

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM



TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
fizikus MSc

**$SO(3)$ -invariáns felületek stabilitásának vizsgálata
gömbszimmetrikus téridőkben**

Készítette:

**Csukás Károly Zoltán
(ITL0SE)**

Témavezető:

**Rácz István
az MTA doktora**

MTA Wigner FK Részecske- és Magfizikai Intézet



2014. május 2.

Tartalomjegyzék

1. Kivonat	5
2. Bevezetés	7
3. Alapfogalmak	8
3.1. A téridő matematikai modellje	8
3.2. Anyagmezők	8
3.3. Energia feltételek	9
3.4. A Gauss-féle fényszerű koordináták	9
3.5. Az $(n - 2)$ -dimenziós felületek	10
3.6. A csapdázott és nemcsapdázott felületek	12
4. Stabilitás	13
4.1. Felületek stabilitása	13
4.2. A stabilitás operátor tulajdonságai	16
4.3. Hidrodinamikai analógia	17
5. Gömbszimmetrikus dinamikai megoldás	18
5.1. Áttekintés	18
5.2. Az operátor és sajátértékei	18
5.3. Stabilitás	20
6. Összegzés	22
1. Függelék: a feladat és alkalmazott módszerek bemutatása	24
2. Függelék: a TDK dolgozat és szakdolgozat közötti különbségek	25

1. Kivonat

A feketelyukak tanulmányozására Penrose bevezette a csapdázott felület fogalmát. Sima marginálisan csapdázott felületek (MOTS) és sima téridő esetén értelmezhetjük a felszín variációját valamely a felületre merőleges fényszerű n^a vektor irányába. A variáció egy lineáris, általában nem önadjungált elliptikus differenciáloperátort eredményez, amit az L_n stabilitásoperátornak nevezünk. Megjegyezzük, hogy az eljárás általánosítható nem csapdázott felületekre is.

L_n principális sajátértéke segítségével osztályozhatjuk a felületeket csapdázottság szempontjából. Nemrégiben vetődött fel a sajátértékeknek közvetlenebb fizikai jelentősége. Luis Jaramillo javasolta a principális sajátérték értelmezését, mint nyomáskülönbség a horizont két oldala között és felvetette a többi sajátérték jelentőségének lehetőségét is. A dolgozatban részletesen ismertetjük a kérdéskörben felmerülő fontosabb fogalmakat és megoldjuk a sajátérték problémát az Einstein-egyenlet gömbszimmetrikus vákuum és dinamikai megoldásaira. Ebben az esetben az operátor önadjungált.

A szakdolgozatomban vizsgálom a gömbszimmetrikus megoldást magasabb dimenziókon és folytatom a vizsgálatot először a lassan forgó, majd Kerr- és Kerr-Newmann téridőkre. Forgásszimmetrikus esetben a stabilitás operátor már nem lesz önadjungált.

2. Bevezetés

Alapvetően két megközelítési módja van a feketelyukak jellemzésének. Az első a kauzális szerkezetre összpontosít és azt mondja, hogy egy esemény a feketelyuk tartományban van, ha a belőle kiinduló fényjelek nem érhetik el a jövő fényszerű végtelent. A feketelyuk tartomány határa az eseményhorizont. Tehát a feketelyuk a jövő fényszerű végtelen kauzális múltjának a komplementere. Ez egy globális fogalom. Ha tudni akarjuk, hol az eseményhorizont, az egész téridőt ismernünk kell.

A második mód ezzel szemben egy teljesen lokális jellemzés. Azt mondjuk, hogy egy esemény a feketelyukban van, ha csapdázott felületen van. Ezeken a felületeken olyan erős a gravitáció, hogy a felületről kiinduló fénysugarak nem távolodnak el a felülettől, a gravitáció visszatartja azokat. Ez a megközelítés inspirálta a látszólagos horizont fogalmát. Ha adott egy Cauchy-felület, a csapdázott régiót a Cauchy-felületen található csapdázott felületek uniójaként definiálhatjuk. A látszólagos horizont ennek a csapdázott régiónak a határa.

Definíció szerint a látszólagos horizont határt képez a csapdázott és nem csapdázott felületek között. Praktikusan ezért inkább a marginálisan csapdázott felületeket (MOTS) szokás keresni és ezek közül megállapítani, hogy melyik tartozik a látszólagos horizonthoz.

A MOTS-ok topológiai vizsgálatára hozták létre a stabilitás és a stabilitásoperátor fogalmait. Azt találták, hogy a MOTS időbeli „terjedését” is jellemzi a felület stabilitása. A stabilitásoperátor erejét mutatja, hogy a stabilitási feltétel teljesülését feltételezve sikerült Hawking topológiai tételének egy általánosított verzióját egyszerűen bizonyítani [6] és később a stabilitás nemcsapdázott felületekre történő általánosításával alkalmazni a tételt nem csapdázott felületekre [7].

A felület stabilitását meghatározhatjuk a stabilitásoperátor principális sajátértékének ismeretében. A közelmúltban merült fel az operátornak nyomásoperátorként való értelmezése. Ebben az esetben az operátornak nem csupán a principális, de minden sajátértéke fizikai jelentőséggel bír. A dolgozatban megfordítjuk a fenti gondolatmenetet. Ismert topológiájú felületek stabilitásoperátorának sajátértékeit határozzuk meg és az eredmény fizikai következményeit is megpróbáljuk felderíteni.

A dolgozat felépítése a következő: A 3. fejezetben részletekbe menően ismertetjük a stabilitásoperátor felírásához szükséges geometriai ismereteket és az anyagmezők leírásának módját. A 4. fejezetben körüljárjuk a stabilitás feltételét és bevezetjük a stabilitásoperátort. Ezekben a fejezetekben teljesen általános tárgyalást követünk és nem rögzítjük a dimenziók számát, de még a geometria

és energia közti kapcsolatot sem használjuk ki. Szintén a 4. fejezetben ismeretjük a lineáris elliptikus operátorok néhány tulajdonságát és rövid áttekintést adunk a Jaramillo által felvetett hidrodinamikai analógiáról [5]. A 5. fejezetben mutatom be az általam végzett munkát: alkalmazzuk ezeket az ismeretek és megoldjuk a sajátérték problémát 4-dimenziós gömbszimmetrikus esetben anyagmező jelenlétében. A geometria és anyag közti kapcsolatot kozmológiai állandóval felírt Einstein-egyenlettel határozzuk meg. A kapott sajátértékeket vizsgáljuk a kozmológiai állandó különböző értékeinél. A 6. fejezetben áttekintjük az eredményt és a továbblépés lehetőségeit taglaljuk.

3. Alapfogalmak

3.1. A téridő matematikai modellje

Téridőn egy olyan (M, g_{ab}) párt értünk, ahol M összefüggő, n -dimenziós, Hausdorff, parakompakt, irányítható, C^∞ -osztályú differenciálható sokaság; g_{ab} C^∞ -osztályú $(-, +, +, \dots)$ Lorentz-szignatúrájú metrika M -en.

Tekintsük az $(n-2)$ -dimenziós, sima, térszerű, kompakt $\mathcal{S}$ sokaságot, amelynek nincs határa M -ben!

A számítások egyszerűsítése végett $c = 1$ és $G = 1$ rendszerben számolunk.

3.2. Anyagmezők

Az anyagmezőket véges számú $F^{(i)}_{a_1 a_2 \dots a_n}$ tenzormezővel ábrázoljuk, ahol i névindex. Az anyagmezőknek lehetnek indexeik belső- és mértékszabadságból fakadóan is. Ezeket az indexeket most nem fogjuk kiírni. Mivel g^{ab} az egész sokaságon értelmezett, az anyagmezők indexeit tetszőlegesen felhúzzhatjuk. A mozgásegyenleteket a

$$S = \int_M \mathcal{L} \epsilon \quad (3.1)$$

hatás funkcionál szélsőérték feltételéből kaphatjuk meg, ahol $\mathcal{L}$ felírható $\mathcal{L}_G$ és $\mathcal{L}_A$ összegeként úgy, hogy $\mathcal{L}_G$ csak a geometriától függ. ϵ a g_{ab} -vel előállított térfogatelem. Az anyagmezők mozgásegyenleteiről feltesszük, hogy

$$\nabla^a \nabla_a F^{(i)} = H(F^{(j)}, \nabla_b F^{(j)}, g_{bc}) \quad (3.2)$$

kvázi-lineáris, diagonális, másodrendű hiperbolikus differenciálegyenletek, H sima függvénye a jelölt argumentumainak. Az Einstein-elmélet keretein belül az anyagmezők és a geometria közötti kapcsolatot a $G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}$ egyenlet írja le, ahol G_{ab} az Einstein tenzor, Λ a kozmológiai állandó, T_{ab} az

energia-impulzus tenzor.

Az anyagmezők energia-impulzus tenzorát a (3.1) hatás anyagra vonatkozó részének a variációjaként kapjuk meg

$$T_{ab} = -\frac{1}{8\pi} \frac{\delta S_A}{\delta g^{ab}} \quad (3.3)$$

módon.

3.3. Energia feltételek

Az energia-impulzus tenzor konkrét alakját felírni reménytelen vállalkozás lenne még akkor is, ha ismernénk, hogy milyen anyagok alkotják az univerzumot és milyen mozgásegyenleteknek tesznek eleget. Habár az egzakt tenzort nem tudjuk felírni, léteznek olyan feltételek, amiknek a teljesülését okkal feltételezhetjük.

Gyenge energia feltétel $T_{ab}V^aV^b \geq 0$ teljesül az anyagmezőkre, ha V^a időszerű, vagy fényyszerű. Ez azt jelenti, hogy a V^a érintőjű világvonalon haladó megfigyelő nem érzékel negatív energiasűrűséget.

Domináns energia feltétel $-T_{ab}V^aV^b$ nem térszerű, ha V^a jövő irányított időszerű, vagy fényyszerű és $T_{ab}V^aV^b \geq 0$. Ez az előbbi feltételhez hozzá veszi, hogy az energiaáram nem térszerű.

Erős energia feltétel $T_{ab}V^aV^b \geq -V^aV_aT_{bc}g^{bc}/2$, ha V^a időszerű. Ez egy szigorúbb feltétel, de még okkal feltételezhető.

A domináns feltétel erősebb, mint a gyenge, de a hierarchiát nem ilyen kapcsolat adja. A gyenge feltétel rója ki a legkevesebb megszorítást az anyagmezőkkel kapcsolatban, azután a domináns majd az erős feltétel következik.

3.4. A Gauss-féle fényyszerű koordináták

A közetkezőkben a Gauss-féle fényyszerű koordinátákat vezetjük be. Tekintsünk két sima, jövő irányú fényyszerű vektormezőt, k^a -t és l^a -t, $\mathcal{S}$ -en! Ez a két vektormező teljesítse a $k^al_a = -1$ normálási feltételt és legyen merőleges $\mathcal{S}$ -re! Ekkor a két vektormező egy

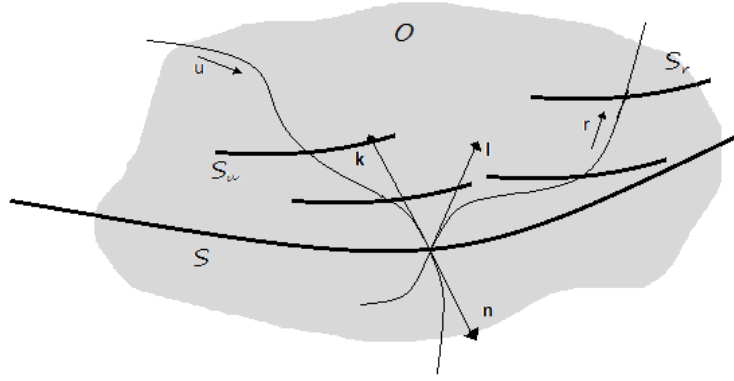
$$k^a \rightarrow e^v k^a, \quad l^a \rightarrow e^{-v} l^a \quad (3.4)$$

átskálázás erejéig meghatározott, ahol v sima függvény $\mathcal{S}$ -en. Tekintsük a k^a és l^a , mint érintők által meghatározott fényyszerű geodetikusokat! Ezek a geodetikusok sima hiperfelületeket határoznak meg $\mathcal{S}$ környezetében. Erre az $\mathcal{O}$ környezetre a geodetikusok affin-paraméterezésével kiterjeszthetők a vektormezők.

Képezzük a múlt irányú $n^a = -k^a$ vektormezőt! Az n^a -ból képezett geodetikusok paramétere legyen u , az l^a -ból képzetteké r ! A paraméterek szintfelületei egyúttal fólíazzák is a környezetet a $\mathcal{S}$ -el homológ $\mathcal{S}_u$ és $\mathcal{S}_r$ felületekkel. A paraméterek és a vektormezők közötti összefüggést $n^a = (\partial/\partial u)^a$ és $l^a = (\partial/\partial r)^a$ adják és a két vektormező kommutál. A koordinátáink: u és r , valamint az $\mathcal{S}$ felületen értelmezett koordináták. Ezt a koncepciót igyekszik szemléltetni a 1. ábra. Belátható [4], hogy a g_{ab} metrika ezekkel a koordinátákkal kifejezhető

$$g_{ab} = 2(\nabla_{(a}r - r\alpha\nabla_{(a}u - r\beta_{(a)}\nabla_{b)}u) + \gamma_{ab} \quad (3.5)$$

alakban, ahol α , β_a és γ_{ab} sima függvények $\mathcal{O}$ -n.



1. ábra. Az $\mathcal{S}$ -en értelmezett vektormezők kiterjesztése a környezetére.

3.5. Az $(n - 2)$ -dimenziós felületek

Az $(n - 2)$ -dimenziós térszerű felületek figyelembe vételével a téridő metrikája mindig felbontható

$$g_{ab} = g_{ab} + h_{ab} \quad (3.6)$$

alakra, ahol g_{ab} a térszerű felületen indukált metrika, vagy első fundamentális forma, h_{ab} az erre merőleges rész. A g_{ab} metrikát egy természetesen adódó visszahúzás segítségével megfeleltethetjük a q_{ab} metrikának, ami az $\mathcal{S}$ felület metrikája. Mivel $\mathcal{S}$ térszerű, q_{ab} Riemann szignatúrájú. A Lorentz-szignatúrájú h_{ab} előállítható a 3.4-ben bemutatott fénytérszerű vektorokkal:

$$h_{ab} = l_a n_b + l_b n_a. \quad (3.7)$$

A (3.6) és (3.7) segítségével az $\mathcal{S}$ -re vetítő operátor felírható.

$$\Pi^b_a = g^b_a = \delta^b_a - l_a n^b - l^b n_a \quad (3.8)$$

Mind a g^b_a , mind a h^b_a kielégíti a projektorokra vonatkozó

$$g^e_a g^b_e = g^b_a \quad h^e_a h^b_e = h^b_a \quad g^e_a h^b_e = 0 \quad (3.9)$$

összefüggéseket.

Az M -en értelmezett kovariáns deriválás segítségével előállíthatjuk a második fundamentális tenzort, K^c_{ab} -t.

$$K^c_{ab} = g^e_a g^f_b \nabla_e g^c_f \quad (3.10)$$

Ez a tenzor felbontható egy spurtalan C^c_{ab} és egy spurt tartalmazó K^c tagra

$$K^c_{ab} = \frac{1}{n-2} g_{ab} K^c + C^c_{ab} \quad (3.11)$$

módon, ahol $K^c = g^{ab} K^c_{ab}$ a külső görbületi vektor. Kontrahálva a fényszerű bázisvektorainkkal megkapjuk az adott vektor irányába vett vetületet.

$$K^{(l)}_{ab} = -K^c_{ab} l_c = g^e_a g^f_b \nabla_e l_f, \quad K^{(n)}_{ab} = -K^c_{ab} n_c = g^e_a g^f_b \nabla_e n_f \quad (3.12)$$

Ezeknek a levetített mennyiségeknek tekinthetjük a szimmetrikus és antiszimmetrikus részét:

$$K^{(X)}_{ab} = K^{(X)}_{(ab)} + K^{(X)}_{[ab]} = \theta^{(X)}_{ab} + \omega^{(X)}_{ab}, \quad (3.13)$$

ahol $\theta^{(X)}_{ab}$ a szimmetrikus és $\omega^{(X)}_{ab}$ az antiszimmetrikus rész¹. Az antiszimmetrikus rész spurtalan:

$$g^{ab} \omega^{(X)}_{ab} = \frac{1}{2} [g^{eb} g^f_b - g^{ea} g^f_a] \nabla_e X_f = 0, \quad (3.14)$$

így a levetített fundamentális tenzor spurja megegyezik a szimmetrikus részének a spurjával:

$$g^{ab} K^{(X)}_{ab} = g^{ab} K^{(X)}_{(ab)} = g^{ab} \theta^{(X)}_{ab} = \theta^{(X)}. \quad (3.15)$$

A görbület vektorral kifejezve

$$\theta^{(l)} = -K^c l_c = g^{ab} \nabla_a l_b, \quad \theta^{(n)} = -K^c n_c = g^{ab} \nabla_a n_b. \quad (3.16)$$

A (3.16) kifejezéseket nevezik az l és n irányú expanzióknak. A spurtalan komponensre

$$\begin{aligned} \sigma^{(l)}_{ab} &= -C^c_{ab} l_c = \left(g^e_a g^f_b - \frac{1}{n-2} g_{ab} g^{ef} \right) \nabla_e l_f, \\ \sigma^{(n)}_{ab} &= -C^c_{ab} n_c = \left(g^e_a g^f_b - \frac{1}{n-2} g_{ab} g^{ef} \right) \nabla_e n_f \end{aligned} \quad (3.17)$$

¹Mivel a két fényszerű vektormezőre sokszor teljesen analóg a számítás, ezért használom a X^a jelölést, ami azt jelenti, hogy X^a helyébe l^a -t, vagy n^a -t írva kapjuk meg a vonatkozó egyenleteket.

amik az l és n irányú nyírás tenzorok.

A $\mathcal{S}$ belső geometriájának tanulmányozásához elő kell állítani a felületen értelmezett kovariáns deriváló operátort. Ezt két úton is meg lehet tenni. Fent utaltunk rá, hogy a g_{ab} -t visszahúzzhatjuk az $\mathcal{S}$ felületre. Ez után a már szokott módon előállítható a felületen a D_a konnexió és R_S görbület is. Ezzel ekvivalens, ha a kovariáns deriváló operátort

$$D_c T^b{}_a = g^d{}_a g^b{}_e g^f{}_c \nabla_f T^e{}_d \quad (3.18)$$

módon definiáljuk és ezután alkalmazzuk rá a megfelelő beágyazást és visszahúzást. A témában bővebb összefoglalót tartalmaz Cao [2].

3.6. A csapdázott és nemcsapdázott felületek

Az előző fejezetben bevezetett expansiók

$$\mathcal{L}_l \epsilon_g = \theta^{(l)} \epsilon_g, \quad \mathcal{L}_k \epsilon_g = \theta^{(k)} \epsilon_g \quad (3.19)$$

módon is előállíthatóak, ahol $\mathcal{L}_l$ az l^a vektormező szerinti Lie-deriváltat jelöli, az ϵ_g az $\mathcal{S}$ -en indukált g_{ab} metrikához kapcsolódó térfogatelem.

Az $(n - 2)$ -dimenziós $\mathcal{S}$ felület jövő csapdázott, ha mind $\theta^{(l)}$, mind $\theta^{(k)}$ expansiók nem pozitívak $\mathcal{S}$ -en. Amikor a kettő közül akármelyik, mondjuk $\theta^{(l)}$ azonosan nulla a felületen, $\mathcal{S}$ -t jövő marginálisan csapdázott felületnek nevezzük. Hasonlóan definiálhatók a múlt csapdázott felületek. A kifelé és befelé mutató

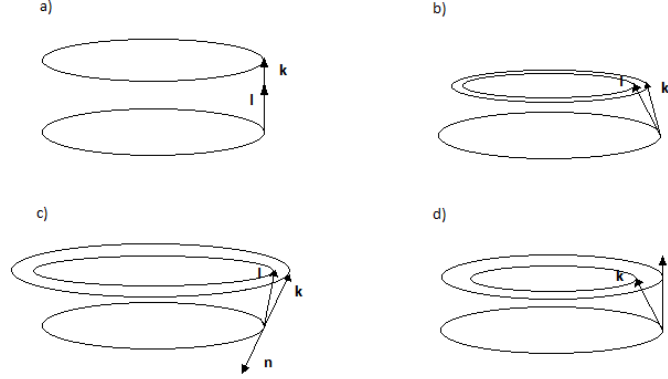
	$\theta^{(l)}$	$\theta^{(k)}$
jövő csapdázott	≤ 0	≤ 0
jövő marginálisan csapdázott	$= 0$	≤ 0
minimális felület	$= 0$	$= 0$

1. táblázat. Csapdázott felületek definíciói

vektorok fogalmát is jól lehet írni ilyen módon. Azt mondjuk, hogy l^a és k^a kifelé, illetve befelé mutat a marginálisan csapdázott felületen, ha $\theta^{(l)} = 0$ és $\theta^{(k)} \leq 0$. Belátható, hogy ez megfelel az intuíciónknak, ha belegondolunk, hogy k^a befelé mutató, ha a $A = \int_{\mathcal{S}} \epsilon_g$ felületet k^a mentén variálva nem növekszik.

$$\delta_k A = - \left. \frac{\partial A}{\partial u} \right|_{u=0} = \int_{\mathcal{S}} \mathcal{L}_k \epsilon_g = \int_{\mathcal{S}} \theta^{(k)} \epsilon_g \leq 0 \quad (3.20)$$

Ennek megfelelően $\mathcal{S}$ jövő kifelé marginálisan csapdázott (MOTS), ha $\theta^{(l)} = 0$ és $\theta^{(k)} \leq 0$ $\mathcal{S}$ -en. Ezt illusztrálja a 2. ábra.



2. ábra. A felületek csapdázottságának illusztrációja. Egy dimenzió elnyomásával a körök egy-egy gömbfelületnek felelnek meg és a felszínükkel arányos a kör kerülete. Az a) minimális felület, b) csapdázott felület, c) nem csapdázott felület, d) marginálisan csapdázott felület

A csapdázottsággal egy olyan fogalmat vezettünk be, ami alkalmasnak bizonyul a feketelyukakról alkotott naiv elképzeléseink matematikai megfogalmazására: csapdázott felületről kiinduló fényhullámok nem érik a nem csapdázott felületen elhelyezkedő megfigyelőt.

4. Stabilitás

4.1. Felületek stabilitása

Ha az $\mathcal{S}$ l^a -ra tekintettel MOTS, szigorúan stabilnak nevezzük, ha a (3.4) transzformációkra $\mathcal{L}_{k'}\theta^{(l')} \leq 0$ módon transzformálódik és valahol nem 0 $\mathcal{S}$ -en [6].

Nem csapdázott felületen más stabilitás feltételt használunk: az $\mathcal{S}$ felület szigorúan stabil, ha a (3.4) alatt $(\mathcal{L}_n\theta^{(l')} + \theta^{(n')}\theta^{(l')}) \geq 0$ és valahol $\mathcal{S}$ -en eltűnik [7]. Ez a feltétel interpretálható az által, hogy tekintjük a felület második variációját:

$$\delta_n\delta_l A = \int_{\mathcal{S}} \mathcal{L}_n \mathcal{L}_l \epsilon_g = \int_{\mathcal{S}} [\mathcal{L}_n \theta^{(l)} \epsilon_g] = \int_{\mathcal{S}} [\mathcal{L}_n \theta^{(l)} + \theta^{(n)} \theta^{(l)}] \epsilon_g. \quad (4.1)$$

Láthatjuk, hogy ahogy a csapdázott felületek esetén, úgy nem csapdázott felületek esetében is a felszín második variációjának előjelére vonatkozó megszorításként értelmezhetjük a stabilitási feltételt.

A továbbiakhoz kifejezzük $\mathcal{L}_k \theta^{(l)}$ -t a metrika (3.5) alakban felírt változói segítségével! A g_{ab} a (3.5) és (3.8) segítségével

$$g_{ab} = r^2 \beta^c \beta_c l_a l_b - 2r \beta_{(a} l_{b)} + \gamma_{ab} \quad (4.2)$$

alakban írható. Felhasználva, hogy $\epsilon_g = \sqrt{g}e$, ahol e a Levi-Civita szimbólum,

$$\mathcal{L}_X \epsilon_g = e \mathcal{L}_X \sqrt{g} = \frac{\mathcal{L}_X \sqrt{g}}{\sqrt{g}} \epsilon_g = \theta^{(X)} \epsilon_g. \quad (4.3)$$

Tehát $\theta^{(X)} = \frac{\mathcal{L}_X \sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_X g}{g} = \frac{1}{2} g^{ab} \mathcal{L}_X g_{ab}$. Ezt szorítsuk meg az $\mathcal{S}_u$ felületekre, ahol $r = 0$! Ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n g^{ab}|_{\mathcal{S}_u} &= \left[\mathcal{L}_n (r^2 \beta^c \beta_c l^a l^b) - \mathcal{L}_n (2r \beta^{(a} l^{b)}) + \mathcal{L}_n \gamma^{ab} \right]_{\mathcal{S}_u} = \\ &= \left[r^2 \beta^c \beta_c \mathcal{L}_n (l^a l^b) - 2r \mathcal{L}_n (\beta^{(a} l^{b)}) + \mathcal{L}_n \gamma^{ab} \right]_{\mathcal{S}_u} = \mathcal{L}_n \gamma^{ab}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

ahol kihasználtuk, hogy $\mathcal{L}_n (r^2 \beta^c \beta_c) = 0$ és $\mathcal{L}_n (2r) = 0$. Hasonlóan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l g^{ab}|_{\mathcal{S}_u} &= \left[\mathcal{L}_l (r^2 \beta^c \beta_c l^a l^b) - \mathcal{L}_l (2r \beta^{(a} l^{b)}) + \mathcal{L}_l \gamma^{ab} \right] = \\ &= \left[l^a l^b \mathcal{L}_l (r^2 \beta_c \beta^c) + r^2 \beta^c \beta_c \mathcal{L}_l (l^a l^b) - \beta^{(a} l^{b)} \mathcal{L}_l (2r) - 2r \mathcal{L}_l (\beta^{(a} l^{b)}) + \mathcal{L}_l \gamma^{ab} \right] = \\ &= -2\beta^{(a} l^{b)} + \mathcal{L}_l \gamma^{ab}, \end{aligned}$$

ugyanis $\mathcal{L}_l (r^2 \beta_c \beta^c) = 2r \beta_c \beta^c$ és $\mathcal{L}_l (2r) = 2$. Emellett azt is tudjuk, hogy $g_{ab}|_{\mathcal{S}_u} = \gamma_{ab}$. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \theta^{(n)} &= \frac{1}{2} g^{ab} \mathcal{L}_n g_{ab} = -\frac{1}{2} g_{ab} \mathcal{L}_n g^{ab} = \frac{1}{2} \gamma^{ab} \mathcal{L}_n \gamma_{ab}, \\ \theta^{(l)} &= -\frac{1}{2} g_{ab} \mathcal{L}_l g^{ab} = \beta^{(a} l^{b)} \gamma_{ab} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \mathcal{L}_l \gamma^{ab} = \frac{1}{2} \gamma^{ab} \mathcal{L}_l \gamma_{ab}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Az $\mathcal{S}_u$ felületeken

$$\begin{aligned} G_{ab} n^a l^b &= -\frac{1}{2} \left[-\gamma^{ab} (\mathcal{L}_l \mathcal{L}_n \gamma_{ab}) - \alpha \gamma^{ab} (\mathcal{L}_l \gamma_{ab}) + R_q + D^a \beta_a - \frac{1}{2} \beta^a \beta_a \right. \\ &\quad \left. + \gamma^{ab} \gamma^{cd} (\mathcal{L}_l \gamma_{ac}) (\mathcal{L}_n \gamma_{bd}) - \frac{1}{2} \gamma^{ab} (\mathcal{L}_l \gamma_{ab}) \gamma^{cd} (\mathcal{L}_n \gamma_{cd}) \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

ahogyan az kiderül [6]-ból. Itt a D^a szimbólum a (3.18)-val definiált, a felületen értelmezett kovariáns deriváló operátor. Felhasználva n^a és l^a kommutativitását és merőlegességüket γ_{ab} -re

$$-\gamma^{ab} \mathcal{L}_l \mathcal{L}_n \gamma_{ab} = -\mathcal{L}_l (\gamma^{ab} \mathcal{L}_n \gamma_{ab}) - \gamma^{ab} \gamma^{cd} (\mathcal{L}_l \gamma_{ac}) (\mathcal{L}_n \gamma_{bd}). \quad (4.7)$$

A (4.6) és (4.7) egyenletekből

$$G_{ab}n^al^b = -\frac{1}{2} \left[-\mathcal{L}_l(\gamma^{ab}\mathcal{L}_n\gamma_{ab}) - \alpha\gamma^{ab}\mathcal{L}_l\gamma_{ab} + R_q + D^a\beta_a - \frac{1}{2}\beta^a\beta_a - \frac{1}{2}\gamma^{ab}(\mathcal{L}_l\gamma_{ab})\gamma^{cd}(\mathcal{L}_n\gamma_{cd}) \right]. \quad (4.8)$$

A (4.5) és (4.8) egyenletekből

$$G_{ab}n^al^b = -\frac{1}{2} \left[-2\mathcal{L}_l\theta^{(n)} - 2\alpha\theta^{(l)} + R_q + D^a\beta_a - \frac{1}{2}\beta^a\beta_a - 2\theta^{(n)}\theta^{(l)} \right]. \quad (4.9)$$

Az l^a és n^a kommutálása révén

$$\epsilon_g\mathcal{L}_l\theta^{(n)} = \mathcal{L}_l\mathcal{L}_n\epsilon_g - \theta^{(n)}\theta^{(l)}\epsilon_g = \mathcal{L}_n(\theta^{(l)}\epsilon_g) - \theta^{(l)}\mathcal{L}_n\epsilon_g = \epsilon_g\mathcal{L}_n\theta^{(l)}, \quad (4.10)$$

tehát

$$\mathcal{L}_l\theta^{(n)} = \mathcal{L}_n\theta^{(l)}. \quad (4.11)$$

Ezt is figyelembe véve, azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}_n\theta^{(l)} = -\alpha\theta^{(l)} - \theta^{(l)}\theta^{(n)} + \frac{1}{2} \left[R_q + 2G_{ab}n^al^b + D_a\beta^a - \frac{1}{2}\beta^a\beta_a \right]. \quad (4.12)$$

Ez nem a végső alak, ugyanis az α metrikus függvény eltűnik az $\mathcal{S}_u$ -kon [7].

$$\mathcal{L}_n\theta^{(l)} = -\theta^{(l)}\theta^{(n)} + \frac{1}{2} \left[R_q + 2G_{ab}n^al^b + D_a\beta^a - \frac{1}{2}\beta^a\beta_a \right]. \quad (4.13)$$

Az expanzió transzformációját megadja az

$$\theta^{(fX)} = \frac{1}{2}g^{ab}\mathcal{L}_{fX}g_{ab} = \frac{f}{2}g^{ab}\mathcal{L}_Xg_{ab} = f\theta^{(X)} \quad (4.14)$$

egyenlet. Tehát $\theta^{(fn)}\theta^{(f^{-1}l)} = \theta^{(n)}\theta^{(l)}$. A (4.13) alakon már láthatjuk, hogy egy (3.4) transzformáció hogyan hat a $\mathcal{L}_n\theta^{(l)}|_{\mathcal{S}_u}$ mennyiségre. A β^a kifejezhető a (4.2)-ből: $\beta_a = -g_a^cn_b\nabla_cl^b$. Tehát (3.4) hatására $\beta_a \rightarrow \beta_a + D_av$, ahol D_a a (3.18)-val definiált $\mathcal{S}$ -en értelmezett kovariáns deriváló operátor. Vezessük be a $\Psi = e^{-v/2}$ és $s_a = \frac{1}{2}\beta_a$ jelöléseket! Ezekkel

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Psi n}\theta^{(l)}|_{\mathcal{S}_u} \Psi &= -D^aD_a\Psi + 2s^aD_a\Psi + \frac{\Psi}{2} \left[R_q + \right. \\ &\quad \left. + 2G_{ab}n^al^b + 2D_as^a - 2s^as_a - 2\theta^{(l)}|_{\mathcal{S}_u} \theta^{(n)}|_{\mathcal{S}_u} \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

MOTS esetén $\theta^{(l)}|_{\mathcal{S}_u} = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Psi n}\theta^{(l)}\Psi &= L_n\Psi = -D^aD_a\Psi + 2s^aD_a\Psi + \\ &\quad + \frac{\Psi}{2} [R_q + 2G_{ab}n^al^b + 2D_as^a - 2s^as_a]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ez a MOTS-ok stabilitásának operátora.

Figyelembe véve, hogy a stabilitás feltétele nem csapdázott felületen

$$(\mathcal{L}_{n'}\theta^{(l')} + \theta^{(n')}\theta^{(l')}) \geq 0, \quad (4.17)$$

azt találjuk, hogy ez a feltétel mind a csapdázott, mind a nem csapdázott felületek esetén

$$-D^a D_a \Psi + 2s^a D_a \Psi + \frac{\Psi}{2} [R_q + 2G_{ab}n^a l^b + 2D_a s^a - 2s^a s_a] \geq 0 \quad (4.18)$$

feltétel teljesülését jelenti.

A stabil csapdázott felületek teljesítik azt az elvárásunkat, hogy az bármely megfigyelő számára csapdázott legyen. A stabilitás tulajdonságát leírhatjuk a

$$L_n = -D^a D_a \Psi + 2s^a D_a \Psi + \frac{\Psi}{2} [R_q + 2G_{ab}n^a l^b + 2D_a s^a - 2s^a s_a]$$

operátorral.

4.2. A stabilitás operátor tulajdonságai

Tekintsük a

$$L = -D^a D_a + 2t^a D_a + c \quad (4.19)$$

alakú lineáris elliptikus operátort. Ez az operátor nem önadjungált, kivéve, ha $t^a D_a = \hat{0}$. Az adjungáltja $L^\dagger = -D^a D_a - 2t^a D_a + c$. Mivel nem önadjungált az operátor, ezért a sajátértékei nem valósak. Azonban ismert [1], hogy

- létezik λ principális sajátérték, ami valós és a legkisebb valós résszel rendelkező sajátérték, valamint a hozzá tartozó sajátfüggvény egy konstans szorzó erejéig egyértelmű és választható mindenhol pozitívnak
- az adjungált operátor principális sajátértéke megegyezik az operátoréval.

Legyen, tehát L egy (4.19) alakú operátor, λ az $\hat{0}$ principális sajátértéke és Φ a hozzá tartozó mindenhol pozitív sajátfüggvény! Tekintsük a $L\Psi = f$ egyenletet, ahol $f \geq 0$! Ekkor $\Psi = \chi\Phi$. Vezessük be a $\Gamma[\Phi]\chi = \Phi L\Psi = \Phi f$ operátort! Mivel $\Phi f \geq 0$, alkalmazhatjuk az erős maximum elvet, ami kimondja, hogy ebben az esetben $\chi = \text{const.}$. $\Gamma\chi = \Phi L\Psi = c\lambda\Phi^2 = \Phi f$ vagyis $f = c\lambda\Phi$. Ebből következik, hogy

- ha $\lambda = 0$, akkor $f \equiv 0$
- ha $\lambda > 0$ és $f \neq 0$, akkor $\Psi > 0$

- ha $\lambda > 0$ és $f \equiv 0$, akkor $\Psi = 0$

Mit jelent ez a stabilitás operátorra nézve? A stabilitás feltétele, hogy $L_n \Psi = f \geq 0$, tehát $\Psi = \text{const.} \cdot \Phi = \chi \Phi$. Ha $\lambda = 0$, akkor az operátor a null-operátor és a felület szigorúan stabil. Ha $\lambda \geq 0$ és f nem azonosan nulla, akkor Ψ pozitív. Ha $\lambda \geq 0$ és f azonosan nulla (tehát L_n ismét null-operátor), akkor Ψ is azonosan nulla. Ekkor a felület ismét szigorúan stabil. Azt találtuk, hogy felület stabilitását egyértelműen meghatározza az operátor sajátértéke. A Ψ függvények az átskálázással kapcsolatosak, ugyanis $(\mathcal{L}_n \theta^{(l)})\Psi = \Psi n^e \nabla_e \theta^{(l)} = \mathcal{L}_{\Psi n} \theta^{(l)}$.

4.3. Hidrodinamikai analógia

José Luis Jaramillo cikkében [5] található egy érvelés², miszerint stacionáris és tengelyszimmetrikus horizontokra létezik fóliázás, amin a principális sajátérték

$$\lambda = -\kappa(l)\theta^{(k)}, \quad (4.20)$$

ahol $\kappa^{(l)} = -k^a l^b \nabla_b l_a$ a felületi gravitáció. A feketelyuk termodinamika első törvénye alapján $\kappa^{(l)}$ azonosítható, mint $\gamma_{BH} = \kappa^{(l)}/(8\pi)$ felületi feszültség. A $-\theta^{(k)}$ expanszió a $H = -\theta^{(k)} + \theta^{(l)}/2$ átlagos görbülettel egyezik $\theta^{(l)} = 0$ esetben. A H speciális esetben $H = 1/R_1 + 1/R_2$. Ezek után belátható, hogy a principális sajátértéket nyomáskülönbségként azonosítva megkapjuk a hidrodinamikából ismert

$$\Delta p = p_{in} - p_{out} = \gamma(1/R_1 + 1/R_2) \quad (4.21)$$

Young-Laplace egyenletet. Ezt alátámasztja az is, hogy a sajátérték azonos dimenziójú, mint a kozmológiai állandó, tehát nyomás dimenziójú. Tekintsük ugyanis a L_n operátort, amiben az Einstein-tenzort a kozmológiai állandó nélkül felírt Einstein-egyenlet alapján az energia-impulzus tenzor konstansszorosával helyettesítjük! Ennek a principális sajátértéke legyen λ ! Most tekintsük a L_n^* operátort, ahol az Einstein-tenzort a kozmológiai állandóval felírt Einstein-egyenlet felhasználásával helyettesítjük! Ez utóbbi principális sajátértéke L_n sajátértékével kifejezhető:

$$\lambda^* = \lambda - \Lambda. \quad (4.22)$$

Ha λ -t nyomásként azonosítjuk, akkor L_n nyomás operátorként való értelmezése is kézenfekvőnek tűnik. A nyomás operátor sajátértékeinek, azonban fizikai jelentősége van. A sajátértékek valós része a nyomással kapcsolatos információkat tartalmazhat, míg a képzetes részek, amik csak forgó esetben jelennek meg, a forgással kapcsolatos információkat. Ilyen módon fizikai szempontból is értékes lehet a L_n operátor spektrumának a vizsgálata.

²Lásd a [5] 4. tételt

5. Gömbszimmetrikus dinamikai megoldás

5.1. Áttekintés

A négy dimenziós gömbszimmetrikus téridők metrikája mindig felírható

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -\alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

alakban [3], ahol a koordinátáink $(\tau, \rho, \theta, \phi)$ és α és r sima függvényei τ -nak és ρ -nak, r a felülettel kompatibilis sugár változó. Az evolúciós vizsgálatok során a numerikus instabilitás csökkentésére vezették be segédváltozóként a Misner-Sharp tömeget:

$$M = \frac{r}{2} \left(\frac{\alpha + \left(\frac{\partial r}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial \rho} \right)^2}{\alpha} \right). \quad (5.2)$$

Az Einstein-tenzornak az alábbi nem nulla elemei vannak: G_{00} , G_{01} , G_{10} , G_{11} , G_{22} és G_{33} . Ebből látszik, hogy ρ irányban energia áramlás megengedett.

Ismert, hogy energia áramlási folyamatokat általában nem tudunk leírni, mert nincsenek meg a megfelelő kvázi-lokális mennyiségeink. Azonban gömbszimmetrikus esetben ezt megtehetjük a Kodama-vektormező segítségével.

$$K^a = \epsilon^{ba} \nabla_b r, \quad (5.3)$$

ahol ϵ^{ba} az $SO(3)$ pályákra merőleges 2-dimenziós felület térfogat eleme. K^a divergencia mentes és $G^{ab} \nabla_a K_b = 0$. Ebből következik, hogy $J^a = T^a_b K^b$ divergencia mentes. Ez a J^a vektormező úgy viselkedik, mint egy megmaradó energia áram.

5.2. Az operátor és sajátértékei

A vizsgált gömbszimmetrikus esetben a fényszerű bázisvektoraink

$$n^a = (1/(\sqrt{2\alpha}); 1/\sqrt{2\alpha}; 0; 0) \quad (5.4)$$

és

$$l^a = (-1/(\sqrt{2\alpha}); 1/\sqrt{2\alpha}; 0; 0). \quad (5.5)$$

Ezek a vektorok teljesítik a $n^a l_a = 1$ normálási feltételt. A $d\tau = d\rho = 0$ felületre vetítő mátrix elemei közül csak a Π^2_2 és Π^3_3 elemek nem nullák, ezek értéke 1.

Az $\mathcal{S}$ felületen indukált metrika

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Ebből a metrikából úgy csinálunk $\mathcal{S}$ -en értelmezett metrikát, hogy a jobb alsó negyedén kívül mindent elhagyunk. Ez a visszahúzásunk. Az így kapott metrika

$$q_{ab} = \begin{pmatrix} r^2 & \\ & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Ez konformis az egységgömb metrikájával. Ennél fogva a felület görbülete ezzel az r^2 konform faktorról $R_q = 2/r^2$ és a $-D^a D_a$ operátor is konformisan megegyezik az egységgömb Laplace-operátorával:

$$-D^a D_a = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (5.8)$$

Gömbszimmetrikus esetben a β^a metrikus függvény értéke 0. További nem nulla tag az Einstein-tenzorból fog származni, aminek a fényszerű bázisaink irányába vett vetülete fog megjelenni:

$$G_{ab} n^a l^b = \frac{-\alpha - \left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial \tau^2} + \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}\right)^2 + r \frac{\partial^2 r}{\partial \rho^2}}{\alpha r^2} \quad (5.9)$$

Az (5.9)-ben szereplő deriváltakat az anyagmezők mozgásegyenleteiből ismerhetjük. Fizikai szempontból szemléletesebb, ha az Einstein-egyenlet alapján az Einstein tenzort helyettesítjük az energia-impulzus tenzorral. A gömbszimmetriából kifolyólag tudjuk, hogy az energia-impulzus tenzor

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \rho_\epsilon & S_\rho & & \\ S_\rho & p_\rho & & \\ & & pr^2 & \\ & & & pr^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

módon írható fel, ahol ρ_ϵ az energia sűrűség, S_ρ az energia áramlás ρ irányban³, p_ρ a ρ irányú nyomás, p a nyomás ρ -ra merőleges irányokban. Az Einstein-tenzor helyébe

$$(T_{ab} - \Lambda g_{ab}) n^a l^b = -\frac{\rho_\epsilon}{2\alpha} - \Lambda + \frac{p_\rho}{2\alpha} \quad (5.11)$$

írható. A stabilitás-operátor

$$L_n \Psi = -D^a D_a \Psi + \frac{\Psi}{2} [R_q + 2(8\pi T_{ab} - \Lambda g_{ab}) n^a l^b]. \quad (5.12)$$

³A ρ irányú vetület úgy értelmezhető, mint a ρ koordináta által meghatározott geodetikus $(\partial/\partial \rho)^a$ érintőjére vett vetület.

Érdekességgként jegyezzük meg, hogy az expanziók szorzatát kifejezhetjük a Misner-Sharp tömeggel. Az (4.5) előállítás segítségével

$$\theta^{(X)} = -\frac{1}{2}g_{ab}\mathcal{L}_X g^{ab} = -\frac{1}{2}g_{ab}l^c\nabla_c g^{ab} \quad (5.13)$$

ugyanis $g_{ab}l^a = g_{ab}l^b = g_{ab}n^a = g_{ab}n^b = 0$. Tehát

$$\theta^{(l)} = -\frac{3\sqrt{2}}{r\sqrt{\alpha}}\left(-\frac{\partial r}{\partial\tau} + \frac{\partial r}{\partial\rho}\right) \quad \theta^{(n)} = -\frac{3\sqrt{2}}{r\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\partial r}{\partial\tau} + \frac{\partial r}{\partial\rho}\right). \quad (5.14)$$

A (5.2) segítségével

$$\theta^{(l)}\theta^{(n)} = \frac{18}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (5.15)$$

Ez alapján a MOTS $r = 2M$ -nél található.

A (5.12) operátor a fényszerű vektorok normálásának figyelembe vételével:

$$L_n\Psi = -D^a D_a\Psi + \frac{\Psi}{2}\left[\frac{2}{r^2} + 16\pi T_{ab}n^a l^b - 2\Lambda\right]. \quad (5.16)$$

Tudjuk, hogy a $\Delta = -r^2 D^a D_a$ Laplace-operátor sajátértékei $l(l+1)$, sajátfüggvényei az $Y^l_m(\theta, \phi)$ gömbfüggvények. A stabilitás-operátort $r = \text{const.}$ felületekre írjuk fel, ezért a gömbfüggvények annak is sajátfüggvényei. A sajátértékek:

$$\lambda = \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{r^2} + 16\pi T_{ab}n^a l^b - 2\Lambda\right]. \quad (5.17)$$

Különösen a principális sajátérték

$$\lambda_0 = \frac{1}{r^2} + 8\pi T_{ab}n^a l^b - \Lambda. \quad (5.18)$$

A sajátérték függ a felületet jellemző r koordinátától, a téridőt jellemző Λ kozmológiai állandótól és az anyagmezőktől.

5.3. Stabilitás

Schwarzschild esetben $\lambda_0 \geq 0$ feltéve, hogy $\Lambda \leq 1/(r^2)$. Azaz a de Sitter ($\Lambda > 0$) eset bizonyos tartományait leszámítva minden felület stabil gömbszimmetrikus vákuum megoldásban. A MOTS stabilitására nézve a feltétel $\Lambda \leq 1/(4M^2)$.

A dinamikai esetben

$$\lambda_0 = \frac{1}{r^2} - \frac{4\pi\rho_\epsilon}{\alpha} + \frac{4\pi p_\rho}{\alpha} - \Lambda. \quad (5.19)$$

Diagonalizáljuk az energia-impluzus tenzort és alkalmazzuk rá a gyenge energia feltételt! Az energia-impluzus tenzor sajátértékei:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\rho_\epsilon + p_\rho + \sqrt{(\rho_\epsilon - p_\rho)^2 + 4S_\rho}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{\rho_\epsilon + p_\rho - \sqrt{(\rho_\epsilon - p_\rho)^2 + 4S_\rho}}{2} \\ \lambda_{3,4} &= p.\end{aligned}\tag{5.20}$$

Ezek szerepelnek a diagonális helyeken. A gyenge energia feltétel ezekkel az értékekkel kifejezve

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= \rho_\epsilon + p_\rho \geq 0\end{aligned}\tag{5.21}$$

módon írható. Most a nem diagonális energia-impulzus tenzorra alkalmazzuk a gyenge energia feltételt a $(1, 0, 0, 0)$ időszerű vektorral! Ekkor

$$\rho_\epsilon \geq 0\tag{5.22}$$

Mit tudunk mondani az energia feltétel nélkül? Ha $\Lambda > 0$, a $\Lambda > 1/(r^2)$ tartományon $p_\rho > \rho_\epsilon$. Megjegyezzük, hogy ezen a tartományon a vákuum megoldás nem stabil. Ez azt jelenti, hogy ilyen téridőkben az instabil tartományban található feketelyuk nem minden megfigyelő számára „fekete”. Vannak megfigyelők, akik látják a szingularitást.

Ettől eltekintve csak a $\rho_\epsilon - p_\rho$ -ra tudunk felső korlátot adni:

$$\frac{1}{r^2} - \Lambda \geq \frac{4\pi}{\alpha}(\rho_\epsilon - p_\rho).\tag{5.23}$$

A (5.21)-ből a második egyenlőtlenséget felhasználva a (5.19)-re a stabilitás feltételéből $1/(r^2) + 4\pi p_\rho/\alpha \geq \Lambda$, ugyanis

$$\frac{\alpha}{4\pi r^2} + p_\rho \geq \rho_\epsilon + \frac{\alpha\Lambda}{4\pi}.\tag{5.24}$$

Mivel a jobb oldalt csökkentjük, az egyenlőtlenség továbbra is teljesül

$$\frac{1}{r^2} + \frac{4\pi p_\rho}{\alpha} \geq \Lambda\tag{5.25}$$

formában. Ekkor csak egy alsó korlátot adhatunk a nyomásra:

$$p_\rho \geq \frac{\alpha}{4\pi} \left(\Lambda - \frac{1}{r^2} \right).\tag{5.26}$$

6. Összegzés

A gömbszimmetrikus esetben a stabilitás operátor önadjungált, így a sajátértékei valósak. Ebben az esetben az operátor egy deriválást nem tartalmazó tagban tér el a gömbön felírt Laplace-operátortól. Ebben az esetben a sajátértékei is felírhatók a Laplace-operátor sajátértékei és ennek a deriválást nem tartalmazó tagnak az összegeként.

A vákuum megoldás mindenhol stabil, kivéve a $\Lambda > 0$ esetén a $r \leq 1/\sqrt{\Lambda}$ tartományokat. Az ebben a tartományban lévő csapdázott felületek nem minden megfigyelő számára csapdázottak.

Dinamikai esetben az anyagmezőket általánosan hagyva mondtuk meg a sajátértékeket. A stabilitás feltétele ilyenkor egy egyenlőtlenséget biztosít az anyagmező jellemzőire. Ezeknek a jellemzőknek a megszorítására általában az energiafeltételeket szoktuk alkalmazni. Ezek a feltételek a fizikai intuíciónk megfogalmazásai. Ezekhez a feltételekhez járul hozzá az így felírt újabb feltétel.

A munka későbbiekben folytatódik bonyolultabb metrikák vizsgálatával. A következő lépés a gömbszimmetrikus megoldás általánosítása tetszőleges dimenziószámra. Miután kimerítettük a gömbszimmetrikus megoldások nyújtotta lehetőségeket, tovább lépünk a lassan forgó vákuum, majd a Kerr-téridőre. Az utóbbi esetben az operátorban szereplő függvényegyütthatók bonyolultsága fokozza a probléma nehézségét azon túl, hogy az operátor eleve nem önadjungált.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Rácz Istvánnak, a türelmét és útmutatásait.

Hivatkozások

- [1] Andersson L., Mars M., Simon W., 2007, „Stability of marginally outer trapped surfaces and existence of marginally outer trapped tubes”, *Preprint*, arXiv:0704.2889
- [2] Cao L-M., 2011, „Deformation of codimension-2 surfaces and horizon thermodynamics”, *SISSA 2011*
- [3] Csizmadia P., Rácz I., 2009, „Gravitational collapse and topology change in spherically symmetric dynamical systems”, *Class. Quantum Grav.*, 27 015001
- [4] Hollands S., Ishibashi A., Wald R. M., 2007, „A higher dimensional stationary rotating black hole must be axisymmetric”, *Commun. Math. Phys.*, 271, 699-722
- [5] Jaramillo J. L., 2013, „A Young-Laplace law for black hole horizons”, *Preprint*, arXiv:1309.6593v1
- [6] Rácz I., 2008, „A simple proof of the recent generalizations of Hawking’s black hole topology theorem”, *Class. Quantum Grav.*, 25 162001
- [7] Rácz I., 2009, „On the topology of untrapped surfaces”, *Class. Quantum Grav.*, 26 055017

1. Függelék: a feladat és alkalmazott módszerek bemutatása

A témavezetőmtől kapott feladatom a 4.1. fejezetben bemutatott

$$L_n = -D^a D_a \Psi + 2s^a D_a \Psi + \frac{\Psi}{2} [R_q + 2G_{ab} n^a l^b + 2D_a s^a - 2s^a s_a]$$

differenciáloperátor előállítása gömbszimmetrikus téridőben és az operátor sajátértékeinek a meghatározása. A sajátértékek között kitüntetett principális sajátérték vizsgálata fizikai szempontok szerint.

A munkám kiindulási alapját a [3] cikkben bemutatott, tetszőleges gömbszimmetrikus téridőt leíró metrika jelentette. Ezen metrika alapján a 3.5. fejezetben bemutatott megfontolások segítségével meghatároztam és megfelelően normáltam a Gauss-féle fényszerű koordinátákat meghatározó fényszerű vektormezőket. A vektormezők ismeretében előállíthattam a vizsgálandó felületre vetítő operátort. A metrika levetítése után elvégezve egy visszahúzást megkapjuk a felületen indukált metrikát. Az indukált metrikát felírható a felületen értelmezett kovariáns deriváló operátor és a felület görbülete. Ezekkel felírható a keresett differenciáloperátor.

Az indukált metrikán látható, hogy konformisan azonos az egységgömb metrikájával, tehát a vizsgált felületek $SO(3)$ invariánsak. Ez adta az ötletet, hogy az operátor sajátfüggvényei a harmonikus gömbfüggvények segítségével előállíthatók. A vizsgálat során azt találtuk, a gömbfüggvények sajátfüggvényei az operátornak, de a sajátértékei egy additív tagban eltérnek az r sugarú gömbön felírt Laplace-operátor sajátértékeitől. Mivel a principális sajátértéket fizikai szempontokból szeretnénk vizsgálni, feltételeztünk egy kapcsolatot a geometria és az anyagmezők között a kozmológiai állandóval felírt Einstein-egyenletek képeiben.

A fizikailag elvárható stabilitás feltétele a principális sajátértéken keresztül végül egy megszorítást adott az anyagmezők paramétereire.

2. Függelék: a TDK dolgozat és szakdolgozat közötti különbségek

Szakdolgozat címe: Dinamikai rendszerek vizsgálata az általános relativitáselméletben

Témavezető: Rácz István, az MTA doktora

Tématerv: a szakdolgozatomban a TDK dolgozatban megkezdett munkát folytatom. A dolgozat bemutatása óta vizsgáltuk a stabilitásoperátor spektrumát magasabb dimenziójú gömbszimmetrikus téridőkön és szeretnénk megvizsgálni forgásszimmetrikus téridőkön is. Részletesebben kifejtve: a magasabb dimenziójú gömbszimmetrikus megoldás vizsgálata után a vákuumban felírt lassan forgó és Kerr- téridőket vizsgáljuk. Ezek után még az elektrovákuumban felírt Kerr-Newman-megoldás vizsgálata is sorra kerülhet.

Forgásszimmetrikus téridőkben az operátor már nem önadjungált, így a probléma megoldása a bemutatott módszer általánosítását igényli. Az operátor sajátértékei (a principális sajátérték kivételével) képzetesek lesznek és ezek a vizsgálata is más szempontokat igényelnek.