

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

**TÖBBPÓLUSÚ HIDRODINAMIKAI MEGOLDÁSOK
ÉS A MAGASABB RENDŰ HARMONIKUSOK
NEHÉZION-ÜTKÖZÉSEKBEN**

Szabó András
Fizika BSc III. évfolyam

Témavezető:
Csanád Máté
ELTE TTK Atomfizikai Tanszék

2014. május 2.

Kivonat

A nagyenergiás nehézion-fizikában az utóbbi évtized legfontosabb eredménye az ütközések nyomán kialakuló, erősen kölcsönható kvark-gluon folyadék felfedezése volt. A kísérletek tanúsága szerint ezen elemi részecskék plazmája tökéletes folyadékként viselkedik, ami lehetőséget ad relativisztikus hidrodinamikai modellek alkalmazására. Az ütközések során létrejövő extrém magas nyomás és energiasűrűség szétveti ezt a közeget, mely a tágulás során lehűl. A nyalábok találkozási pontjai köré épített detektorokban a keletkező fotonokat, leptonokat és a kvarkplazmából „kifagyó” különböző hadronokat tudjuk detektálni, majd a különböző mennyiségek eloszlásaiból következtethetünk a kiindulási állapot tulajdonságaira.

A mag-mag ütközéseket két egymásba szaladó gömbként értelmező elképzelés speciális, elliptikus kezdeti feltételeket szab. Az ebből adódó impulzustér-beli aszimmetriát a v_2 koefficiens (a Fourier-felbontás második együtthatója) méri, ez a nehézion-fizika egyik legfontosabb megfigyelhető mennyisége. A valóságban azonban az atommagok nem gömb alakúak, így a pontos geometriája minden ütközésnek egyedi. Az elmúlt évek egyik fontos kísérleti eredménye az elliptikus szimmetriától való eltérést mutató v_3 és v_4 együtthatók mérése volt. Ennek leírása érdekében olyan egzakt, relativisztikus hidrodinamikai megoldásokat kerestem, amelyek ezen aszimmetriát is figyelembe veszik. Az így talált új modell tetszőleges pólusú szimmetriát tud kezelni (és e tekintetben első az egzakt relativisztikus hidrodinamika területén), illetve ezek szuperpozíciójából is kiadja a mérhető mennyiségeket, azaz tetszőleges profilú kezdeti feltétel beállítható. Kiszámítottam tehát az együtthatókat különböző aszimmetriákat feltételező egzakt megoldások esetén, és ennek különböző paramétereiktől való függését vizsgáltam, illetve összevettem az adatokkal.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Kvark-gluon plazma	4
2.1. Erősen kölcsönható közeg	4
2.2. Tökéletes folyadék	5
3. Hidrodinamika	7
3.1. Alapegyenletek	7
3.2. Megoldások	8
3.2.1. Landau–Khalatnikov-megoldás	8
3.2.2. Hwa–Bjorken-megoldás	8
3.2.3. A Csörő–Csernai–Hama–Kodama-megoldás	8
3.2.4. Egy nemrelativisztikus megoldás	9
3.2.5. A Nagy–Csörgő–Csanád-megoldás	10
3.3. Mérhető mennyiségek	11
3.3.1. A forrásfüggvény	11
3.3.2. Egyrészecske impulzuseloszlás és v_n oefficiensek	11
4. Új megoldások	12
4.1. Az elliptikusságtól való eltérés	12
4.2. Új megoldás 1+2 dimenzióban	13
4.3. Kiterjesztés 1+3 dimenzióra	15
4.4. Megoldások többszörös szimmetriával	16
5. Mérhető mennyiségek származtatása	17
5.1. Egyrészecske impulzuseloszlás	17
5.2. Spektrum és v_m mennyiségek	18
5.3. Numerikus számítások	18
6. Eredmények	19
6.1. Paraméterektől való függés	19
6.2. Mérési adatokra illesztés	21
7. Összefoglalás	23
A. Alkalmazott módszerek	23
B. Kritérium a skálaváltozóra	23
C. Ábrák	24

1. Bevezetés

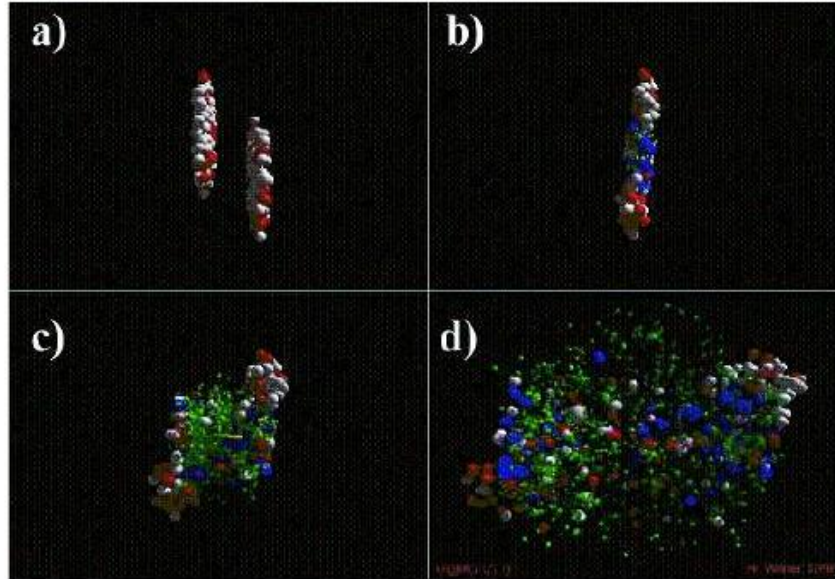
Régóta ismeretes, hogy az atommagot alkotó nukleonok nem elemi részecskék, alapvetően három kvarkból állnak, azaz barionok. Számos fajta bariont ismerünk rajtuk kívül, ilyenek a Δ , Λ , Ξ és még sorolhatnánk. A kvark-antikvark párokból álló részecskéket - ilyenek például a pionok (π), kaonok (K) - mezonoknak nevezzük. A fenti két csoport tagjait, és általában a kvarktartalmú részecskéket hadronoknak hívjuk. A kvarkok jelenlegi tudásunk szerint elemi részecskék, rajtuk kívül ilyenek még a leptonok (elektron, müon és tau a megfelelő neutrínókkal), illetve a kölcsönhatásokat közvetítő részecskék (foton, gluon és a bozonok). A tudomány mai állása szerint ezen elemi részecskéket és tulajdonságaikat a részecskefizika Standard Modell jól leírja.

A nehézion-fizikai kísérleteket atommagokkal végzik, hiszen ezek elektronok híján töltéssel rendelkeznek, így hatékonyan gyorsíthatók. A protonokban és neutronokban lévő kvarkokat az erős kölcsönhatás tartja össze, melyet a gluonok közvetítenek. Ugyanennek a kölcsönhatásnak az eredménye a magerő, mely a nukleonokat tartja össze a magon belül. Az erős kölcsönhatást részletesen leíró elmélet a kvantum-színdinamika (Quantum Chromo Dynamics - QCD), mely jól rávilágít a kölcsönhatás természetére. A részecskék QCD töltését egy jól működő analógia alapján színnek nevezzük. Az elmélet szerint hétköznapi energiasűrűség mellett a kvarkok csak színsemleges részecskékbe zárva, barionok és mezonok formájában figyelhetők meg, mert bármilyen munka, amit abba fordítanánk, hogy egy kvarkot elkülönítsünk, végül egy újabb kvark-antikvark pár keltésére fordulna. Ez a jelenség a kvarkbezárás. Az erős kölcsönhatás egy másik tulajdonsága némiképp kiutat jelent ebből a merev szabályból: a kölcsönhatás csatolási állandója az energiával csökken. Extrém nagy energia esetén a csatolási állandó lényegesen is le tud csökkenni, így ilyen körülmények között a kvarkok és gluonok kiszabadulnak a hadronokból, ezt nevezzük aszimptotikus szabadságnak. Ahogy a jelenség neve is mutatja, teljes szabadságról csak aszimptotikusan, végtelen energián beszélhetnénk, ami természetesen nem valósulhat meg.

Az erős kölcsönhatás ezen tulajdonságai nagy jelentőséggel bírnak a kozmológiában. Az univerzum fejlődésének történetét különböző elméletek írják le, melyek közül a legszélesebb körben elfogadott valószínűleg az inflációs kozmológia. Bár a folyamat részletei bonyolultak, általánosan elmondható, hogy a Világegyetem tágul. Ha időben visszafelé tekintjük ezt a folyamatot, egyre nagyobb energiasűrűségről és nyomásról beszélhetünk, míg a Nagy Bummot követő első néhány mikromásodpercnél elérjük azt az állapotot, amikor a körülmények még megfelelőek voltak ahhoz, hogy az aszimptotikus szabadság megnyilvánulásaként a kvarkok és a gluonok színtöltéssel rendelkező objektumként, a hadronokból kiszabadulva tudtak létezni [1]. Ekkor egy speciális közeget alkottak, melyet kvark-gluon plazmának nevezünk.

A korábban említett bezáró jelleg magyarázza a gyorsítók kiemelkedő szerepét a részecskefizikában. A megfelelő elektromágneses terekkel felgyorsított és pályán tartott atommagok ultrarelativisztikus sebességet érnek el, így labor rendszerből nézve Lorentz-kontrahált „korongként” képzelhetők. Egy tipikus kísérleti elrendezésben ilyen atommagokból álló nyalábokat ütköztetnek össze. A nyalábok mozgási energiája elegendő ahhoz, hogy az említett extrém körülmények megvalósulhassanak: az ütközés utáni energiasűrűség és nyomás ugyanis annyira nagy, hogy létre tud jönni a kvarkok és gluonok plazmája, bár igen rövid időre. A közeg rögtön tágulni kezd, így a térfogat növekedésével csökken az energiasűrűség. A kritikus hőmérsékletet elérve a színes részecskék visszafagynak színsemleges hadronokká, és ebben a formában haladnak tovább. Az ütközési pontok köré épített detektorokkal a keletkező fotonokat, leptonokat, és a már ismert állapotban lévő hadronokat fogjuk érzékelni. Ezeknek a részecskéknek a tulajdonságait a detektorok széles skálája méri, és akármilyen közeg jött is létre az ütközés során, nekünk ezen mennyiségek eloszlásaiból kell következtetnünk annak mibenlétére.

Elképzelhető tehát, hogy a nagyenergiás nehézion-fizikában olyan állapotban sikerült az anyagot létrehozni, melyben a természetben évmilliárdok óta nem megfigyelhető. Mára elfogadottá vált az az elképzelés, hogy a létrejövő közeg fizikai tulajdonságait tekintve folyadék. A továbbiakban áttekintjük, hogy milyen kísérletek és elméleti megfontolások vezettek a folyadék-kép kialakulásához, hogy a tágulás mely szakaszában, és pontosan hogyan írhatjuk le folyadékként a táguló kvarkplazmát.



1. ábra: Arany atommagok ütközésének állomásai: a két koronggá lapult mag egymással szemben halad (a), majd az ütközésben az átfedő zónákból színes részecskék szabadulnak ki (c,d).

2. Kvark-gluon plazma

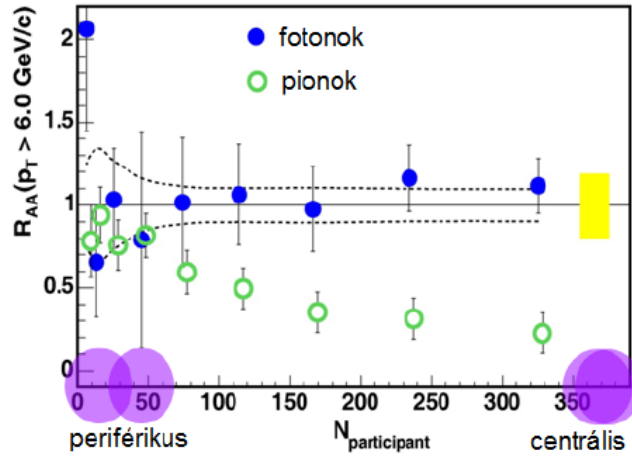
A fent említett közeg tulajdonságait célzó első kísérletek a CERN SPS (Super Proton Synchrotron) nevű gyorsítójában zajlottak, de pontosabb képet először az Egyesült Államokbeli Brookhaven National Laboratory intézményben működő Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) kísérleteiben tudtak adni. A kísérleteket azóta elvégezték a CERN LHC (Large Hadron Collider) gyorsítójával is, az eredmények pedig megerősítették az eddig tapasztaltakat. Az alábbiakban röviden összefoglalom az eredmény szempontjából fontos felfedezéseket, illetve ismertetek néhány alapfogalmát.

2.1. Erősen kölcsönható közeg

A RHIC-ben jellemzően proton-proton ($p+p$), deutérium-arany ($d+Au$) és arany-arany ($Au-Au$) ütköztetéseket végeznek, egy $Au-Au$ ütközésben jelenleg a nukleon-párokra jutó tömegközépponti ütközési energia 200 GeV környéki. Az LHC-ben tipikusan $p+p$, $p-Pb$, $Pb-Pb$ ütközések zajlanak jóval nagyobb, néhány TeV tömegközépponti energián. Amikor két atommag ekkora energián ütközik, valamekkora valószínűséggel lezajlanak „kemény” folyamatok, melyek során nagyenergiás részecskezapor (jet) keletkezik. Ennek a hatás-keresztmetszete olyan, hogy ütközésenként maximum egy jet-pár várható (igen ritka esetekben fordul elő több). A kemény folyamatokat párokban való keletkezés jellemzi, mely után az impulzusmegmaradás miatt a létrejött részecskék ellenkező irányba haladnak, majd további részecskékre fragmentálódnak, így az ilyen részecskezaporokat is párokban várjuk.

Az ütközések kapcsán definiálni szoktuk az impakt paramétert, amely a sebességvektorok által meghatározott egyenesek távolságát mondja meg. Ez alapján az ütközéseket centralitás osztályokba soroljuk, melyeket a centrálitól a periférikus felé haladva százalékosan adunk meg.

A mérések során feltűnt, hogy egyrészt kevesebb nagyenergiás részecskét detektálnak a vártnál, másrészt gyakran hiányzik a jet egyik fele [2, 3]. A jelenség jellemzően nagy centralitású eseményeknél volt számottevő, így magyarázat lehetett egy erősen kölcsönható közeg létrejötte, amely képes lelassítani a nagy energiájú részecskéket. Periférikus ütközéseknél a létrejövő közeg mérete (mely a kísérletek alapján fin nagyságrendű) nem elég nagy, a kölcsönhatás nem tart elég hosszú ideig, így ritkábban és kevésbé markánsan jelentkezik az



2. ábra: Az Au+Au ütközésekben mért nagyenergiás semleges pionokra és a fotonokra vonatkozó magmódosulási faktor a résztvevő nukleonok számának ($N_{participant}$) függvényében (ez utóbbi a centralitással arányos). A fotonok módosulási faktora 1 körül fluktuál, a centralitás növekedésével azonban egyre kevesebb nagyenergiás piont észlelünk.

elnyomás. A jet keletkezés általános esetben az ütközési zóna valamelyik széléhez közelebb várható, így ez arra is magyarázat lenne, hogy miért csak a zápor egyik felét nem detektáljuk.

Az ütközésekhez kapcsolódó fogalom a nukleáris módosulási faktor. Az ütközések elemi eseményeit nukleon-nukleon bináris ütközéseknek képzelve ezeknek, illetve az összesen résztvevő nukleonoknak a száma adott centralitás esetén meghatározható. Így két nehezebb mag (pl. Au+Au) összelövése esetén keletkező részecskék számát (N_{Au}) össze tudjuk vetni a nukleon-nukleon (p+p) ütközésekben keletkezők számával (N_p) olyan módon, hogy utóbbit megszorozzuk az Au+Au ütközésben várható bináris ütközések számával (N_{bin}). Ha két nehezebb mag ütközése pusztán bináris ütközések összege, akkor e kettő megegyezik, azonban ha az ütközés ettől eltérő módon zajlott, akkor eltérést fogunk tapasztalni. Egy Au+Au ütközés nukleáris módosulási faktorát (R_{AA}) a következőképpen definiáljuk:

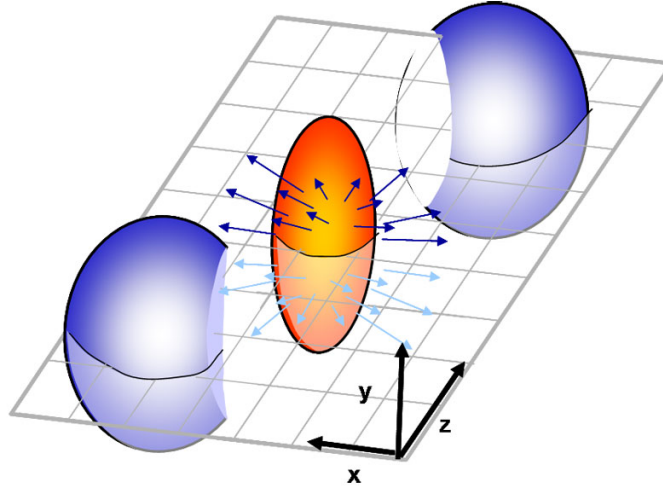
$$R_{AA} = \frac{N_{Au}}{N_{bin} \cdot N_p} \quad (2.1)$$

Ilyen módon kiértékelve az adatokat azt vehetjük észre, hogy az erősen nem kölcsönható fotonok esetében nem áll fenn ez az eltérés [4], az értékek $R_{AA} = 1$ körül fluktuálnak (2. ábra). Ez további érv az erősen kölcsönható közeg mellett. Az elmélet alátámasztására végeztek ellenpróbát deutron-arany ütközésekkel, ekkor semmilyen centralitásnál nem észlelték a jet elnyomást, ez szintén a kisebb közeggel magyarázható [5]. A jelenséget kimutatták az LHC kísérleteiben is [6, 7].

2.2. Tökéletes folyadék

A folyadék kép kialakulásához vezető egyik fontos felfedezés az volt, hogy a létrejövő részecskék mozgási energiája Boltzmann eloszlást követ, azaz egy infinitezimális energiaintervallumba eső mozgási energia $P(E)dE \sim e^{\frac{E}{k_B T}}$ valószínűséggel valósul meg. A mért eloszlásban a hőmérséklet 170 Kelvinnek adódott, ami jó összhangban van a QCD jóslataival, a kifagyást ekörül várjuk [8].

A naiv kép a mag-mag ütközéseket geometriailag két, egymásba szaladó korongként kezeli. Általános, nem teljesen centrális ütközés esetén ezeknek az átfedő tartománya jól közelíthető ellipszissel, ami speciális kezdeti feltételeket szab. A későbbiekben a nyalábirányra merőleges impulzuseloszlást Fourier-sor alakban fogjuk felvenni, ezért gondolkozzunk most is így. Egy geometriailag szabályos ellipszis esetén, ha a nulla fokot valamelyik szimmetriatengelynél vettük fel, akkor a szinuszos tagok nem jelennek meg a sorfejtésben. Abból



3. ábra: Két mag átfedő tartománya első közelítésben ellipszoid, ennek a speciális kezdeti geometriának a szerepét tanulmányozzuk a detektált impulzuseloszlásban.

a megfontolásból, hogy a $\phi = 90^\circ$ -ra is szimmetrikus függvényt kapunk, a páratlan indexű koszinuszos tagok együtthatója is nulla. Számunkra az egyik legérdekesebb tény pont ennek a szimmetriának a sérülése fogja jelenteni, melyet természetesen a szabályos ellipszistól való eltérés okoz.

Hogy a közeg tulajdonságaihoz közelebb kerüljünk, ennek a kezdeti geometriai aszimmetriának a végállapotú impulzuseloszlásbeli megjelenését érdemes vizsgálnunk. A globális elliptikus jellegén belül minden ütközés egyedi, az elemi résztvevők - a nukleonok - véletlenszerűen fednek át egymással. A nukleon-nukleon ütközésekből keletkező részecskék impulzusának irány szerinti eloszlása többé-kevésbé egyenletes. Amennyiben a létrejövő közeg gáz, a tágulás során az átlagos szabad úthossz nagy, az ütközések ritkák, úgy a globális elliptikus jelleg a tágulás során nem (vagy alig) alakul ki, a detektált impulzuseloszlásban nem lesz jelentős. Amennyiben a közeg folyadék, a tágulás során gyakori a részecskék közti ütközés, akkor a kezdeti elliptikus geometria megjelenik az impulzuseloszlásban.

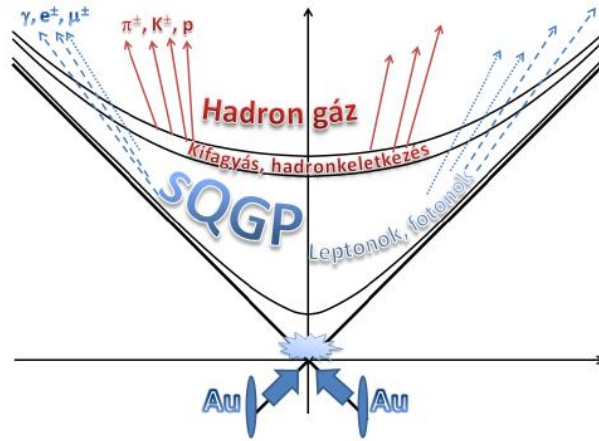
Hogy ezt számszerűsíthessük, vezessük be a transzverz síkbeli egyrészecske impulzuseloszlást, ezt jelölje $N(p_t, \alpha)$ (lásd részletesebben a 3.3.2. fejezetben). Ekkor $N(p_t, \alpha)dp_t d\alpha$ a (p_t, α) és $(p_t + \delta p_t, \alpha + \delta \alpha)$ közötti transzverz impulzussal kifagyó részecskék száma. Itt is, és a továbbiakban is a nyalábirányra merőleges (transzverz) impulzus szögváltozója α , míg az analóg térkoordinátáé ϕ . Válasszuk le a szögfüggést, és írjuk Fourier-sor alakba:

$$N(p_t, \alpha) = N(p_t) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin(m\alpha) \right) \quad (2.2)$$

Ekkor a sort úgy normáltuk, hogy a konstans tag együtthatója egy legyen. Teljesen elliptikus esetben, ha a szögkoordinátát valamelyik szimmetriatengelytől mérjük fel, akkor $\alpha = 0$ és $\alpha = \pi/2$ szögekre nézve is páros függvényt kapunk, így a szinuszos tagok elvileg teljesen elhagyhatóak, illetve a páratlan indexű koszinuszosak is. A kísérletek tanúbizonysága szerint utóbbiak ($v_3, v_5, \dots$) egyenként vizsgálva az ütközéseket jelen vannak, a kihívást éppen annak a modellnek a megtalálása fogja jelenteni, amely ezt visszaadja (lásd részletesebben a 4. fejezetben).

A későbbiekben látni fogjuk, hogy a v_n együtthatók ekkor $\cos(n\alpha)$ várhatóértékét (a modellben), illetve átlagát (a mérésekben) jelentik a szögeloszlásban. Ezek közül v_2 a legfontosabb, hiszen a kétfogású szimmetriát, és ezzel $\cos(2\alpha)$ átlagát ez méri. Ha a közeg folyadék, akkor az impulzuseloszlásban megjelenő globális elliptikus jelleg v_2 szignifikáns értéke fogja tükrözni (3. ábra).

A kísérletek során a v_n együtthatók mérése alapján az anyag halmazállapota folyadéknak bizonyult [9]. Az adatok precíz feldolgozása a magasabb rendű harmonikusokra vonatkozott, melyek alapján arra jutottak, hogy a folyadék kinematikai viszkozitása kicsi, sőt, elhanyagolható [10]. A kísérletekből az is kiderült,



4. ábra: Au-Au ütközés lefoályásának téridőbeli vázlata. A már termalizálódott, táguló közegben folyamatosan keletkeznek fotonok és leptonok, míg hadronok a kritikus hőmérséklet elérésekor fagnak ki.

hogy nemcsak a magasabb páros rendű együttthatók bírnak szignifikáns értékkel, de például v_3 is. Az elhanyagolható viszkozitás a további modellalkotás szempontjából nagyon kedvező, hiszen a nem-disszipatív hidrodinamika elveit alkalmazhatjuk a közeg leírására [11].

3. Hidrodinamika

3.1. Alapegyenletek

A 2.2 fejezetben részletezett okokból az ütközések során létrejövő kvark-közeg tökéletes folyadékként kezelhető, azaz elhanyagolható viszkozitású és hővezetésű, és a precíz számolások érdekében a relativisztikus hidrodinamikát kell alkalmazni.

A kvarkanyag fejlődése a téridőben a 4. ábrán látható vázlatosan. Körülbelül 2 GeV transzverz impulzusig beszélünk hidrodinamikáról, az ennél nagyobb energiával érkező részecskéket más folyamatok vezérlik. Az időbeli intervallum is meg van szorítva: az ütköző magokból keletkező részecskék sokasága először nem alkot termális közeget, míg a kifagyás után nem beszélhetünk folyadékról. Amíg a hadronok pillanatszerűen jönnek létre, fotonok és leptonok folyamatosan keletkeznek a táguló közegben. A detektált hadronok impulzuseloszlásában a folyadék kifagyás előtti állapotát szeretnénk felfedezni.

A továbbiakban $c = 1$ és $k_B = 1$ egységrendszerben fogunk számolni. Az alapegyenletek:

$$\partial_\mu (nu^\mu) = 0 \quad (3.1)$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.2)$$

A (3.1) a kontinuitási egyenlet relativisztikus megfelelője, ahol u^μ a folyadék lokális áramlási sebessége, n pedig egy szám-sűrűség, amit valamilyen megmaradó mennyiséghez rendelünk hozzá. Ez lehet a barionszám, vagy közelítőleg a ritkaság, viszont amennyiben a hozzá tartozó kémiai potenciál értéke nullához közele, akkor egyik sem jó választás, ekkor az entrópiásűrűség veheti föl a szerepét. Ebben az esetben az entrópiásűrűséget σ -val jelölve a kontinuitási egyenlet alakja $\partial_\mu (\sigma u^\mu) = 0$. A termodinamika alapegyenleteiből az energiaimpulzus-tenzor kontinuitása alapján (3.2) lokálisan megmaradó entrópiásűrűség adódik, azaz lokálisan adiabatikus tágulás. Az energiaimpulzus-tenzor ($T^{\mu\nu}$) alakja:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

ahol ϵ az energiasűrűség, p a nyomás, $g^{\mu\nu}$ pedig a metrikus tenzor. Ezt úgy nyerjük, hogy a tenzor eredeti

alakját

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

a téridőponthoz rendelt folyadékdarabhoz boostoljuk.

Az egyenletrendszer változóit az anyag állapotegyenlete köti össze, amely az $\epsilon(p)$ függést mondja meg. Nemrelativisztikus esetben ideális gázra $\epsilon = \frac{3}{2}p$, relativisztikus esetben nem ennyire egyértelmű, valamilyen lineáris kapcsolatot tételezünk fel:

$$\epsilon = \kappa p \quad (3.5)$$

ahol κ állapotegyenleti paraméter. A legtöbb megoldás konstans κ -t használ, azonban létezik a megoldások egy olyan osztálya, ahol valamilyen tetszőleges $\kappa(p)$ vagy $\kappa(T)$ függést tételeznek fel [12]. A $\kappa(T)$ esetben, mivel c_s hangsebességre érvényes:

$$c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \epsilon}} \quad (3.6)$$

ezért ilyenkor $\kappa = 1/c_s^2$. Elsőrendű fázisátalakulásként kezelve a hadronizációt próbálkoztak egy úgynevezett zsákállandó bevezetésével, ekkor az állapotegyenlet $\epsilon - B = \kappa(p + B)$ alakúnak adódott, ám a mérési eredmények és egyéb elméleti megfontolások ezt nem támasztották alá. Minden jel arra mutat, hogy a hadronizáció során a termodinamikai mennyiségek és deriváltjaik folytonosan változnak, „cross-over” típusú átmenetről beszélünk. A hőmérséklet definíciója:

$$p = nT \quad (3.7)$$

3.2. Megoldások

3.2.1. Landau–Khalatnikov-megoldás

A relativisztikus hidrodinamika alapegyenleteit először Landau vezette le, és ő vetette fel a folyadékmodell alkalmazását is a relativisztikus részecske-ütközések leírására is. Egy megoldás is származik tőle, amely gyorsuló, viszont 1+1 dimenziós és implicit, ezáltal bonyolult vele számolni [13].

3.2.2. Hwa–Bjorken-megoldás

Az először Hwa által megtalált megoldás gyorsulásmentes és 1+1 dimenziós, viszont explicit, ami nagy előnye a Landau–Khalatnikov-féléhez képest [14, 15]. Bjorken szerepe abban volt jelentős, hogy az alkalmazások szempontjából jobban használható alakra hozta a megoldást. Ebben a formában jól alkalmazható a kezdeti energiasűrűség becslésére, így elsősorban erre használják.

3.2.3. A Csörgő–Csernai–Hama–Kodama-megoldás

A mi szempontunkból a legfontosabb megoldást Csörgő és társai találták meg 2003-ban [16, 17]. Ez az egyetlen relativisztikus, 1+3 dimenziós ellipszoidális szimmetriát feltételező (azaz nem gömbszimmetrikus) megoldás. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a termodinamikai mennyiségekre (pl. $T(x)$ hőmérséklet) nézve állandó felület egy adott sajátidő pillanatban $s = \text{konstans}$ ellipszoid. Ez a skálatulajdonság az s skálaváltozón keresztül van a megoldásba építve:

$$s = \frac{r_x^2}{X(t)^2} + \frac{r_y^2}{Y(t)^2} + \frac{r_z^2}{Z(t)^2}, \quad (3.8)$$

ahol r_x, r_y, r_z a derékszögű koordináták, $X(t), Y(t), Z(t)$ skálaparaméterek pedig az időnek függvényei. A megoldás szigorúan véve nem gyorsuló, a sebességmezőt az asztrofizikában alkalmazott Hubble-sebességmezőhöz hasonlóan írták le. Ezt az univerzum izotróp tágulására alkalmazzák azzal az alapelvvel, hogy annak nagyobb a sebessége, ami messzebb van (hiszen messzebbre jutott). Ez tehát egy sebességeloszlást ír le, mely a térben távolabb lévő térfogathoz nagyobb sebességet rendel. A sebességmező kifejezése:

$$u^\mu = \gamma \left(1, \frac{\dot{X}}{X} r_x, \frac{\dot{Y}}{Y} r_y, \frac{\dot{Z}}{Z} r_z \right) \quad (3.9)$$

(3.1) és (3.2) egyenletekbe visszahelyettesítve kiderül, hogy $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ időben konstans kell hogy legyen, így X, Y, Z az időnek lineáris függvényei. A 4. fejezetben azt is látni fogjuk, hogy konstans tagot nem engedhetünk meg, tehát $X = \dot{X}t, Y = \dot{Y}t, Z = \dot{Z}t$. A sajátidő kifejezése a jól ismert

$$\tau = \sqrt{x_\mu x^\mu} = \sqrt{t^2 - \mathbf{x}^2} \quad (3.10)$$

alakú, ezt visszaírva a sebességmező kifejezésébe nyerjük:

$$u^\mu = \frac{x^\mu}{\tau}, \quad (3.11)$$

itt x^μ a négyeskoordináta, τ pedig a sajátidő. A termodinamikai mennyiségek leírásához bevezették s skálaváltozó egyelőre tetszőleges $\nu(s)$ függvényét. Ezzel a talált megoldásban a mennyiségek:

$$T(x) = T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{3/\kappa} \frac{1}{\nu(s)} \quad (3.12)$$

$$p(x) = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{3+3/\kappa} \quad (3.13)$$

$$n(x) = n_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^3 \nu(s) \quad (3.14)$$

Ekkor $n(x) = p(x)/T(x)$ a már ismert számsűrűség, $T(x)$ a hőmérséklet, $p(x)$ a nyomás, $p_0 = n_0 T_0$, κ állapotegyenleti paraméter pedig tetszőleges konstans, a mérhető mennyiségek származtatásakor ki fog esni (ld. 5.1. fejezet). Ennek a modellnek a kiterjesztése a már említett tetszőleges $\kappa(p)$ vagy $\kappa(T)$ függést alkalmazó megoldás [12]. A skálaváltozó függvényét $\nu(s) = e^{bs}$ alakban szokás felvenni, ahol ilyen konvenció szerint b egy pozitív szám. A hőmérséklet így a középponttól távolodva csökken, természetesen a tágulással ezt is várjuk; b a csökkenés mértékére jellemző, azaz a hőmérsékleti gradienssel arányos mennyiség. A hadronizációt sajátidőben pillanatszerűnek gondoljuk, τ_0 így a kifagyás sajátideje (a kifagyás τ -függését később $\delta(\tau - \tau_0)$ alakban fogjuk felvenni).

3.2.4. Egy nemrelativisztikus megoldás

Az itt részletezett megoldás nagyon hasonló a 3.2.3. fejezetben bemutatotthoz. A nemrelativisztikus hidrodinamika egyenleteit az állapotegyenlet kapcsolja össze, ami ebben az esetben $\epsilon = \kappa p + mn$, ahol $p = nT$. Közös vonása az előző megoldással, hogy szintén Hubble-sebességmezőt használ és ellipszoidális önhasonlóságot feltételez. A sebességmező és a skálaváltozó alakjai:

$$v = \left(\frac{\dot{X}}{X} r_x, \frac{\dot{Y}}{Y} r_y, \frac{\dot{Z}}{Z} r_z \right) \quad (3.15)$$

$$s = \frac{r_x^2}{X^2} \frac{r_y^2}{Y^2} \frac{r_z^2}{Z^2} \quad (3.16)$$

ahol X, Y , és Z most is időfüggő skálaparaméterek. A számsűrűséget és a hőmérsékletet faktorizáljuk oly módon, hogy a térkoordinátáktól csak a skálaváltozón keresztül függjenek. Ekkor $n(\mathbf{r}, t) = f(t)g(s)$, $T(\mathbf{r}, t) = h(t)\tau(s)$. A megoldásban a termodinamikai mennyiségek alakja ilyenkor a következő:

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{X_0 Y_0 Z_0}{XYZ} e^{-s/2} \quad (3.17)$$

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{1/\kappa} \tau(s) \quad (3.18)$$

és érvényes a következő megszorítás: $\ddot{X}X = \ddot{Y}Y = \ddot{Z}Z = \frac{T}{m}$. Ekkor X_0 , Y_0 és Z_0 a skálaparaméterek a kifagyás pillanatában. A 3.3. fejezetben még lesz szó a forrásfüggvényről és a mérhető mennyiségekről. A $S(\mathbf{r}, p)d^x d^p$ forrásfüggvény ebben a nemrelativisztikus esetben azt adja meg, hogy hány részecske keletkezését várjuk $\mathbf{r}$ hely kis környezetében $\mathbf{p}$ és $\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}$ tartományba eső impulzussal.

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = N n_0 \exp \left[-\frac{(p - mv)^2}{2mT_0} \right] \quad (3.19)$$

Ennek a térintegráljából kaphatjuk meg az egyrészecske impulzuseloszlást (lásd bővebben a 3.3.2. fejezetben), ami ebben az esetben viszonylag könnyen megkapható:

$$N(\mathbf{p}) = N \exp \left[-\frac{p_x^2}{tmT_x} - \frac{p_y^2}{tmT_y} - \frac{p_z^2}{tmT_z} \right] \quad (3.20)$$

$$T_x = T_0 + m\dot{X}_0^2 \quad (3.21)$$

$$T_y = T_0 + m\dot{Y}_0^2 \quad (3.22)$$

$$T_z = T_0 + m\dot{Z}_0^2 \quad (3.23)$$

ahol T_x , T_y és T_z úgynevezett effektív hőmérsékletek, a Maxwell-Boltzmann eloszlásban ugyanis ezek veszik fel a hőmérséklet szerepét.

3.2.5. A Nagy–Csörgő–Csanád-megoldás

Ez a megoldás egzakt, $d+1$ dimenziós, gyorsuló és explicit alakban előáll. Jól használható a kezdeti energiasűrűség és az ultra-relativisztikus ütközéseknél lejátszódó reakciók élettartama becslésére, továbbá meghatározható belőle a (dn/dy) rapiditás-eloszlás, ahol a rapiditás definíciója:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} \quad (3.24)$$

és ennek relativisztikus megfelelője η . Ekkor a sebességmező és a nyomás kifejezései:

$$u^\mu = (\cosh \lambda\eta, \sinh \lambda\eta) \quad (3.25)$$

$$p = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{\lambda d \frac{\kappa+1}{\kappa}} - B \quad (3.26)$$

ekkor d a térdimenziók száma, λ a gyorsulás mértékét leíró paraméter, míg B az a zsákállandó, amit már megemlítettünk a 3.1. fejezetben is, és amellyel az állapotegyenlet $\epsilon - B = \kappa(p + B)$. A paraméterek alkalmas megválasztásával ez a megoldás visszaadja a Hwa–Bjorken féltét.

3.3. Mérhető mennyiségek

3.3.1. A forrásfüggvény

Mivel a detektorba érkezéskor a kvarkfolyadék már visszafagyott hadronokká, így ahhoz, hogy értelmezni tudjuk a kapott impulzuseloszlást, tudnunk kell valamit a kifagyásról. Ezt értelmezzük a részecskekeletkezés forrásfüggvényével: $S(x, p)d^4x d^4p$ azt adja meg, hogy x téridő-koordinátának infinitezimális környezetében hány részecske keletkezik p és $p + \delta p$ közötti impulzussal. A függvény pontos alakja:

$$S(x, p)d^4x = \mathcal{N}n(x)\exp\left[-\frac{p_\mu u^\mu}{T(x)}\right] H(\tau)p_\mu d^3\Sigma_\mu(x)dt \quad (3.27)$$

A kifagyás valószínűségének leírásához a Boltzmann-Jüttner eloszlást alkalmazzák, ez az $n(x)\exp\left[-\frac{p_\mu u^\mu}{T(x)}\right]$ alakú faktor. A hadronizációt a sajátidő mentén leíró tagot $H(\tau)d\tau = \delta(\tau - \tau_0)d\tau$ alakban vesszük fel, feltételezve, hogy a kifagyás sajátidőben pillanatszerű, $\mathcal{N}$ pedig normálási tényező. $d^3\Sigma_\mu(x) = \frac{u^\mu d^3x}{u^0}$ a kifagyási hiperfelület vektormértéke, mely párhuzamos u^μ -vel és merőleges a $\tau = \text{konstans}$ felületre. A mértéket p_μ -vel Lorentz-szorozva a részecskék fluxusát kapjuk. Ezeket beírva a forrásfüggvénybe nyerjük:

$$S(x, p)d^4x = \mathcal{N}n(x)\exp\left[-\frac{p_\mu u^\mu(x)}{T(x)}\right] \delta(\tau - \tau_0)\frac{p_\mu u^\mu}{u^0}d^4x \quad (3.28)$$

3.3.2. Egyrészecske impulzuseloszlás és v_n koefficiensek

Az adatokkal összevethető mennyiségeket alapvetően a forrásfüggvény különböző kiintegrált alakjaiból származtatjuk, ehhez koordinátázzuk az ütközési teret. A nyalábirányba eső tengely legyen z , erre merőlegesen vegyük fel a transzverz síkot r és ϕ koordinátákkal, így egy hengerkoordináta-rendszert nyerve. A négyesimpulzust vegyük egy adott tömeghéjon ($m^2 = p_\mu p^\mu$) így hármásimpulzust kapunk, amit paraméterezzük hasonlóan, p_z nyalábirányú és $\mathbf{p}_t$ transzverz impulzusokkal, utóbbi nagysága legyen a skalár p_t , szögváltozója α .

A mi szempontunkból lényeges származtatott mennyiségek:

$$N(\mathbf{p}) = \int S(x, \mathbf{p})d^4x \quad (3.29)$$

$$N(p_t, p_z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(\mathbf{p})d\alpha \quad (3.30)$$

(3.29) a teljes releváns téridőben $\mathbf{p}$ impulzussal keletkező részecskék száma, amely tehát tartalmazza a transzverz impulzus eloszlását. Ezt felösszegezzük p_t minden α szögére, ekkor a (3.30) egyenlethez jutunk.

Ezen a ponton fontos tisztázni a transzverz irány kitüntetett szerepét. A nyalábok összelövésekor a magokat alkotó nukleonoknak csak egy - centralitástól függő - hányada vesz részt az ütközésben, a többi a nyalábirány (z -tengely) körül szóródik. Az ütközés előtt a magok z irányban hordoznak szignifikáns impulzust, ezért az erre merőleges síkba mutató impulzussal keletkező részecskék fognak az ütközésben történekről hírt vinni. A detektorok is jórészt a transzverz síkban vannak, így a további cél azoknak az eloszlásoknak a vizsgálata, ahol $p_z = 0$. Előre bocsátjuk, hogy a 4. fejezetben ismertett új megoldások szempontjából is lényeges lesz ez a tény, ugyanis a nyalábirányú komponenst gyakorlatilag ott is le fogjuk csatolni a transzverz síkról és kvalitatívan is máshogy fogjuk kezelni.

Amennyiben p_t szögeloszlása érdekel, úgy a (2.2) egyenletben látható módon a szögfüggés Fourier-sorát írjuk fel. Az ebben szereplő v_m mennyiségeket a következőképpen lehet számolni:

$$v_m(p_t) = \frac{\int_0^{2\pi} N(p_t, \alpha) \cos(m\alpha)d\alpha}{N(p_t)} = \langle \cos(m\alpha) \rangle \quad (3.31)$$

Mivel a nevező gyakorlatilag normálás, így ezzel $\cos(m\alpha)$ szögeloszlásbeli várhatóértékéhez jutunk. Ez alapján az úgynevezett elliptikus folyást (azaz a kétfogású szimmetria mértékét) jellemző mennyiség $\cos(2\alpha)$ várhatóértéke:

$$v_2(p_t) = \frac{\int_0^{2\pi} N(p_t, \alpha) \cos(2\alpha) d\alpha}{N(p_t)} \quad (3.32)$$

Ezek a mennyiségek mind a hadronikus, mind a fotonikus eloszlásra [18] származtathatóak. A mérhető mennyiségeket vizsgálva szembeszökő, hogy azok mind a forrásfüggvényből származnak valamilyen módon, amely pedig a közeg kifagyáskori állapotára jellemző, annak időfüggéséről semmit nem mond.

4. Új megoldások

4.1. Az elliptikusságtól való eltérés

Az alábbiakban megmutatom hogyan lehet olyan megoldásokat konstruálni, amik az eddigi - elliptikus - jellegén túl általánosabb geometriájú kezdeti feltételeket is kezelni tudnak [19, 20]. Vizsgálódjunk a transzverz síkban: az eddig talált megoldások mind kétfogású, elliptikus szimmetriát feltételeznek, és a v_2 együtttható értékére adnak jóslatot. Ez azt jelenti, hogy bármilyen modell, amiben a skálaváltozónak az elliptikus alakja szerepel, $v_3 = 0$ -t fog adni.

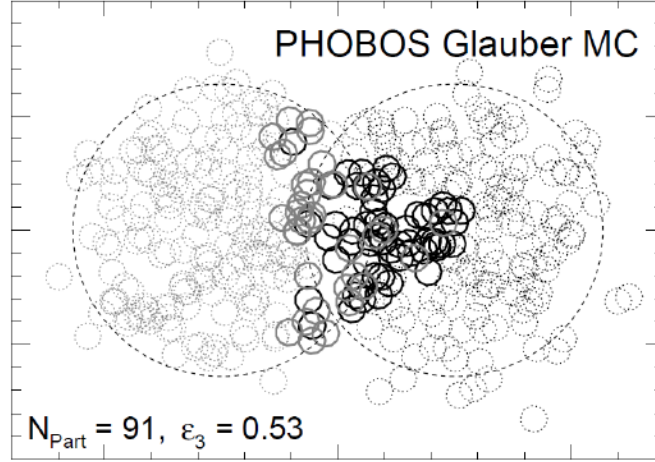
Definiáljuk először is a másodrendű reakciósíkot, amely az ütköző magok sebességvektorait foglalja magában, ez jelöli ki v_2 számításakor a szögkoordináta kezdőpontját, amely a laborrendszerhez képest Ψ_2 szöggel van elforgatva. Mivel a laborrendszer síkja nem releváns az adatok kiértékelésénél, így egyszerűen a másodrendű reakciósíkot szoktuk reakciósíknak hívni, ennek jó illusztrációja a 3. ábra.

A valóságban, lévén az atommagok nem tökéletes, homogén anyageloszlású gömbök, v_3 , v_4 és az őket követő együttthatók értéke nem elhanyagolható, ezt a kísérletek alátámasztják. A 5. ábrán a Glauber modell alapján készült Monte-Carlo szimuláció eredménye látható, ez is jó demonstrációja az eltérésnek. A $\cos(3\alpha)$, $\cos(4\alpha)$, stb. komponensek rá vannak szuperponálódva az impulzuseloszlásra. Mindegyik koszinuszhoz szoktunk választani egy fáziseltolódást ($\Psi_3, \Psi_4, \dots$), ezek a másodrendű reakciósíkhhoz viszonyítva definiálják a magasabb rendű reakciósíkokat. Ezzel konzisztensen $\cos(2\phi)$ kezdőfázisát nullának választjuk, ezzel ignoráljuk a laborrendszerhez képesti - lényegtelen - orientációt. A magasabb rendű reakciósíkokra azért van szükség, mert elvileg ugyan - teljes rendszerről lévén szó - tetszőleges szögbeli eloszlás leírható lenne elegendően sok felharmonikussal, mégis szeretnénk hatékonyabbak lenni, és néhány további taggal minél pontosabban leírni az aszimmetriát.

Ezek a reakciósíkok egy kapcsolódási pontot jelentenek a modell és a mérések között: a modellbe „kézzel” beletesszük, a tényleges ütközések adataiból való származtatásuk azonban nem triviális. Egy körben szegmentált detektor álljon n darabból. Ehhez szögkoordinátát illesztünk, így az egyes szegmenseknek diszkrét ψ_i értékek felelnek meg ($i = 1; 2; \dots n$). Az egyes szegmensekbe érkező részecskék száma N_i , ekkor a k -adrendű reakciósíkot (Ψ_k) kísérletileg a következő formula alapján határozzák meg:

$$\tan(\Psi_k) = \frac{\sum_i (N_i \sin(k\psi_i))}{\sum_i (N_i \cos(k\psi_i))} \quad (4.1)$$

Megjegyzendő, hogy sok ütközést kiátlagolva olyan módon, hogy az adott reakciósíkba „forgatjuk” az egyedi eseményeket kimosódnak az ahhoz a rendhez tartozó fluktuációk és az eloszlás egyre pontosabban elliptikus/trianguláris/stb. lesz, azonban egyéni ütközéseket vizsgálva ez sérül. Az új megoldással szembeni elvárásunk tehát, hogy zárt alakban kezelni tudja a kívánt geometriát és fázistolásokkal definiált magasabb rendű reakciósíkokat.



5. ábra: Illusztráció két ütköző atommag nukleoneloszlásáról. Ebben az esetben még szemmel is jól kivehető egy hárompólusú komponens az ütközésben résztvevő nukleonok (melyeknek számossága $N_{Participants}$) elhelyezkedésében.

4.2. Új megoldás 1+2 dimenzióban

Világos, hogy a realisztikusabb geometriát az s skálaváltozón keresztül kell a modellbe építeni, ehhez pedig érdemes átgondolnunk, milyen szabadságunk van s megkonstruálásában. Hogy az alapegyenleteket kielégítse, egy „jó” skálaváltozónak tudnia kell az alábbi egyenlőséget:

$$u^\mu \partial_\mu s = 0 \quad (4.2)$$

Ennek a részletes indoklása a B csatolmányban megtalálható. Csörgő és társai [16] írása alapján a legáltalánosabb megfelelő s formája $\bar{s} = F(s_x, s_y, s_z)$ vagy $\bar{s} = G(s'_x, s'_y, s'_z)$, ahol F és G tetszőleges függvényei s_i és s'_i (i derékszögű index) mennyiségeknek, melyek alakja:

$$s_i = \frac{r_i^2}{t^2} \quad (4.3)$$

$$s'_i = \frac{r_i^2}{\tau^2} \quad (4.4)$$

Látható, hogy a (3.8) alak megfelel ennek a kritériumnak. Kezdetben tekintsük ezt két dimenzióban és írjuk át polárkoordinátákra:

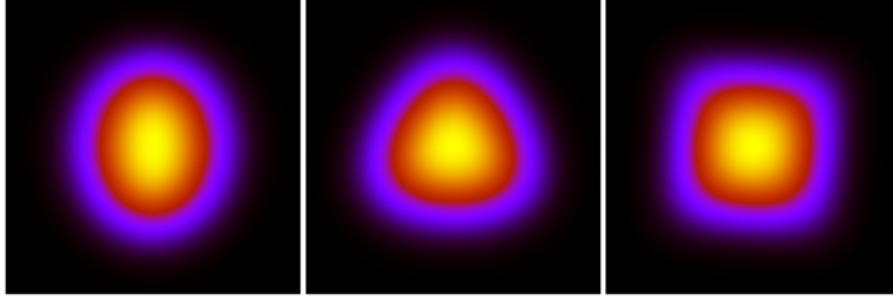
$$s = \frac{r_x^2}{X^2} + \frac{r_y^2}{Y^2} \quad (4.5)$$

$$s = \frac{r^2}{R^2} (1 + \epsilon \cos(2\phi)) \quad (4.6)$$

Ekkor s egy adott értékéhez tartozó ellipszisnek R a karakterisztikus mérete és ϵ az excentricitása. Minden trigonometrikus függvény tekinthető valamilyen s_i vagy s'_i függvénynek, hiszen pl. a transzverz síkban $\cos(\phi) = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}$, ezt pedig szabadon bővíthetjük t -vel vagy τ -val. Ebből a megfontolásból a koszinusz függvény argumentuma lehet $N\phi$ is:

$$s = \frac{r^2}{R^2} (1 + \epsilon_N \cos(N\phi)) \quad (4.7)$$

Ilyen módon átírva a koszinusz periodicitását biztos, hogy s ϕ -ben egy periódus alatt N -szer veszi fel ugyanazt az értéket (6.ábra).



6. ábra: $s = \text{konstans}$ görbék $N = 2, 3, 4$ esetekre

Ebben a pillanatban ϵ időfüggése még nem tisztázott, ez az alapegyenletekbe visszahelyettesítve derül majd ki. Ebből az alakból származtathatunk egy megoldást, amelyet a 3.2 fejezetben részletezett általánosításából nyerhetők:

$$u^\mu = \gamma \left(1, \frac{\dot{R}}{R} r \cos \phi, \frac{\dot{R}}{R} r \sin \phi \right) \quad (4.8)$$

$$T = T_0 \left(\frac{\gamma^2 R_0^2}{R^2} \right)^{1/\kappa} \frac{1}{f(s)} \quad (4.9)$$

$$p = p_0 \left(\frac{\gamma^2 R_0^2}{R^2} \right)^{(\kappa+1)/\kappa} \quad (4.10)$$

$$n = \frac{p(x)}{T(x)} = n_0 \left(\frac{\gamma^2 R_0^2}{R^2} \right) f(s) \quad (4.11)$$

ekkor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-r^2 \dot{R}^2/R^2}}$, u_t a transzverz távulási sebesség, mely egy négyessebesség komponens, így elvileg lehetne nagyobb 1-nél ($c = 1$). Amennyiben $R = u_t t$ alakú, akkor visszahelyettesítve az $u^\mu = \frac{x^\mu}{\tau}$ alakú sebességmezőt és ekkor $R_0 = u_t \tau_0$. A κ állapotegyenleti paraméter ebben az esetben is tetszőleges konstans, $\frac{\gamma R_0}{R} = \frac{\tau_0}{\tau}$, $f(s)$ a skálaváltozó tetszőleges függvénye, amennyiben $f(0) = 1$, ekkor ugyanis:

$$T_0 = T(\tau = \tau_0, s = 0) \quad (4.12)$$

$$p_0 = p(\tau = \tau_0, s = 0) \quad (4.13)$$

A formulák tudják a kívánt szimmetriát, kérdés, hogy megoldásai e a relativisztikus hidrodinamika egyenleteinek.

A 3.2. fejezetben említettük, hogy $X(t), Y(t)$ és $Z(t)$ skálaparaméterek csak egy időben lineáris tagot tartalmazhatnak. Ez a fejezet elején tárgyalt megfontolásokból, $\bar{s}$ alakjából következik, egy konstans tag ugyanis sértené a (4.3) és (4.4) alakokat. Bár a fenti megoldásban az s skálaváltozó $R = u_t t$ esetén gyakorlatilag a Csörgőék által megadott $\bar{s}$ alakú skálaváltozók közé tartozik, azért nem vetjük el rögtön annak a lehetőségét, hogy az új megoldásban több szabadságunk is legyen $R(t)$ -ben.

Visszahelyettesítve a (3.1) és (3.2) egyenletekbe két megszorítás adódik: egyrészt $\dot{\epsilon} = 0$, azaz ϵ -nak ebben a modellben időben állandónak kell lennie, másrészt kapunk egy differenciálegyenletet $R(t)$ -re:

$$R = \dot{R} t \quad (4.14)$$

Ennek a megoldása $R(t) = \text{konst} \cdot t$, tehát az $R(t) = u_t t$ alakra kell szorítkoznunk.

Általában egy megoldás helyességét egyszerűen a (3.1) és (3.2) alapegyenletekbe való visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük. Ez meglehetősen hosszú számolás, és sok esetben leegyszerűsíthetjük a dolgunkat. Vegyük

ugyanis észre, hogy minket elsősorban a skálaváltozó érdekel, ez pedig csak a (3.1) kontinuitási egyenletben szerepel. Ha u^μ , $T(x)$, $n(x)$ és $p(x)$ helyességéről már meggyőződöttünk és csak s -et módosítjuk, akkor elegendő a (4.2) egyenlet teljesülését ellenőrizni (lásd a B csatolmányban).

Hosszadalmas lenne minden új megoldás teljesülését bemutatni, így nézzük meg csak ezt az 1+2 dimenziós esetet, a többi hasonlóan végezhető. Hogy az említett kritériumnak utánaszámolhassunk, konstruáljuk meg ∂_μ operátor komponenseit polárkoordinátákban:

$$\partial_t f(t, r, \phi) = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.15)$$

$$\partial_x f(t, r, \phi) = \cos \phi \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (4.16)$$

$$\partial_y f(t, r, \phi) = \sin \phi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (4.17)$$

Ezzel $\partial_\mu s$ komponensei:

$$\partial_t s = -\frac{N}{t} s \quad (4.18)$$

$$\partial_x s = \frac{N}{r} s \cos \phi - \frac{\sin \phi}{r} \frac{r^N}{R^N} (1 - N\epsilon \sin N\phi) \quad (4.19)$$

$$\partial_y s = \frac{N}{r} s \sin \phi + \frac{\cos \phi}{r} \frac{r^N}{R^N} (1 - N\epsilon \sin N\phi) \quad (4.20)$$

Felhasználva, hogy u^μ (4.8) beli alakjában $R = u_t t$, így $\frac{\dot{R}}{R} = 1/t$ az indexek összeejtésével a következőhöz jutunk (a sebességmező γ szorzóját ki sem írjuk):

$$-\frac{N}{t} s + \frac{N}{t} s \cos^2 \phi - \frac{1}{t} \cos \phi \sin \phi \frac{r^N}{R^N} (1 - N\epsilon \sin(N\phi)) + \frac{N}{t} s \sin^2 \phi + \frac{1}{t} \cos \phi \sin \phi \frac{r^N}{R^N} (1 - N\epsilon \sin(N\phi)) = 0 \quad (4.21)$$

Látszik tehát, hogy ebben a 2+1 dimenziós esetben valóban kielégítettük a megfelelő egyenleteket. A további felírt megoldások mind viszonylag gyorsan ellenőrizhetők (4.2) segítségével, külön nem fogjuk részletezni a számolásokat.

4.3. Kiterjesztés 1+3 dimenzióra

A fenti megoldást többféleképpen lehet általánosítani három térdimenzióra, természetesen minden változatot vissza kell helyettesíteni az alapegyenletekbe.

A 3.3.2. fejezetben beszéltünk a transzverz sík kitüntetett szerepéről. Ezt szem előtt tartva az N fogású szimmetriát meghagyhatjuk csak a nyalábirányra merőleges síkban, és a formulákhoz additív módon hozzáírhatunk egy z irányú tagot, ehhez pedig a hengerkoordináták fognak illeszkedni. Ez azért is szerencsés, mert így nem keverednek a nyaláb- és a transzverz irányú komponensek és a számolás is könnyebbé válik.

$$s = \frac{r^2}{R^2} (1 + \epsilon_N \cos(N\phi)) + \frac{z^2}{R^2} \quad (4.22)$$

$$u^\mu = \gamma \left(1, \frac{\dot{R}}{R} r \cos \phi, \frac{\dot{R}}{R} r \sin \phi, \frac{\dot{R}}{R} z \right) \quad (4.23)$$

$$T(x) = T_0 \left(\frac{\gamma R_0}{R} \right)^{\frac{3}{\kappa}} \frac{1}{f(s)} \quad (4.24)$$

$$p(x) = p_0 \left(\frac{\gamma R_0}{R} \right)^{3+\frac{3}{\kappa}} \quad (4.25)$$

$$n(x) = \frac{p(x)}{T(x)} = n_0 \left(\frac{\gamma R_0}{R} \right)^3 f(s) \quad (4.26)$$

Ebben az esetben $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2\dot{R}^2/R^2}}$, ahol $\rho^2 = r^2 + z^2$, κ tetszőleges konstans, $f(s)$ tetszőleges függvénye s -nek.

Bár a továbbiakban ezt az alakot fogjuk használni, felírok egy gömbi koordináta-rendszerbeli megoldást is, amely z irányban is tudja az N -pólusú szimmetriát:

$$s = \frac{r^2}{R^2} [1 + \epsilon_a (\cos(N\phi)(1 - \cos(N\theta)) + \epsilon_b \cos(N\theta)] \quad (4.27)$$

$$u^\mu = \gamma \left(1, \frac{\dot{R}}{R} r \sin \theta \cos \phi, \frac{\dot{R}}{R} r \sin \theta \sin \phi, \frac{\dot{R}}{R} r \cos \theta \right) \quad (4.28)$$

$$T(x) = T_0 \left(\frac{\gamma R_0}{R} \right)^{\frac{3}{\kappa}} \frac{1}{f(s)} \quad (4.29)$$

$$p(x) = p_0 \left(\frac{\gamma R_0}{R} \right)^{3+\frac{3}{\kappa}} \quad (4.30)$$

$$n(x) = \frac{p(x)}{T(x)} = n_0 \left(\frac{\gamma R_0}{R} \right)^3 f(s) \quad (4.31)$$

Ekkor $r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$, és $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-r^2\dot{R}^2/R^2}}$, ϵ_a és ϵ_b különböző irányokra vonatkoztatott excentricitás, κ a már jól ismert tetszőleges konstans, $f(s)$ szintén a már alkalmazott tetszőleges függvény.

4.4. Megoldások többszörös szimmetriával

Az 1+3 dimenziós megoldásban N , azaz a szimmetria (vagy épp aszimmetria) paramétere csak a skálaváltozóban jelenik meg. Így amennyiben azt szeretnénk, hogy a modell több, egymásra szuperponálódott forgási szimmetriát tudjon kezelni, elég a skálaváltozót módosítani, hiszen ez hivatott a termodinamikai mennyiségekre nézve konstans felületeket leírni. Mint azt láttuk korábban, valamilyen $\bar{s}$ alakú skálaváltozót kell felírunk, csak most több, különböző súlyokkal egymásra szuperponált szimmetria tulajdonságokkal. Ezt sokféleképpen megtehetjük, és a különböző s -ek között a mérési adatokra illesztéssel tudunk majd dönteni.

Az alábbi alak praktikus lenne abból a szempontból, hogy az r és z koordináták csak egy hatványon szerepelnek benne és csak a koszinuszos tagokra szummázunk, ezzel gyakorlatilag a minimálisan elegendő változtatást eszközöljük csak:

$$s = \frac{r^2}{R^2} \left[1 + \sum_N \epsilon_N \cos(N(\phi - \psi_N)) \right] \quad (4.32)$$

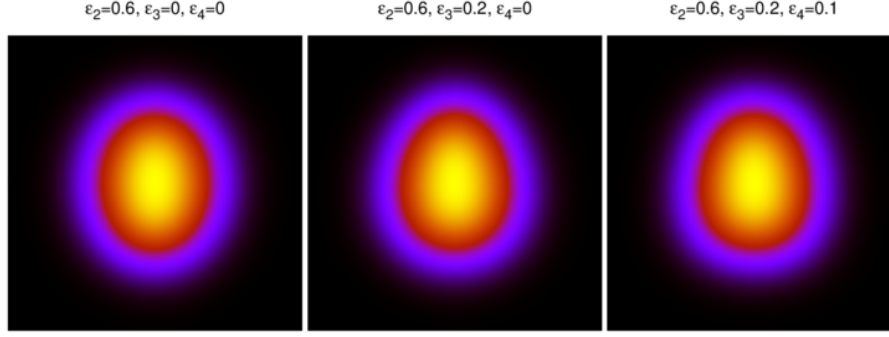
A ψ_N fázistolások szerepéről már volt szó a 4. fejezetben, azonban mivel ϕ -ben körintegrálni fogunk, így a fizikai mennyiségekben nem várunk emiatt változást. A hidrodinamikát leíró egyenletekben a differenciál-operátor tud hatni a szummán belül tagonként, így nem okoz problémát ez az alak, továbbra is megoldásról beszélünk.

Az adatokra illesztésnél azonban az fog kiderülni, hogy sokkal jobban leírja a jelenséget a következő skálaváltozó:

$$s = \sum_N \frac{r^N}{R^N} [1 + \epsilon_N \cos(N(\phi - \psi_N))] \quad (4.33)$$

Ezzel olyan megoldáshoz jutunk, amivel az egyes esetek kombinálásával szinte tetszőleges profilú kezdeti feltétel kezelhetővé válik (7. ábra).

Foglaljuk össze tehát mire jutottunk: Egy különálló ütközésben a geometriai kezdeti feltételekben a legmarkánsabb az elliptikus jelleg, de a fluktuációk miatt már az ütköző tartomány esetében is sérül ez a



7. ábra: $s = \text{konstans}$ felületek egymásra szuperponált aszimmetriák esetén

szimmetria. A tágulás során a termennyiségek (minden jel szerint) (3.1) és (3.2) egyenleteknek megfelelően propagálódnak. A sajátidő mentén pillanatszerűen feltételezett kifagyás után detektáljuk a részecskéket, és impulzuseloszlást mérünk. A modellben ezt a részt a forrásfüggvény oldja meg, amelybe most már az új megoldást is beírhatjuk. Az egymásra rakódott kettő- három- stb. pólusokból annyit veszünk be, amennyit indokoltnak vélünk, a v_m mennyiségek származtatása innentől kezdve jórészt matematikai/programozási feladat.

5. Mérhető mennyiségek származtatása

Megkonstruáltuk tehát a kívánt tulajdonságokkal bíró megoldásokat, ám az adatokkal való összevetéshez származtatni kell az egyrészecske spektrumot és a v_n együtthatókat. A konvenció az, hogy a transzverz sík szögkoordinátáját ϕ , míg a transzverz impulzusét α jelöli.

5.1. Egyrészecske impulzuseloszlás

Idézzük fel a (3.29) kifejezést:

$$N(\mathbf{p}) = \int S(x, \mathbf{p}) d^4x$$

Számoljunk ki néhány mennyiséget, amikre szükség lesz. A 3.3.2. fejezetben beszéltünk róla, hogy a $p_z = 0$ eloszlásokra vagyunk kíváncsiak. Az $f(s)$ függvényt vegyük fel e^{bs} alakban:

$$p_\mu u^\mu = \frac{p_\mu x^\mu}{\tau} = \frac{Et - r_x p_x - r_y p_y}{\tau} \quad (5.1)$$

$$T(x) = \frac{p(x)}{n(x)} = T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{3/\kappa} e^{-bs} \quad (5.2)$$

$p_\mu u^\mu$ skalárszorzatot átírva hengerkoordinátákba kapjuk:

$$r_x p_x + r_y p_y = r p_t (\cos \phi \cos \alpha + \sin \phi \sin \alpha) = r p_t \cos(\alpha - \phi) \quad (5.3)$$

$$p_\mu u^\mu = \frac{p_\mu x^\mu}{\tau} = \frac{Et - r p_t \cos(\alpha - \phi)}{\tau} \quad (5.4)$$

Ezeket behelyettesíthetjük a forrásfüggvénybe, amelyet d^4x szerint integrálva kapjuk meg az egyrészecske impulzuseloszlást:

$$N(p_t, \alpha) = \int n_0 e^{bs} \exp \left[-\frac{Et - r p_t \cos(\alpha - \phi)}{\tau T_0} f(s) \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{-3/\kappa} \right] \delta(\tau - \tau_0) \frac{\tau}{t} \frac{Et - r p_t \cos(\alpha - \phi)}{\tau} d^4x \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
\tau &\rightarrow \tau_0 \\
dt &\rightarrow \frac{\tau_0}{t} d\tau \\
t &\rightarrow \sqrt{\tau_0^2 + r^2 + z^2} \\
d^3x &\rightarrow r dr d\phi dz
\end{aligned}$$

Mivel a függvény sajátidőben Dirac-delta, érdemes t -ről τ -ra áttérni és elvégezni az integrált. Ezen kívül írjuk át a d^3x mértéket hengerkoordinátáknak megfelelően. Ekkor:

$$N(p_t, \alpha) = \int n_0 e^{bs} \exp \left[-\frac{E \sqrt{\tau_0^2 + r^2 + z^2} - r p_t \cos(\alpha - \phi)}{\tau_0 T_0} e^{bs} \right] \frac{E \sqrt{\tau_0^2 + r^2 + z^2} - r p_t \cos(\alpha - \phi)}{\tau_0^2 + r^2 + z^2} r \tau_0 dr d\phi dz \quad (5.6)$$

Vegyük észre, hogy a κ függés csak $\frac{\tau_0}{\tau}$ kitevőjében jelenik meg, így a Dirac-delta integrálásakor ez a függés kiesik, tehát a mérhető mennyiségek szempontjából tetszőleges állandó. Fontos viszont látni, hogy a forrásfüggvény a hadronizáció pillanatában írja le a rendszert, viszont ha a kapott mennyiségek illesztésével rögzítenénk a paramétereket és kifagyástól kezdve visszafelé vizsgálnánk az időfejlődést ($\tau < \tau_0$ -ra), az már κ -függő lenne, tehát a dinamikai változókban már számítana.

5.2. Spektrum és v_m mennyiségek

(3.30) és (3.32) a következőképpen néznek ki a $p_z = 0$ esetben:

$$N(p_t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(p_t, \alpha) d\alpha \quad (5.7)$$

$$v_m(p_t) = \frac{\int_0^{2\pi} N(p_t, \alpha) \cos(m\alpha) d\alpha}{N(p_t)} \quad (5.8)$$

Az integrál $N = 2$ esetén elvégezhető a megfelelő közelítésekkel, tetszőleges, vagy kettőnél nagyobb N -re durva egyszerűsítésekkel lehetne esetleg analitikus alakra jutni, az adatokkal való összevetéshez ebben a pillanatban marad a numerikus út. Megjegyzendő azonban, hogy az α integrál jó eséllyel elvégezhető analitikusan, hiszen létezik a következő

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \phi} \cos(N\phi) d\phi, \quad (5.9)$$

integrális alak $I_n(x)$ a módosított Bessel-függvényre, és az integrál α -ban ilyen alakra hozható.

5.3. Numerikus számítások

Mivel numerikus módszerekhez fordultunk, újra kell gondolni a célkitűzéseket. A hidrodinamikai modellnek hosszú előélete van, ebből néhány paraméter körülbelüli értékeit tudhatjuk [17]. A kifagyó részecskék közül a pionok spektrumára vagyunk leginkább kíváncsiak, az ő tömegük $M = 140$ MeV. Ami a transzverz impulzust illeti, nagyjából a $p_t = 300 \dots 3000$ MeV tartományra vagyunk kíváncsiak, bár azt várjuk, hogy 2 GeV fölött már nem a hidrodinamika írja le a folyamatokat. A τ_0 paramétert tipikusan 7,7 fm/c környékén várjuk, hőmérsékletben a 200 MeV körüli intervallum az érdekes.

Összességében két módon érdemes eljárunk. Egyrészt a mérhető mennyiségek paramétereiktől való függését vizsgálhatjuk, ehhez vesszük a paramétereknek valamilyen konfigurációját, és ehhez képest mindig csak egy paramétert változtatva kiszámítjuk a spektrumot és a v_n mennyiségeket p_t függvényében. Másrészt a mért adatokra illesztéssel vizsgálhatjuk a paraméterek centralitás függését.

Mivel a téridőre való integrálásból az időt el lehetett végezni, így a három térkoordináta maradt. Néhány teszt után az adódott, hogy a megfelelő optimalizálással három egymásba ágyazott egydimenziós integrál számítási ideje tolerálható, nem érdemes Monte-Carlo típusú programokat írni.

A hengerkoordináták előnye, hogy három végtelen intervallum helyett a ϕ integrálás határai jól definiáltak. A z és r koordináták intervallumra szűkítését megpróbáltam a következő változó-helyettesítéssel kiküszöbölni:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{t}{1-t^2}\right) \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} dt \quad (5.10)$$

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 f\left(\frac{t}{1-t}\right) \frac{1}{(1-t)^2} dt, \quad (5.11)$$

értelemszerűen z -ben a végtelen, r -ben a félvégtelen esetet véve. Az algoritmus egy nyílt Newton-Cotes formula, a Milne szabály volt, amely egy negyedrendű módszer és egy felosztáson belül három belső pontot használ, így elkerüli a határértékben végtelenből adódó szingularitásokat. A függvény azonban túl lokalizáltnak bizonyult ehhez az eljáráshoz, túl kevés mintavételezési pont esett a releváns tartományra, így az eredmény nagyon lassan konvergált a felbontás finomításával.

Jobb megoldás volt adni egy becslést a függvény szélességére, és ennek a néhányszorosán végezni a számítást. Mivel ehhez valóban elég egy durva becslés, ezért kirajzoltattam a függvényalakot mindenféle paraméterértékekre, szem előtt tartva, hogy a lehető legszélesebb részt is fel tudjam mérni. A számításhoz áttértem egy zárt formulára, a Simpson 3/8 szabályra, mely egy $[a, b]$ intervallum fölötti integrált a következő módon közelít:

$$\int_a^b f(x) = \frac{b-a}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3), \quad (5.12)$$

ahol $f_i = f(a + i \cdot \frac{b-a}{3})$. Mivel α -ban a függvény $\cos(N\alpha)$ jellegű, így v_m számításakor ebben a változóban nem volt indokolt a Simpson 3/8-hoz hasonló pontos (és így lassabb) algoritmusra, így α -ban csak téglalap módszerrel számoltam, és ez is meglepően hamar konvergált a felosztással.

6. Eredmények

6.1. Paraméterektől való függés

Kezdjük az eredménygörbék paraméterektől való függésével. Az 1. táblázatban egy összefoglaló olvasható a standardnak használt értékekről, az ezektől való eltérések vizsgálatánál mindig csak egyet változtattunk.

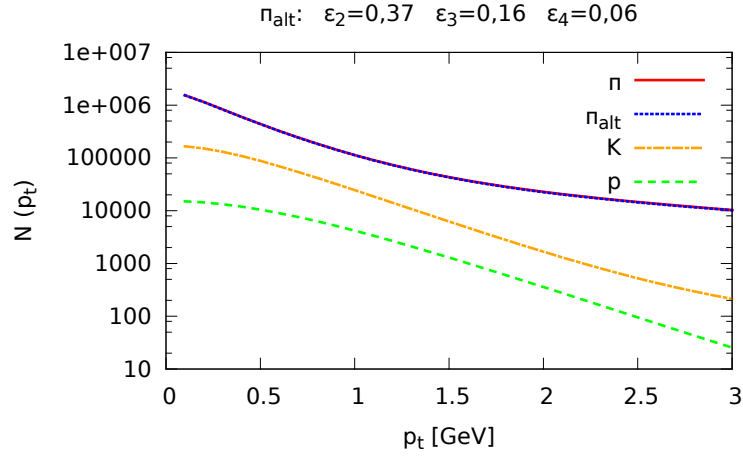
Az első lényeges tapasztalat, hogy a spektrum nem érzékeny ϵ_N értékekre. Ezt várjuk is, hiszen nem gondoljuk, hogy több vagy kevesebb részecske keletkezne tisztán a geometriai elrendeződéstől. A 8. ábrán a pion, kaon és protonspektrum látható fix ϵ_N -re, illetve a pionspektrumot ábrázoltam más excentricitások mellett is, ám a görbék ábrázolási pontosságon belül egymáson futnak. Ez azt is jelenti, hogy a spektrum számításánál a korábbi megoldásokat nem kell ilyen módon korrigálni, ezeknek pedig adott esetben létezik analitikus megoldása.

Végezhetünk egy önellenőrzést olyan módon, hogy csak egy páros, illetve csak egy páratlan aszimmetria paramétert teszünk a modellbe. A várakozás az, hogy a páros-páratlan harmonikusok nem „keverednek”, azaz csak ϵ_2 használata esetén lesz v_2 és v_4 , azonban $v_3 = 0$ -ra számítottunk (9. ábra). Ezzel szemben $\epsilon_2 = \epsilon_4 = 0$ és $\epsilon_3 \neq 0$ esetén csak v_3 -ra várunk nemnulla értékeket (10. ábra).

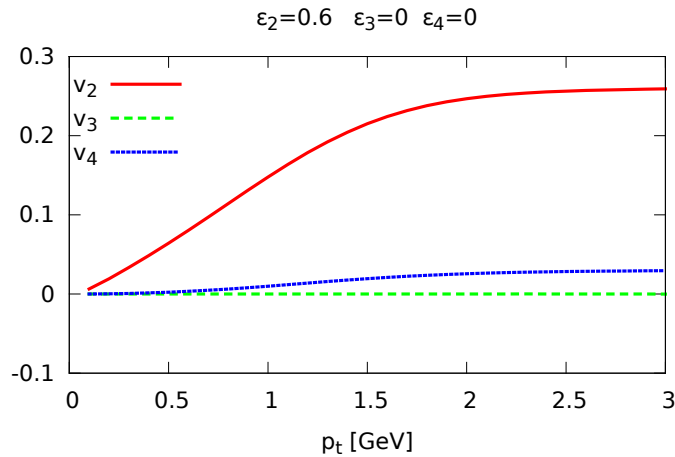
A b -től való függést a C.1. ábra, míg u_t -től valót a C.2. ábra grafikonjai szemléltetik. Ezekről a paraméterektől a görbék nem csak „kisebbség” vagy „nagyobbak” lesznek, hanem a jellegüket is erősen változtatják. A T_0 paramétertől való függést szemlélteti a C.3. ábra, ezen a hőmérséklettel csökkenő trend látható. A C.4.

jelölés	érték	megnevezés
T_0 (MeV)	200	központi kifagyási hőmérséklet
u_t	0,6	transzverz tágulási sebesség
b (1/fm)	0,08	$\sim$ hőmérsékleti gradiens
τ_0 (fm/c)	7,7	kifagyás sajátideje
ϵ_2	0,5	elliptikus excentricitás
ϵ_3	0,1	trianguláris excentricitás
ϵ_4	0,08	négypólusú excentricitás

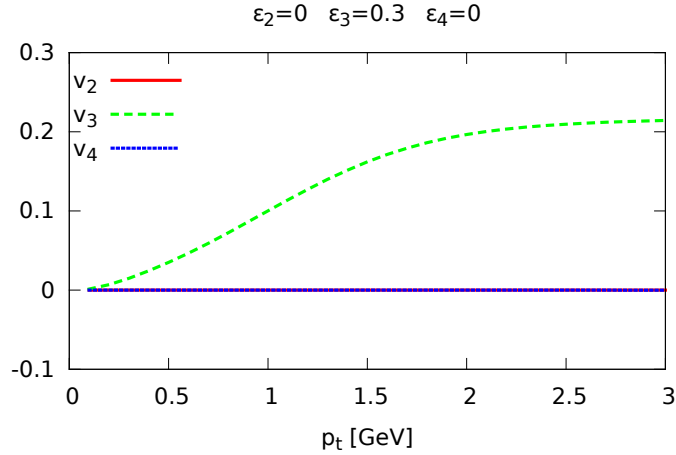
1. táblázat. Összefoglaló a standardnak használt értékekről. A paraméterektől való függések vizsgálatánál egyszerre egyet változtattunk.



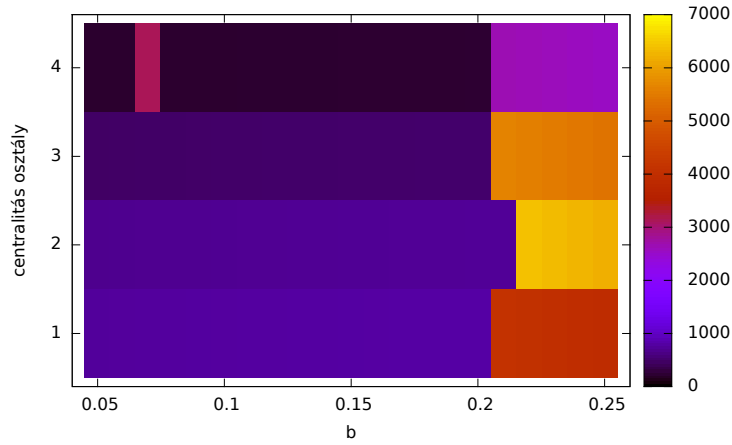
8. ábra: Pion, kaon és protonspektrum a standard ϵ értékeknél. A pionspektrum ábrázolva van alternatív ϵ -okra is, a görbe különbsége a standard aszimmetria paraméterekkel számolthoz képest láthatóan elhanyagolható, vonalvastagságon belül van.



9. ábra: A v_2, v_3, v_4 görbék csak $\epsilon_2 \neq 0$ értékek mellett.



10. ábra: A v_2, v_3, v_4 görbék speciális határesetben: csak ϵ_3 -at raktuk bele a modellbe.



11. ábra: χ^2 értékek centralitás és b függvényében. Négyes centralitásnál és $b = 0,07$ -nél láthatóan volt egy rossz illesztés, de alapvetően $b = 0,2$ -ig jó illeszkedést látunk.

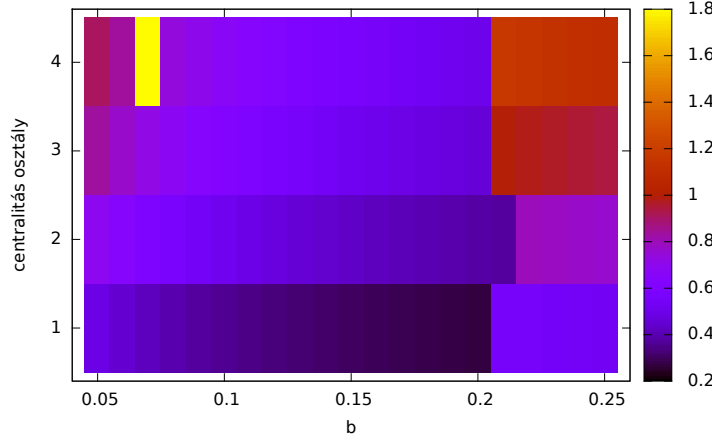
ábrán a τ_0 változtatásával kapott görbéket láthatjuk, erre gyakorlatilag mondatjuk, hogy nem érzékenyek a folyási együtthatók.

6.2. Mérési adatokra illesztés

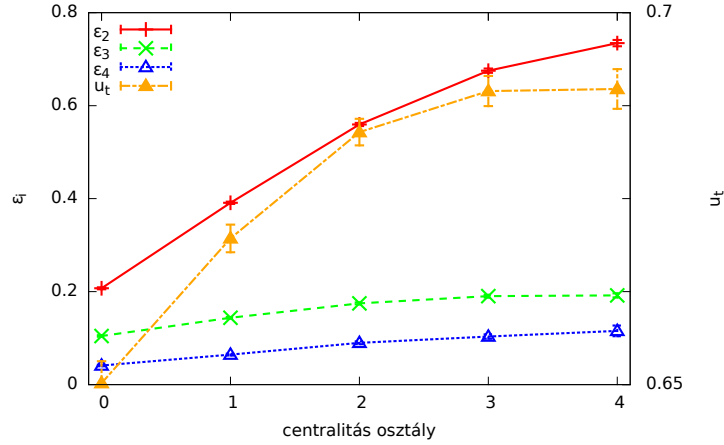
Az integrálási algoritmust a ROOT programcsomag [21] Minuit2Minimizer illesztési és hibaszámítási algoritmusába ágyaztam és a PHENIX kísérletből származó adatokra illesztettem [22]. Az illesztési paraméterek kezdetben ϵ_2 , ϵ_3 , ϵ_4 , u_t és b voltak, de az eredmények arra utaltak, hogy ha b és u_t is illesztési paraméter, akkor túlhatározott a probléma, korreláció van a paraméterek között. Ennek feloldására rögzített b érték mellett próbálkoztam, ekkor az algoritmus jól konvergált.

Érdekes tehát végigpásztázni a b -ben relevánsnak gondolt tartományt és vizsgálni a χ^2 értékeket, így egy intervallumot adva b értékére. Az illesztésekből kapott χ^2 értékeket centralitás és b függvényében a 11. ábrán tanulmányozhatjuk. Ez alapján $b = 0,05$ és $b = 0,2$ között jó illeszkedést kapunk, e fölött jelentősen elromlik.

Hasonló áttekintő ábrához és így egy jó önellenőrzéshez jutunk ϵ_2 ugyanilyen ábrázolásával (12. ábra). A hitelesnek vélt tartomány jó analógiában van a 11. ábrán tapasztalttal. Láthatóan van b -függés ϵ_2 -ben, így érdemes egy „jó” b értéket kinézni, és annál vizsgálni a paraméterek centralitás függését.



12. ábra: ϵ_2 értékek centralitás és b függvényében. Jól azonosítható az a tartomány, ahol az illesztés elromlik. A „jó” tartományon is látunk b -függést.



13. ábra: A paraméterek centralitásfüggése. A bal oldali y tengelyen az ϵ_i aszimmetria paraméterek, míg a jobban u_t skáláját láthatjuk.

A C.5-C.9. ábrákon az illesztett görbéket és a mért pontokat láthatjuk. Mivel $p_t = 2$ GeV fölött már nem a hidrodinamikát gondoljuk a helyes modellnek, így ebben a tartományban nem illesztettünk, az itt mért pontok az ábrákon szürkével vannak jelölve.

A $b = 0,08$ értéket már korábban is standardként használtuk és a χ^2 értékek alapján továbbra is jónak tűnik. Valójában elsősorban a paraméterek centralitásfüggése érdekes, így amíg jó illeszkedéseket vizsgálunk, addig ezt bármelyik megfelelő b -nél nézhetjük.

A paraméterek centralitásfüggését mutatja a 13. ábra. Ez alapján azt látjuk, hogy a centralitásozttály növekedésével ϵ_2 jelentősen nő, míg ϵ_3 -ban és ϵ_4 -ben egy enyhébb növekedést látunk. Ezt várjuk is: a nagyobb centralitásozttályokhoz periférikusabb ütközések tartoznak, ezekben az elliptikus jelleg markánsan felerősödik. A magasabb rendű aszimmetria-paraméterek már a fluktuációk következményei, így ezek kevésbé drasztikusan nőnek.

7. Összefoglalás

Ezen dolgozat elsődleges célja az ismert hidrodinamikai modellek kiterjesztése volt: a többpólusú (és így realisabb) kezdeti feltételek megfelelő kezelésére alkalmas megoldás megtalálása, és a megfigyelhető mennyiségek származtatása.

Röviden áttekintettük a kvarkfolyadék megismerésének lépéseit, és ezzel a hidrodinamika mint eszköz létjogosultságára is fény derült, majd bemutattam a mérhető mennyiségeket, és hogy miként kell őket származtatni a modellből. Az új megoldás egzakt, 1+3 dimenziós, nem elliptikus, és ezzel az első ilyen megoldás a relativisztikus hidrodinamikában. Láttuk, hogy több ilyen megoldás összege is megoldás, ezzel „adaptálódhatunk” adott esetben a kezdeti feltételekhez. Az is kiderült, hogy szigorúan véve amit megtaláltunk az egy ismert megoldás-család tagja, a magasabb rendű aszimmetria paraméterek bevezetésével mégis új eredményekre juthattunk. A mérhető mennyiségeket származtatni numerikus úton sikerült, durvább közelítést alkalmazva nem kizárt, hogy analitikus alakra lehet jutni.

Ezek után vizsgáltuk a megoldásgörbék paraméterfüggését. Kiderült, hogy az egyrészcse spektrumot illetően jól használhatóak az eddigi megoldások, ám az új alakokkal megjelentek a magasabb rendű harmonikusok is. Végül a görbéket a mérési adatokra illesztettük és a paraméterek centralitásfüggését vizsgáltuk.

A részecskegyorsítók az elemi részecskék fizikájának megismeréséhez használható legjobb kísérleti eszközeink. A nehézionok ütköztetésével felmerülő jelenségek láthatóan még sok kutatnivalóval szolgálnak, és a hidrodinamika sok esetben jól alkalmazható ezen jelenségek okainak feltárására.

A. Alkalmazott módszerek

A műhelymunka célkitűzése a relativisztikus hidrodinamika ismert megoldásain túlmutató, új megoldás megtalálása volt, elsősorban többpólusú szimmetriát mutató megoldások szuperponálásával. Ehhez meg kellett találni, milyen szabadságunk van új skálaváltozók konstruálásában és ezekhez illeszkedő megoldást felírni. Ami a tudományos módszert illeti, a relativisztikus hidrodinamika alapjaira volt szükség, illetve a négyes-formalizmus használatára.

A mérhető mennyiségek származtatásakor a numerikus munkát sok analitikus próbálkozás előzte meg. Ehhez szükség volt közelítő integrálási módszerek és speciális függvények használatára. Az integrálandó függvény lokalizáltsága miatt elsősorban a nyeregponthoz közelítést jött szóba, míg az exponenciális alakok miatt a Bessel- és Gamma-függvények adtak lehetőséget a kísérletezésre.

A numerikus munka során többféle nyílt és zárt Newton-Cotes algoritmust is alkalmaztam az integráláshoz. A programokat C++ nyelven írtam, a kódok bonyolódásával objektum orientált programozáshoz kellett folyamodni. Az illesztéshez a GSL [23] és a ROOT [21] programcsomagok többváltozós minimalizáló algoritmusait használtam.

B. Kritérium a skálaváltozóra

Az új megoldások bemutatásakor általában nem részleteztük a számolásokat, amikkel visszaellenőrizhető, hogy valóban megoldják-e a hidrodinamikai egyenleteket. Hogy alátámasszam a leírtak helyességét, nézzük meg hogyan juthatunk egy gyorsan ellenőrizhető kritériumhoz néhány lazább megszorítás mellett. Vegyük észre, hogy az általunk felírt megoldásokban p és u^μ nem függ a skálaváltozó $f(s)$ függvényétől, így az energia-impulzus tenzor megmaradását kifejező (3.2) egyenlet is érzéketlen erre. Ez azt jelenti, hogy ha egy megoldás helyességét ellenőriztük, majd utána csak a skálaváltozóhoz nyúlunk hozzá, akkor elegendő a (3.1) összefüggés teljesülését ellenőrizni. Ez a mi szempontunkból lényeges, hiszen az elsődleges célunk éppen a jobban használható skálaváltozó megtalálása volt.

Le tudjuk tehát választani s szerepét, és amíg a termodinamikai mennyiségek alakján nem változtatunk, ennél tovább is mehetünk. A kontinuitási egyenlet:

$$\partial_\mu(nu^\mu) = \partial_\mu\left(n\frac{x^\mu}{\tau}\right) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Vegyük észre, hogy a számsűrűség alakja mindig $n = n_0(\frac{\tau_0}{\tau})^d \nu(s)$, ahol d a térdimenziók száma, így $n \sim \tau^{-d} \nu(s)$. Könnyen ellenőrizhető és sokszor jól jön a következő azonosság:

$$\partial_\mu \tau^n = n \tau^{n-2} x_\mu \quad (\text{B.2})$$

Mivel $\partial_\mu x^\mu = d + 1$ a kontinuitási egyenlet a következőképpen alakul:

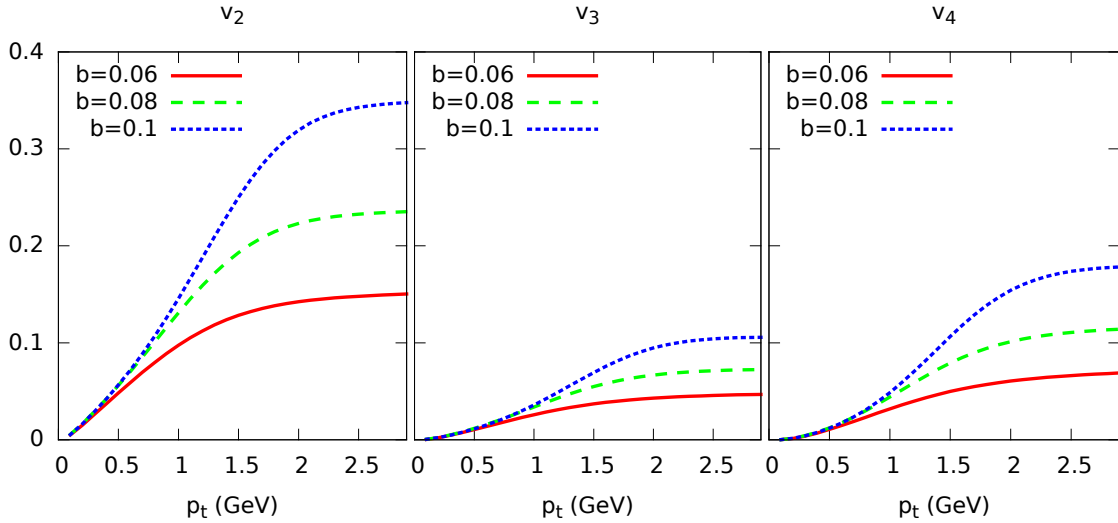
$$\partial_\mu \left[\nu(s) \tau^{-(d+1)} x^\mu \right] = \nu'(s) (\partial_\mu s) \tau^{-(d+1)} x^\mu - (d+1) \tau^{-(d+1)} \frac{x_\mu}{\tau^2} x^\mu \nu(s) + (d+1) \tau^{-(d+1)} \nu(s) \quad (\text{B.3})$$

Felismerve, hogy $x_\mu x^\mu = \tau^2$ csak az első tag marad. A $\nu(s)$ függvény alakja tetszőleges és az egyenlőség is teljesül amennyiben

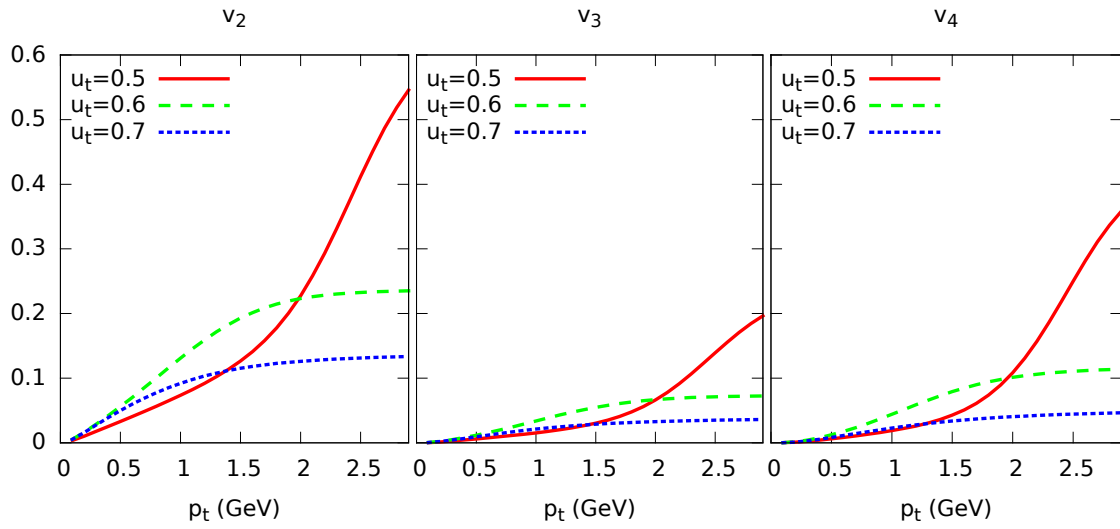
$$u^\mu \partial_\mu s = 0 \quad (\text{B.4})$$

Ez tehát a skálaváltozó szempontjából kritikus egyenlet.

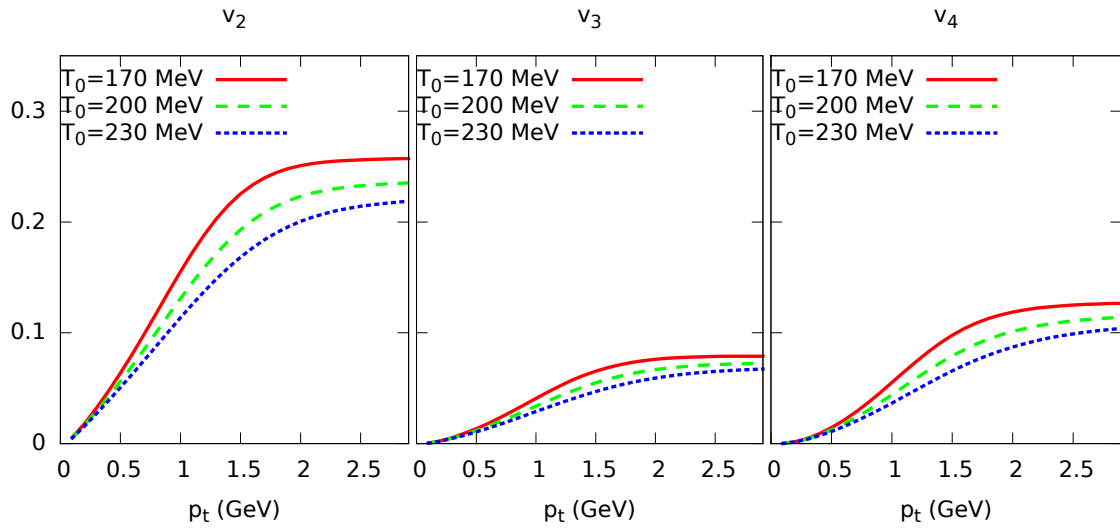
C. Ábrák



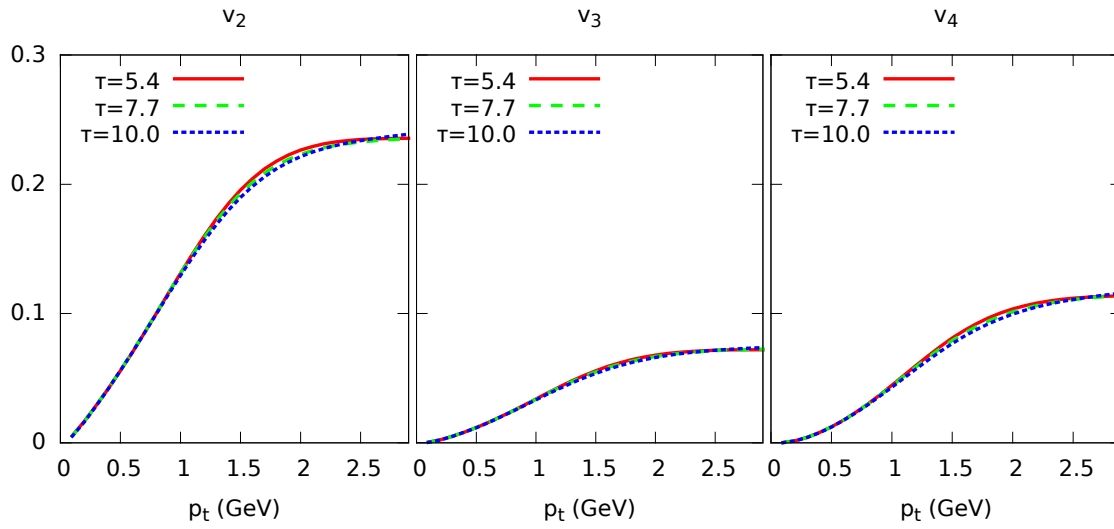
C.1. ábra: Az első három harmonikus különböző b értékeknél.



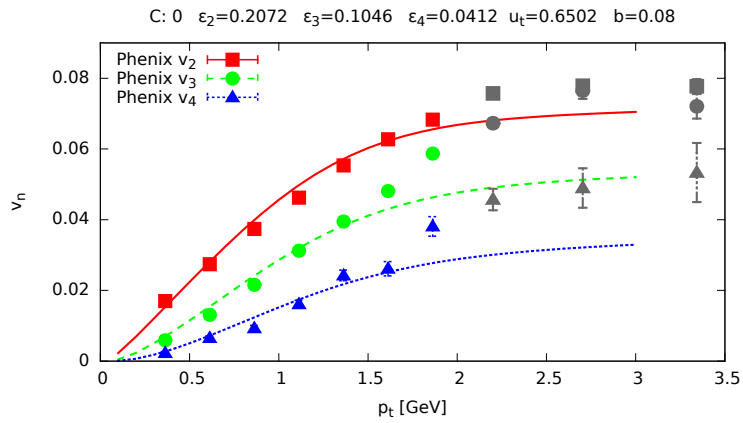
C.2. ábra: A v_2, v_3, v_4 koefficiensek különböző u_t értékeknél.



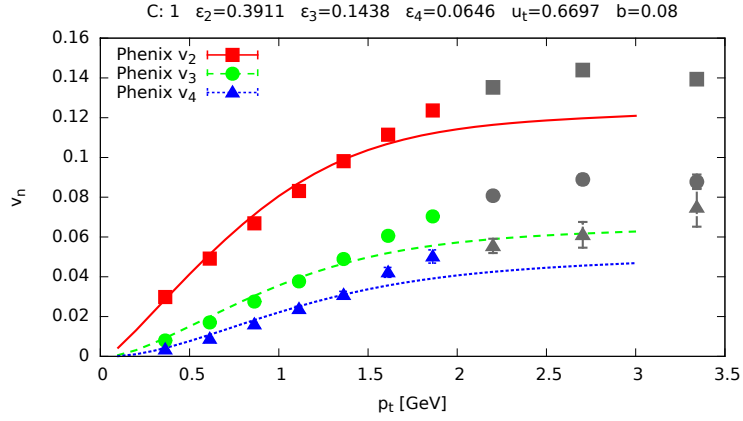
C.3. ábra: Az első három együttható különböző T_0 értékeknél.



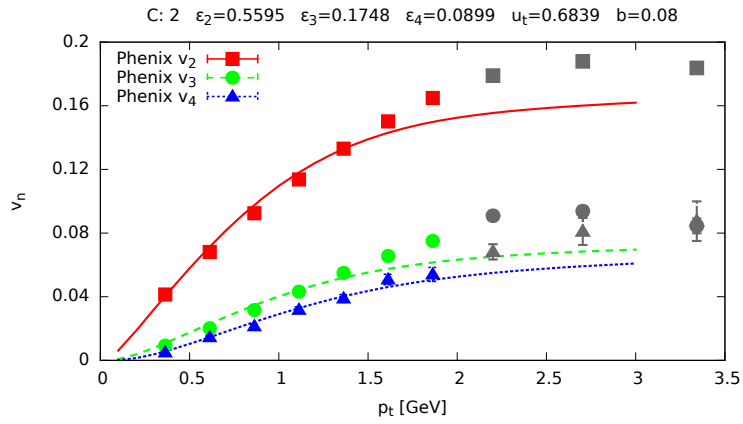
C.4. ábra: Az első három együttható különböző τ_0 értékeknél.



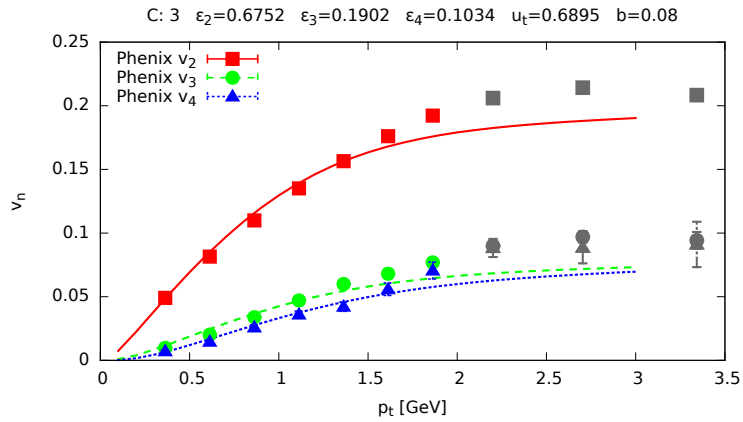
C.5. ábra: Illesztés 0. centralitás osztálynál. Az illesztésnél nem használt pontok szürkével vannak jelölve.



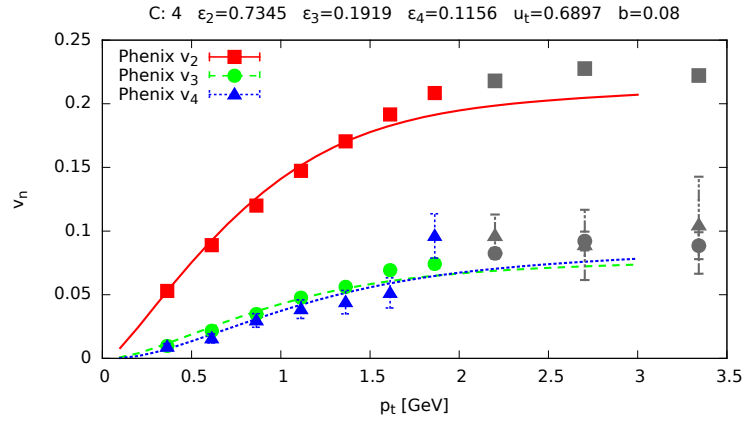
C.6. ábra: Illesztés 1. centralitás osztálánál. Az illesztésnél nem használt pontok szürkével vannak jelölve.



C.7. ábra: Illesztés 2. centralitás osztálánál. Az illesztésnél nem használt pontok szürkével vannak jelölve.



C.8. ábra: Illesztés 3. centralitás osztálánál. Az illesztésnél nem használt pontok szürkével vannak jelölve.



C.9. ábra: Illesztés 4. centralitás osztálynál. Az illesztésnél nem használt pontok szürkével vannak jelölve.

Hivatkozások

- [1] S. Weinberg, *The First Three Minutes* (Basic Books, New York, 1977)
- [2] K. Adcox et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **88**, 022301 (2002), [nucl-ex/0109003](#)
- [3] J. Adams et al. (STAR Collaboration), Phys.Rev.Lett. **91**, 072304 (2003), [nucl-ex/0306024](#)
- [4] S.S. Adler et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **94**, 232301 (2005), [nucl-ex/0503003](#)
- [5] S.S. Adler et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **91**, 072303 (2003), [nucl-ex/0306021](#)
- [6] K. Aamodt et al. (ALICE Collaboration), Phys.Lett. **B696**, 30 (2011), [1012.1004](#)
- [7] S. Chatrchyan et al. (CMS Collaboration), Eur.Phys.J. **C72**, 1945 (2012), [1202.2554](#)
- [8] Y. Aoki, Z. Fodor, S.D. Katz, K.K. Szabó, Phys. Lett. **B643**, 46 (2006), [hep-lat/0609068](#)
- [9] S.S. Adler et al. (PHENIX), Phys. Rev. Lett. **91**, 182301 (2003), [nucl-ex/0305013](#)
- [10] A. Adare et al. (PHENIX Collaboration), Phys.Rev.Lett. **105**, 062301 (2010), [1003.5586](#)
- [11] K. Adcox et al. (PHENIX), Nucl. Phys. **A757**, 184 (2005), [nucl-ex/0410003](#)
- [12] M. Csanád, M. Nagy, S. Lökös, Eur.Phys.J. **A48**, 173 (2012), [1205.5965](#)
- [13] L.D. Landau, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz. **17**, 51 (1953)
- [14] R.C. Hwa, Phys. Rev. **D10**, 2260 (1974)
- [15] J.D. Bjorken, Phys. Rev. **D27**, 140 (1983)
- [16] T. Csörgő, L.P. Csernai, Y. Hama, T. Kodama, Heavy Ion Phys. **A21**, 73 (2004), [nucl-th/0306004](#)
- [17] M. Csanád, M. Vargyas, Eur. Phys. J. **A44**, 473 (2010), [0909.4842](#)
- [18] M. Csanád, I. Májer, Central Eur.J.Phys. **10**, 850 (2012), [1101.1279](#)
- [19] M. Csanád, A. Szabó, iX Workshop on Particle Correlations and Femtoscopy, Arcireale, Italy, November 2-7, 2013, <http://www.ct.infn.it/wpcf2013>
- [20] A. Szabó, M. Csanád, 2013 Zimanyi Winter School on Heavy Ion Physics, Budapest, Hungary, December 2-6, <http://zimanyischool.kfki.hu/13/>
- [21] R. Brun, F. Rademakers, Nucl.Instrum.Meth. **A389**, 81 (1997)
- [22] A. Adare et al. (PHENIX Collaboration), Phys.Rev.Lett. **107**, 252301 (2011), [1105.3928](#)
- [23] M.G. et al, *Gnu Scientific Library: Reference Manual*, 2nd edn. (2003), ISBN 0954161734