

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Lomoschitz Lilla Anna
Matematika BSc, Alkalmazott matematikus szakirány (-2013)
EIT ICT Labs Master School, Security and Privacy Msc (2013-)

**2-DIMENZIÓS ONLINE LÁDAPAKOLÁS FORGATÁSSAL
TÉGLALAP ALAKÚ LÁDÁK ESETÉN**

Tudományos Diákköri Dolgozat

Témavezető:
Király Tamás adjunktus
Operációkutatási Tanszék



Budapest, 2013 november

Kivonat

A klasszikus két-dimenziós ládapakolási feladat során téglalap alakú tárgyakat kell elhelyezni egységnyi méretű négyzet alakú ládában. A jelen probléma ettől abban különbözik, hogy az elpakolni kívánt kis téglalapokat (tárgyakat) nem négyzetekben, hanem téglalapokban kell elhelyezni. A téglalap (láda) rövidebb oldala 1 egység hosszú, a másik oldal hossza a , ahol $a > 4/3$. A tárgyakat a láda falával párhuzamosan kell elhelyezni, és lehetőség van azok 90° -kal való elforgatására. A tárgyak mérete maximum 1 egység lehet mindkét irányban, alsó korlát nincs a tárgyak méretére. Az elpakolni kívánt tárgyak méreteit nem tudjuk előre, mindig csak egy tárgy „jön”, és azt rögtön el is kell helyezni úgy, hogy már többé nem mozgathatjuk. Az algoritmus korlátos ládaszámú, azaz egyszerre csak véges sok ládáról dönti el, hogy abba pakoljon-e, a többit pedig lezárja, azaz, azokba már soha nem pakol. Maximum 13 nyitott ládát használ egyszerre, de ez az a szám növekedésével monoton csökken 10-ig. Az algoritmus minden érkező tárgyat először osztályoz, majd megkeresi, hogy a csoportjának megfelelő ládában van-e hely neki; ha van, akkor (a később leírtak szerint) elhelyezi ott, ha nincs, akkor bezárja a ládát és új ládát nyit, majd ebben helyezi el a tárgyat.

A dolgozatban a bevezető rész után leírom a tárgyak csoportosítását, majd azt, hogy az egyes csoportokba tartozókat hogyan helyezi el az algoritmus, azzal együtt, hogy minimum mekkora részét foglalja el tárgy egy-egy lezárt ládának. Ezután felső korlátokat adok az algoritmus aszimptotikus hatékonysági arányára, ez a szám azt mutatja meg, hogy az algoritmus aszimptotikusan sok tárgy elhelyezéséhez legrosszabb esetben hányszor annyi ládát használ, mint egy optimális offline pakolás. Ennek a korlátai 2.625 ha $a > 2$ és 2.511 ha $4/3 < a < 2$. Később alsó korlátok következnek a feladat aszimptotikus hatékonysági arányára, ezek 2.05, 1.77, 1.47 különböző $4/3 < a < 3$ paraméterek esetén. Végül leírok egy javítási lehetőséget, ami a ládáknak eddig kihasználatlan területre is pakolna, de a hatékonysági arányt nem növelné.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. A problémakör ismertetése

A ládapakolási feladat egy NP-nehéz kombinatorikus optimalizálási feladat. Számos területen alkalmazható, különböző speciális esetei gyakran fordulnak elő gyakorlati problémák megoldásakor.

A legegyszerűbb alaptípusa az egydimenziós ládapakolási feladat. Ebben az esetben van n darab kis szakaszunk, melyek hosszait a_j -vel jelölve teljesül, hogy $0 < a_j \leq 1$. A cél az, hogy ezeket a szakaszokat minél kevesebb 1 egység hosszú nagy szakaszon helyezzük el, úgy hogy a kis szakaszok ne fedjék egymást, és ne lógjanak le az egység hosszú nagy szakaszokról.

A klasszikus két dimenziós ládapakolási feladat esetén téglalap alakú tárgyakat kell elhelyezni minél kevesebb 1 egység oldalú ládában. A tárgyak magassága és szélessége sem nagyobb, mint 1 egység. A tárgyakat úgy kell elhelyezni, hogy azok oldalai a láda falaival párhuzamosan helyezkedjenek el, a ládából ne lógjanak ki és egymást ne fedjék. Két dimenzióban már felmerül a kérdés, hogy el lehessen-e forgatni a tárgyakat, vagy az eredeti helyzetben kelljen-e őket elhelyezni. Ha nem lehet őket forgatni, akkor könnyen látható, hogy a téglalap alakú ládába pakolás feladata is modellezhető a négyzetbe pakolással. Amennyiben a forgatás megengedett, akkor a téglalap alakú ládába pakolás már nem vezethető vissza ilyen egyszerűen a négyzet alakú ládába pakolásra.

Fontos szerepe van annak, hogy előzetesen ismerjük-e az összes elpakolandó tárgy méretét, ez alapján megkülönböztethetünk online és offline feladatokat. Offline feladat esetén az összes tárgy paramétereit ismerjük, mielőtt elkezdenénk a pakolást. Online esetben csak a pakolás során tudjuk meg, hogy milyen tárgyakat kell elpakolnunk; azaz kezdetben egy tárgy paramétereit ismerjük, és mindig csak akkor ismerünk meg egy új tárgyat, ha az ismertekből egyet elpakolunk. Olyan feladat is elképzelhető, hogy egyszerre több, de korlátos sok olyan tárgy lehet, aminek ismerjük a méreteit, de még nem pakoltuk el.

Online esetben az alapján is lehet osztályozni a feladatokat, hogy mennyi ládát használ egyszerre. Ha nem használunk ilyen megkötést, akkor a feladat megoldására kitalált algoritmus tárhely felhasználása, és futási ideje nagyon megnőhet. Ugyanis, ahányszor új ládát nyitunk meg, azaz olyanba pakolunk, amibe addig még nem, akkor eggyel növeljük a megnyitott ládák számát. Egyrészt az összes megnyitott láda, és a bennük lefoglalt terület tulajdonságainak tárolása tárhelyet foglal. Másrészt ha az összes nyitott ládát megvizsgálja az algoritmus, mielőtt egy tárgyat elhelyezne, akkor egy-egy tárgy elhelyezése $O(n)$ nagyságrendű időbe is telhet, ahol n az összes elpakolni való tárgy számát jelöli. Ezt az időt úgy lehet csökkenteni, hogy felülről korlátozzuk azoknak a ládáknak a számát, amiket az algoritmus megvizsgál az elemek elhelyezésekor. Ehhez definiáljuk a lezárt és aktív ládákat. Azokat a ládákat nevezzük aktívnak, amiben már van legalább egy tárgy, és az algoritmus még pakolhat bele tárgyakat. Azt mondjuk, hogy egy algoritmus egy aktív ládát lezár, ha utána már soha többé nem nézi meg, hogy rakjon-e bele tárgyat; az ilyen ládát lezártnak nevezzük. Ha az aktív ládák maximális számára van megkötés, akkor a feladatot korlátos ládaszámúnak nevezzük.

Az offline ládapakolási feladat (az összes tárgy egyidejű ismeretében a minimális ládaszám, és egy hozzá tartozó pakolás megadása) NP-nehéz. Ezért a probléma megoldására kitalált polinomiális időben futó algoritmusok csak közelítő megoldásokat adnak. Ezeknek az algoritmusoknak a teljesítményét (mind online, mind offline esetben) lehet úgy mérni, hogy megvizsgáljuk, hányszor annyi ládát használnak,

mint amennyit egy optimális offline pakolás használna. Mindezt nagyon sok tárgy esetén nézzük, és a legrosszabb esetekben, azaz olyan ládasorozatok esetén, ahol ez az arányszám maximális. A pontos definícióhoz jelölje L az elpakolni való tárgyak sorozatát, $OPT(L)$ azt, hogy ehhez minimum mennyi láda kell, és $A(L)$ azt, hogy az L sorozat elpakolásához az A algoritmus mennyi ládát használ. Legyen továbbá

$$R_A^n := \max \left\{ \frac{A(L)}{OPT(L)} \mid OPT(L) = n \right\}$$

Ekkor az A algoritmus aszimptotikus hatékonysági arányát (angolul asymptotic worst case ratio) a következőképpen definiáljuk:

$$R_A^\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup R_A^n$$

Az egyszerűség kedvéért ezt a továbbiakban hatékonysági aránynak nevezzük.

A dolgozat egy olyan online ládapakolási feladatra mutat be egy algoritmust, ahol a láda formája az eddigiektől eltérően téglalap. A ládák rövidebb oldala 1 egység, míg a hosszabb a -val jelölt oldal $a \geq 4/3$ egység. Az elpakolni kívánt tárgyak téglalap alakúak, mindkét irányban legfeljebb 1 egység a kiterjedésük, alsó korlát nincsen a méretükre. Az algoritmus korlátos ládaszámú. A fő eredmény a következő tételben foglalható össze:

1.1. Tétel. *Létezik online algoritmus a fent ismertetett téglalap alakú ládába pakoló ládapakolási feladatra, ami $4/3 \leq a < 2$ esetén egyszerre maximum 13 ládát nyit meg, és a hatékonysági aránya legfeljebb 2.625, $2 < a$ esetén legfeljebb 11 ládát nyit meg, és a hatékonysági aránya legfeljebb 2.51046.*

Ezenkívül alsó korlátok is szerepelnek a dolgozatban, ezek bármely korlátos ládaszámú online algoritmusra érvényesek.

1.2. Kapcsolódó eredmények a témában, alkalmazások

Bizonyos ütemezési feladatok modellezésére a 2 dimenziós online pakolás forgatást nem megengedő változata alkalmas. A feladat korlátos ládaszámú változatára Epstein és Stee adott [4]-ben egy olyan algoritmust, aminek a hatékonysági aránya a lehető legkisebb, körülbelül 2.86. A nem korlátos ládaszámú feladat hatékonysági arányára Han, Chin, Ting, Zhang és Zhang [5]-ben adtak egy felső becslést, ez megközelítőleg 2.66.

A forgatást is megengedő változat nagyméretű papír-, furnér-, vagy fémlapokból különböző kisebb méretű lapok kivágását modellezheti, ha a kivágások elvégzésénél az a cél, hogy minél kevesebb felhasználatlan anyag maradjon ki, illetve, hogy minél kevesebb nagy lapot használjanak fel. Itt a maximálisan nyitva levő ládák száma azt jelenti, hogy mennyi nagy lapot kell kezelni egyszerre, azaz mennyit kell a kivágás helyén tárolni, és mennyi közül kell kiválasztani azt, amiből a megrendelt kisebb lapot ki fogjuk vágni.

Erre a problémára nem korlátos ládaszámmal az Epstein és Stee által [6]-ban adott alsó korlát megközelítőleg 1.64. Epstein felső korlátot is adott [2]-ben, ami ≈ 2.45 . Szintén ebben a cikkben szerepel korlátos ládaszámra egy-egy alsó és felső korlát. Az alsó korlát 2.535, a felső korlát ≈ 2.547 . Ennek az algoritmusnak a hatékonysági aránya azért annyira jó (azaz alacsony), mert ugyan korlátos ládaszámú, de 10^4 nagyságrendű nyitott ládát is használhat. Ezért alkalmazásokra nem is érdemes felhasználni, mert

ha nincs 10^5 nagyságrendű elpakolni való tárgy, akkor előfordulhat, hogy alig lesz lezárt ládánk, viszont sok megnyitott láda lesz, melyeknek csak kis részét foglalja el tárgy, azaz a szükségesnél jóval több ládát használ fel.

Téglalap alakú ládába való pakolást tanulmányozta Mehdi és Willems [3]-ban. Ők egy konkrét problémával foglalkoztak: rögzített méretű nagy acélapokból kellett kivágni kisebbeket, úgy hogy a kisebbek méretei nem ismertek előre, de az eloszlásuk igen. Azaz a láda aránya előre meghatározott volt, és a tárgyak méretének eloszlása is speciális volt, általában a láda méretéhez képest kicsik voltak. Az algoritmusuk egyszerre maximum három nagy lapot használ. Az ötletük az, hogy mindig úgy vágják ki az aktuális téglalapot, hogy annak a sarka a még felhasználható terület egy sarkával érintkezzen, és hogy a 3 nagy lapból megmaradó részbe beleírható 3 téglalap összmérete a lehető legnagyobb legyen. Hatékonysági arányt nem számoltak legrosszabb esetre. A saját maguk által adott példa-téglalapsorozatok állításuk szerint átlagosan a nagy lapok 80% -át felhasználták.

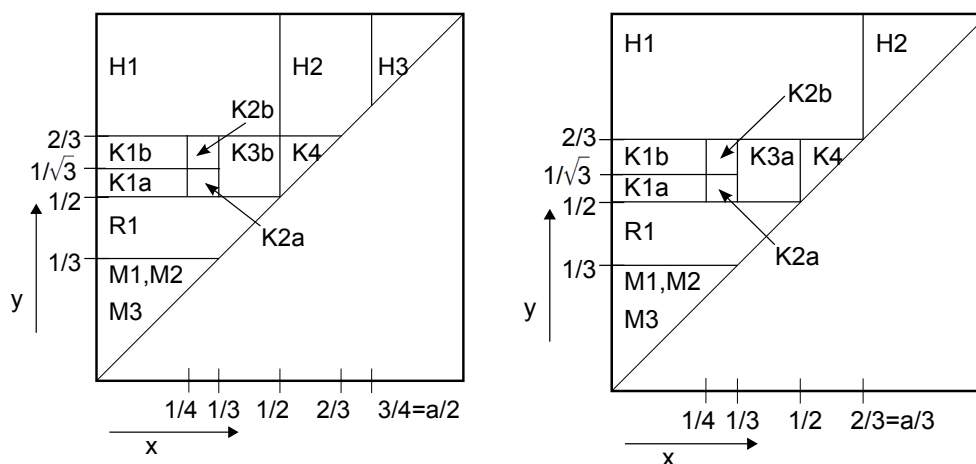
1.3. Az algoritmus áttekintése

Az algoritmus futása során minden érkező tárgyat osztályoz a méretei szerint, azaz besorolja az egyik továbbiakban leírt csoportba. A különböző csoportokba tartozó tárgyak különböző ládába kerülnek, mindegyik tárgycsoporthoz tartozik egy ládatípus. Ehhez hasonló 1-dimenziós online algoritmusról írt Lee és Lee [7]-ben. Minden tárgyfajtaból az elsőnek egy új ládát nyit, és abban a később leírtak szerint helyezi el, ezután a láda egy aktív láda lesz. Ha az elhelyezendő tárgy típusából már van aktív láda, akkor az algoritmus megvizsgálja, hogy abban el tudja-e helyezni a tárgyat. Ha igen, akkor elhelyezi, a láda aktív láda marad, és az algoritmus a következő elhelyezendő tárggyal kezd foglalkozni. Ha nem tudja elhelyezni a tárgyat, akkor a ládát lazárja, (azaz abba már soha nem pakol, és nem is vizsgálja meg,) új ládát nyit, és abban helyezi el a tárgyat; így ez lesz az új aktív láda ebből a típusból. Amennyiben egy tárgy típusához nincs aktív láda, akkor újat nyit az algoritmus.

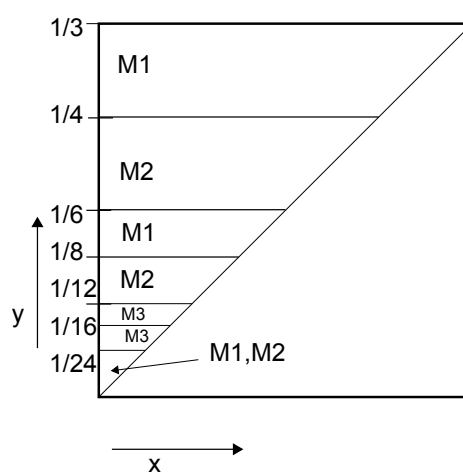
2. Algoritmus ismertetése

2.1. Csoportosítás

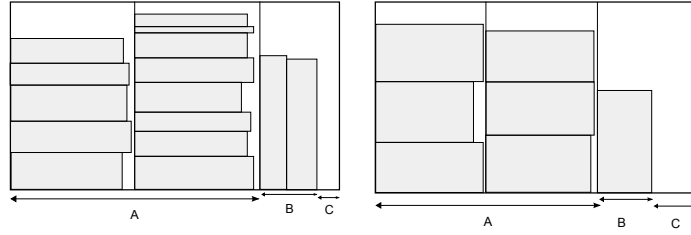
A tárgyakat a csoportosításhoz úgy forgatjuk, hogy a rövidebb, (x -szel jelölt) oldalukon álljanak. Így $0 < x \leq y \leq 1$ teljesül. A ládákat y szerint 4 főcsoportra osztjuk: hosszúra, ha $2/3 < y$; közepesre, ha $1/2 < y \leq 2/3$; rövidre, ha $1/3 < y \leq 1/2$; és minire, ha $y \leq 1/3$. A további osztályozás alcsoportokra (x és néha y szerint) gyakran a függvénye. A hosszú főcsoportot felosztjuk H1-re, ha $x \leq a/3$; H2-re, $a/3 < x \leq a/2$; és H3-ra, ha $a/2 < x$. A közepeset K1a-ra, ha $x \leq 1/4$ és $1/2 < y \leq 1/\sqrt{3}$, K1b-re, ha $x \leq 1/4$ és $1/\sqrt{3} < y \leq 2/3$, K2a-ra, ha $1/4 < x \leq 1/3$ és $1/2 < y \leq 1/\sqrt{3}$, K2b-re, ha $1/4 < x \leq 1/3$ és $1/\sqrt{3} < y \leq 2/3$; K3a-ra, ha $1/3 < x \leq 1/2$ és $y \leq a/3$; K3b-re, ha $1/3 < x \leq 1/2$ és $a/3 < y$; K4-ra, ha $1/2 < x \leq 2/3$. A rövidet R1-re, ha $x \leq a/3$; és R2-re, ha $a/3 < x \leq a/2$. A minibe tartozók csoportosítása bonyolultabb: M3-ba kerül az, amire $1/24 < y \leq 1/12$; a többi közül M1-be kerülnek azok, amikhez $\exists k \in \mathbb{N}$, amire $y \leq 1/3 \cdot 1/2^k$ és $y > 1/4 \cdot 1/2^k$. A maradék pedig M2-be kerül. A csoportosítást a



1. ábra. Csoportosítás $a=3/2$ és $a=2$ esetén



2. ábra. M1, M2, M3, csoportosítása



3. ábra. K1b-beli illetve K2a-beli elemek elhelyezése

2.2. Tárgyak elhelyezése

A más-más típusba tartozó tárgyak általában különböző módon, és külön-külön ládáknak kerülnek elhelyezésre. Mindenhol leírom a **legrosszabb kitöltöttségi arányt** $4/3 \leq a < 2$ és $2 \leq a$ esetén. Ez a szám azt mutatja meg, hogy **egy-egy lezárt láda területének minimum mekkora részén van tárgy**. Ezeket a számokat különböző ládatípusok esetén a fejezet végén találhatók

A ládák hosszabb oldalukon fekszenek. A tárgyak „állítása” mindig azt jelenti, hogy a rövidebb oldaluk van alul és felül, a „fektetése” pedig azt, hogy a hosszabb.

A **hosszú** főcsoportba tartozók közül a H1-es tárgyakat a nekik megnyitott ládában balról folytonosan egymás mellé állítjuk. Ha a soron levő tárgy nem fér már el, új ládát nyitunk, és ugyanígy folytatjuk a pakolást. Mivel $y > 2/3$ minden tárgy esetén, így ha valamelyik vízszintes tengely szerinti helyen van tárgy a ládában, akkor ott a láda $2/3$ magasságig tele lesz. Ez az elrendezés a láda egyik hosszabb oldalára vetítve tulajdonképpen egy egydimenziós ládapakolási feladat, ahol az x oldalak a szakaszok hosszai. Mivel $x \leq a/3$, így maximum $a/3$ hosszú kitöltetlen rész lehet a láda jobb szélén, ami a láda hosszának az $1/3$ -a. Így a H1-típusú láda $2/3 \cdot 2/3 = 4/9$ részét biztosan tárgy fedi.

A H2 típusú tárgyakat szintén így állítjuk a ládába, minden H2-es ládában pontosan 2 tárgy fér el. Ezek együttes mérete $2xy > 2 \cdot a/3 \cdot 2/3 = (4/9) \cdot a$, a láda mérete a , így annak $4/9$ része biztosan ki lesz töltve. H2 típusú elemek csak $a \leq 3$ esetén vannak, $a > 3$ esetén nincs szükség ilyen ládára.

A H3 típusú tárgyakból összesen egy fér el egy ládában. Ezért ebből nincs is fenntartott nyitott láda, hanem csak az új H3 tárgy érkezésénél nyitunk egyet, és azután rögtön be is zárjuk. Egy ilyen téglalap területe $xy > a/2 \cdot 2/3 = a/3$, így az a méretű láda $1/3$ részig van kitöltve. H3 típusú elemek csak $a \leq 2$ esetén vannak; $a > 2$ esetén nincs szükség ilyen ládára.

A **közepes** tárgyak közül a K1a-ba, K1b-be illetve a K2a-ba, K2b-be tartozók pakolása hasonlóan történik, de 4 különböző típusú ládába. A ládákat mindegyik esetben fel kell osztani: balról folytonosan felbontjuk K1a és K2a esetén $1/\sqrt{3}$, valamint K1b és K2b esetén $2/3$ széles, 1 egység magas sávokra, ameddig lehet. Így egy-egy $1/\sqrt{3}$ -nál, illetve $2/3$ -nál keskenyebb rész marad ki a ládák jobb oldalán. Kezdetben a sávokba fogjuk fektetni lentől felfelé folytonosan a tárgyakat; ha az aktuális sávba már nem fér bele az elhelyezendő tárgy, akkor a következőbe kezdünk pakolni. Ha az aktuális tárgyat már egyetlen sávban sem tudjuk elhelyezni, akkor a sávokból kimaradt jobb oldali rész bal szélébe állítjuk. Ettől fogva ide is pakolunk balról folytonosan. Ha az aktuális tárgyat se sávban, se pedig a kimaradó jobb oldali részben nem tudjuk elhelyezni, akkor az eddig használt ládát lezárjuk, új ládát nyitunk és ebben helyezzük el a tárgyat. Ezt a pakolást a

2.1. Állítás. *K1a, K1b, K2a, és K2b esetén a ládában levő sávok kitöltöttségi aránya $\sqrt{3} \cdot 3/8 \approx 0.649$.*

Bizonyítás. A bizonyítás során először azt mutatom meg, hogy ezek a sávok mind a négy esetben legalább a magasságuk $3/4$ -éig ki lesznek töltve, majd azt hogy a szélességük $\sqrt{3}/2$ -ed részéig ki lesznek töltve. Ebből a kettőből, már következik az állítás.

Magasság: K1a és K1b esetén a sávokban elhelyezett téglalapok magassága maximum $1/4$, így ha új sávba kell pakolnunk, akkor a sáv tetején kisebb, mint $1/4$ magasságú rész maradhat ki. Így a sáv minimum a magassága $3/4$ -éig ki lesz töltve.

K2a és K2b esetén az elhelyezett téglalapok magassága $1/4$ és $1/3$ között van, így egy sávban ezekből pontosan 3 darab fér el, ezek összmagassága pedig $3/4$ és 1 között van, így a függőleges kitöltöttség ebben az esetben is minimum $3/4$.

Szélesség: K1a, és K2a esetén a tárgyak szélessége minimum $1/2$, míg a sáv szélessége $1/\sqrt{3}$, így a sávok $\sqrt{3}/2$ arányban ki vannak töltve a szélességükben. K2a és K2b esetén a tárgyak szélessége minimum $1/\sqrt{3}$, míg a sávok szélessége $2/3$, ezért ezek a sávok is $\sqrt{3}/2$ arányban ki vannak töltve a szélességükben.

□

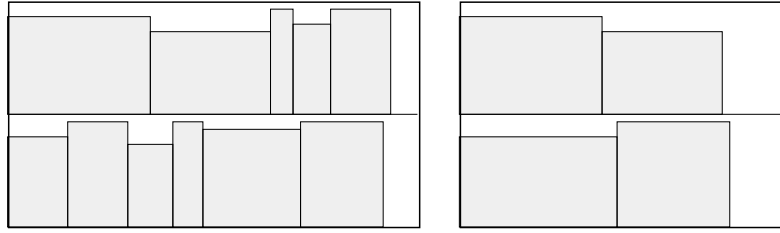
2.2. Állítás. *A kitöltöttségi arány K1a, K1b, K2a és K2b típusú ládákra $4/3 \leq a < 2$ és $2 \leq a$ esetén is több, mint $1/2$.*

Bizonyítás. Minden ilyen típusú lezárt láda felosztható három egymás melletti téglalap alakú részre: sávokra felosztott rész (A), a sávokból kimaradó, de kitöltött rész (B), és a sávokból kimaradó kitöltetlen rész (C). A teljes láda kitöltöttsége a három külön rész kitöltöttségének konvex kombinációja lesz, ahol az arányokat a különböző részek vízszintes tengelyre eső vetülete határozza meg. Erről kell megmutatni, hogy legalább $1/2$. Ehhez először a B részről megmutatom, hogy a kitöltöttségi aránya legalább $1/2$, majd ezt a részt „kidobom” a ládából, és a maradék (A és C) rész kitöltöttségére adok egy alsó becslést, ami nagyobb lesz, mint $1/2$.

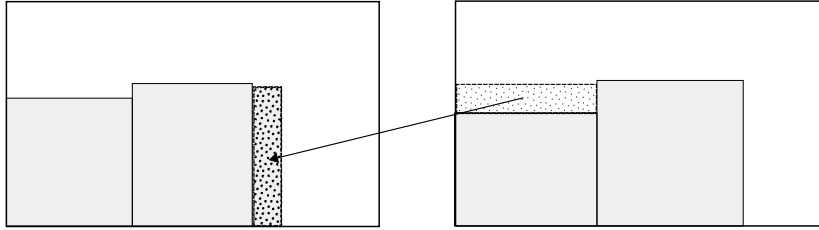
A sávokból kimaradó, de kitöltött részek (B) kitöltöttsége mindig több, mint $1/2$, mivel legalább $1/2$ vagy $2/3$ magasságig ki vannak töltve így ha ezeket a részeket egyszerűen kidobom a ládából, azaz az arányukat 0-ra csökkentem, attól a kitöltöttségi arány nem nőhet $1/2$ alól $1/2$ fölé. Ezért ezekkel egyszerűen nem foglalkozom.

A kimaradó részekre alsó becslést kapunk, ha a kitöltetlen rész (C) méretét felülről becsüljük, mivel ez a kisebb kitöltöttségű rész (0 a kitöltöttségi aránya). Ennek a szélessége minden esetben kisebb, mint a tárgyak rövidebb oldalának hossza, ami K2a, és K2b esetén a legnagyobb, de ekkor is felülről becsülhető $1/3$ -dal. Így ennek a résznek a szélességét tekinthetjük $1/3$ -nak. Ezen kívül már csak a sávokra felosztott terület (A) van minden ládában, ennek a kitöltöttsége a nagyobb: minimum $(\sqrt{3} \cdot 3/8)$, így ha ennek a méretét alulról becsülöm, az nem növeli a kitöltöttségi arányt. Mivel a legkisebb láda mérete $4/3$, ezért minimum két sáv van minden ládában; egy sáv szélessége pedig legalább $1/\sqrt{3}$, így a sávokra felosztott terület mérete legalább $2/\sqrt{3}$. Így $\frac{2/\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 3/8 + 1/3 \cdot 0}{2/\sqrt{3} + 1/3} \approx 0.504$ alsó becslése az A és C részek közös kitöltöttségi aránynak. Mivel a B rész kitöltöttsége is több, mint $1/2$, így a teljes láda kitöltöttségi aránya is nagyobb, mint $1/2$. □

A K3a-ba és K3b-be tartozó tárgyakhoz két-két egyforma vízszintes sávra osztjuk a ládát. A K3a és K3b típusúak külön-külön ládába kerülnek. Mindkét esetben balról folytonosan fektetjük



4. ábra. K3a és R1-beli tárgyak elhelyezése, valamint K3b és R2-beli tárgyak elhelyezése



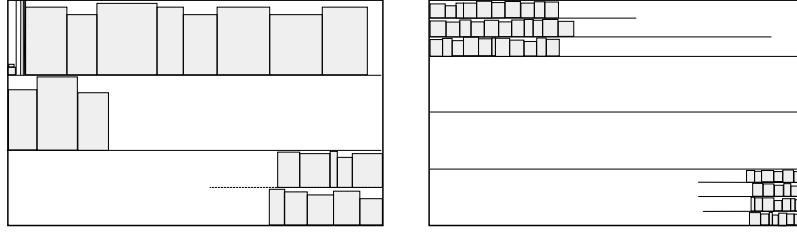
5. ábra. Két egymást követő K4-es láda pakolása, az áthelyezett pótsávot a két pöttyözött rész jelöli

a tárgyakat a sávokba, amíg valamelyik sávban még van hely. (Amíg mindkét sávban van hely, addig mindegy, hogy melyikben helyezük el a tárgyat.) K3a esetén minden sáv $1/3$ magasáig ki lesz töltve, hossza pedig maximum $a/3$ üres rész marad a jobb oldalukon, így a teljes elfoglalt terület minimum $2 \cdot 1/3 \cdot 2/3 \cdot a$ lesz, így a kitöltöttség minimum $4/9$. K3b csak $a > 2$ esetén fordul elő. Egy sávba pontosan két ilyen elem kerülhet, így a ládába összesen 4. Az elfoglalt terület $4xy \geq 4 \cdot 1/3 \cdot a/3 = 4/9 \cdot a$, a kitöltöttségi arány $4/9$. Ezt az elhelyezést a

A K4-be tartozó tárgyakat balról folytonosan, állítva pakoljuk egy ládába, majd ha nem fér bele az aktuális tárgy, akkor a ládát lezárjuk, és újat nyitunk. A kitöltöttségi arány megmutatására nem elég egy ládát nézni, néhány ládához a következő K4-es láda kitöltött részéből hozzászámolunk egy darabot, természetesen azt a következő láda kitöltöttségébe már nem számoljuk bele.

2.3. Állítás. Minden $K4$ típusú láda kitöltöttsége legalább $1/3$, ha $4/3 < a < 2$; és legalább $3/8$, ha $2 \leq a$.

Bizonyítás. Ha $a \leq 3/2$, akkor pont két tárgy fér el; ezek összmérete több, mint $1/2$, mivel $2 \cdot x \cdot y < 2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/2$. A láda mérete maximum $3/2$, így a minimális kitöltöttség több, mint $\frac{1/2}{3/2} = 1/3$. A többi esetben azt mutatom meg, hogy egy láda $1/2$ magassáig minden esetben ki lesz töltve, és általában szélességében csak $1/2$ rész marad üresen. Ha mégsem, akkor a következő láda ennél nagyobb mértékben van kitöltve, ami a hiányt kompenzálja. Mivel $y > 1/2$, így magasságban $1/2$ -ig ki lesz töltve a láda. A láda szélességében $u \in [0, 2/3)$ széles rész maradhat ki. Ha $u < 1/2$, akkor rendben van. Ha $u > 1/2$, akkor bontsuk fel $u = 1/2 + v$ alakban. Ez esetben a soron levő tárgy, ami már nem fért bele a ládába, $x > u = 1/2 + v$ széles, és ezért $y \geq x > 1/2 + v$ magas. Ha az elhelyezett tárgy tetejéről képzeletben levágunk egy v magas sávot (továbbiakban pótsáv), akkor a megmaradt rész még mindig legalább $1/2$ magasságú marad. Ha ezt a pótsávot elfordítjuk, és a régi láda végébe állítjuk, akkor annak már csak $1/2$ rész fog hiányozni a szélességéből. A pótsáv mérete miatt a magassága is el fogja érni az $1/2$ -et. A pótsáv áthelyezését a



6. ábra. M1, és M3-beli tárgyak pakolása

A láda kitöltöttsége így minimum $\frac{1/2 \cdot (a-1/2)}{a}$, ez $3/2 \leq a < 2$ esetén minimum $1/3$, $2 \leq a$ esetén pedig minimum $3/8$. $\square$

A **rövid** főcsoportból az R1-beliek pakolásához két egyforma vízszintes sávra osztjuk a ládát, és a tárgyakat balról folyamatosan állítva pakoljuk a sávokba. Ezt addig folytatjuk, amíg olyan elem nem jön, ami már az egyik sávba sem fér bele, ekkor az eddig használt ládát lezárjuk, és új ládát nyitunk. Mindkét sáv $1/3$ magasságig ki lesz töltve (ahol egyáltalán van benne valami), és maximum $a/3$ üres részek lesznek a jobb szélükön. Így a kitöltöttsége legalább $4/9$ lesz.

Az R2-be tartozókat szintén így pakoljuk két sávba. Mindkét sávban pont két tárgy fér el, a ládában 4 tárgy van, melyek összmérete $4xy \geq 4 \cdot a/3 \cdot 1/3 = (4/9)a$, így a kitöltöttség minimum $4/9$. R2-beli elemek csak $a < 3/2$ esetén vannak.

2.4. Megjegyzés. A K3a és R1; valamint a K3b és R2 típusú elemek pakolása megegyezik. Így a K3a és R1 számára elég egy ládát fenntartani, míg a K3b és R2-belieknek is elég összesen egy nyitott láda.

A **minik** pakolásához az egy típusba tartozókat még tovább kell csoportosítani.

Az M1-beli tárgyak további felosztásához definiáljuk a következő függvényt: $g(y) := \min\{1/(3 \cdot 2^k) \mid 1/(3 \cdot 2^k) \geq y, k \in \mathbb{N}\}$. Minden y magasságú ládát egy $g(y)$ magasságú (szélességű) sávba fogunk állítani (fektetni). A fekvő sávok hossza nincs előre rögzítve, hanem az érkező tárgyak függvénye. Ezek közül az egyiket két oldalról fogjuk pakolni különböző méretű elemekkel, a sáv akkor telik meg, amikor középen már majdnem összeérnek a különböző típusú tárgyak. A ládát 3 darab $1/3$ magasságú fősávra osztjuk. Ezek közül az alsót még két vízszintes $1/6$ magas sávra osztjuk, de csak a jobb oldalán. A felső fősáv bal végének egy $1/12$ széles részét további függőleges sávokra osztjuk fel, ezek rendre $\frac{1}{12 \cdot 2^k}$ ($k \in \mathbb{N}$) szélesek. Azokat a tárgyakat, melyekre $g(y) = 1/3$, balról folytonosan pakoljuk a fősávokba, először a felsőbe, majd a középsőbe, aztán az alsóba, egészen addig, amíg ezekben van hely. Az $1/6$ magas sávba való tárgyakat jobbról pakoljuk folytonosan, mindig abba a kicsi sávba, amelyikben az utoljára elhelyezett tárgy bal széle jobbrább van. Ha az alsó fősávban már nem fér el az aktuális $1/6$ -os tárgy, akkor a középső sávot ugyanúgy felosztjuk, mint kezdetben az alsót, és ide pakolunk tovább. Az ezeknél kisebb tárgyakat a nekik megfelelő felső fősávban álló kicsi sávba fektetjük folytonosan. Ha egy ilyen kicsi sávban már nem fér el a soron levő tárgy, akkor nyitunk egy vele megegyező méretű kicsi sávot, amit úgy helyezünk el az $1/3$ -os fősávban, mintha egy $1/3$ magas tárgy lenne; innentől fogva ide pakoljuk az ennek megfelelő méretű elemeket. Egy láda akkor telik meg, ha az éppen elhelyezendő $1/3$ -os vagy $1/6$ -os tárgyat nem tudjuk elhelyezni, vagy nem tudunk új kicsi sávot nyitni egy elhelyezendő $1/24$ -es, vagy annál kisebb tárgynak. Az M1-beliek pakolását a

Az M2-be tartozó tárgyak pakolása hasonlóan történik. A tárgyak besorolását a $h(y) := \min\{1/(4 \cdot 2^k) \mid 1/(4 \cdot 2^k) \leq y, k \in \mathbb{N}\}$ függvény adja meg. A ládát 4 darab $1/4$ magas fősávra bontjuk, az alsó fősáv jobb oldalán két darab $1/8$ széles kisebb sáv indul. Egy $1/16$ széles részt vágunk le a felső fősáv bal végétől a kicsi sávoknak, amik rendre $\frac{1}{16 \cdot 2^k}$ ($k \in \mathbb{N}$) szélesek. A pakolás ugyanúgy történik, és itt is igaz marad a megjegyzés, csak $1/32$ -del.

Az M3-ba tartozók pakolásához 4 darab $1/4$ magas fősávra osztjuk fel a ládát. A felső sávot bal oldalról 3 kisebb $1/12$ magas sávra bontjuk, az alsót pedig jobbról 4 darab $1/16$ szélesre. Az előbbiekre pakoljuk állítva azokat a tárgyakat, melyekre $1/16 < y \leq 1/12$; az utóbbiakba pedig a többit ($1/24 < y \leq 1/16$). Ha egy fősávba már nem fér bele az aktuális tárgy, akkor közvetlenül alatta vagy fölötte nyitunk egy ugyanolyat, mint ami éppen betelt. Új ládát akkor nyitunk, ha valamelyik sávban összeérnek a tárgyak (az aktuálisan elhelyezendő vagy egy $1/12$ -esbe, vagy egy $1/16$ -osba belelógna), vagy mind a 4 sáv betelt. Az M3-beli elemek pakolását is a

2.5. Állítás. Az M1-be tartozó ládák kitöltöttségi aránya $4/3 \leq a < 2$ esetén $187/384 > 0.48$, $2 \leq a$ esetén $319/576 > 0.55$. Az M2-be tartozó ládák kitöltöttségi aránya $4/3 \leq a < 2$ esetén $1111/2304 > 0.48$, $2 \leq a$ esetén $605/1152 > 0.52$. Az M3-be tartozó ládák kitöltöttségi aránya $4/3 \leq a < 2$ esetén $79/128 > 0.61$, $2 \leq a$ esetén $365/576 > 0.63$.

Bizonyítás. M1 esetén a sávok a rövidebb oldaluk $3/4$ -éig mindig ki vannak töltve, mert az ennél kisebb tárgyak már M2-be, vagy M3-ba kerülnek. A csak $1/3$ -os tárgyakat tartalmazó sávban maximum $1/3$ széles rész marad üresen, mivel $x \leq y < 1/3$, így az új sávot nyitó elem, ami már nem fért ide, kevesebb, mint $1/3$ széles lehet. Ez összesen $1/3 \cdot 1/3 = 1/9$ területegység. A csak $1/6$ -os tárgyakat tartalmazóban pedig maximum $1/6$ széles, ez $1/3 \cdot 1/6 = 1/18$ területegység. Amelyik sávban mindkét féle tárgy van, abban a maximális kimaradó terület $1/3 \cdot 1/3 + 1/6 \cdot 1/6 = 5/36$. Az utóbbi tulajdonságú sávból csak egy lehet minden ládában, így a legtöbb üresen maradó rész akkor fordulhat elő, ha kettő $1/3$ -os, és egy vegyes sávunk van. Ez összesen $2 \cdot 1/9 + 5/36 = 13/36$ területegység. Az üresen maradó részhez még hozzá kell vennünk a kicsi sávokban kimaradó helyeket, ennek felső becsléseként tekinthetjük az összes megnyitott, de még nem lezárt kicsi sávot. Mivel minden sávméretből összesen egy van, így ezek összterülete $1/3 \cdot 1/12 = 1/36$. Így már csak a lezárt kicsi sávok végén maradó kihasználatlan területet nem vettük figyelembe. Ez minden esetben maximum akkora lehet, mint a kicsi sáv szélessége, ez a legnagyobb, azaz $1/24$ széles kicsi sávnál veszi fel a maximumát, ami a kicsi sáv területének az $1/8$ -a. Ez a szám a

M2 esetén a rövidebb oldal szerint minimum $2/3$ -ig ki lesznek töltve a sávok. Az $1/4$ -es sávokban $1/4 \cdot 1/4$ rész marad maximum üresen, az $1/8$ -osban maximum $1/4 \cdot 1/8$, a vegyesben $1/4 \cdot 1/4 + 1/8 \cdot 1/8$. A 4 sávban együttvéve három $1/4$ -es és egy vegyes sáv esetén maradhat a legtöbb üres terület, ez maximum $3 \cdot 1/4 \cdot 1/4 + 1/4 \cdot 1/4 + 1/8 \cdot 1/8 = 17/64$. A kitöltetlen kicsi sávok miatt legfeljebb $1/4 \cdot 1/16 = 1/64$ rész maradhat üresen. A lezárt kicsi sávok végén levő üres rész miatti kitöltési arány az előzőhöz hasonlóan $1/12$ -el csökkenhet. Így az összkitöltöttség minimum $11/12 \cdot 2/3 \cdot \frac{a-17/64-1/64}{a}$. Ez $4/3 \leq a < 2$ esetén $a = 4/3$ -nál veszi fel a minimumát, ami $1111/2304 > 0.48$. Másrészt $2 \leq a$ esetén $a = 2$ -ben, ahol $605/1152 > 0.52$.

M3 pakolása esetén a sávok minimum $2/3$ vagy $3/4$ magasságig lesznek kitöltve. Így $2/3$ -dal számolva alsó becslést kapunk a kitöltöttségre. Egy csak $1/12$ -es tárgyakat tartalmazó befejezett fősávban maximum

$1/4 \cdot 1/12$ területű rész marad üresen. Egy csak $1/16$ -os tárgyakat tartalmazóban legfeljebb $1/4 \cdot 1/16$. A vegyesben kevesebb mint $1/4 \cdot 1/12 + 1/4 \cdot 1/16$. Négy ilyen összege maximum $3 \cdot 1/4 \cdot 1/12 + 1/4 \cdot 1/12 + 1/4 \cdot 1/16 = 19/192$. Így a teljes láda kitöltöttsége több, mint $2/3 \cdot \frac{a-19/192}{a}$. Ez $4/3 \leq a < 2$ esetén $a = 4/3$ -nál veszi fel a minimumát, ami $79/128 > 0.61$. Másrészt $2 \leq a$ esetén $a = 2$ -ben, ahol $365/576 > 0.63$. $\square$

Ládatípus	$4/3 \leq a < 2$	$2 \leq a$
H1	$4/9$	$4/9$
H2	$4/9$	$4/9$
H3	$1/3$	-
K1a	>0.5	>0.5
K1b	>0.5	>0.5
K2a	>0.5	>0.5
K2b	>0.5	>0.5
K3a és R1	$4/9$	$4/9$
K3b és R2	$4/9$	-
K4	$1/3$	$3/8$
M1	>0.48	>0.55
M2	>0.48	>0.52
M3	>0.61	>0.63

1. táblázat. Kitöltöttségi arányok legrosszabb esetekben

3. Korlátok a hatékonysági arányra

3.1. Felső korlát az algoritmusra

Ebben az alfejezetben a bevezetőben szereplő tétel bizonyítása található. Ehhez a két felső becsléshez [1] forrás adta az alapötletet, ahol hasonló állítást fogalmaztak meg, de négyzet alakú ládákra, és nem korlátos ládaszámra.

Először a $4/3 < a < 2$ esetet nézzük. Legyen L elpakolni való kis téglalapok n elemű sorozata. Jelölje h_3 azoknak a ládáknak a számát, amennyibe az algoritmus H3 típusú tárgyakat pakolna az L sorozatból; k_4 pedig azoknak a számát, amennyit K4 típusúak pakolására használna. Jelölje S az L sorozatban lévő tárgyak összterületét, $S_{-h_3-k_4}$ pedig a H3-on és K4-en kívüli tárgyak összterületét. Mivel az algoritmus a H3 és K4 típusú tárgyak kivételével a ládákat minimum $4/9$ arányban kitölti, így az ezen kívüli elemeket maximum $\frac{9}{4} \cdot S_{-h_3-k_4} + O(1)$ ládába pakolja. Így összesen maximum $k_4 + h_3 + \frac{9}{4} \cdot S_{-h_3-k_4} + O(1)$ ládát használ. Az optimális offline pakolásra igazak az alábbiak:

- minimum annyi ládát használ, amennyi a tárgyak összterülete

- minimum annyi ládát használ, amennyi H3-beli tárgy van a sorozatban, mivel ezekből mindig 1 darab kerülhet az offline algoritmus szerint is egy ládába, ezért ezek darabszáma legalább h_3
- minimum $h_3 + 2/3 \cdot (k_4 - 1/2 \cdot h_3)$ ládát használ. Mivel, ha K4 és H3 belüli tárgyak is vannak, akkor ha az offline először a H3-beli elemeket rakodja egyesével ládába, akkor minden H3-at már tartalmazó ládába még maximum egy darab K4-beli elemet még el lehet helyezni. Mivel az online minimum 2 darab K4-beli elemet rakott egy ládába, így az ilyen módon elpakolható K4-beli ládák száma maximum $h_3/2$. Ezért minimum $k_4 - 1/2 \cdot h_3$ ládányi K4-es elemet kell még elpakolni. Mivel ezekből 2 vagy 3 tárgy lehet egy ládában, így ha az online ládába mindig ügyetlenül 2 került, az offline pedig ügyesen 3-at rak egy ládába, az offline akkor is minimum $2/3$ -szor annyi ládába pakolja őket, mint az online, azaz minimum $2/3 \cdot (k_4 - 1/2 \cdot h_3)$ ládát használ a kimaradt K4-esek pakolására.

Így az optimális offline pakolás legalább $\max\{S, h_3, h_3 + 2/3 \cdot (k_4 - 1/2 \cdot h_3)\} = \max\{S, h_3, 2/3 \cdot h_3 + 2/3 \cdot k_4\}$ ládát használ. Így a hatékonysági arányra teljesül, hogy:

$$R_{4/3 < a < 2}^{\infty} \leq \frac{k_4 + h_3 + \frac{9}{4} \cdot S_{-h_3-k_4}}{\max\{S, h_3, 2/3 \cdot h_3 + 2/3 \cdot k_4\}}.$$

Mivel $S \geq S_{-h_3-k_4} + 1/3 \cdot h_3 + 1/3 \cdot k_4$, így $S_{-h_3-k_4}$ ezen egyenlőtlenség szerinti felső becslését írva az egyenlőtlenségbe, még mindig egy felső becslést kapunk $R_{4/3 < a < 2}^{\infty}$ -re. Így:

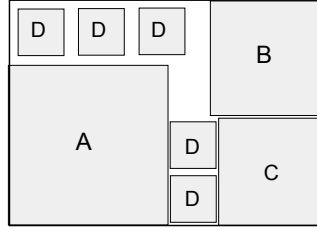
$$R_{4/3 < a < 2}^{\infty} \leq \frac{h_3 + k_4 + \frac{9}{4} \cdot (S - 1/3 \cdot h_3 - 1/3 \cdot k_4)}{\max\{S, h_3, 2/3 \cdot h_3 + 2/3 \cdot k_4\}} \leq \frac{1/4 \cdot h_3 + 1/4 \cdot k_4 + \frac{9}{4} \cdot S}{\max\{S, h_3, 2/3 \cdot h_3 + 2/3 \cdot k_4\}}.$$

Ha $\max\{S, h_3, 2/3 \cdot h_3 + 2/3 \cdot k_4\} = S$, akkor $2/3 \cdot h_3 + 2/3 \cdot k_4 \leq S$ azaz $1/4 \cdot h_3 + 1/4 \cdot k_4 \leq (3/8) \cdot S$ szerint a jobb oldal $\leq \frac{3/8 \cdot S + 9/4 \cdot S}{S} = 2.625$. Ha $\max\{S, h_3, 2/3 \cdot h_3 + 2/3 \cdot k_4\} = h_3$, akkor a nevezőben S és $2/3 \cdot h_3 + 2/3 \cdot k_4$ helyett h_3 -at helyettesítve a jobb oldal $\leq \frac{3/8 \cdot h_3 + 9/4 \cdot h_3}{h_3} = 2.625$. Ha $\max\{S, h_3, 2/3 \cdot h_3 + 2/3 \cdot k_4\} = 2/3 \cdot h_3 + 2/3 \cdot k_4$, akkor a nevezőben S helyére $2/3 \cdot h_3 + 2/3 \cdot k_4$ -at helyettesítve a jobb oldal $\leq \frac{1/4 \cdot h_3 + 1/4 \cdot k_4 + 9/4 \cdot (2/3 \cdot h_3 + 2/3 \cdot k_4)}{2/3 \cdot h_3 + 2/3 \cdot k_4} = 2.625$. Ezekből következik, hogy

3.1. Állítás. $R_{4/3 < a < 2}^{\infty} \leq 2.625$

Tekintsük most az $a > 2$ esetet. Ugyanúgy, mint eddig, legyen L elpakolni való kis téglalapok sorozata; k_4 azoknak a ládáknak a száma, amennyit az algoritmus K4 típusúak pakolására használna, S az L -beli tárgyak összterülete. S_{-k_4} jelölje a K4-en kívüli tárgyak összterületét. Mivel az algoritmus a K4 típusú tárgyak kivételével a ládákat minimum $4/9$ arányban kitölti, így a K4-en kívüli elemeket maximum $9/4 \cdot S_{-k_4} + O(1)$ ládába pakolja. Így összesen maximum $k_4 + 9/4 \cdot S_{-k_4} + O(1)$ ládát használ. Az optimális offline pakolás egyrészt minimum S ládát használ, másrészt minimum $3/5 \cdot k_4$ -at. Azért $3/5 \cdot k_4$ -at, mert egyrészt $2 < a < 8/3$ esetén minimum 3 és maximum 5 K4 típusú elem kerülhet egy ládába. Így ha az online algoritmus csak hármat helyezne el minden ládában, míg az offline ötöt, akkor az online által felhasznált ládák számának a $3/5$ -szeresét használná fel az offline. Másrészt $a > 8/3$ esetén, a csak K4-et tartalmazó ládák végén a kimaradó maximum $2/3$ széles rész a láda hosszának kevesebb, mint egynegyede; így ha az összes offline szélességében teljesen ki van töltve, míg az online-ok csak a szélességük $3/4$ -ig, akkor az offline $3/4$ -szer annyi ládát használ, mint az online, ez pedig alulról becsülhető $3/5$ -del.

Így az optimális offline pakolás legalább $\max\{S, 3/5 \cdot k_4\}$ ládát használ. Így a hatékonysági arányra teljesül,



7. ábra. Offline pakolás az alsó korláthoz $4/3 < a \leq 3/2$ esetén

hogy: $R_{2 < a}^\infty \leq \frac{k_4 + 9/4 \cdot S_{-k_4}}{\max\{S, 3/5 \cdot k_4\}}$. Mivel $S \geq S_{-k_4} + 3/8 \cdot k_4$, így ha S_{-k_4} ezen egyenlőtlenség szerint becsüljük felülről, még mindig egy felső becslést kapunk $R_{2 < a}^\infty$ -re. Így:

$$R_{2 < a}^\infty \leq \frac{k_4 + 9/4 \cdot (S - 3/8 \cdot k_4)}{\max\{S, 3/5 \cdot k_4\}} \leq \frac{5/32 \cdot k_4 + 9/4 \cdot S}{\max\{S, 3/5 \cdot k_4\}}.$$

Ha $\max\{S, 3/5 \cdot k_4\} = S$, akkor $R_{2 < a}^\infty \leq \frac{5/32 \cdot 5/3 \cdot S + 2.25 \cdot S}{S} = 2.51041\dot{6}$.

Ha $\max\{S, 3/5 \cdot k_4\} = 3/5 \cdot k_4$, akkor $R_{2 < a}^\infty \leq \frac{5/32 \cdot k_4 + 2.25 \cdot 3/5 \cdot k_4}{3/5 \cdot k_4} = 2.5104\dot{6}$. Így teljesül az alábbi

3.2. Állítás. $R_{2 < a}^\infty \leq 2.52$

3.2. Általános alsó korlát a feladatra

Ebben a fejezetben arra adok alsó becslést, hogy egy algoritmus a legrosszabb esetben hányszor annyi ládát használhat, mint az optimális offline pakolás. Mivel a hatékonysági arány az a szám függvénye, így az a értékétől függően több becslést adok. Olyan ládasorozatokat fogok konstruálni, melyeknek az optimális offline elhelyezése n darab egyformán kitöltött ládában történik. Mindhárom esetben először egy darab ilyen offline ládában szereplő tárgyakat fogom megadni. Majd az offline ládában szereplő összes tárgyra megadom, hogy csak olyanból maximum mennyi fér el egy ládában. Ez alapján meg lehet mondani, hogy az egyes tárgyakból n darab mennyi ládában fér el. Ebből pedig kiszámítható, hogy az n darab offline láda tárgyait minimum mennyi ládába pakolja akármelyik online algoritmus. Ezek a korlátok minden online korlátos ládaszámú algoritmusra érvényesek. A hatékonysági korlát (R) jobb alsó indexében a láda mérete szerepel. Az alfejezetben levő három eredmény összefoglalja a következő

3.3. Tétel. *Bármely korlátos ládaszámú online algoritmus hatékonysági arányára érvényesek az alábbi korlátok:*

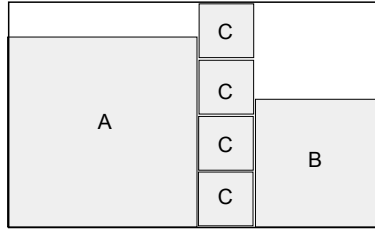
$$R_{4/3 < a < 3/2}^\infty > 2.05$$

$$R_{3/2 < a < 2}^\infty > 1.77$$

$$R_{2 < a < 3}^\infty > 1.47$$

Ha $4/3 < a < 3/2$, akkor minden offline ládában lesz egy $a/2 + \epsilon$, egy $1/2 + \epsilon$ egy $a/3 + \epsilon$ és öt darab $a/7 + \epsilon$ oldalú négyzet. Ezeket rendre A, B, C, D betűkkel jelölve az elrendezés leolvasható a

Ha $3/2 < a < 2$, akkor az offline ládákban van egy $a/2 + \epsilon$, és egy $a/3 + \epsilon$ oldalú négyzet, és egy oszlopban annyi $a/7 + \epsilon$ oldalú négyzet, amennyi elfér egymás felett. Ezt a



8. ábra. Offline pakolás az alsó korláthoz $3/2 < a \leq 2$ esetén

Ha $2 < a < 3$, akkor az offline láda tartalmazzon kettő darab $a/3 + \epsilon$ oldalú négyzetet, és egy $a/4 + \epsilon$ oldalú négyzetet. A kimaradó részt szintén apró téglalapokkal töltjük ki. Az $a/3 + \epsilon$ oldalú négyzetekből most kettő fér el egy ládában, az $a/4 + \epsilon$ oldalúakból 3. Az apró téglalapoknak kimaradó hely ebben az esetben $r = \frac{a-2 \cdot a^2/9-a^2/16}{a}$. Így n darab ilyen offline láda tartalmát minimum $2 \cdot n/2 + n/3 + n \cdot r$ ládába pakolja bármelyik online algoritmus. Ennek minimuma $a = 3$ -ban van, ahol $71/48 \cdot n > 1.47n$. Ezért $R_{2 < a < 3}^\infty > 1.47$.

3.3. Javítási lehetőségek

Az eddig leírt algoritmus arra volt optimalizálva, hogy a legrosszabb esetben teljesítsen jól. Ezért egy ládába általában csak egy típusba tartozó tárgyakat helyezett el, mivel így elkerülhető, hogy több egyforma nyitott ládánk legyen, amibe még beleférne egy tárgy, de olyan típusú tárgy éppen nem jön. Az átlagos esetben sokat javíthat az algoritmuson, ha egy-egy ládába többféle tárgy is kerülhet. Az algoritmusban van olyan típusú elem, aminek a pakolása során a legjobb esetben is marad kitöltetlen rész a ládában. Például az R3-beli tárgyak pakolásakor egy $1/3$ magas sáv a ládák tetején mindenképpen üresen marad. Az éppen nyitott ilyen típusú láda felső, üresen maradó részébe pakolhatnánk M1-beli elemeket, olyan módon, mintha az egy M1-láda fősávja lenne. Ennek a módosításnak a haszna az M1 és R3-beli elemek arányától, és ezeknek a tárgyaknak a sorrendjétől függ. Előfordulhat olyan eset is, hogy nem lesz kevesebb a felhasznált ládák száma. Erre példa, ha egyáltalán nincsenek M1-beli elemek, vagy ha a ládasorozatban az összes M1-beli tárgy megelőzi az R3-belieket. Ezért ez a javítás a hatékonysági arányra kiszámolt felső korláton nem feltétlenül javítana, de azt biztos nem rontaná.

Az egyszerre megnyitott ládák számát is lehet csökkenteni, de ez a hatékonysági arányt valószínűleg növelné, mindenesetre nehezebb vagy lehetetlen lenne ugyanezt a felső becslést megmutatni. Ha a csoportosítás során, a K1a, K1b, K2a és K2b csoportokat egy csoporttá egyesítjük, és ezeknek így csak egy ládát tartunk fent, akkor az egyszerre megnyitott ládák száma 3-mal csökken. Ekkor a hatékonysági arányról meg lehet mutatni, hogy $4/3 \leq a \leq 2$ esetén legfeljebb 2.75, egyszerre maximum 10 megnyitott ládát használva; és $2 \leq a$ esetén legfeljebb 2.542 egyszerre maximum 8 nyitott ládával. Erről a BSc szakdolgozatomban [?] írtam, és az ott leírt algoritmus fejlesztettem tovább, hogy jobb hatékonysági arányú legyen. A csoportosítás finomításával, és egyszerre több nyitott láda felhasználásával elképzelhető, hogy tovább csökkenthető a hatékonysági arány.

A dolgozatban bizonyított korlátok nem egy konkrét oldalarányú téglalapra vonatkoznak, hanem akármelyik téglalapra, aminek az oldalainak az aránya a meghatározott intervallumba esik. Így a felső becslést adó függvényeknek a supremumát, illetve az alsó becslést adóknak az infimumát vettem a megadott in-

tervallumokon. Így az intervallumokba eső egy-egy értékre általában jobb becsléseket lehetne mondani csak a bizonyításban használt felső illetve alsó korlátokat adó függvények segítségével.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek Király Tamásnak, hogy felhívta a figyelmemet a témára, és a TDK konferencián való részvétel lehetőségére. Köszönöm a sok konzultációt és e-mailekben nyújtott segítséget. A leghálásabb a biztatásért vagyok, ugyanis enélkül nem írtam volna meg a dolgozatot!

4. Hivatkozások

- [1] S. FUJITA, T. HADA. *Two-dimensional on-line bin packing problem with rotatable items*. Theoretical Computer Science 209 (2002) 939-952
- [2] L. EPSTEIN. *Two-dimensional online bin packing with rotation*. Theoretical Computer Science 411 (2010) 2899-2911
- [3] M. M. MEHDI, S. P. WILLEMS. *Online Algorithm Used to Improve US Steel Distributors Yield Performance*. 2012, beküldve: Manufacturing & Service Operations Management
- [4] L. EPSTEIN, R. VAN STEE. *Optimal online algorithms for multidimensional packing problems*. SIAM Journal on Computing 35 (2) (2005) 431-448
- [5] X. HAN, F.Y.L. CHIN, H.-F. TING, G. ZHANG, Y. ZHANG. *A new upper bound on 2D online bin packing*. CoRR, abs/0906.0409, 2009
- [6] L. EPSTEIN, R. VAN STEE. *Online square and cube packing*. Acta Informatica 41 (9) (2005) 595-606.
- [7] C. C. LEE, D. T. LEE. *A Simple On-line Bin-packing Algorithm*. Journal of the ACM 32 (3) (1985) 562-572
- [8] L. LOMOSCHITZ *Közelítő algoritmusok a 2-dimenziós online ládapakolási feladatra forgatás-sal*. BSc Szakdolgozat (2013) http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_alkmat/2013/lomoschitz_lilla_anna.pdf