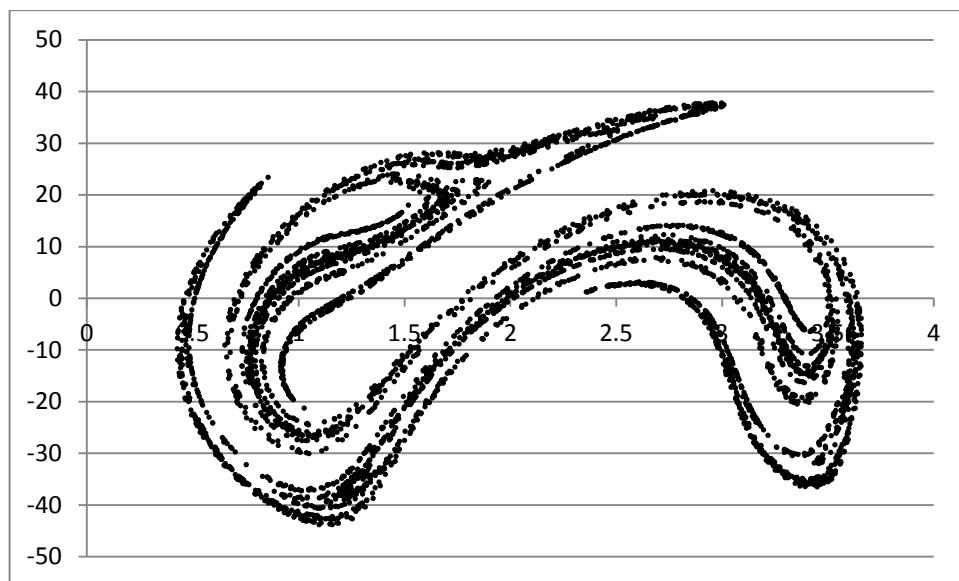
$\omega_0=5$; $\alpha=0,7$; $I=1900$, hármass ciklus



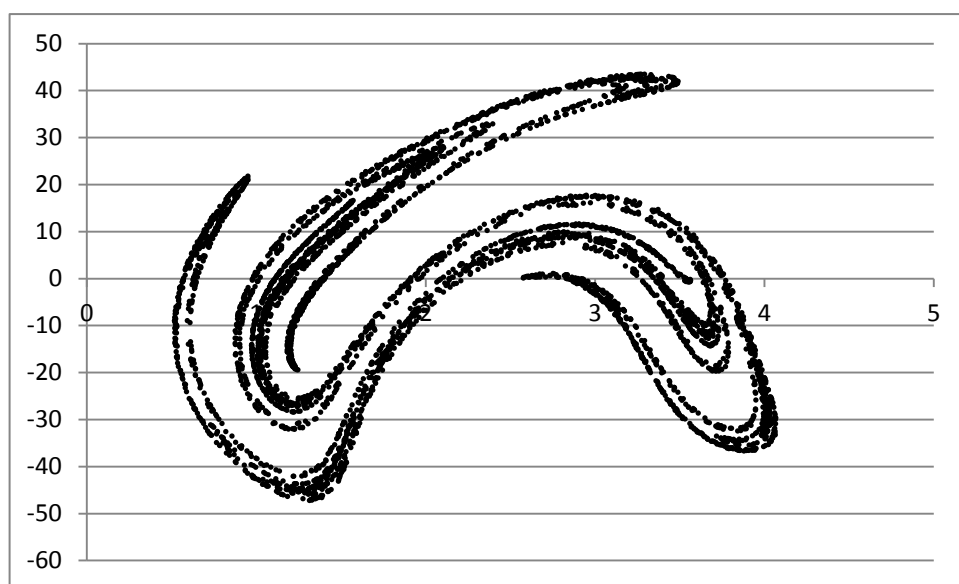
$\omega_0=6$; $\alpha=0,5$; $I=1700$, kaotikus



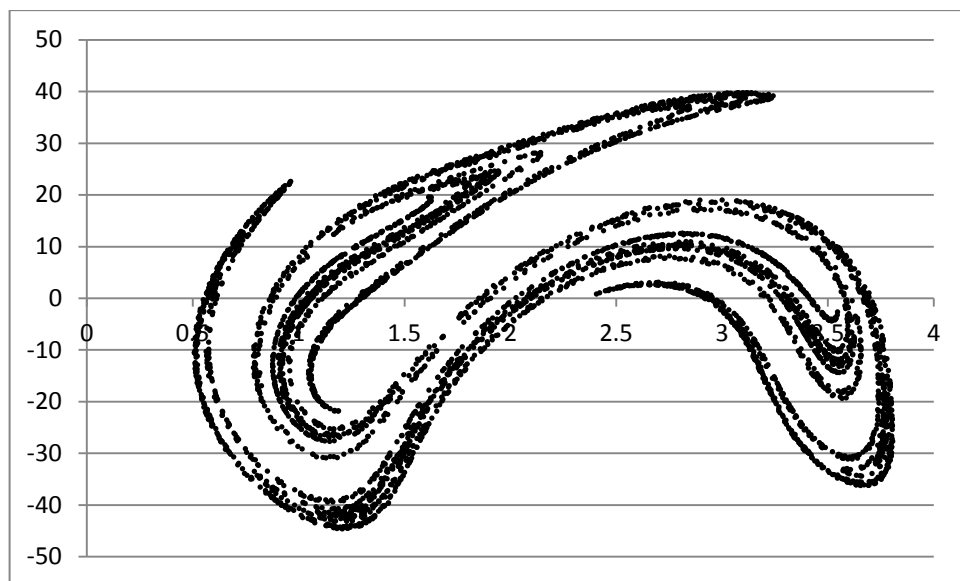
$\omega_0=6$; $\alpha=0,5$; $I=1800$, kaotikus



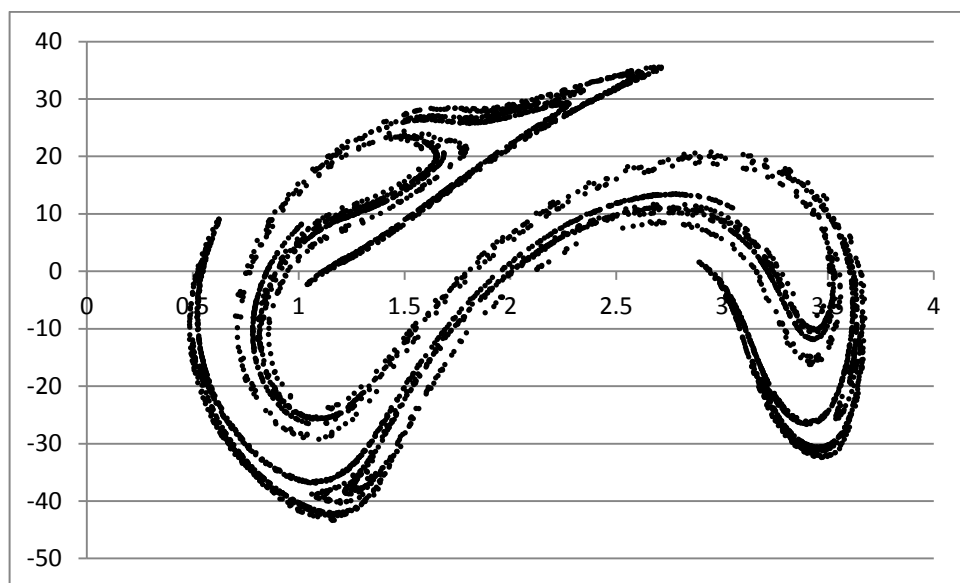
$\omega_0=6$; $\alpha=0,5$; $I=1900$, kaotikus



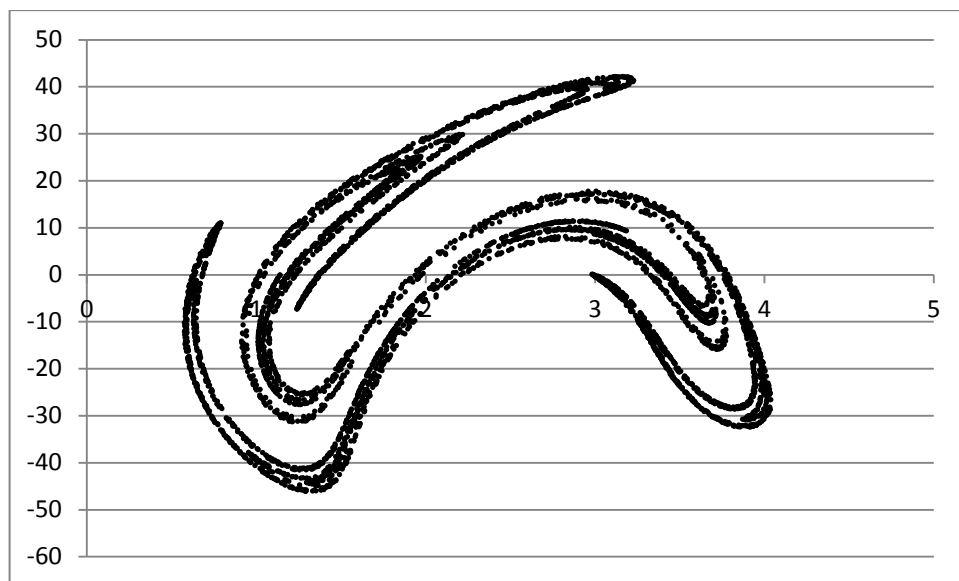
$\omega_0=6$; $\alpha=0,6$; $I=1700$, kaotikus



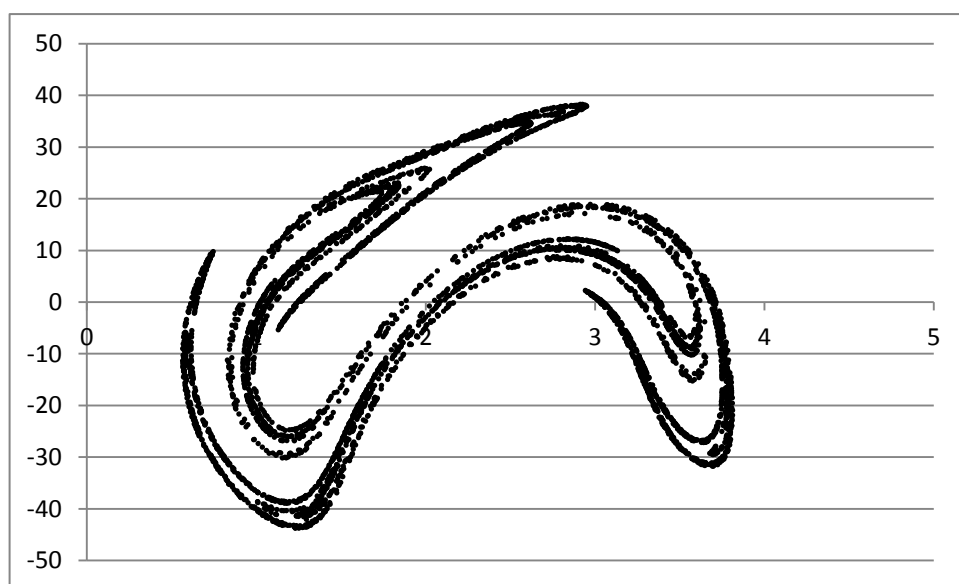
$\omega_0=6$; $\alpha=0,6$; $I=1800$, kaotikus



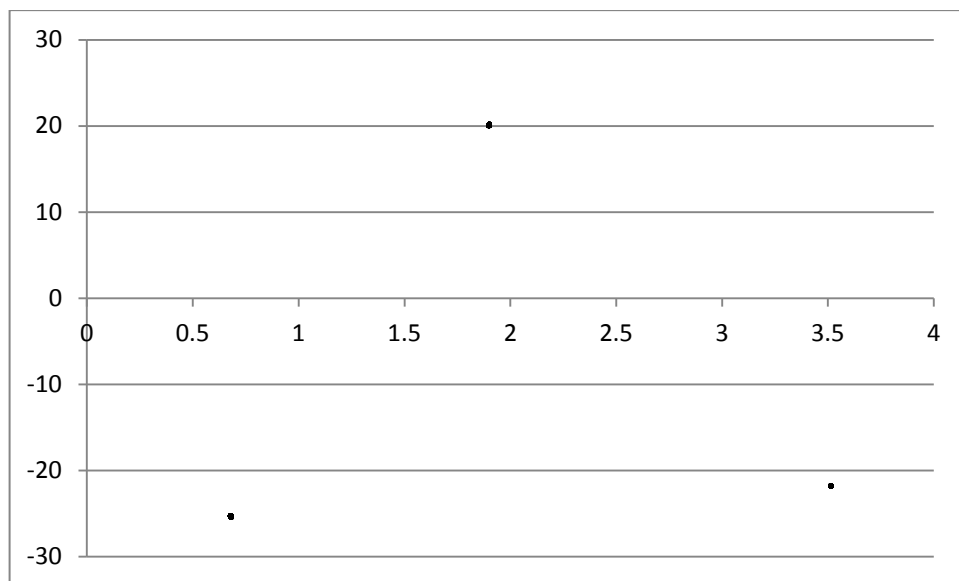
$\omega_0=6$; $\alpha=0,6$; $I=1900$, kaotikus



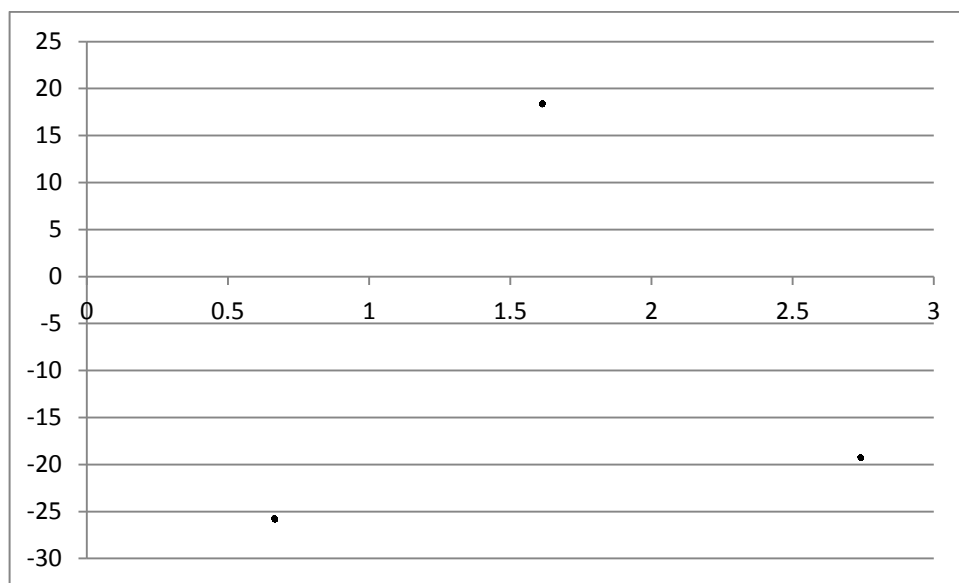
$\omega_0=6$; $\alpha=0.7$; $I=1700$, kaotikus



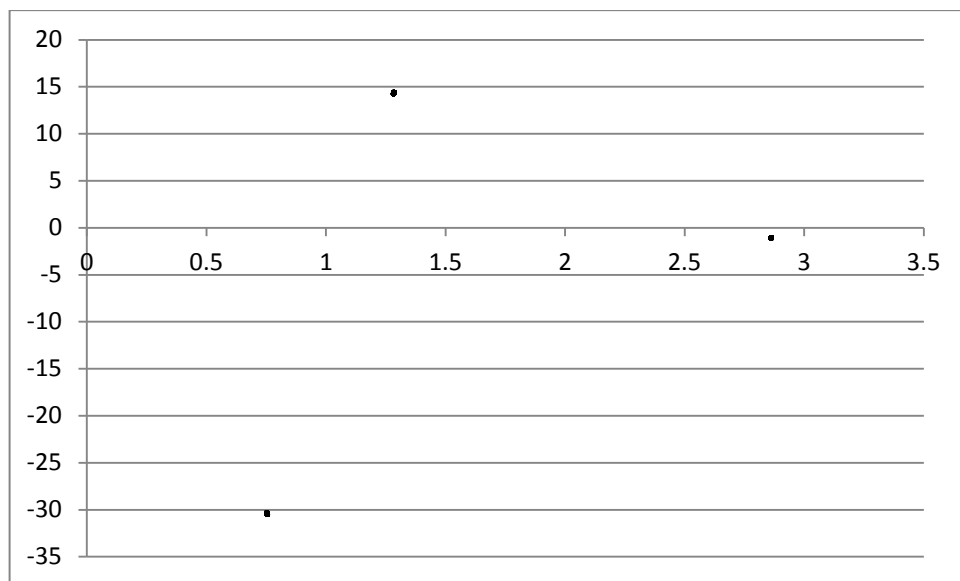
$\omega_0=6$; $\alpha=0.7$; $I=1800$, kaotikus



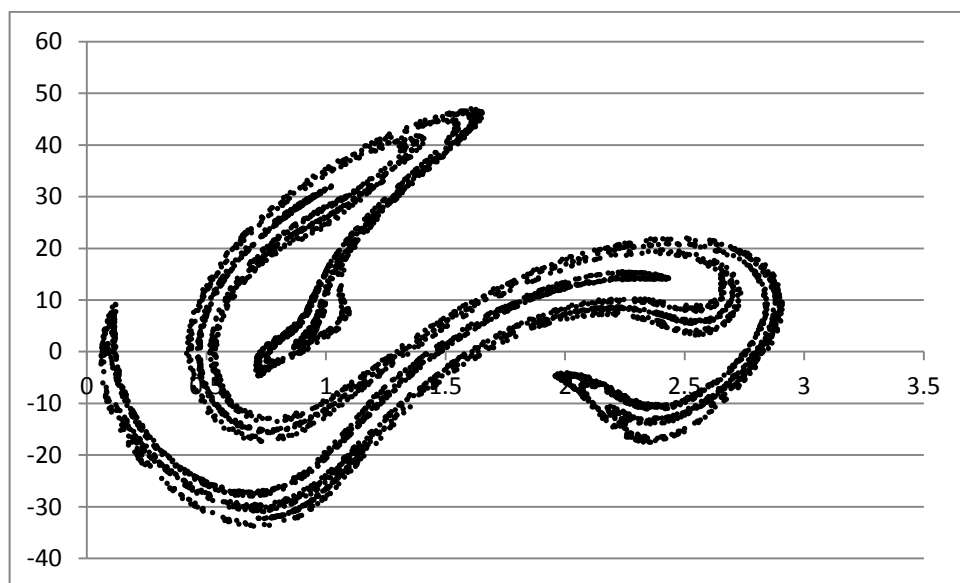
$\omega_0=6$; $\alpha=0,7$; $I=1900$, hármass ciklus



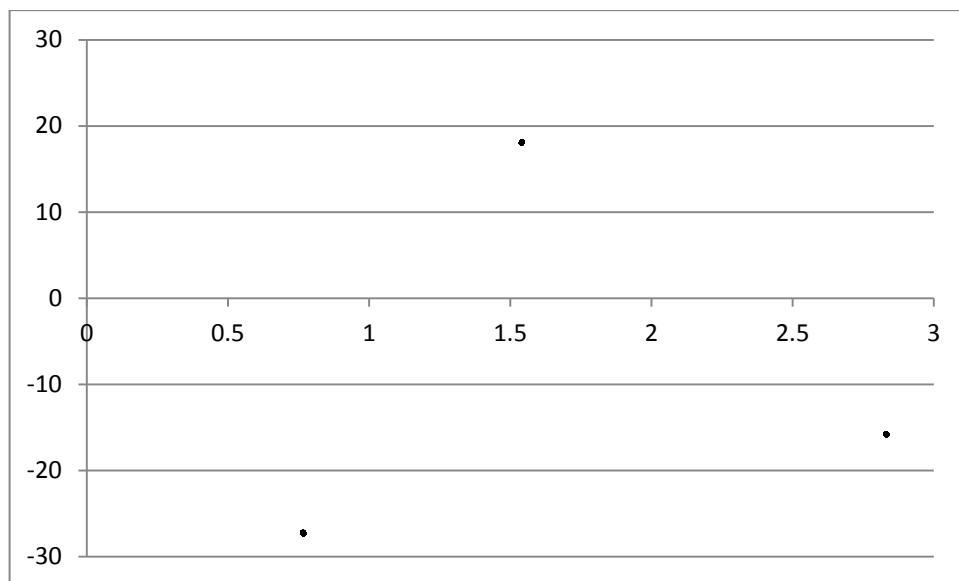
$\omega_0=7$; $\alpha=0,5$; $I=1700$, hármass ciklus



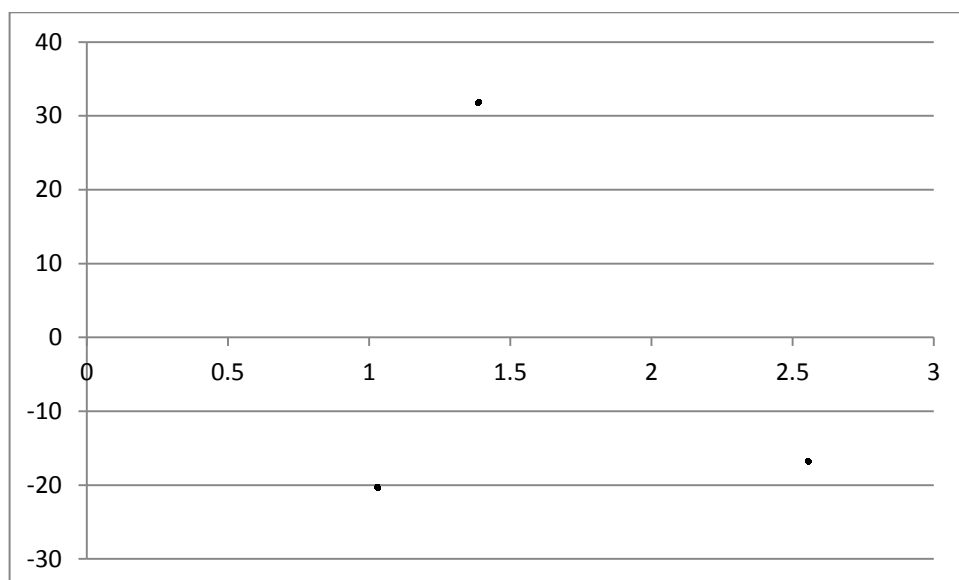
$\omega_0=7$; $\alpha=0,5$; $I=1800$, hármass ciklus



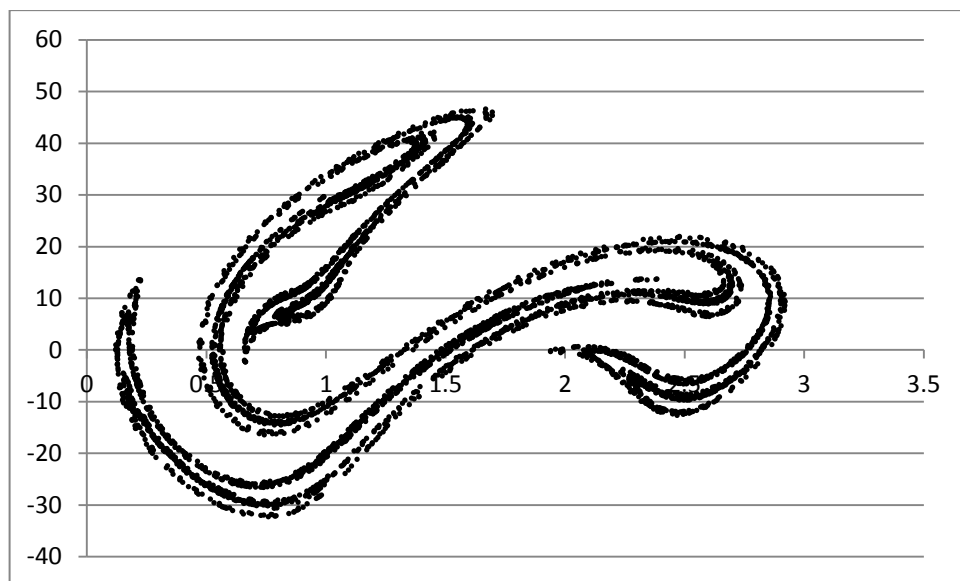
$\omega_0=7$; $\alpha=0,5$; $I=1900$, kaotikus



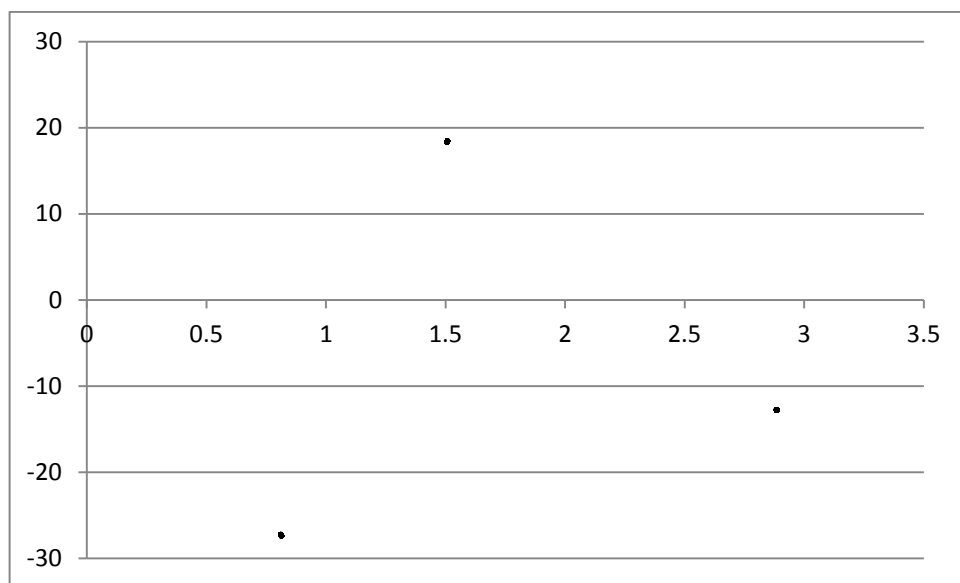
$\omega_0=7$; $\alpha=0,6$; $I=1700$, hármass ciklus



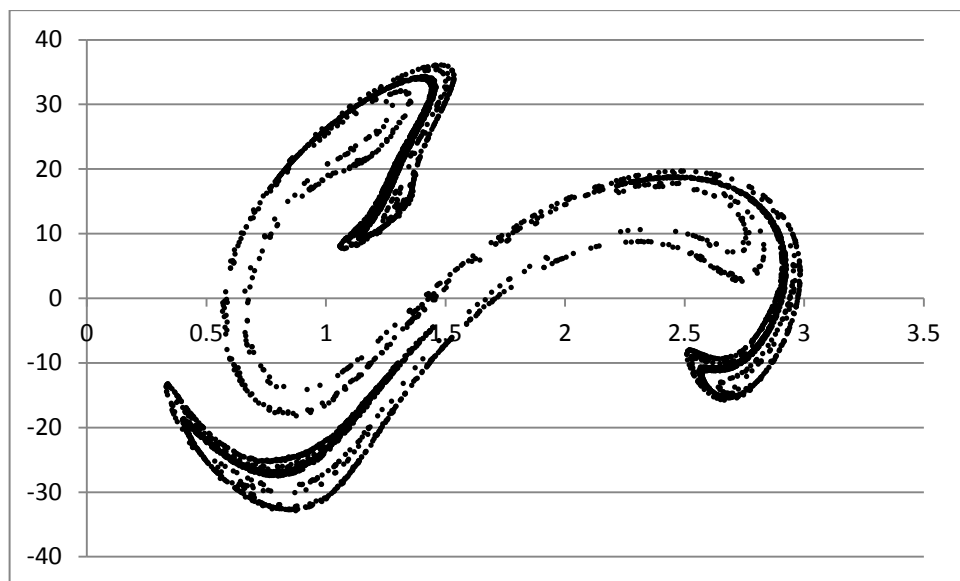
$\omega_0=7$; $\alpha=0,6$; $I=1800$, hármass ciklus



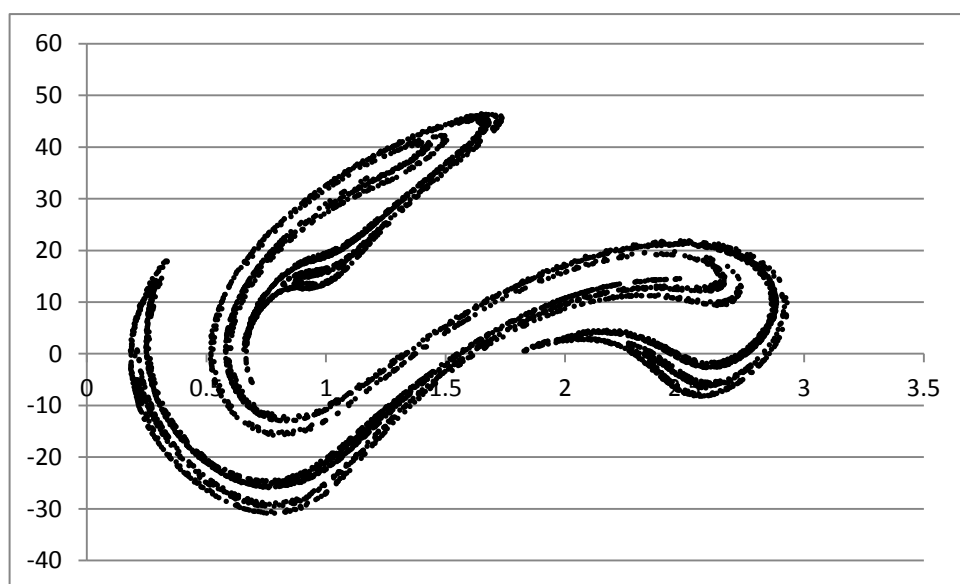
$\omega_0=7$; $\alpha=0,6$; $I=1900$, kaotikus



$\omega_0=7$; $\alpha=0,7$; $I=1700$, hármass ciklus



$\omega_0=7$; $\alpha=0,7$; $I=1800$, , kaotikus



$\omega_0=7$; $\alpha=0,7$; $I=1900$, kaotikus