

TDK-DOLGOZAT

NEMLINEÁRIS ANYAGTULAJDONSÁGOK
MODELLEZÉSE A NUMERIKUS
TÉRSZÁMÍTÁSBAN

ÍRTA:

Unger Tamás István

KONZULENS:

Prof. Dr. habil. Kuczmann Miklós

Széchenyi István Egyetem
Automatizálási Tanszék
Elektromágneses Terek Laboratórium
2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés, köszönetnyilvánítás	3
2. A mágneses hiszterézis	4
2.1. A hiszterézis operátor	4
2.2. A ferromágneses hiszterézis	5
2.3. A jelenség oka	6
2.4. A skaláris B-H kapcsolat mérése	8
2.5. Mérési eredmények	9
2.6. A mágneses permeabilitás meghatározása	11
3. A Maxwell-egyenletek teljes rendszere	13
3.1. Bevezetés	13
3.2. A Maxwell-egyenletek	14
4. A végeelem-módszer	16
4.1. Történeti áttekintés	16
4.2. A módszer alapelve	16
4.2.1. Probléma absztrahálása, peremfeltételek	16
4.2.2. A súlyozott maradék elve, gyenge alak	17
4.2.3. A problémátér diszkretizálása	17
4.2.4. Asszemblálás, megoldás	18
4.3. Formafüggvények	19
4.4. A szimuláció lépései	20
5. Nemlinearitás implementációja végeselemes környezetben	22
5.1. Fixpontos iterációs séma	22
5.2. A polarizációs formula	23
5.3. Nemlineáris formalizmusok megvalósítása	24
5.3.1. Séma a mágneses térerősségre építve	24
5.3.2. Séma a mágneses indukcióra építve	25

6. Egydimenziós probléma szimulációja	26
6.1. A probléma definiálása	26
6.2. A problémát leíró egyenletek	27
6.3. Gyenge alak levezetése	27
6.4. Végeselemes implementáció	28
6.4.1. Az első integrál	29
6.4.2. A második és harmadik integrál	29
6.5. Gauss-kvadratúra	30
6.6. Diszkretizálás, peremfeltételek	31
6.7. Eredmények, kiértékelés	31
7. Kétdimenziós probléma szimulációja	35
7.1. Vezető lemez mágneses térben	35
7.2. Rácsgenerálás	36
7.3. Végeselemes implementáció	36
7.4. Numerikus integrálás háromszög felett	37
7.5. Eredmények, kiértékelés	38
8. Kétdimenziós szimuláció a mágneses indukcióra építve	41
8.1. A probléma definiálása	41
8.2. A problémát leíró egyenletek	42
8.3. Gyenge alak levezetése	43
8.4. Végeselemes implementáció	45
8.5. A szimulált geometria	46

1. fejezet

Bevezetés, köszönetnyilvánítás

Dolgozatom az elektromágneses térszimuláció témakörében íródott. A számítástechnika rohamos fejlődésének és az iparban elterjedt szimulációs szoftverek térnyerésének köszönhetően napjainkban már alapvető feladat és elvárás a kutatási és fejlesztési területen a különböző anyagparaméterek jellemzőinek szimulációja, modellezése és az adott feladathoz optimalizálása. Az elmúlt évek, évtizedek során az elektromágneses terek numerikus számítása fontos, integrált része lett a villamosmérnöki és informatikai tudományoknak. Értekezésem ezen széles területen belül alacsonyfrekvenciás problémák szimulációjával foglalkozik végeselem-módszer segítségével.

A villamos gépek, motorok és transzformátorok tervezése során különösen fontos az adott feladathoz illeszkedő (például kis veszteséggel rendelkező) vasanyag kiválasztása. Az elektromágneses szempontból értelmezett anyagparaméterek optimalizálását numerikus térszámítással, így végeselem-módszerrel is hatékonyan lehet segíteni. Dolgozatom első részében az elméleti áttekintés után bemutatom a mágneses térerősség és a mágneses indukció közötti skaláris hiszterézis mérési lehetőségét, illetve az ebből felépíthető és a szimulációhoz illeszthető nemlineáris karakterisztikát, a karakterisztika paramétereinek meghatározását. A második egységben felvázolom az elektromágneses tér jellemző mennyiségei között összefüggést teremtő Maxwell-egyenletek teljes rendszerét, különös figyelmet fordítva a nemlinearitást is magukban foglaló konstitúciós relációkra. A harmadik részben bemutatom a végeselem-módszert, annak alkalmazási lehetőségeit a villamosmérnöki gyakorlatban, illetve felvázolom a nemlineáris karakterisztika szimulációhoz illesztését biztosító fixpontos módszert is. A negyedik egységben definiálom a munkám során vizsgált problémákat és a hozzájuk kapcsolódó, a szimuláció során megoldásra kerülő parciális differenciálegyenleteket, végül bemutatom az elvégzett szimulációkat, eredményeket.

Dolgozatomat a Széchenyi István Egyetem Automatizálási Tanszékének Elektromágneses Terek Laboratóriumában írtam, mely munkaközösségnek 2012 januárja óta vagyok aktív tagja. A mérések, szimulációk és kiértékelések elvégzése során a laboratórium minden kollégája rendelkezésemre állt és támogatott, amit ezúton is szeretnék megköszönni.

Munkám a *TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0012: Hibrid és elektromos járművek fejlesztését megalapozó kutatások* projekt keretében, a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg. A dolgozatot **L^AT_EX** szövegszerkesztőben szerkesztettem.

2. fejezet

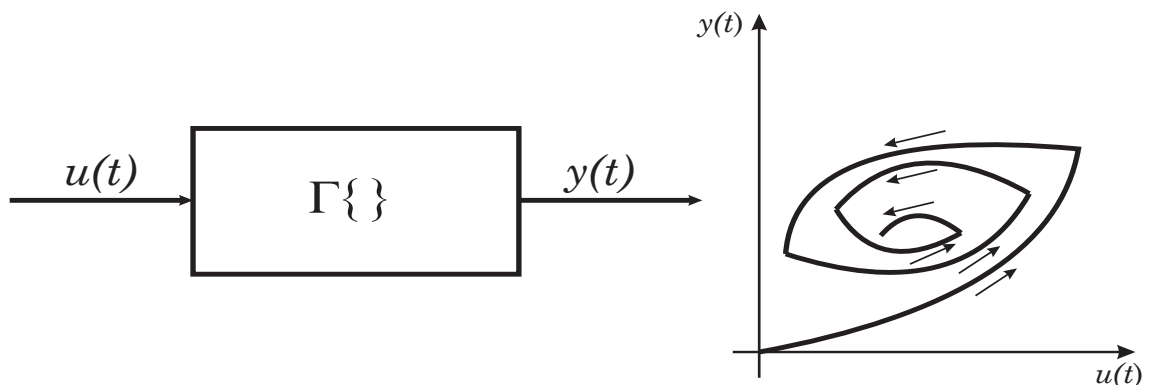
A mágneses hiszterézis

2.1. A hiszterézis operátor

A hiszterézis, mint jelenség általános megértéséhez első közelítésben érdemes absztrahálni a problémát: definiáljunk egy olyan $\Gamma\{\}$ rendszeroperátorral egyértelműen jellemezhető egy bemenetű és egy kimenetű rendszert, mely a bemenetére érkező $u(t)$ folytonos idejű jelet $y(t)$ folytonos idejű kimeneti válaszjellé képezi le, mely leképzés matematikai, operátoros alakban [1]:

$$y(t) = \Gamma\{u(t)\}. \quad (2.1)$$

Előfordulhat továbbá, hogy a rendszer bemeneti jele időfüggő vektor, ebben az esetben a kimenet is hasonlóképpen vektorfüggvény formájában adódik. A két mennyiség között a vektoriális operátor teremt kapcsolatot: $\vec{y}(t) = \vec{\Gamma}\{\vec{u}(t)\}$. Abban az esetben, ha az operátor által végzett leképzés, tehát $u(t)$ és $y(t)$ kapcsolata nemlineáris és többértékű, továbbá $y(t)$ kimeneti- vagy válaszjel értéke egy tetszőleges τ időpillanatban függ $u(t)$ és $y(t)$ $t \leq \tau$ illetve $t < \tau$ időpontbeli értékeitől, egyszerűbben fogalmazva a rendszer előéletétől, akkor hiszterézissel bíró rendszerről beszélhetünk. Az összefüggés a 2.1. ábrán tanulmányozható, a feltüntetett nyilak a függvény második változóját, az időt reprezentálják.



2.1. ábra. A rendszermodell és egy lehetséges gerjesztés-válasz karakterisztika

Az ilyen karakterisztikával jellemzett rendszerek memóriával rendelkeznek; úgy is mondhatjuk, hogy a kimeneti jel aktuális értéke döntően függ attól, hogy rendszer

a vizsgálódás időpillanatát megelőzően milyen állapotban volt. Ezen általános definíció segítségével a tudomány különböző területeinek jelenségei tárgyalhatóak attól függően, hogy $u(t)$ és $y(t)$ milyen elgondolás alapján kerül megválasztásra.

A természettudomány vizsgálódási területétől elszakadt, de kiváló demonstrációs példa a közgazdaságtan által tárgyalt export hiszterézissel bíró időfüggése [2]: egy ország gazdaságának áttérése az exporttermelésre időigényes és nehézkes, de ha az átállás megtörtént, utána nem igényel különösebb erőfeszítést a fenntartása. A jelenség szerepe a villamosmérnöki gyakorlatban is kiemelkedő: a dolgozatom témájául szolgáló ferromágneses hiszterézisen túl jelentős szerepe van az elektronikában például a hiszterézises komparátornak is.

2.2. A ferromágneses hiszterézis

Ferromágneses hiszterézisről beszélhetünk akkor, ha a rendszermodell bemenete $u(t) = H(t)$ mágneses térerősség, a kimenete pedig $y(t) = B(t)$ mágneses indukció. A jelenség okának tárgyalását az anyagok mágneses tulajdonságának kialakulásától célszerű kezdeni. A mágnesesség egyik lehetséges forrása az elektronok különböző energiaszinteken történő mozgása az anyagok atomi struktúrájában [3]. A fizikai atommodellekben az elektronok pályamenti mozgása és forgása szimulálható elemi áramhurkok és a hozzájuk kapcsolódó mágneses dipólus fogalmának segítségével. Az elemi áramhurok $\vec{m}_i$ mágneses momentuma definiálja az áramhurok által létrehozott mágneses mezőt [18]:

$$\vec{m}_i = I_i \cdot d\vec{s}_i, \quad (2.2)$$

ahol I_i az elemi áramhurok árama, $d\vec{s}_i$ pedig a hurok által körülzárt felület. *Mágneses atom*nak nevezzük az olyan atomokat, amelyek kompenzálatlan mágneses momentummal rendelkeznek az elektronjaik mozgásából fakadóan. Egy ilyen atom teljes mágneses momentuma az elemi áramhurkok által létrehozott momentumok vektoriális összegeként számítható. Ha egy ΔV térfogat n darab mágneses atomot tartalmaz, és ezen atomok $\vec{m}_i$ momentummal rendelkeznek ($i = 1, 2, \dots, n$), akkor a vektoriális összegükből adódó $\vec{m}$ mágneses momentum:

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i. \quad (2.3)$$

Ezen mágneses momentum térfogati sűrűségét nevezzük $\vec{M}$ mágnesezettségi vektornak:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{m}_i \right). \quad (2.4)$$

$\vec{B}$ mágneses indukció hatására az $\vec{m}$ momentummal rendelkező mágneses dipólusra ható τ forgatónyomaték az indukció és a momentum vektoriális szorzataként definiálható:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (2.5)$$

Továbbá ugyanezen mágneses dipólus energiája az indukció és a momentum vektoriális szorzatának mínusz egyszeresével lesz ekvivalens. A $\vec{B}$ mágneses indukcióvektor

két összetevőre bontható: $\mu_0 \vec{H}$ a szabad tér mágneses indukciója (μ_0 a vákuum permeabilitása, értéke $4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{Vs}{Am} \right]$), $\mu_0 \vec{M}$ pedig a mágnesezettségi vektorból adódó indukciókomponens, amely a vizsgált anyag mágneses tulajdonságának függvénye [3]. Az indukcióvektor tehát $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ alakban írható fel, ahol $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ az úgynevezett *mágneses térerősség*. Mágneses anyagok esetében $\vec{M}$ mágnesezettség és $\vec{H}$ mágneses térerősség kapcsolata egy, a 2.1.-ben tárgyalt nemlineáris, többértékű hiszterézis operátorral fejezhető ki:

$$\vec{M} = \mathcal{H}\{\vec{H}\}. \quad (2.6)$$

Ezek alapján a mágneses térerősség és a mágneses indukció kapcsolatát egy másik, hasonlóan hiszterézises tulajdonságot reprezentáló operátor fejezi ki:

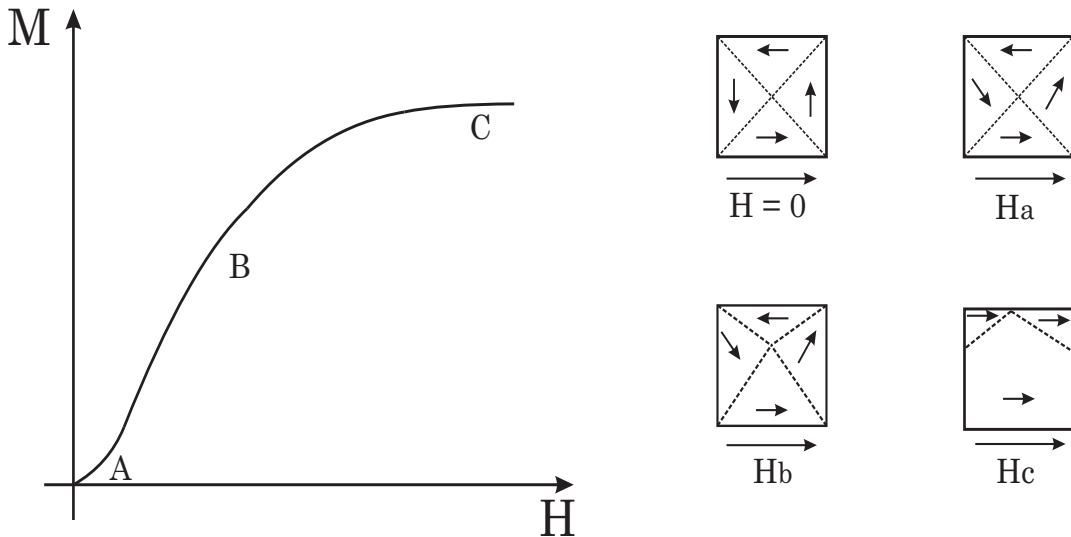
$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad (2.7)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \mathcal{H}\{\vec{H}\}), \quad (2.8)$$

$$\vec{B} = \mathcal{B}\{\vec{H}\}. \quad (2.9)$$

2.3. A jelenség oka

A ferromágneses anyagok esetén tapasztalható nemlineáris, többértékű $\vec{M}$ - $\vec{H}$ kapcsolat fizikai magyarázatát mutatja be a 2.2. ábra.

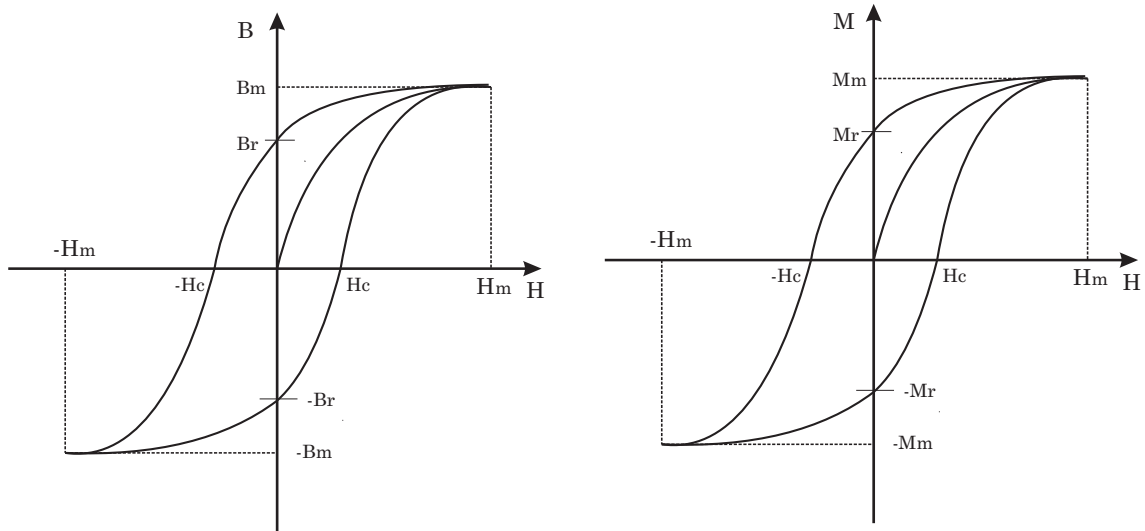


2.2. ábra. Az első mágnesezési görbe és a doménstruktúra alakulása

Az ilyen típusú anyagok esetében a külső elektronhéjon jelentős mennyiségű kompenzálatlan spinű elektron található, melyek egymással kölcsönhatásban állnak, úgynevezett *doméneket* hozva így létre [4]. Amennyiben az anyag nem volt még mágneses térben, a mágneses erővonalak egy doméncsoporton belül záródnak.

Ekkor az anyag a legkisebb energiájú állapotban van, kifelé nem rendelkezik mágneses tulajdonsággal. Ha az anyagot mágneses térbe helyezzük, azok a domének, melyek mágnesezettsége eredendően a külső tér irányába mutat, nőni kezdenek a többi domén rovására. Ezen doménfal-elmozdulások irreverzibilisek, amely irreverzibilitás megmagyarázza, hogy miért rendelkeznek az ilyen típusú anyagok mágneses szempontból memóriával.

Az 2.2. ábra lényegében az eredő mágneses momentumot, vagy az ezzel arányos mágnesezettséget adja meg a mágneses térerősség függvényében. Ez az úgynevezett első mágnesezési görbe, mely három szakaszra bontható: a nemlineáris (A) szakasz a reverzibilis faleltolódásokkal, a közel lineáris (B) szakasz az irreverzibilis faleltolódásokkal, a telítési vagy szaturációs (C) szakasz pedig a momentumok elfordulásával magyarázható [3]. Ferromágneses közegben $M \gg H$, így $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \approx \mu_0 \vec{M}$, tehát a $B - H$ görbe és az $M - H$ görbe jó közelítéssel megegyezik. A teljes histerézishurok a 2.3. ábrán látható.



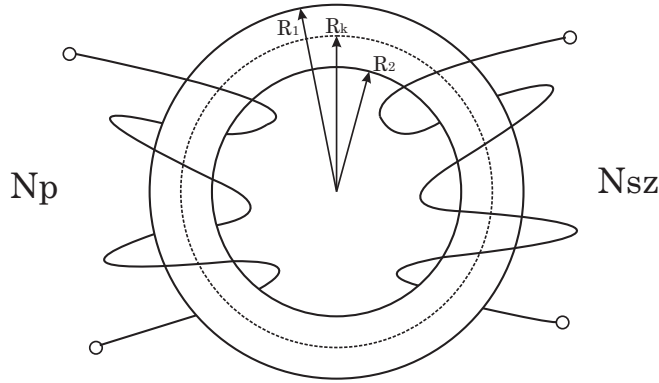
2.3. ábra. A teljes histerézishurok

A $H = B = M = 0$ pont definiálja az úgynevezett lemágnesezett állapotot. Ha a mágneses térerősséget növeljük, az anyag mágnesezettsége (és természetesen az indukció is) nőni fog. A görbe ezen szakasza az eddig tárgyalt első mágnesezési görbe (szűzgörbe). Ha a mágneses térerősséget kritikus szintig növeljük, akkor telítésbe jutunk: ettől a ponttól kezdve a növekvő térerősség ellenére sem fog változni a mágneses indukció értéke. Ezen nevezetes pont a szaturációs pont (H_m, M_m, B_m) [5].

Az irreverzibilis faleltolódások megmagyarázzák, hogy csökkenő térerősség esetén a mágnesezettség alakulása miért nem követi a szűzgörbét. Csökkenő mágneses térerősség esetén a megváltozott doménstruktúra miatt az indukció bár csökkenni kezd, de nem az előző esetben tapasztalt függvény szerint. Zérusra csökkentett mágneses térerősség esetén nem fogunk zérus mágnesezettséget tapasztalni, maradni fog valamekkora M_r, B_r remanencia. Az anyag lemágnesezéséhez negatív térerősséget kell létrehoznunk: ez a $-H_c$ koercitív mágneses tér, ekkor $B = M = 0$. H csökkentése esetén negatív szaturációba kerülünk, az innen növekvő térerősség negatív remanenciát hagy, és a lemágnesezéshez pozitív koercitív teret igényel. A $H = B = 0$ állapot ezen a görbén soha nem érhető el [4].

2.4. A skaláris B-H kapcsolat mérése

Munkám során kizárólag a skaláris hiszterézis vizsgálatával foglalkoztam, azaz a mágneses térerősség és a mágneses indukció vektorjainak kizárólag a hosszát, nagyságát vizsgáltam, az általuk bezárt szöget nem. Az ilyen jellegű vizsgálat esetén minden esetben ki kell kötni, hogy $\vec{H}$ és $\vec{B}$ egymással párhuzamosak. A skaláris összefüggés mérésére a legelterjedtebb elrendezés az úgynevezett toroid-transzformátoros mérés, melynek sematikus vázlata a 2.4. ábrán látható.



2.4. ábra. Toroid transzformátor

A transzformátor elkészítéséhez egy adott típusú anyagból egy kör alakú próbatestet választottam, amelyet megfelelő módon feltekercseltem. A mérés során egy kiváló minőségű, kis veszteségű, villamos gépbe tervezett mágneses vasanyagot vizsgáltam. A mérés elve a következő: két eltérő tekercselést vezettem rá a próbatestre. A primer oldalt árammal gerjesztettem, mely hatására feszültség indukálódott, amit a szekunder oldali, a primer oldaltól gondosan elszeparált tekercselésen tudtam visszamérni. A visszamért feszültségből a mágneses indukció értéke számítható. Az alábbiakban bemutatom a mérés elméleti háttérét, a felhasznált képleteket és eszközöket.

A 2.4. ábrán N_p jelöli a primer oldali-, N_{sz} a szekunder oldali tekercs menetszámát. R_1 és R_2 a külső és belső sugarak, melyekből R_k közepes sugár $R_k = \frac{R_1+R_2}{2}$ alapján számítható, mely segítségével a toroid próbatest közepes hossza $l_k = 2R_k\pi$ formulával írható le. A méréshez szükséges alapösszefüggések a Maxwell-egyenletek segítségével levezethetők. A Maxwell-egyenletek teljes rendszerére dolgoztam külön fejezetben tér ki, itt csak az alkalmazást mutatom be az adott mérési problémával kapcsolatban.

Az ismert áramgerjesztés és a mágneses térerősség között a kvázistacionárius gerjesztési törvény, vagy másnéven az I. Maxwell-egyenlet redukált alakja teremt kapcsolatot:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}. \quad (2.10)$$

A mérési elrendezés előnyeit kihasználva az integrálok skaláris szorzattá egyszerűsödnek:

$$H(t)2R_k\pi = N_p I(t). \quad (2.11)$$

Innen a mágneses térerősség kifejezhető, mely alapján belátható, hogy a térerősség pillanatnyi értéke a primer oldali menetszám, a pillanatnyi gerjesztőáram és a közepes sugár ismeretében számítható:

$$H(t) = \frac{N_p I(t)}{2R_k \pi}. \quad (2.12)$$

A mágneses indukció meghatározásához a Faraday-féle indukciós törvényből (II. Maxwell-egyenlet) szükséges kiindulni:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad (2.13)$$

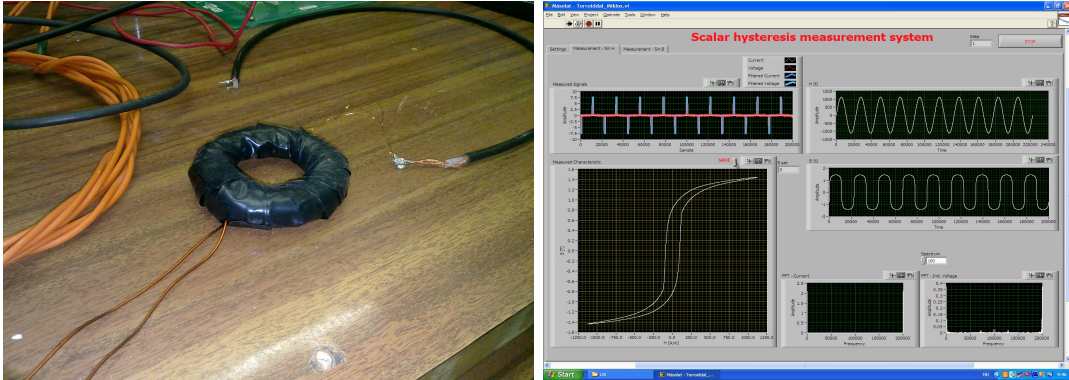
Mivel a mágneses indukció felületi integrálja megadja a felületen áthaladó fluxust, illetve a mágneses térerősség vonalmenti integrálja az indukált feszültséggel lesz egyenlő, ezért (2.13) átalakítható [1]:

$$u_i(t) = -N_{sz} \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B}(t) \cdot d\vec{A}, \quad (2.14)$$

$$u_i(t) = -N_{sz} \frac{\partial}{\partial t} B(t) A, \quad (2.15)$$

$$B(t) = B_0 + \frac{1}{N_{sz} A} \int_0^t u_i(\tau) d\tau. \quad (2.16)$$

A formulában A a toroid keresztmetszete, B_0 pedig konstans. A mérést a 2.5. ábrán látható transzformátoron, LabVIEW [6] mérőrendszer segítségével végeztem el.



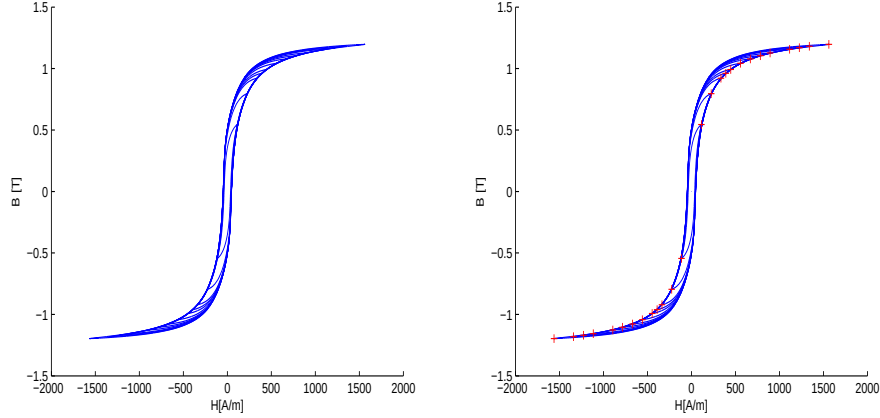
2.5. ábra. A vizsgált transzformátor és a mérőrendszer

A számítógépes mérőrendszer segítségével egy áramgenerátort vezéreltem, mely áramgenerátor a primer oldali gerjesztést szolgáltatva. A rendszer a szekunder oldali indukált feszültséget mérte vissza és dolgozta fel számítógépes úton. Az adatcsere és a vezérlés egy NI-DAQ [7] adatgyűjtő kártya segítségével történt [19].

2.5. Mérési eredmények

A mérés során nem vizsgáltam a próbatest $B - H$ kapcsolatának frekvenciafüggését, kizárólag a nemlinearitást reprezentáló hiszterézismentes mágnesezési görbe

identifikációjához szükséges koncentrikus görbékét vettem fel, amit a gerjesztőáram amplitúdójának fokozatos növelésével tettem meg. A méréshez használt toroid paraméterei: $N_p = 197$; $N_{sz} = 139$; $R_2 = 23,5 \text{ mm}$; $R_1 = 28,5 \text{ mm}$; $R_k = 26 \text{ mm}$; $l_k = 163,3628 \text{ mm}$; $A = 10^{-5} \text{ m}^2$. A koncentrikus hurkok mindegyike kijelöl egy-egy, az adott hurokra jellemző $|H_{max}|$, $|B_{max}|$ értéket, mely pontok meghatározzák az anyagra jellemző hiszterézismentes mágnesezési görbét. Az eredmények a 2.6. ábrán láthatóak.

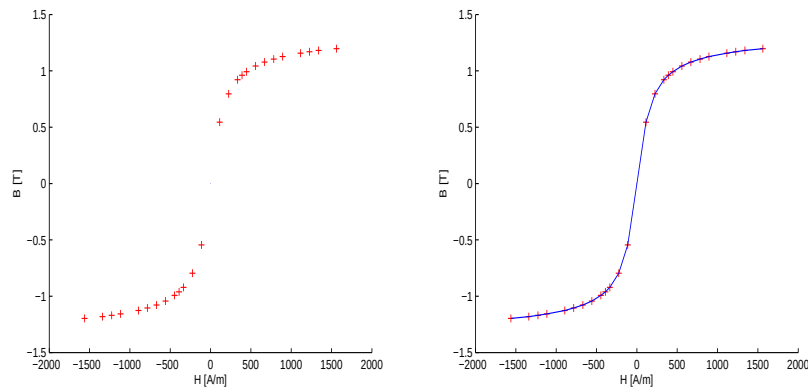


2.6. ábra. Mért koncentrikus görbék

A pontokra egy paraméterezett inverz tangens-görbe illeszthető, melyet célszerű a következő alakban felírni:

$$B(H, t) = \frac{2B_s}{\pi} \arctg \left(\frac{H(t)}{H_0} \right), \quad (2.17)$$

ahol B_s és H_0 meghatározandó paraméterek. Az identifikációt *Matlab Curve Fitting Toolbox* [8] komponensének segítségével tettem meg. Az eredmény a 2.7. ábrán látható.



2.7. ábra. Az eredeti pontok és az illesztett görbe

Az illesztett inverz tangens-görbe paraméterei: $B_s = 1,25805$, $H_0 = 146,47722$.

2.6. A mágneses permeabilitás meghatározása

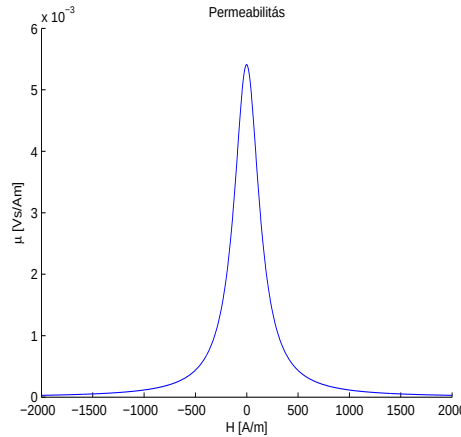
Lineáris, izotróp közeget feltételezve a mágneses térerősség és a mágneses indukció közötti kapcsolat $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ alakban írható fel, ahol μ_r a vizsgált anyag vákuumhoz viszonyított relatív permeabilitása. Bár ebben az esetben μ értéke konstans, érdemes szem előtt tartani, hogy a permeabilitás a mágneses térerősség függvénye, pontosabban a mágneses indukció $\vec{H}$ -szerinti deriváltja. Skaláris esetben:

$$\mu = \mu(H) = \frac{\partial B}{\partial H}. \quad (2.18)$$

Ezen okból a nemlineáris, hiszterézismentes karakterisztikával rendelkező anyagok is térerősségfüggő permeabilitással fognak rendelkezni, amely függvény a mágnesezési görbe deriválásával kapható. Mivel a B-H karakterisztika analitikus, zárt formában felírható, ezért a deriválás is könnyen elvégezhető:

$$\mu(H) = \frac{\partial}{\partial H} \left\{ \frac{2B_s}{\pi} \arctg \left(\frac{H}{H_0} \right) \right\} = \frac{2B_s}{\pi H_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{H}{H_0} \right)^2}. \quad (2.19)$$

A képlet alapján meghatározott permeabilitásfüggvény a 2.8. ábrán látható.



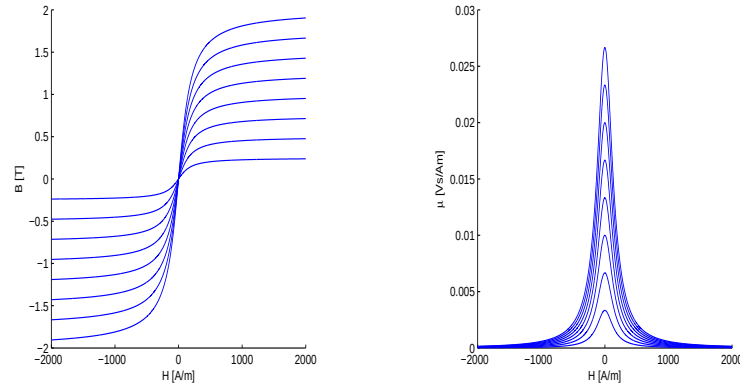
2.8. ábra. A vizsgált anyag permeabilitásfüggvénye

Érdemes megfigyelni a két szabadon választható, az anyagot jellemző paraméter (H_0, B_s) hatását a nemlineáris mágnesezési görbére és a permeabilitásra. Amennyiben B_s értékét növeljük, úgy változik a függvény telítési pontja. Másképpen fogalmazva: B_s értéke számszerűen befolyásolja az inverz tangens-görbe konvergenciáját:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2B_s}{\pi} \arctg \left(\frac{H}{H_0} \right) \right\} = B_s \quad \forall B_s \in \mathbb{R}^+, \quad (2.20)$$

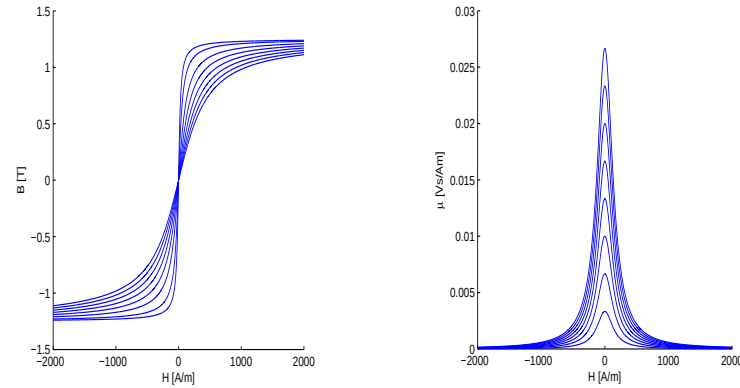
$$\lim_{H \rightarrow -\infty} \left\{ \frac{2B_s}{\pi} \arctg \left(\frac{H}{H_0} \right) \right\} = -B_s \quad \forall B_s \in \mathbb{R}^+. \quad (2.21)$$

A paraméter a konvergencia sebességét is megváltoztatja: minél nagyobb B_s értéke, annál "élesebb" lesz a függvény nullátmenete, ami a permeabilitás maximumának növekedését fogja maga után vonni. Ez a jelenség tanulmányozható a 2.9. ábrán.



2.9. ábra. B_s paraméter hatása

H_0 növelése számszerűen nem fogja befolyásolni az indukciófüggvény konvergenciáját, csupán annak sebességét: a függvény minden esetben $|B_s|$ -hez tart, de egyre "lassabban". H_0 értékét növelve a permeabilitás maximuma csökken, ami abból adódik, hogy a konvergencia sebessége miatt egyre laposabb indukciógörbéket kapunk. A fizika nyelvén ez azt jelenti, hogy az anyagot nehezebb felmágnesezni: egy bizonyos indukcióérték eléréséhez nagyobb mágneses teret kell alkalmazni, mint egy kisebb H_0 -val jellemezhető anyag esetében. Ez látható 3.1. ábrán.



2.10. ábra. H_0 paraméter hatása

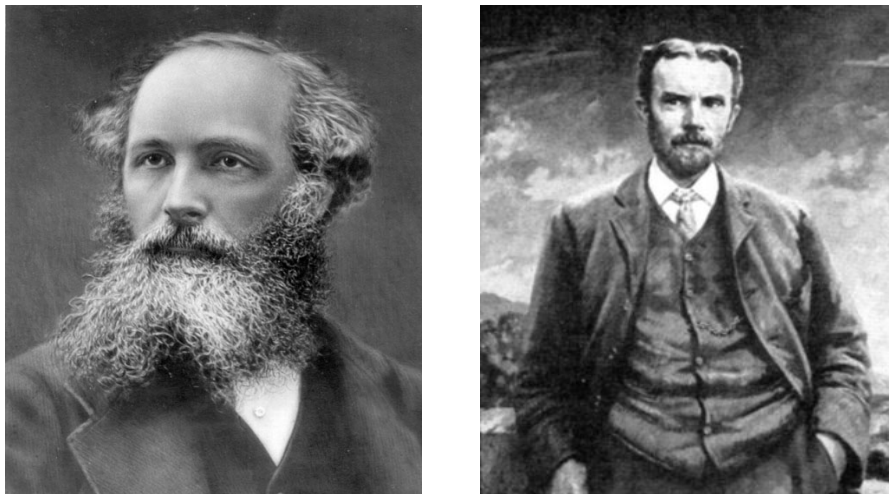
Összefoglalva: B_s értéke számszerűen megadja az adott ferromágneses anyagra jellemző maximális indukcióértéket, növelése a mágneses permeabilitásfüggvény maximumának növekedését vonja maga után. H_0 futtatása esetén az adott szaturációhoz tartozó függvénymeredekség változtatható, amely ellentétes, csökkenő permeabilitásmaximumot eredményez.

3. fejezet

A Maxwell-egyenletek teljes rendszere

3.1. Bevezetés

James Clerk Maxwell (1831-1879) a tizenkilencedik század kiváló elméleti fizikusa, matematikusa volt ("A legalaposabb és legtermékenyebb fizikus volt Newton óta." - Einstein), életének legfontosabb tevékenysége az elektromossághoz köthető. Kiemelkedő közreműködése abban áll, hogy kiterjesztette és matematikai formába öntötte a korábbi fizikusok (például *Michael Faraday* és *André-Marie Ampère*) kísérleti tapasztalatait, és egy összekapcsolódó, egységes parciális differenciálegyenlet-rendszerbe foglalta azokat. Az egyenleteket Maxwell 1861-ben publikálta először az *On Physical Lines of Force* című cikkében [9].



3.1. ábra. James Clerk Maxwell és Oliver Heaviside

Maxwell egyenletrendszere húsz egyenletet és húsz változó mennyiséget tartalmazott. A Maxwell-egyenletek mai formáját egy óriási formátumú, kiemelkedő, de méltatlanul elfelejtett autodidakta angol villamosmérnöknek, *Oliver Heaviside*-nak (1850-1925) köszönhetjük [10], aki munkája során kifejlesztette és a villamosmérnöki gyakorlatba ültette a vektoranalízist, a rotáció és divergencia operátorok segítségével tizenkét egyenletet átalakított, így az egyenletrendszert négy egyenletre redukálta

négy változóval.

3.2. A Maxwell-egyenletek

A Maxwell-egyenletek segítségével a tér bármely pontjában bármely térjellemező (legyen az akár elektromos, akár mágneses) meghatározható. Az egyenletek tehát összefüggést teremtenek a gerjesztő mennyiségek (töltés, áram), a térintenzitások (mágneses indukció, elektromos térerősség) és a gerjesztettségi mennyiségek (mágneses térerősség, elektromos eltolás) között. A négy Maxwell-egyenlet integrális alakban:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}, \quad (3.1)$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}, \quad (3.2)$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (3.3)$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV. \quad (3.4)$$

Az első Maxwell-egyenlet (3.1) az Ampère-féle gerjesztési törvény, fizikai jelentése, hogy az áram és az elektromos tér változása mágneses teret kelt (értelemszerűen a két mennyiség egyszerre is létrehozhatja a teret, de külön-külön is képesek mágneses teret kelteni). A második egyenlet (3.2) a Faraday-féle indukciós törvény, fizikai jelentése, hogy a mágneses tér változása elektromos teret kelt. A harmadik egyenlet (3.3) a mágneses Gauss-törvény, jelentése, hogy az indukcióvonalak forrásmentesek, önmagukban záródnak. A negyedik egyenlet (3.4) az elektrosztatika Gauss törvénye, jelentése, hogy az elektromos tér forrásos, erővonalai töltéseken kezdődnek, töltéseken végződnek.

A konstitúciós relációk munkám során felhasznált, ferromágneses anyagok esetén érvényes formulái:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mathcal{B}\{\vec{H}\} \\ \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{J} &= \sigma (\vec{E} + \vec{E}_b) \\ w &= \frac{1}{2} \mu H^2 + \frac{1}{2} \varepsilon E^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Az egyenletek így teljesek és ellentmondásmentesek. Integrális alakjuk fizikailag szemléletes, de a numerikus számítások során ebben a formában alkalmazni őket nehéz, körülményes. Az egyenletek átírhatók differenciális alakba a Stokes-tétel

$$\oint_l \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_A \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (3.6)$$

és a Gauss-Osztrogradszkij-tétel segítségével [11]:

$$\oint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV, \quad (3.7)$$

ahol ∇ az úgynevezett nabla vektoroperátor, mely segítségével a egy $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{e}_x v_x(t) + \vec{e}_y v_y(t) + \vec{e}_z v_z(t)$ alakban leírható vektor rotációja és divergenciája kifejezhető Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} = \text{curl}(\vec{v}) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ &- \vec{e}_y \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.10)$$

A kifejezések alapján belátható, hogy a rotáció vektoroperátor leképezése vektorból vektort, míg a divergencia vektoroperátor leképezése vektorból skalárt eredményez.

A Maxwell-egyenletek differenciális alakja az eddigieket felhasználva:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.11)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (3.14)$$

$\vec{H}$ minden esetben a mágneses térerősséget jelöli, dimenziója $\frac{A}{m}$, $\vec{J}$ az áramsűrűség, dimenziója $\frac{A}{m^2}$, $\vec{D}$ az elektromos eltolás, dimenziója $\frac{C}{m^2}$, $\vec{E}$ az elektromos térerősség, dimenziója $\frac{V}{m}$, $\vec{B}$ a mágneses indukció, dimenziója T , ρ a töltéssűrűség, dimenziója $\frac{C}{m^3}$. A konstitúciós relációkban μ_0 jelöli a vákuum permeabilitását, értéke és dimenziója $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$, ε_0 a vákuum permittivitása, értéke és dimenziója $8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$, σ pedig az anyag vezetőképességét jelöli.

Az egyenletek segítségével papíron, analitikus, zárt formában csak igen kevés példa oldható meg, melyek esetében jellegükből, elrendezésükből adódóan jelentősen egyszerűsödnek az itt bemutatott összefüggések (tipikusan ilyen a toroid transzformátor esete is). Az elektrodinamika alapegyenleteiből levezetett, a későbbiek során általam is bemutatásra kerülő parciális differenciálegyenlet-rendszerek megoldása általában közelítő módszerekkel, numerikus technikák segítségével történik.

4. fejezet

A végeelem-módszer

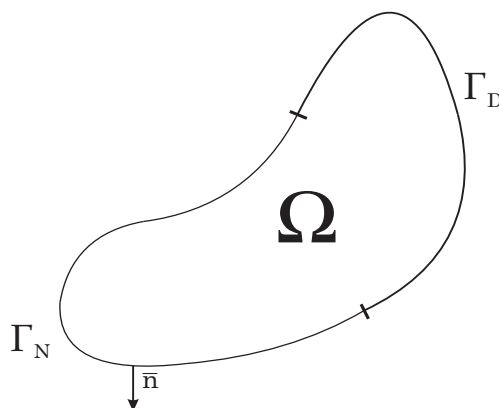
4.1. Történeti áttekintés

A végeelem-módszer (angolul *Finite Element Method*, röviden *FEM*) numerikus módszer parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására, mely megoldás során az eredeti differenciálegyenletet algebrai egyenletrendszerre képezzük le. Története egészen a múlt század elejéig vezethető vissza; bár a módszer elméleti hátterének megalapozása már ekkor megtörtént, csak a század második felében, a számítógépek megjelenésével vált igazán fontossá (nagyjából 1960-tól kezdve). Kezdetben mechanikai problémák megoldására használták, de később gyakorlatilag a fizikai minden területén elterjedt. A következőkben általánosan igyekszem bemutatni a módszer alapjait, fontos lépéseit.

4.2. A módszer alapelve

4.2.1. Probléma absztrahálása, peremfeltételek

Vizsgáljunk egy Ω problémátartományt, mely tartományt két perem, Γ_D és Γ_N határol. Ω -n értelmezzünk egy tetszőleges $\langle \mathcal{PDE} \rangle$ -vel jelölt, n -ed rendű parciális differenciálegyenletet (az ismeretlen vektorfüggvény legyen $\vec{A}(\vec{r}, t)$), melynek partikuláris megoldását keressük az adott tartományon belül. Ezt szemlélteti a 4.1. ábra.



4.1. ábra. Sematikus problémátér

A megoldáshoz definiálni kell bizonyos peremfeltételeket; a kétféle peremen két-félét:

$$\Gamma_D : \quad \vec{A} = \vec{A}_0, \quad (4.1)$$

$$\Gamma_N : \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial n} = \vec{f}(\vec{r}, t). \quad (4.2)$$

Dirichlet-peremről és peremfeltételről (Γ_D , 4.1) beszélünk akkor, ha a peremen a keresett $\vec{A}(\vec{r}, t)$ függvény értékét direkt módon előírjuk. Neumann-peremről és peremfeltételről (Γ_N , 4.2) beszélünk akkor, ha a peremen a keresett $\vec{A}(\vec{r}, t)$ függvény normális irányú deriváltját határozzuk meg.

4.2.2. A súlyozott maradék elve, gyenge alak

A módszer alkalmazása során az eredeti $\langle \mathcal{PDE} \rangle$ helyett egy általánosabb, az eredeti differenciálegyenletből származtatott integrálos alak kerül megoldásra. Ezt az alakot úgy kapjuk, hogy a $\langle \mathcal{PDE} \rangle$ -t nullára rendezzük, egy W_i súlyozófüggvénnyel megszorozzuk, majd integráljuk a teljes problématerületre [4]:

$$\int_{\Omega} \langle \mathcal{PDE} \rangle \cdot W_i d\Omega = 0 \quad \forall W_i \in W. \quad (4.3)$$

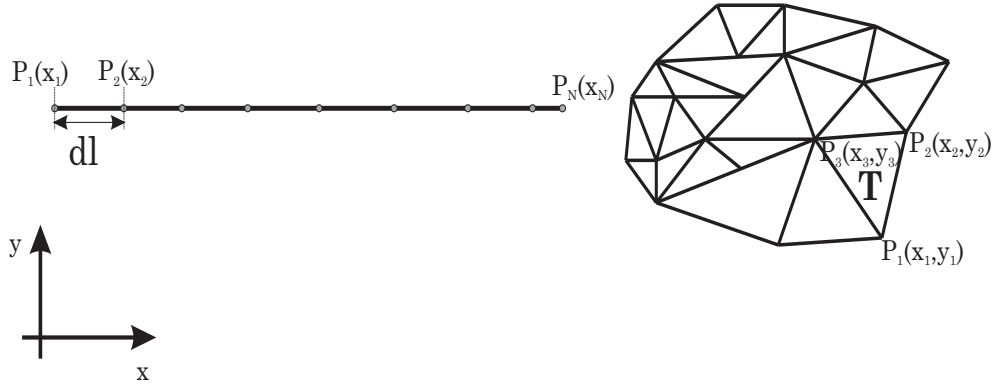
Amennyiben a keresett függvény vektorfüggvény (vektorpotenciál), úgy a súlyozófüggvény is vektorfüggvény lesz, skálarpotenciál esetében W is skálarfüggvény. Amennyiben az integrálos alak nullát ad, úgy az eredeti differenciálegyenletnek is nullát kell adnia, így azt mondhatjuk, hogy az integrálos alak megközelítőleg ekvivalens az eredeti $\langle \mathcal{PDE} \rangle$ -vel. Érdekes megjegyezni, hogy az ekvivalencia nem teljesül Ω bizonyos részein, ahol a differenciálegyenlet operátorai nem értelmezettek. Tipikusan ilyenek például a közegethatárok, ahol a térjellemzőknek ugrásuk van. Az integrálos formula ezen esetekben is megoldásra vezet, ezért azt állíthatjuk, hogy az egyenlet ezen alakja jóval általánosabb. A súlyozott maradék elvének másik nagy előnye, hogy segítségével kiküszöbölhetőek az eredeti egyenletekben gyakran előforduló másodrendű deriváltak is [12]. A súlyozott maradék elvének segítségével felírt integrálegyenletet hívjuk a parciális differenciálegyenlet úgynevezett *gyenge alakjának*, mely a szimuláció során ténylegesen kiszámításra kerül.

4.2.3. A problémátér diszkretizálása

Miként a módszer neve is sugallja, a végeselemes szimuláció során a vizsgált problématerület diszkrét számú és nagyságú elemekre bontjuk fel, mely elemek típusa a probléma jellegétől és dimenziójától függően megválasztható. Munkám során egydimenziós és kétdimenziós szimulációkat végeztem. Az első esetben vonal-, míg a másodikban háromszög elemeket alkalmaztam.

Szimulációim során csomóponti elemeket használtam, azaz a vektor-, illetve skálarpotenciál értékeit az elemek csomópontjaiban értelmeztem, számoltam ki. A diszkretizálás módja a 4.2. ábrán tanulmányozható. Egydimenzióban egy szakaszt kettő, kétdimenzióban egy háromszöget értelemszerűen három csomópont ír le. Egy csomópontot dimenziótól függően egy $(P_n(x_n))$ vagy kettő $(P_n(x_n, y_n))$ síkkoordináta

határoz meg, illetve egy elemet kettő vagy három csomópont ír le egyértelműen. Az egydimenziós elem fontos jellemzője a dl hossz, a kétdimenziósé a T terület.



4.2. ábra. Diszkretizálás egy- és kétdimenzióban

Munkám során egydimenziós problémára kézzel állítottam elő végeelem-hálót, míg kétdimenziós esetben a *GMSH* szoftver rácsgeneráló modulját használtam, mely segítségével gyorsan előállíthatóak azok az *input fájlok*, melyek a szimulációhoz szükségesek. Ezek: *Nodes*, *Connect*, *Dirichlet*, *Exc*. A *Nodes* nevű fájlban tároltam a csomópontok koordinátáit. Ez egydimenziós esetben egy sorvektor, kétdimenziós esetben egy mátrix, melynek két oszlopa és annyi sora van, ahány csomópont. A *Connect* rendeli össze a csomópontokat elemmé. Kétdimenziós esetben három oszlopa és annyi sora van, ahány elemre felosztottuk a problématerületet. A *Dirichlet* vektor azon csomópontok sorszámát tartalmazza, amelyekre a megoldás során a Dirichlet-típusú peremfeltételt alkalmazni kell. Amennyiben a feladat megkívánja, úgy azonosítani kell azon csomópontokat és/vagy elemeket, melyekre gerjesztést kívánunk megadni. Erre szolgál az *Exc* nevű fájl.

4.2.4. Asszemblálás, megoldás

Mint ahogyan azt már a bevezetőben említettem, a végeelemes szimuláció során az eredeti differenciálegyenletet algebrai egyenletrendszerre képezzük le. Megoldáskor az adott problémára felírt gyenge alakot kell minden elemre felírni. Az egyetlen elemre felírt egyenletrendszer együtthatóit a probléma komplexitásától függően egy vagy több mátrixba kell asszemblálni, amely folyamat olyan együtthatómátrixot eredményez, melynek elemei többnyire zérusok. Az ilyen típusú mátrixot ritka mátrixnak, angolul *sparse matrix*-nak nevezzük. A szimuláció során felírt egyenletrendszer általánosan az alábbi alakban írható fel:

$$\underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{b}. \quad (4.4)$$

A (4.4) formulában $\underline{\underline{K}}$ az együtthatómátrix, $\underline{u}$ az ismeretleneket tartalmazó vektor, $\underline{b}$ pedig a gerjesztést, a peremfeltételeket, illetve időfüggő probléma esetén az előző időlépést magában foglaló vektort jelenti. A feladat megoldása az

$$\underline{u} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{b} \quad (4.5)$$

egyenlet kiszámításával történik. A szimuláció kritikus lépése az együtthatómátrix invertálása, amely komplex, sok ismeretlent tartalmazó feladatok esetén rendkívül időigényes művelet.

4.3. Formafüggvények

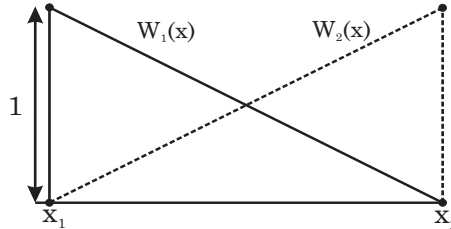
A szimuláció során a keresett potenciálértéket (amely a probléma típusától függően lehet skalár- vagy vektorpotenciál) formafüggvények segítségével közelítjük. Mivel munkám során kizárólag vektorpotenciállal és csomóponti (nodális) elemekkel dolgoztam, ezért a továbbiakban csak ennek a bemutatásával fogok foglalkozni. Csomóponti elemekről beszélünk akkor, ha a potenciálérték az elemek csomópontjaiban értelmezett. Az általam megoldott egydimenziós és kétdimenziós problémák esetén a csomóponti potenciálértékek interpolálhatóak skaláris formafüggvények segítségével. Tetszőleges $\vec{A}$ vektorpotenciál $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ értéke közelíthető [4]:

$$\vec{A} \approx \sum_{i=1}^N W_i \vec{A}_i, \quad (4.6)$$

ahol N jelöli a csomópontok számát, W_i a közelítéshez használt úgynevezett *formafüggvény*. A szimuláció során a 4.2.2. pontban említett W_i súlyozófüggvény és a formafüggvény megegyezik (ez az úgynevezett *Galjorkin-módszer* [14]), amely miatt a kialakuló egyenletrendszer szimmetrikus és négyzetes lesz. Ez megtehető, hiszen W_i függvény tetszőleges lehet. Az így bevezetett csomóponti formafüggvények a következőképpen definiálhatóak:

$$W_i = \begin{cases} 1 & \text{az } i\text{-edik csomópontban,} \\ 0 & \text{az összes többiben.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Munkám során az egydimenziós szimulációkhoz a 4.3. ábrán látható lineáris formafüggvényeket alkalmaztam.

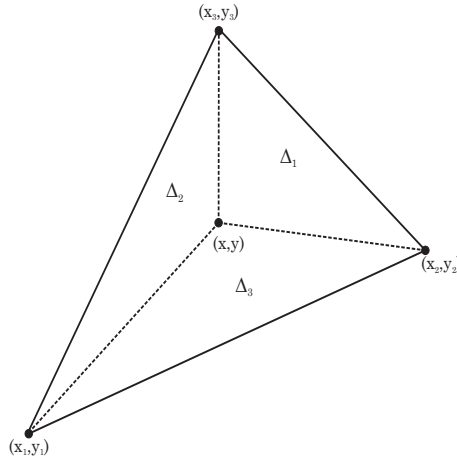


4.3. ábra. Egydimenziós, lineáris formafüggvény

Ezen formafüggvények az egyenes egyenletének segítségével felírhatóak:

$$W_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad W_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (4.8)$$

A kétdimenziós szimulációkhoz használt lineáris formafüggvények bevezetéséhez a baricentrikus koordináta-rendszer ismerete szükséges, amely a 4.4 ábrán tanulmányozható.



4.4. ábra. Baricentrikus koordináták

A háromszög csúcsainak koordinátái segítségével a síkidom területe számítható egy mátrix determinánsának segítségével:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (4.9)$$

ahol (x_n, y_n) a háromszög csúcsainak koordinátái az óramutató járásával ellenkező irányban felvéve. A háromszög belsejében felvett tetszőleges pont koordinátáinak segítségével három különböző területfüggvényt definiálhatók:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}. \quad (4.10)$$

A kétdimenziós, lineáris formafüggvényt leíró egyenlet [4, 12] ezek alapján:

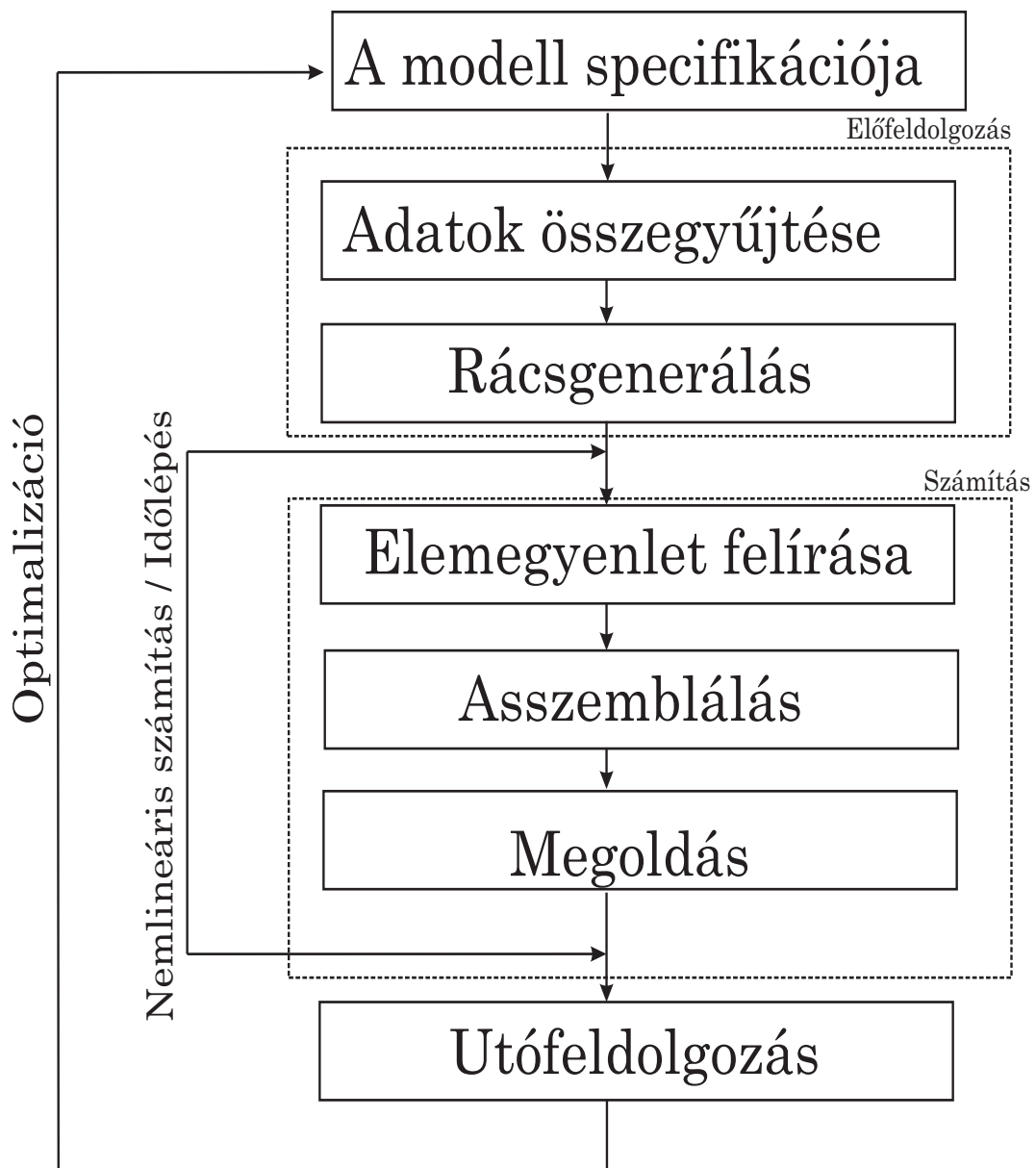
$$W_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.11)$$

4.4. A szimuláció lépései

Egy végeselemes szimuláció általános lépései a 4.5. ábrán láthatóak. A modell specifikációja során át kell gondolni, hogy pontosan milyen problémát, elektromágneses jelenséget, milyen geometriai elrendezést szeretnénk vizsgálni, a jelenséget milyen parciális differenciálegyenletek írják le, a közeget határokra milyen peremfeltételeket kell kielégíteni, a térjellemző mennyiségek között milyen kapcsolat definiálható (lineáris-nemlineáris probléma), illetve érdemes már itt szem előtt tartani, hogy jelleg és nagyságrend tekintetében milyen végeredményt várunk. Az előfeldolgozás során pontosan definiálásra kerül a gerjesztés típusa (ha van) és az anyagparaméterek, majd a szimulált geometria diszkretizálása, a rácsstruktúra eltárolása következik.

A számítási fázis tartalmazza az elemegyenlet felírását a gyenge alak alapján, a $\underline{K}$ együtthatómátrix feltöltését és a $\underline{b}$ vektor aktualizálását a gerjesztés és az előző időlépés alapján, amennyiben időfüggő a probléma. A szimuláció kritikus lépése

az együtthatómátrix invertálását magában foglaló megoldó fázis. Amennyiben időfüggő a probléma, illetve nemlineáris anyagtulajdonság kerül szimulálásra, úgy a számítási lépéseket annyiszor kell elvégezni, ahány időlépés van, időlépésenként pedig annyiszor, ahányszor a későbbiek során bemutatott, nemlinearitás szimulálására használt iterációs technika megfelelő pontossággal közelíti a valós eredményt. Ezt követi az utófeldolgozás, az eredmények kiértékelése, mely során változtathatunk a kiinduláskor specifikált modellen, amennyiben szükség van rá.



4.5. ábra. Végeselemes szimuláció lépései

5. fejezet

Nemlinearitás implementációja végeselemes környezetben

Ebben a fejezetben általánosan bemutatom az implementáció során használt fixpontos iterációs sémát, illetve felvázolom a mágneses térerősség és a mágneses indukció közötti nemlineáris kapcsolat megvalósítási lehetőségeit, módszereinek lépéseit a numerikus térszámításban.

5.1. Fixpontos iterációs séma

A fixpontos iterációs technika elve abban áll, hogy az

$$x = f(x) \quad (5.1)$$

alakban felírt nemlineáris egyenlet ismert $x_k (k = 0, 1, \dots, n)$ közelítő értékeinek felhasználásával további közelítő értékek sorozatát képezzük, amelyek lépésről-lépésre az egyenlet valódi gyökéhez tartanak. Ha az egyenlet (5.1) alakban adott, akkor a kézenfekvő iterációs eljárás:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots; x_0 \text{ adott}). \quad (5.2)$$

Ezt az iterációs eljárást szukcesszív approximációnak (magyarul sorozatos közelítésnek) [11] nevezzük. Az x_n sorozat $c = f(c)$ fixponthoz, tehát az $x = f(x)$ egyenlet megoldásához konvergál, ha c -nek van olyan $\mathbb{I}$ környezete, ahol

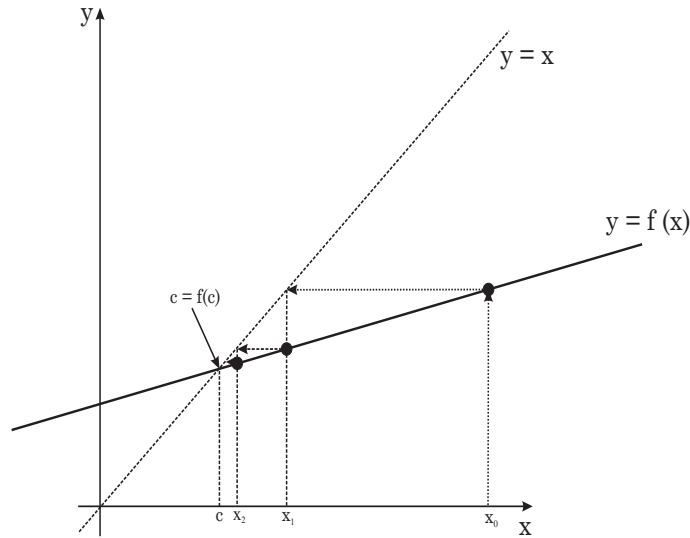
$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| \leq K < 1 \quad (K = \text{konstans}) \quad (5.3)$$

és az iteráció x_0 kezdőértéke ebben a $\mathbb{I}$ környezetben fekszik. Amennyiben $f(x)$ folytonosan differenciálható, úgy a megfelelő feltétel [11]:

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} < 1 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{I}. \quad (5.4)$$

Ezen formula alapján megfogalmazható a kontraktív leképezés definíciója [1] is:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{I} \quad (5.5)$$



5.1. ábra. Fixpontos iteráció kontraktív, konvergens leképezés esetén

amennyiben $0 < K < 1$. Ebben az esetben az $f(x)$ leképezést kontraktív leképezésnek hívjuk, mert csökkenti az x_1 és x_2 pontok közötti távolságot. Ez a leképezés a 5.1. ábrán látható konvergens eljárást eredményezi, mely az $x = f(x)$ egyenlet megoldásához konvergál. Ha ez a feltétel nem teljesül, úgy az iteráció divergens.

Tetszőleges $F(x) = 0$ alakú egyenlet felírható $x = f(x)$ alakban a következőképpen [1]:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda F(x_n) \equiv f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.6)$$

ahol λ paraméter megválasztásával az $f(x)$ függvény kontraktivitása biztosítható.

5.2. A polarizációs formula

A $\vec{B}$ mágneses indukció az 5.2. ábrán látható módon két komponensre bontható fel [1]:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{R}, \quad (5.7)$$

ahol μ konstans, kizárólag a $\vec{H}$ mágneses térerősség függvénye, tehát ez a komponens lineáris, ezen kívül $\vec{R}$ tartalmazza az anyagtól függő nemlineáris komponenst, amely az adott karakterisztikára jellemző. A formula felírható a

$$\vec{R} = \vec{B} - \mu \vec{H} \quad (5.8)$$

alakban, mely alakból kiindulva, a mágneses indukciót direkt karakterisztikával felírva a következő összefüggés adódik:

$$\vec{R} = \mathcal{B}\{\vec{H}\} - \mu \vec{H}, \quad (5.9)$$

mely leképezés kontraktív μ optimális megválasztása esetén:

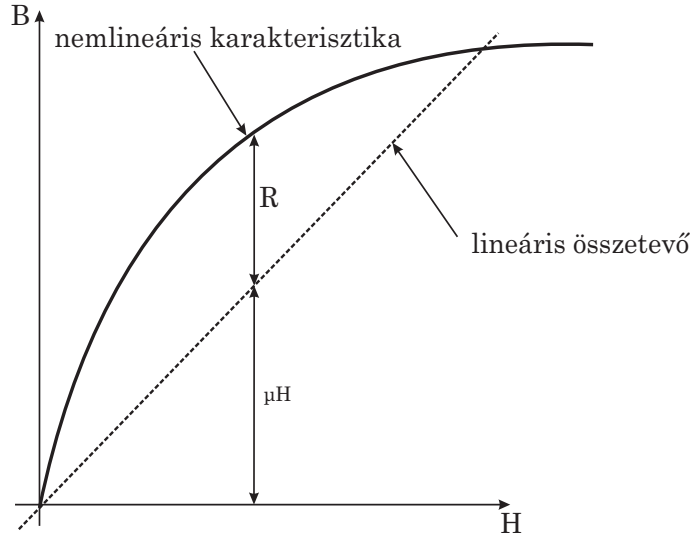
$$\mu = \frac{\mu_{max} + \mu_{min}}{2}. \quad (5.10)$$

(5.7) összefüggéséhez hasonlóan a mágneses térerősségre felírható:

$$\vec{H} = \nu \vec{B} + \vec{I}, \quad (5.11)$$

ahol ν konstans, így $\nu \vec{B}$ lineáris, $\vec{I}$ pedig az adott anyag karakterisztikájára jellemző nemlineáris reziduál:

$$\vec{I} = \vec{H} - \nu \vec{B}. \quad (5.12)$$



5.2. ábra. A mágneses indukció két komponensre bontása

A mágneses térerősség és a mágneses indukció közötti direkt kapcsolatot leíró karakterisztikát felhasználva:

$$\vec{I} = \vec{H} - \nu \mathcal{B}\{\vec{H}\}, \quad (5.13)$$

mely leképezés kontraktív ν optimális megválasztása esetén:

$$\nu = \frac{2\nu_{\max}\nu_{\min}}{\nu_{\max} + \nu_{\min}}. \quad (5.14)$$

5.3. Nemlineáris formalizmusok megvalósítása

5.3.1. Séma a mágneses térerősségre építve

Az alábbiakban összefoglalom a fixpontos iteráció lépéseit abban az esetben, amelyben a megvalósított potenciálformalizmus a mágneses térerősségre kerül felírásra, tehát a szimuláció kimenete maga a $\vec{H}$ mágneses térerősségvektor [1]. Az iterációs sorozat μ optimális megválasztására épít (5.10). Az iteráció tetszőleges $\vec{R}^{(0)}$ értékből indítható. Az n -edik lépésben a következőket kell végrehajtani [1] ($T.F.H. : n > 0$):

1. $\vec{H}^{(n)}$ mágneses térerősség meghatározása $\vec{R}^{(n-1)}$ alapján a potenciálformalizmus segítségével, tehát: $\vec{H}^{(n)} = \mathcal{M}\{\vec{R}^{(n-1)}\}$;
2. $\vec{B}^{(n)}$ mágneses indukció a direkt modell segítségével meghatározható, tehát: $\vec{B}^{(n)} = \mathcal{B}\{\vec{H}^{(n)}\}$;

3. $\vec{R}$ nemlineáris reziduál értéke javítható:

$$\vec{R}^{(n)} = \vec{B}^{(n)} - \mu \vec{H}^{(n)} = \mathcal{B}\{\vec{H}^{(n)}\} - \mu \vec{H}^{(n)}; \quad (5.15)$$

Az előző lépéseket addig kell ismételni, amíg az eljárás nem konvergál megfelelő mértékben. A feltétel megfogalmazható:

$$\left\| \vec{R}^{(n)} - \vec{R}^{(n-1)} \right\| < \varepsilon, \quad (5.16)$$

ahol ε egy megfelelően kis küszöbindex.

5.3.2. Séma a mágneses indukcióra építve

A mágneses indukcióra épített iterációs sorozat ν optimális megválasztására épít (5.14). Az iteráció tetszőleges $\vec{I}^{(0)}$ értékből indítható. Az n -edik lépésben a következőket kell végrehajtani [1] ($T.F.H. : n > 0$):

1. $\vec{B}^{(n)}$ mágneses indukció meghatározása $\vec{I}^{(n-1)}$ alapján a potenciálformalizmus segítségével, tehát: $\vec{B}^{(n)} = \mathcal{M}\{\vec{I}^{(n-1)}\}$;
2. $\vec{H}^{(n)}$ mágneses térerősség a következő formulával becsülhető $\vec{B}^{(n)}$ alapján:

$$\vec{H}^{(n)} = \nu \vec{B}^{(n)} + \vec{I}^{(n-1)}; \quad (5.17)$$

3. $\vec{I}^{(n)}$ nemlineáris reziduál értéke javítható:

$$\vec{I}^{(n)} = \vec{H}^{(n)} - \nu \mathcal{B}\{\vec{H}^{(n)}\}; \quad (5.18)$$

Az előző lépéseket addig kell ismételni, amíg az eljárás nem konvergál megfelelő mértékben. A feltétel megfogalmazható:

$$\left\| \vec{I}^{(n)} - \vec{I}^{(n-1)} \right\| < \varepsilon, \quad (5.19)$$

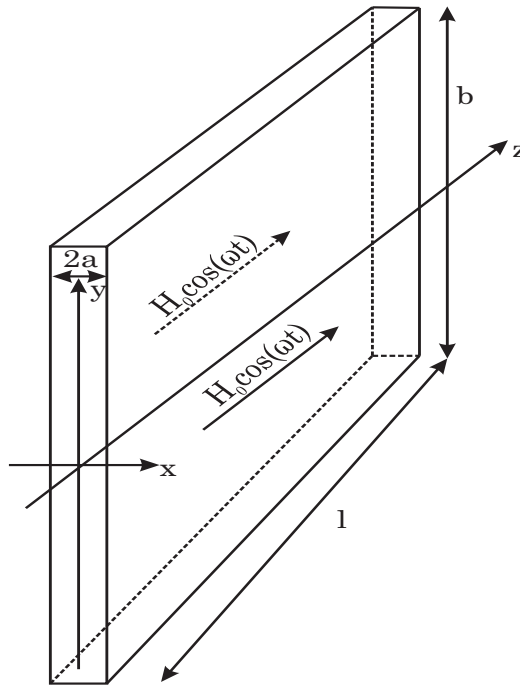
ahol ε egy megfelelően kis küszöbindex.

6. fejezet

Egydimenziós probléma szimulációja

6.1. A probléma definiálása

Klasszikus elektrodinamikai problémának tekinthető a 6.1. ábrán látható váltakozó mágneses térbe helyezett vezető lemez. A vizsgálódás tárgyát képező lemez hosszúsága sokszorosa a szélességének, ezért gyakorlati szempontból végtelenül hosszúnak tekinthető ($l \gg 2a$) [11].



6.1. ábra. Vezető lemez mágneses térben

A szimuláció során a $2a$ vastagsághoz képest végtelennek feltételezett l lemez-hosszúság miatt elengedő csupán a vizsgált próbatest $x = 2a$ tartományának vizsgálata, amely kiválóan leírja a lemez belsejében kialakuló mágneses teret. A véges-elemes diszkrétizálás során ezt az x -irányú szakaszt osztottam egydimenziós vonal elemekre a $[-a; +a]$ intervallumon belül.

6.2. A problémát leíró egyenletek

A szimuláció során megoldásra kerülő differenciálegyenlet levezetéséhez a Maxwell-egyenletek kvázistacionárius alakjai, illetve a nemlinearitást is magukban foglaló konstitúciós relációk szükségesek [14]:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (6.3)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{R}, \quad (6.4)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (6.5)$$

Felhasználva (6.1) és (6.5) egyenleteket, majd az eredményt átrendezve a következő egyenlet adódik:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{H}. \quad (6.6)$$

Ezt visszahelyettesítve (6.2) egyenletbe

$$\nabla \times \frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.7)$$

adódik. Felhasználva (6.4) egyenletet, illetve azt a tényt, hogy a σ anyagparamétert a vizsgált tartományon belül konstansnak tekinthetjük

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H} + \vec{R}) \quad (6.8)$$

írható fel, melyet átrendezve a problémára felírható differenciálegyenlet végleges alakját kapjuk:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} + \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\sigma \frac{\partial \vec{R}}{\partial t}. \quad (6.9)$$

6.3. Gyenge alak levezetése

Az egyenletet egy tetszőleges $\vec{W}$ súlyozófüggvénnyel megszorozva, majd integrálva a teljes problématarományra a következő integrálegyenlet adódik:

$$\int_{\Omega} \vec{W} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{H} \, d\Omega + \mu \sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \, d\Omega = -\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \, d\Omega. \quad (6.10)$$

Az egyenlőség bal oldalán másodrendű derivált található, mely kiküszöbölhető

$$\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \times \vec{v} \quad (6.11)$$

azonosság felhasználásával, az alábbi megválasztás esetén:

$$\vec{v} = \vec{W}, \quad \vec{u} = \nabla \times \vec{H}. \quad (6.12)$$

Az összefüggést felhasználva a következő integrálegyenlet írható fel:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H} \times \vec{W}) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \times \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{W} d\Omega + \mu\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\Omega = \\ = -\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} d\Omega. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Az integrálegyenlet bal oldalának első tagja egy vektormező divergenciájának térfogati integrálja, mely a Gauss-Osztrogradszkij-tétel segítségével (3.7) átírható a térfogatot határoló felületre vett körintegrálra. Ezek alapján a gyenge alak:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \nabla \times \vec{H} \times \vec{W} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \times \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{W} d\Omega + \mu\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\Omega = \\ = -\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} d\Omega. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Egy- és kétdimenziós szimulációk esetén az első körintegrál értéke zérus, így ezzel a taggal az implementáció során nem kell foglalkozni. A differenciálegyenlet gyenge alakja tehát a következő formában adódik:

$$\int_{\Omega} \nabla \times \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{W} d\Omega + \mu\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\Omega = -\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} d\Omega. \quad (6.15)$$

6.4. Végeselemes implementáció

$\vec{H}$ mágneses térerősség a vizsgált példában olyan vektormennyiség, amelynek csak z -irányú komponense van, de kizárólag x térdimenziótól és az időtől függ:

$$\vec{H} = H_z(x)\vec{e}_z = H\vec{e}_z. \quad (6.16)$$

H közelítése W skaláris, lineáris, egydimenziós formafüggvények segítségével történik:

$$H \approx \sum_{i=1}^{N_p} W_i H_i, \quad (6.17)$$

ahol N_p a csomópontok száma. Végeselem-módszernél a korábban tárgyaltak szerint a gyenge alak súlyfüggvénye megegyezik a potenciál approximációjához használt formafüggvénnyel, továbbá az általános rotáció operátorok gradiensekké egyszerűsödnek, (6.15) tehát átírható:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \sum_{i=1}^{N_p} W_i H_i \cdot \nabla W_j d\Omega + \mu\sigma \int_{\Omega} W_j \sum_{i=1}^{N_p} W_i \frac{\partial H_i}{\partial t} d\Omega = \\ = -\sigma \int_{\Omega} W_j \sum_{i=1}^{N_p} W_i \frac{\partial R_i}{\partial t} d\Omega \quad j = 1, \dots, N_p, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\Omega} \nabla W_i \cdot \nabla W_j d\Omega H_i + \mu\sigma \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\Omega} W_j W_i d\Omega \frac{\partial H_i}{\partial t} = \\ = -\sigma \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\Omega} W_j W_i d\Omega \frac{\partial R_i}{\partial t} \quad j = 1, \dots, N_p. \end{aligned} \quad (6.19)$$

A formula egyetlen elemre felírva:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} \nabla W_1 \\ \nabla W_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla W_1 & \nabla W_2 \end{bmatrix} \right\} d\Omega \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} + \mu\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \right\} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial t} \\ \frac{\partial H_2}{\partial t} \end{bmatrix} = \\ & = -\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \right\} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial t} \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Ez az egyenlet három integrált tartalmaz, melyek megvalósítását célszerű külön-külön tárgyalni.

6.4.1. Az első integrál

Az első integrál tartalmazza a csomóponti formafüggvények gradienseit és a mágneses térerősséget, mint ismeretlent. Lineáris formafüggvények mellett egy-egy végeselem felett konstans gradiensek adódnak, amely lényegesen megkönnyíti az integrál kiértékelését. Egydimenziós esetben a gradiensek a

$$\begin{aligned} \nabla W_1 &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right\} = -\frac{1}{x_2 - x_1}, \\ \nabla W_2 &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right\} = \frac{1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad (6.21)$$

alakot öltik, az Ω elemen történő integrálás pedig lényegében nem más, mint a szakasz hosszával történő szorzás. (6.20) alapján az első integrál:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} \nabla W_1 \\ \nabla W_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla W_1 & \nabla W_2 \end{bmatrix} \right\} (|x_2 - x_1|) \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \\ & = \left\{ \begin{bmatrix} \nabla W_1 \nabla W_1 & \nabla W_1 \nabla W_2 \\ \nabla W_2 \nabla W_1 & \nabla W_2 \nabla W_2 \end{bmatrix} \right\} (|x_2 - x_1|) \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Az elemhosszal szorzott 2×2 -es mátrix elemei asszembláláskor a $\underline{K}$ együtthatómátrix megfelelő helyeihez adódnak hozzá, a mágneses térerősség ismeretleneit tartalmazó oszlopvektor elemeit pedig $\underline{u}$ megfelelő elemei reprezentálják.

6.4.2. A második és harmadik integrál

A két másik integrál kiértékelése hasonló módon zajlik, így most csak a második integrált fogom bemutatni, a harmadik, az egyenlet jobb oldalán található kifejezés kiértékelése az itt leírtakkal teljesen analóg.

Fontos eltérés az eddiekhez képest, hogy a kifejezésekben nem a formafüggvények gradiensei, hanem maguk a függvények szerepelnek, tehát nem konstans értékű függvényt kell integrálni egy-egy végeselem felett. A kiértékeléshez numerikus integrálás, Gauss-kvadratura szükséges, amivel dolgozatom a későbbiek során fog foglalkozni. A másik lényeges különbség, hogy a kifejezések az ismeretlen mágneses térerősség és R reziduál idő szerinti deriváltját tartalmazzák, ami azt jelenti, hogy ezen kifejezéseket két részre kell bontani. Ehhez először be kell vezetni a numerikus differenciálás fogalmát [11]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (6.23)$$

A második integrál ezek alapján felírható

$$\mu\sigma \int_{\Omega} \begin{bmatrix} W_1 W_1 & W_1 W_2 \\ W_2 W_1 & W_2 W_2 \end{bmatrix} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{H_1 - H_{1old}}{dt} \\ \frac{H_2 - H_{2old}}{dt} \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

alakban. A kifejezés első tagja

$$\mu\sigma \int_{\Omega} \begin{bmatrix} W_1 W_1 & W_1 W_2 \\ W_2 W_1 & W_2 W_2 \end{bmatrix} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{H_1}{dt} \\ \frac{H_2}{dt} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

tartalmazza H_1 és H_2 ismeretleneket, így ez a tag a $\underline{\underline{K}}$ együtthatómátrix és $\underline{u}$ vektor részét fogja képezni, míg

$$-\mu\sigma \int_{\Omega} \begin{bmatrix} W_1 W_1 & W_1 W_2 \\ W_2 W_1 & W_2 W_2 \end{bmatrix} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{H_{1old}}{dt} \\ \frac{H_{2old}}{dt} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

az előző időlépés H -értékeit tartalmazza, így a megoldandó lineáris algebrai egyenletrendszer másik, gerjesztési oldalára, a $\underline{b}_{lin}$ lineáris komponens tartalmazó vektorba fog kerülni.

A harmadik, a mágneses indukció reziduális komponensének deriváltját tartalmazó integrál értelmezése és megvalósítása az itt leírtakkal teljesen analóg. Mivel az integrál nem tartalmaz ismeretlen H potenciálértéket, ezért kizárólag a gerjesztési oldalon fog szerepni a $\underline{b}_{res}$ reziduális gerjesztési vektorkomponensben. A felíráshoz kerülő egyenletrendszer az eddigiek alapján:

$$\underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{b}_{lin} + \underline{b}_{res}. \quad (6.27)$$

6.5. Gauss-kvadratúra

A Gauss-kvadratúra numerikus módszer határozott integrálok közelítő meghatározására. Abban az esetben, ha egy elemen az integrálandó függvény nem konstans, hanem a helynek valamilyen függvénye, úgy az elem felett értelmezett integrál kiszámítására közelítő módszert, Gauss-kvadratúrát szükséges használni. A Gauss-típusú kvadratúrákpletek középérték-formulák [11]:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{\nu=1}^n c_{\nu} y_{\nu}, \quad y_{\nu} = f(x_{g,\nu}), \quad (6.28)$$

ahol c_{ν} és x_{ν} a formula súlyai és pontjai, a számítás során mindkettő szabad paraméter, értékeit úgy célszerű megválasztani, hogy a közelítés minél pontosabb legyen. Amennyiben az $[a; b] = [-1; 1]$ választással élünk, úgy egy elsőfokú polinom integrálja az intervallumon belül a

$$\begin{aligned} x_{g,1} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} & c_0 &= 1, \\ x_{g,2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} & c_1 &= 1 \end{aligned} \quad (6.29)$$

súlyokkal és pontokkal közelíthető. Ebben a fejezetben kizárólag az egydimenziós esetet mutatom be, a kétdimenziós Gauss-kvadratúrát dolgozatom a későbbiek folyamán tárgyalja. Mivel az egydimenziós formafüggvények elsőfokúak, így az itt

bemutatott súlyokkal és pontokkal kiértékelhető az integrál. Mivel az integrálást nem a $[-1; 1]$ intervallumon, hanem egy végeselem $[x_1; x_2]$ intervallumán kell végrehajtani, így az alábbi transzformációval kell élni [11]:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{\nu=1}^n c_\nu f\left(\frac{b-a}{2}x_{g,\nu} + \frac{a+b}{2}\right). \quad (6.30)$$

A kvadratura lépései egydimenziós szimuláció esetén (6.25) együtthatóján bemutattva:

$$\begin{aligned} \mu\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \right\} d\Omega &= \mu\sigma \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{x_2-x}{x_2-x_1} \\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_2-x}{x_2-x_1} & \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \right\} dx \approx \\ &\approx \frac{x_2-x_1}{2} \sum_{\nu=1}^2 \left\{ \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_{p,\nu}}{x_2-x_1} \\ \frac{x_{p,\nu}-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_{p,\nu}}{x_2-x_1} & \frac{x_{p,\nu}-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \right\} c_\nu = \\ &= \frac{x_2-x_1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_{p,1}}{x_2-x_1} \\ \frac{x_{p,1}-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_{p,1}}{x_2-x_1} & \frac{x_{p,1}-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_{p,2}}{x_2-x_1} \\ \frac{x_{p,2}-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_{p,2}}{x_2-x_1} & \frac{x_{p,2}-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} c_2 \right\}, \end{aligned} \quad (6.31)$$

ahol:

$$\begin{aligned} x_{p,1} &= \frac{x_2-x_1}{2}x_{g,1} + \frac{x_1+x_2}{2}, \\ x_{p,2} &= \frac{x_2-x_1}{2}x_{g,2} + \frac{x_1+x_2}{2}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

6.6. Diszkretizálás, peremfeltételek

Miként azt már említettem, a diszkretizálást egydimenzióban, x -irányban, $[-a; a]$ -n végeztem el. Ez a lehető legegyszerűbb eset, rácsgeneráló szoftver használata nélkül, Matlab-környezetben két parancs segítségével el lehet végezni:

```
N = 100;
x = [-a:(2*a)/N:a];
```

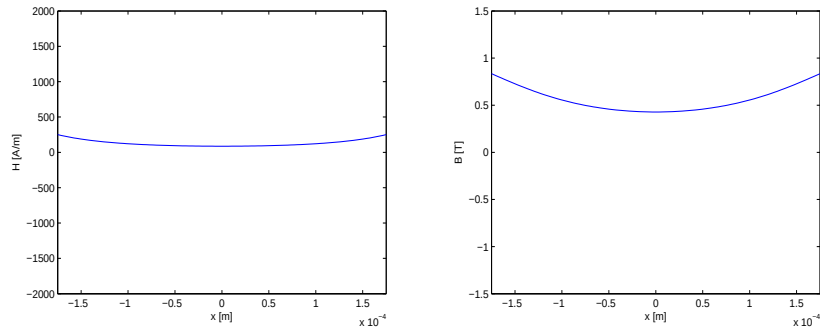
Ebben az esetben $N = 100$ végeselem adódik 101 csomóponttal. A megoldáshoz a lemez két oldalára elő kell írni direkt módon a mágneses térerősség időfüggvényét. Ez ebben az esetben egy egyszerű Dirichlet-peremfeltételt jelent, ami azt jelenti, hogy az $x = -a$ és az $x = a$ csomópontok térerősség-értékét kell előírni:

$$\begin{aligned} H(x = -a, t) &= H_0 \cos(\omega t), \\ H(x = a, t) &= H_0 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6.33)$$

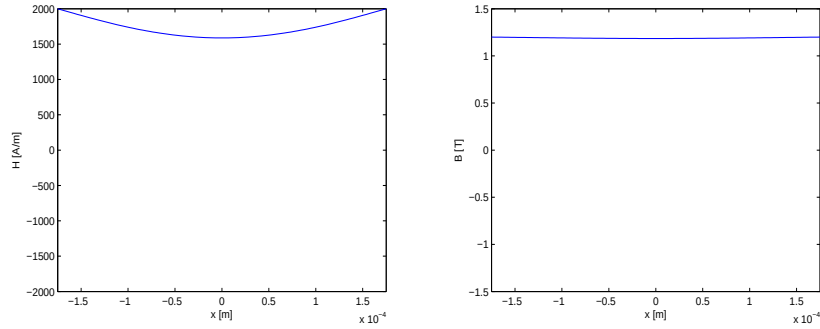
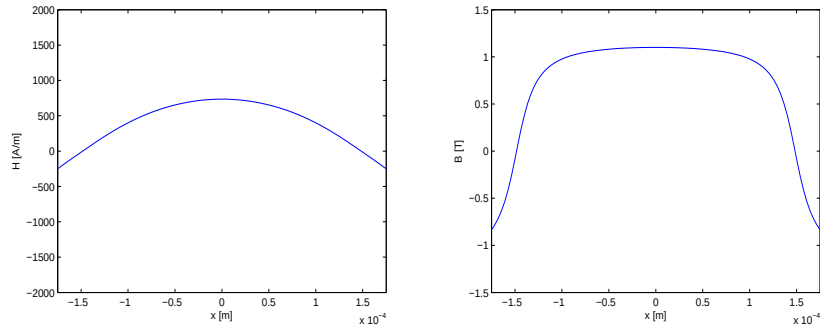
6.7. Eredmények, kiértékelés

A szimuláció paraméterei: $f = 500 \text{ Hz}$, $T = 2 \text{ ms}$, $\sigma = 2,22 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$, $a = 0,175 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $H_0 = 2000 \frac{\text{A}}{\text{m}}$.

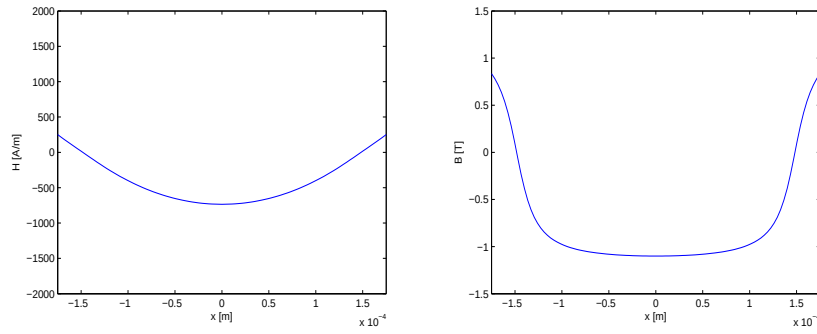
A szimuláció első szakaszában ($t < 0,1T$) az inverz tangens-görbe jellegéből adódóan a mágneses térerősség és a mágneses indukció között lényegében lineáris kapcsolat tapasztalható, a két függvény csupán egy konstansban tér el egymástól. Ez látható a 6.2. ábrán.

6.2. ábra. H és B közötti lineáris kapcsolat ($t < 0,1T$)

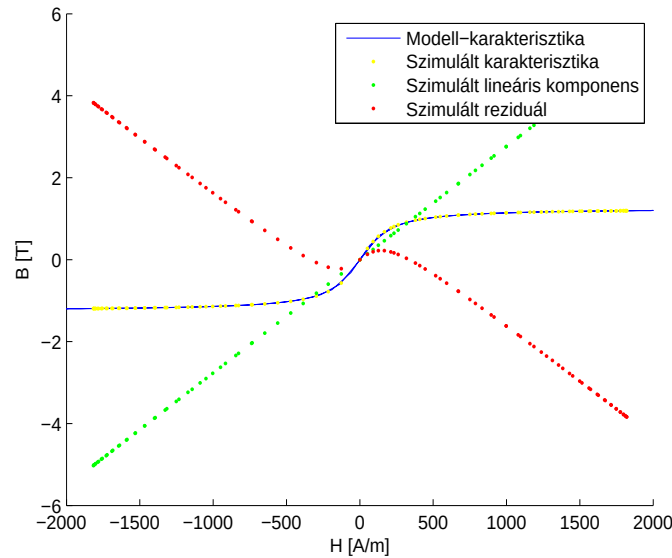
A mágneses térerősség további növelése után az anyag telítésbe jut, ami azt jelenti, hogy a mágneses térerősség további növekedése ellenére sem növekszik tovább az indukció értéke az anyag belsejében B_s -nél. Ezt szemlélteti a 6.3. ábra.

6.3. ábra. Szaturáció ($t = 0,25T$)6.4. ábra. Éles átmenet $t = 0,52T$ -nél

A 6.4. ábra a pozitív szaturációból történő éles átmenetet mutatja. Az ábrán látható, hogy miközben a lemez közepe még szinte pozitív telítésben van, addig a lemez szélén már negatív indukcióértékek tapasztalhatóak. Ennek oka az inverz tangens-görbe $H = 0$ -közeli nagy meredeksége. Mivel a térerősség alakulása a lemez szélétől a közepe felé közel lineáris, ráadásul a középpontra jó közelítéssel szimmetrikus is, így a mágneses indukció adott pillanatban felvett helyfüggése gyakorlatilag kirajzolja a modell görbájének egy szakaszát. A 6.5. ábra ugyanezt a jelenséget mutatja, csak a negatív szaturációból történő visszatérés esetén.

6.5. ábra. Éles átmenet $t = 1,02T$ -nél

A 6.6. ábra egyetlen csomópont modell alapján számított $B-H$ -karakterisztikáját mutatja. Látható, hogy a fixpontos iteráció $\varepsilon = 10^{-4}$ küszöbindex mellett gyakorlatilag hibátlanul közelíti az analitikus formulával leírt karakterisztikát. Az ábrán tanulmányozható továbbá mind a μH lineáris, mind az R reziduális komponens alakulása, mely pontok szuperpozíciója minden időpillanatban kiadja az adott csomópont $B-H$ -karakterisztikáját.

6.6. ábra. A karakterisztika alakulása az $N = 50$ csomópontban

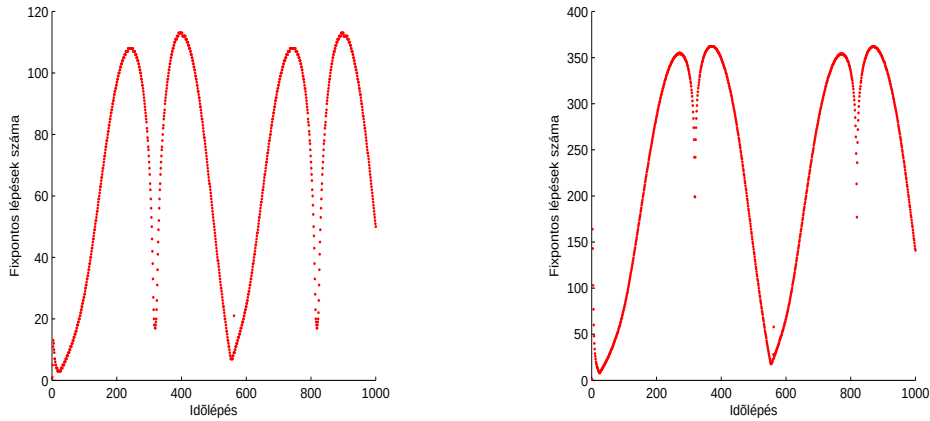
A 5.1. ábra a konvergenciához szükséges fixpontos lépések számát ábrázolja az időlépések függvényében két eltérő ε küszöbindex esetén. Megfigyelhető, hogyha a pontosságot ezerszeresére növeljük ($\varepsilon = 10^{-2} \rightarrow \varepsilon = 10^{-5}$), úgy a fixpontos lépések száma átlagosan körülbelül háromszorosára növekszik. Az egy periódusra felvett konvergenciagörbék jellegéből látható, hogy a fixpontos lépések száma bizonyos szakaszokon növekvő-, más szakaszokon csökkenő-, vagy impulzusszerűen csökkenő tendenciát mutat. A kezdeti rövid tranzienszt leszámítva a függvény 4 szakaszra bontható:

1. Az első szakasz a zérusról növekvő mágneses térerősség szakasza. Ezen a szakaszon a fixpontos lépések száma időlépésenként nő, melynek oka, hogy a modell

karakterisztikája egyre határozottabban kezd elszakadni a lineáris szakasztól, a reziduál értéke jelentősen csökken, hogy az inverz tangens-görbének megfelelően kompenzálja a lineáris komponenst. Mivel a fixpontos lépések a reziduál aktuális értékének javítását szolgálják egészen a küszöbindexig, ezért a számítás egyre több iterációs lépést igényel a megkívánt konvergenciához.

2. A maximum elérése után a lépések száma impulzusszerűen lecsökken, melynek oka, hogy a mágneses indukció eléri a szaturációs értéket, így néhány időlépésen keresztül az indukció értéke változatlan, konstans, így nincs szükség a reziduál értékének lényeges javítására.
3. A következő szakaszon a térerősség és a mágneses indukció is csökken, a modell kezd visszatérni a lineáris szakaszra, mely során a reziduál értékét folyamatosan javítani kell a negatív értékektől egészen a nulláig.
4. Amennyiben a modell visszatér a lineáris szakaszra, úgy a reziduál értéke közel nulla, így nincs szükséges lényeges mennyiségű fixpontos lépésre annak javításához. Ez lényegében azt jelenti, hogy a modell kimenetét megközelítőleg a lineáris komponens határozza meg.

A következő szakaszok az itt leírtakkal teljesen analóg módon magyarázhatóak. Elmondható tehát, hogy a következő impulzusszerű lépésszámvisszaesés a negatív szaturáció konstans mágneses indukciójának, míg a kevésbé meredek visszazuhanás a kvázi-lineáris szakaszra történő visszatérésének köszönhető.



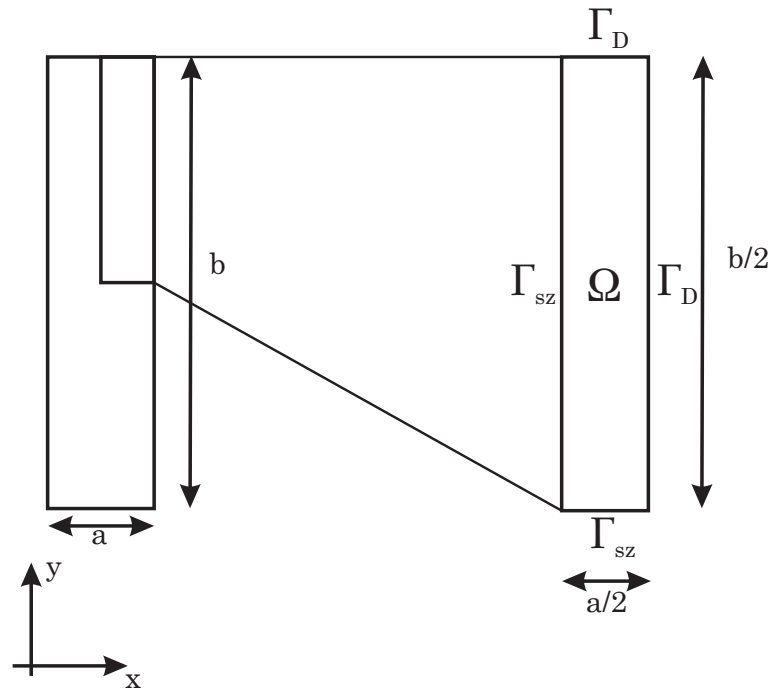
6.7. ábra. Fixpontos lépések száma időlépésenként ($\varepsilon = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-5}$)

7. fejezet

Kétdimenziós probléma szimulációja

7.1. Vezető lemez mágneses térben

Az előző fejezetben bemutatott differenciálegyenlet alkalmazható kétdimenziós probléma szimulációjára is. Legyen adott egy szimmetrikus, a szélességű és b hosszúságú lemez, melynek vastagsága elhanyagolható a többi geometriai paraméteréhez képest. A szimmetriát kihasználva elegendő csupán a lemez egynegyedének vizsgálata.

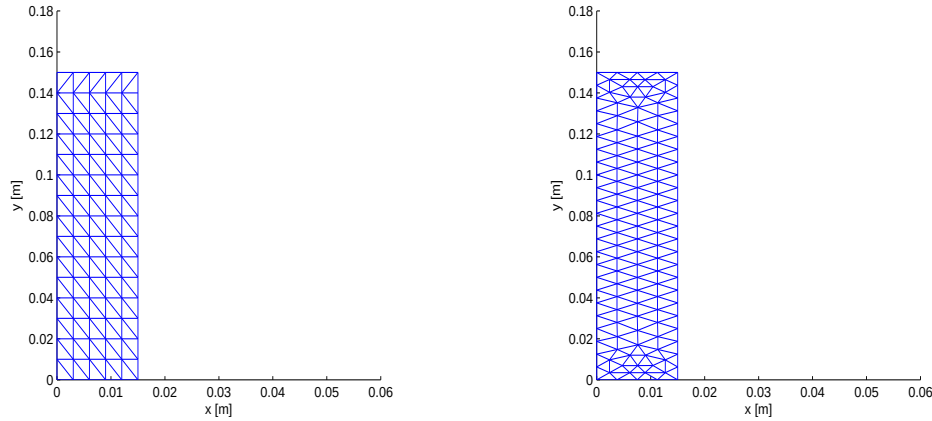


7.1. ábra. A vizsgált lemez

A vizsgált Ω problémateret (7.1. ábra) Γ_D és Γ_{sz} perem határolja; előbbi az eredeti lemez valódi pereme, utóbbi pedig az egyszerűsítésből adódó szimmetriaperem. Γ_D csomópontjain Dirichlet-peremfeltételt kell előírni, hiszen a lemeznek ez a széle közvetlen kapcsolatban áll az alkalmazott külső periodikus mágneses térerősséggel. Γ_{sz} szimmetriaperem kezelése kényelmes, hiszen ezekre a csomópontokra semmilyen peremfeltételt sem kell alkalmazni.

7.2. Rácsgenerálás

Munkám során az adott geometriára két rácsot is generáltam: egyet kézzel, egyet pedig GMSH [16] szoftver rácsgeneráló moduljának segítségével. Előbbi módszerrel szimmetrikus rácsot készítettem, majd mátrixok formájában, manuálisan vittem be a rácsot leíró adatokat a programkódba, utóbbival egy gyakorlatiasabb, aszimmetrikus rácsot generáltam, és az adatokat fájlokból olvastam be a szimulációhoz. A 7.2. ábrán tanulmányozhatóak a lényeges különbségek.



7.2. ábra. Kézzel és GMSH-val generált rács

A konkrét példa két ráccsal történő szimulációja nem kizárólag a fizikai tartalom szempontjából fontos (elméletileg teljesen mindegy, hogy a megoldót melyik végelelem-rácson futtatom le, megegyező eredményt kell, hogy kapjak), hanem egy érdekes szimulációtechnológiai problémára is felhívja a figyelmet.

7.3. Végelelemes implementáció

Kétdimenziós probléma vizsgálata során háromszögeket használva egy elemet három csomópont definiál egyértelműen, ami azt jelenti, hogy egyetlen elem összesen három formafüggvény (W_1, W_2, W_3) értelmezett. Miként azt bemutattam, a végelelemes implementáció során szükség van a formafüggvények gradienseire is, amely kétdimenziós esetben formafüggvényenként kettő tagú, hiszen a függvény mind x -változó, mind y -változó szerint parciálisan differenciálható. Ezek (4.9) és (4.10) jelöléseit konzekvensen felhasználva:

$$\begin{aligned} \nabla W_1 &= gW_{1x} + gW_{1y} = \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}(y_2 - y_3)}{\Delta} + \frac{\frac{1}{2}(x_3 - x_2)}{\Delta}, \\ \nabla W_2 &= gW_{2x} + gW_{2y} = \frac{\partial W_2}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}(y_3 - y_1)}{\Delta} + \frac{\frac{1}{2}(x_1 - x_3)}{\Delta}, \\ \nabla W_3 &= gW_{3x} + gW_{3y} = \frac{\partial W_3}{\partial x} + \frac{\partial W_3}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}(y_1 - y_2)}{\Delta} + \frac{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)}{\Delta}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Az eddigiek alapján (6.19) egyetlen elemre felírva:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} \nabla W_1 \\ \nabla W_2 \\ \nabla W_3 \end{bmatrix} \cdot [\nabla W_1 \quad \nabla W_2 \quad \nabla W_3] \right\} d\Omega \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} + \\
 & + \mu\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} \cdot [W_1 \quad W_2 \quad W_3] \right\} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial t} \\ \frac{\partial H_2}{\partial t} \\ \frac{\partial H_3}{\partial t} \end{bmatrix} = \\
 & = -\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} \cdot [W_1 \quad W_2 \quad W_3] \right\} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial t} \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} \\ \frac{\partial R_3}{\partial t} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Mivel az első integrál ismét konstans függvényeket tartalmaz egy-egy végeelem felett, ezért az egydimenziós példához hasonlóan az integrálás a végeelem területével való szorzássá egyszerűsödik. A kifejezést kifejtve, átírva, továbbá elvégezve a beszorzásokat a következő formula adódik:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{bmatrix} gW_{1x} \\ gW_{2x} \\ gW_{3x} \end{bmatrix} \cdot [gW_{1x} \quad gW_{2x} \quad gW_{3x}] + \begin{bmatrix} gW_{1y} \\ gW_{2y} \\ gW_{3y} \end{bmatrix} \cdot [gW_{1y} \quad gW_{2y} \quad gW_{3y}] \right\} \Delta + \\
 & + \mu\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 W_1 & W_1 W_2 & W_1 W_3 \\ W_2 W_1 & W_2 W_2 & W_2 W_3 \\ W_3 W_1 & W_3 W_2 & W_3 W_3 \end{bmatrix} \right\} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial t} \\ \frac{\partial H_2}{\partial t} \\ \frac{\partial H_3}{\partial t} \end{bmatrix} = \\
 & = -\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 W_1 & W_1 W_2 & W_1 W_3 \\ W_2 W_1 & W_2 W_2 & W_2 W_3 \\ W_3 W_1 & W_3 W_2 & W_3 W_3 \end{bmatrix} \right\} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial t} \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} \\ \frac{\partial R_3}{\partial t} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

ahol a második és harmadik integrál kiértékeléséhez (mivel az integrandus nem konstans függvény a tartományon belül) ismét numerikus integrálási technika használata szükséges.

7.4. Numerikus integrálás háromszög felett

Egy tetszőleges kétváltozós $f(x, y)$ függvény háromszög feletti integrálja közelíthető [17]:

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega \approx \frac{\Delta}{3} \sum_{i=1}^3 f(a_1 \xi_i + b_1 \eta_i + c_1, a_2 \xi_i + b_2 \eta_i + c_2) \cdot \vartheta_i, \tag{7.4}$$

ahol ξ_i és η_i a kvadratura pontjait, ϑ_i pedig a súlyait jelöli. Megválasztásuk a pontos közelítés érdekében a következőképpen történik:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \frac{1}{6}, & \eta_1 &= \frac{1}{6}, & \vartheta_1 &= \frac{1}{3}, \\
 \xi_2 &= \frac{1}{6}, & \eta_2 &= \frac{2}{3}, & \vartheta_2 &= \frac{1}{3}, \\
 \xi_3 &= \frac{2}{3}, & \eta_3 &= \frac{1}{6}, & \vartheta_3 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

A további paraméterek a háromszög csúcsainak koordinátaiból számíthatóak:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 - x_1, & b_1 &= x_3 - x_1, & c_1 &= x_1, \\ a_2 &= y_2 - y_1, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= y_1. \end{aligned} \quad (7.6)$$

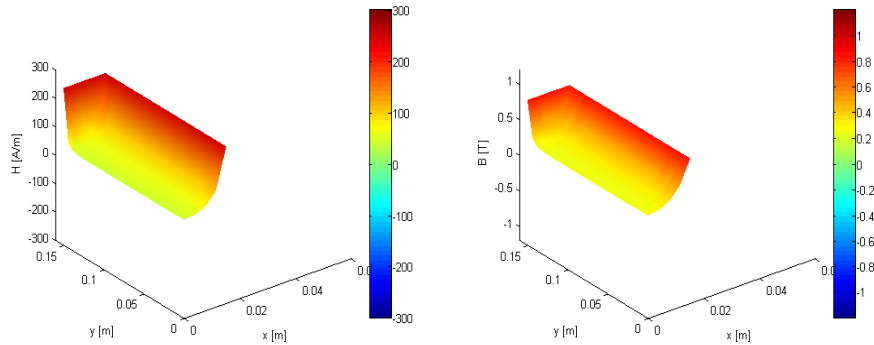
Az eddigiek alapján a háromszög felett integrálandó formafüggvények a következőképpen írhatóak fel:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a_1\xi_i + b_1\eta_i + c_1 & a_2\xi_i + b_2\eta_i + c_2 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \\ W_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & a_1\xi_i + b_1\eta_i + c_1 & a_2\xi_i + b_2\eta_i + c_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \\ W_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & a_1\xi_i + b_1\eta_i + c_1 & a_2\xi_i + b_2\eta_i + c_2 \end{vmatrix}}{\Delta}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

7.5. Eredmények, kiértékelés

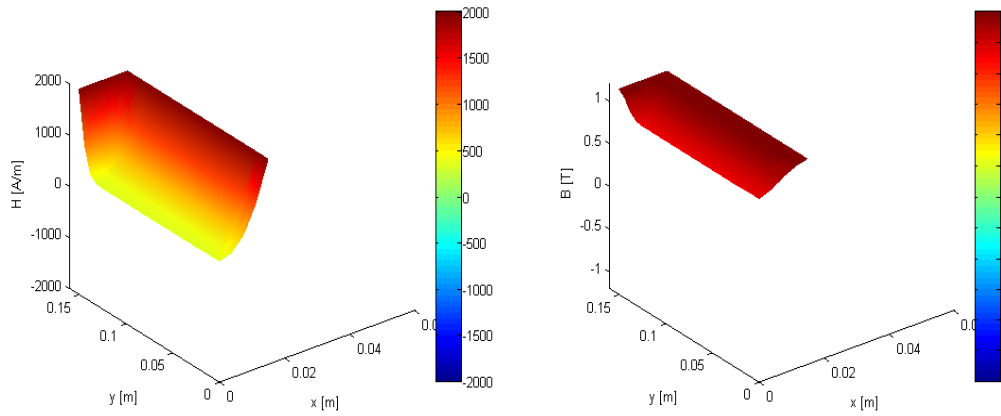
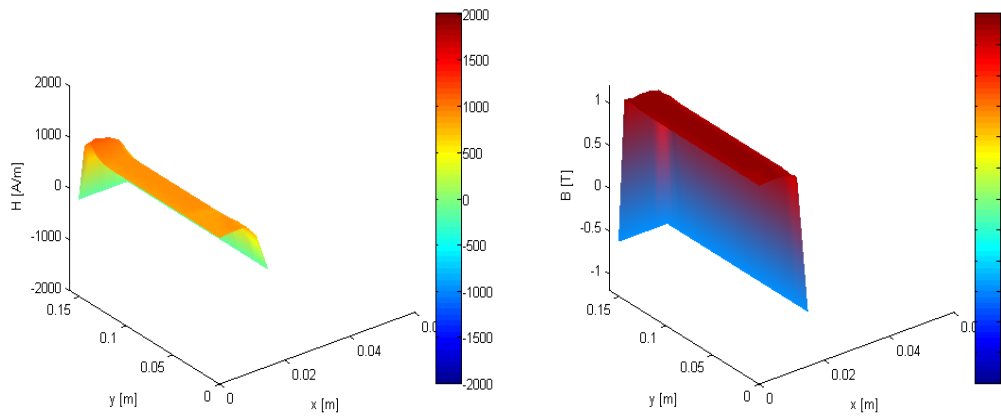
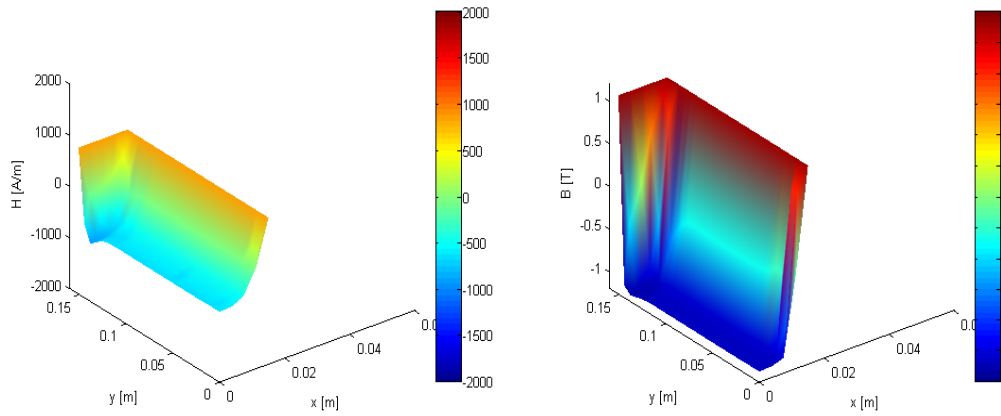
A szimuláció paraméterei: $f = 1 \text{ Hz}$, $T = 1 \text{ s}$, $\sigma = 2,22 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$, $\frac{a}{2} = 0,175 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $\frac{b}{2} = 0,15 \text{ m}$, $H_0 = 2000 \frac{\text{A}}{\text{m}}$.

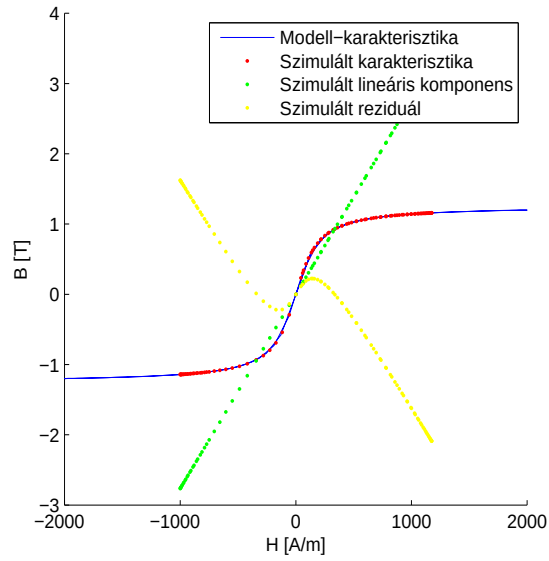
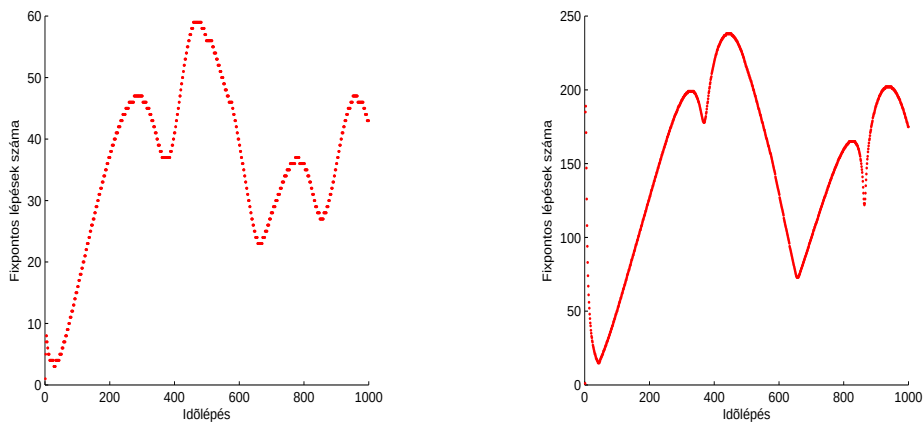
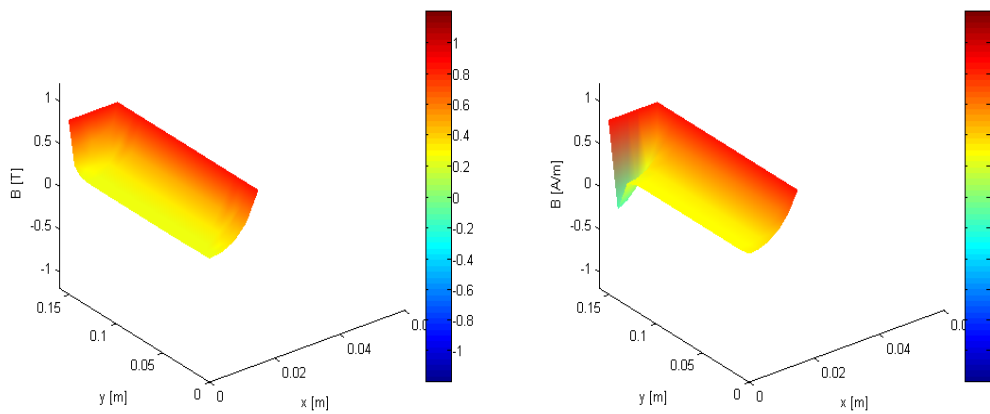
Az eredmény jellege, a mágneses térerősség és a mágneses indukció alakulása összevethető az egydimenziós szimuláció esetén tapasztalttal, hiszen a kétdimenziós lemez minden x -irányú metszetén tulajdonképpen az egydimenziós, a teljes x -irányt átfogó szimulációnak a felét tanulmányozhatjuk.



7.3. ábra. H és B közötti lineáris kapcsolat ($t < 0,1T$)

A kézzel rajzolt, szabályos rácson lefutattott, és a GMSH-val generált sűrűbb rácson elvégzett szimuláció közötti különbség a 7.9. ábrán tanulmányozható. A szimulációs hiba oka, hogy az anyag belsejében felvett végelem-méret összemérhető az ott terjedő elektromágneses hullám hullámhosszával és behatolási mélységével, emiatt az elemek közötti változás olyan mértékű, ami már szimulációs hibát okoz. A hiba elkerülésének érdekében célszerű tehát a végelem-hálót kellően sűrűre felvenni.

7.4. ábra. Szaturáció ($t = 0,25T$)7.5. ábra. Éles átmenet $t = 0,52T$ -nél7.6. ábra. Éles átmenet $t = 1,07T$ -nél

7.7. ábra. A karakterisztika alakulása az $N = 60$ csomópontban7.8. ábra. Fixpontos lépések száma időlépésenként ($\varepsilon = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-5}$)

7.9. ábra. Szimulációs hiba a ritkább, szimmetrikus rácsból adódóan

8. fejezet

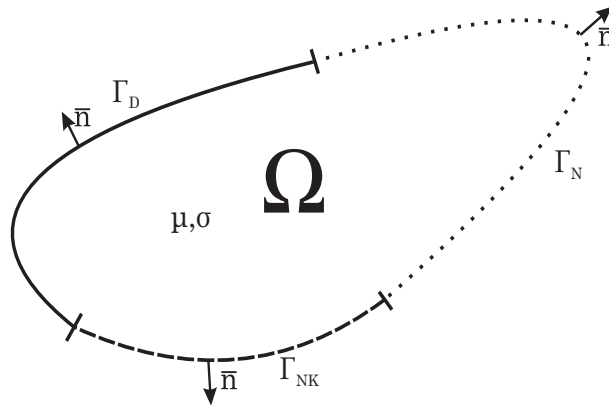
Kétdimenziós szimuláció a mágneses indukcióra építve

Ebben a fejezetben bemutatom a nemlineáris, örvényáramú A -formalizmus egyenleteit, gyenge alakjának levezetését és a végelelemes implementációt egy konkrét példán keresztül.

8.1. A probléma definiálása

A formalizmus segítségével vizsgált probléma általánosítva a 8.1. ábrán látható. Az adott mágneses permeabilitásfüggvénnyel és vezetőképességgel rendelkező Ω problémateret három különböző típusú perem határolja. Γ_D Dirichlet-típusú peremen a keresett $\vec{A}$ vektorpotenciál értéke direkt módon kerül előírásra, Γ_N Neumann-típusú peremen $\vec{A}$ normális irányú deriváltja kerül meghatározásra, Γ_{NK} pedig az a külön perem, ahol a gerjesztés, a $\vec{K}$ felületi áram kerül előírásra.

Fontos megjegyezni, hogy Γ_{NK} is egy Neumann-típusú perem, pusztán a könnyebb matematikai kezelhetőség miatt kerül külön bevezetésre Γ_N mellett.



8.1. ábra. A vizsgált probléma általánosítva

8.2. A problémát leíró egyenletek

A problémát leíró differenciálegyenlet levezetéséhez a Maxwell-egyenletek kvázistacionárius alakjai, illetve a nemlinearitást is figyelembe vevő konstitúciós relációk szükségesek:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \quad (8.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (8.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (8.3)$$

$$\vec{H} = \nu \vec{B} + \vec{I}, \quad (8.4)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (8.5)$$

A problémához tartozó peremfeltétel:

$$\vec{H} \times \vec{n} = \vec{K} \quad \text{A } \Gamma_{NK} \text{ peremen.} \quad (8.6)$$

Mivel (8.3) alapján a mágneses indukcióvektor divergenciamentes [4], $\vec{A}$ vektorpotenciál bevezethető

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (8.7)$$

alapján, mert:

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0 \quad \forall \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (8.8)$$

$\vec{A}$ vektormező divergenciáját is meg kell határozni, ebben az esetben a választás: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Ez az úgynevezett Coulomb-mérték, ami kétdimenziós szimuláció esetén automatikusan teljesül [4]. (8.2) átírható (8.7) segítségével:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}). \quad (8.9)$$

Nem mozgó koordináta-rendszerben az idő- és a hely szerinti deriválás felcserélhető, ezért (8.9) felírható

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (8.10)$$

alakban. $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$ rotációmentes vektormező általános esetben származtatható a V elektromos skalárpotenciálból a

$$\nabla \times \nabla V = 0 \quad \forall V(\vec{r}, t) \quad (8.11)$$

összefüggés alapján [4]:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (8.12)$$

Az általam vizsgált problémák esetén $\nabla V = 0$ így

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (8.13)$$

írható fel. A gerjesztési törvény (8.1) felírható (8.4), (8.5), (8.7) és (8.13) segítségével, így a problémát leíró egyenlet a

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I}) = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (8.14)$$

alakban adódik. A peremfeltétel (8.4) és (8.7) segítségével kifejezve:

$$(\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I}) \times \vec{n} = \vec{K}. \quad (8.15)$$

8.3. Gyenge alak levezetése

A levezetés első lépése (8.14) és (8.15) összeadása, megszorozása egy tetszőleges $\vec{W}$ formafüggvénnyel és integrálása a problématarományra:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \left\{ \nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I}) \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \left\{ (\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I}) \times \vec{n} \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma = \\ = -\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \vec{K} d\Gamma. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Felbontva az első integrandus zárójelét, továbbá átrendezve az egyenletet a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \nabla \times \nu \nabla \times \vec{A} d\Omega + \sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \left\{ (\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I}) \times \vec{n} \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma = - \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \nabla \times \vec{I} d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \vec{K} d\Gamma \end{aligned} \quad (8.17)$$

formula adódik. Az egyenlet mindkét oldalának első integrandusa a

$$\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \times \vec{v} \quad (8.18)$$

azonosságot felhasználva felbontható a bal oldalon $\vec{v} = \vec{W}$, $\vec{u} = \nu \nabla \times \vec{A}$, a jobb oldalon $\vec{v} = \vec{W}$, $\vec{u} = \vec{I}$ megválasztással. A felbontás elvégzése után a következő egyenlet adódik:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nu \nabla \times \vec{A} \times \vec{W}) d\Omega + \int_{\Omega} \nu \nabla \times \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{W} d\Omega + \sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \left\{ (\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I}) \times \vec{n} \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{I} \times \vec{W}) d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \vec{I} \cdot \nabla \times \vec{W} d\Omega + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \vec{K} d\Gamma. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Egy vektormező divergenciájának teljes problématerre vett integrálja (3.7) értelmében átírható a térfogatot határoló felületre vett körintegrálra, így a következő

formula adódik:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma_D \cup \Gamma_N} \left(\nu \nabla \times \vec{A} \times \vec{W} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \nu \nabla \times \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{W} d\Omega + \sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \left\{ \left(\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I} \right) \times \vec{n} \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma = - \oint_{\Gamma_D \cup \Gamma_N} \vec{I} \times \vec{W} \cdot \vec{n} d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega} \vec{I} \cdot \nabla \times \vec{W} d\Omega + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \vec{K} d\vec{\Gamma}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

A vegyes szorzat

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \quad \forall \vec{a}(\vec{r}, t), \vec{b}(\vec{r}, t), \vec{c}(\vec{r}, t) \quad (8.21)$$

tulajdonságát felhasználva az egyenlet bal oldalának első integrálja felbontható:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma_D \cup \Gamma_N} \left(\nu \nabla \times \vec{A} \times \vec{W} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma = \oint_{\Gamma_D} \left(\vec{W} \times \vec{n} \right) \cdot \nu \nabla \times \vec{A} d\Gamma + \\ & \oint_{\Gamma_N} \left(\vec{n} \times \nu \nabla \times \vec{A} \right) \cdot \vec{W} d\Gamma. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Mivel Γ_D -n a vektorpotenciál közelítése a

$$\vec{A} \approx A_D + \sum_i W_i A_i \quad (8.23)$$

formula segítségével úgy történik, hogy $W_i = 0$, ezért az első tag zérus, kiesik. A Neumann-perem integrálja átírható

$$\oint_{\Gamma_N} \left\{ \vec{n} \times \left(\vec{H} - \vec{I} \right) \right\} \cdot \vec{W} d\Gamma = \oint_{\Gamma_N} \left(\vec{n} \times \vec{H} \right) \cdot \vec{W} d\Gamma - \oint_{\Gamma_N} \left(\vec{n} \times \vec{I} \right) \cdot \vec{W} d\Gamma. \quad (8.24)$$

Mivel Γ_N peremen nem folyik áram, a kifejezés első tagja kiesik. (8.20) jobb oldalának első integrálja az előzőekkel teljesen analóg módon felbontható:

$$- \oint_{\Gamma_D \cup \Gamma_N} \vec{I} \times \vec{W} \cdot \vec{n} d\Gamma = - \oint_{\Gamma_D} \left(\vec{W} \times \vec{n} \right) \cdot \vec{I} d\Gamma - \oint_{\Gamma_N} \left(\vec{n} \times \vec{I} \right) \cdot \vec{W} d\Gamma. \quad (8.25)$$

(8.20) bal oldalának negyedik integrálja átírható a

$$\int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot (\vec{n} \times \vec{n}) \cdot \left(\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I} \right) d\Gamma \quad (8.26)$$

alakba, ami $\vec{n} \times \vec{n}$ miatt zérus, kiesik. Az eddigiek alapján (8.20) a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu \nabla \times \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{W} d\Omega + \sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega - \oint_{\Gamma_N} \left(\vec{n} \times \vec{I} \right) \cdot \vec{W} d\Gamma = \\ & = - \oint_{\Gamma_N} \left(\vec{n} \times \vec{I} \right) \cdot \vec{W} d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{I} \cdot \nabla \times \vec{W} d\Omega + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \vec{K} d\vec{\Gamma}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

A Γ_N -re vett körintegrál kiesik, hiszen mindkét oldalon egyformán szerepel, így adódik a ténylegesen implementálásra kerülő gyenge alak:

$$\int_{\Omega} \nu \nabla \times \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{W} d\Omega + \sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{I} \cdot \nabla \times \vec{W} d\Omega + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \vec{K} d\vec{\Gamma}. \quad (8.28)$$

8.4. Végeselemes implementáció

Az $\vec{A}$ mágneses vektorpotenciál a vizsgált példában olyan vektormennyiség, amelynek csak z -irányú komponense van, de kizárólag (x, y) -térdimenzióktól és az időtől függ:

$$\vec{A} = A_z(x, y) \vec{e}_z = A \vec{e}_z. \quad (8.29)$$

A vektorpotenciál emiatt automatikusan kielégíti a Coulomb-mértéket, hiszen:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (8.30)$$

A közelítése W skaláris, lineáris formafüggvények segítségével történik:

$$A \approx \sum_{i=1}^{N_p} W_i A_i. \quad (8.31)$$

Az implementáció alapjait tekintve megegyezik az eddig tárgyaltakkal, ezért a részletes bemutatástól ezúttal eltekintek, csupán az eddigiektől eltérő gerjesztés megvalósítását és a megoldás mechanizmusát, lépéseit kívánom bemutatni. A továbbiakban n jelöli a kétdimenziós diszkretizálás során létrejött csomópontok számát, m pedig az elemek számát. A szimuláció során a $\underline{K}$ együtthatómátrix $(n \times n)$ méretű, $\underline{u}$ és $\underline{b}$ ismeretleneket és a peremfeltételeket tartalmazó oszlopvektor n -méretű. A szimuláció lépései a következők:

1. $\underline{K}$ együtthatómátrix asszemblálása (8.28) első és második integráljának együtthatói alapján $(n \times n)$;
2. $\underline{B}$ együtthatómátrix asszemblálása (8.28) második integrálja alapján, hiszen ez a tag az ismeretlen vektorpotenciál idő szerinti deriváltját tartalmazza, így valamilyen módon elő kell állítani A_{old} együtthatóit is $(n \times n)$;
3. $\underline{b}$ oszlopvektor $\underline{b}_{exc}$ -komponensének előállítása (8.28) negyedik integrálja alapján. Az előállítás során egy dimenziót vissza kell lépni, hiszen ez a tag egy felületi integrál, a felület pedig szakaszokkal diszkretizálható. Ez egyetlen elemre:

$$\int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \vec{K} d\vec{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot K \cdot \frac{dl}{2}, \quad (8.32)$$

ahol dl a szakasz hosszát jelöli. $\underline{b}_{exc}$ $(n \times 1)$ méretű;

4. $\underline{b}$ oszlopvektor $\underline{b}_{Adt}$ -komponensének előállítása $\underline{B}$ együtthatómátrix és A_{old} alapján:

$$\underline{b}_{Adt} = \underline{B} A_{old} \quad (8.33)$$

$\underline{b}_{Adt}$ $(n \times 1)$ méretű;

5. Fixpontos iteráció indítása addig, amíg ε küszöbindex kellően kis értékűre csökken. Az első lépésnél $\underline{b}_{Ix}$ és $\underline{b}_{Iy}$ oszlopvektorok kinullázásra kerülnek, méretük $(n \times 1)$ -es. Egyetlen fixpontos lépésben a következőket kell végrehajtani:

- (a)
- $\underline{b}$
- (
- $n \times 1$
-) előállítás:

$$\underline{b} = \underline{b}_{exc} + \underline{b}_{Adt} - (\underline{b}_{Ix} + \underline{b}_{Iy}); \quad (8.34)$$

- (b) Dirichlet-peremfeltétel érvényesítése, tehát
- $\underline{\underline{K}}$
- és
- $\underline{b}$
- megfelelő elemeinek explicit értékadása;

- (c)
- $\underline{u}$
- kiszámítása:

$$\underline{u} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{b} \quad (8.35)$$

$\underline{u}$ ebben az esetben az A vektorpotenciál értékeit tartalmazza. Mivel csomóponti végelemekkel dolgoztam, ezért a kiszámítás után minden csomópontban rendelkezésemre áll egy-egy A -érték.

- (d)
- $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$
- kiszámítása. Ez azt jelenti, hogy minden egyes végelemre ki kell számítani az elemet alkotó csomópontokban rendelkezésre álló
- A
- értékekből egy
- B_x
- és egy
- B_y
- indukcióértéket. Így jön létre két (
- $m \times 1$
-) méretű vektor,
- $\underline{B}_x$
- és
- $\underline{B}_y$
- ;

- (e)
- H_x
- és
- H_y
- approximálása:

$$\begin{aligned} \underline{H}_x &= \nu \underline{B}_x + \underline{I}_{xold}, \\ \underline{H}_y &= \nu \underline{B}_y + \underline{I}_{yold}, \end{aligned} \quad (8.36)$$

$\underline{H}_x$ és $\underline{H}_y$ ($m \times 1$)-méretű vektorok;

- (f)
- I_x
- és
- I_y
- számítása:

$$\begin{aligned} \underline{I}_x &= \underline{H}_x - \nu \mathcal{B}\{\underline{H}_x\}, \\ \underline{I}_y &= \underline{H}_y - \nu \mathcal{B}\{\underline{H}_y\}, \end{aligned} \quad (8.37)$$

$\underline{I}_x$ és $\underline{I}_y$ ($m \times 1$)-méretű vektorok;

- (g)
- $\underline{b}_{Ix}$
- és
- $\underline{b}_{Iy}$
- feltöltése (8.28) harmadik integrálja szerint;

- (h)

$$\varepsilon = \|\underline{I} - \underline{I}_{old}\|; \quad (8.38)$$

- (i)

$$\underline{I}_{xold} = \underline{I}_x, \quad \underline{I}_{yold} = \underline{I}_y; \quad (8.39)$$

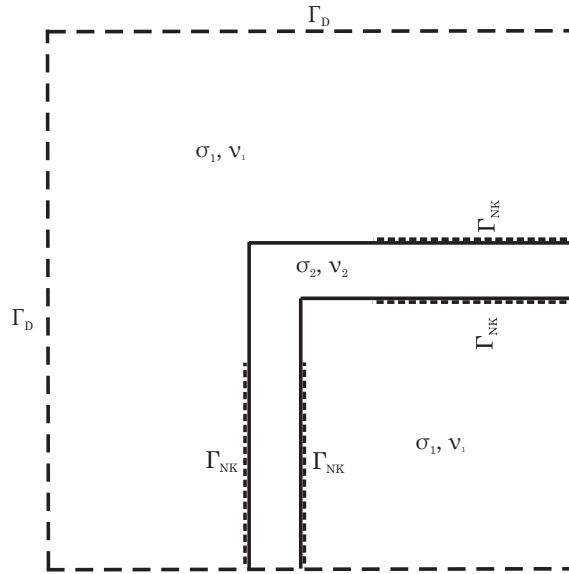
6.

$$\underline{A}_{old} = \underline{A}; \quad (8.40)$$

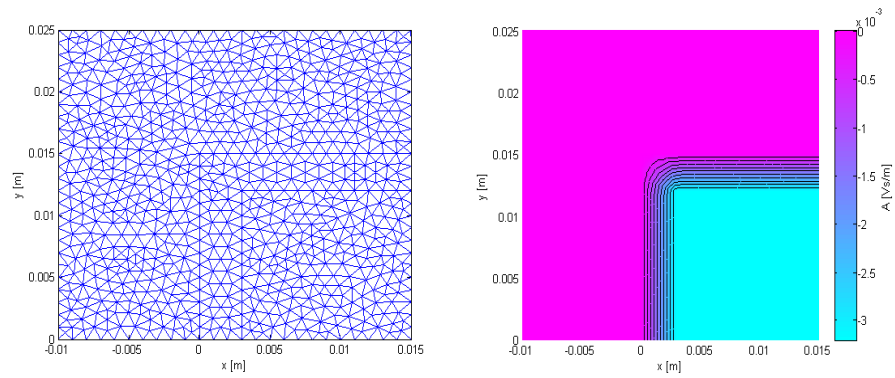
8.5. A szimulált geometria

A szimulált geometriai elrendezést a 8.2. ábra mutatja. Az adott ν_2 reciprok permeabilitásfüggvénnyel és σ_2 vezetőképességgel rendelkező vasanyagon a szaggatott vonallal jelölt szakaszon áramjárta vezetőt feltételezünk, ami a lemezek teljes keresztmetszetére van feltekercselve. A feltekercselt vasanyagot ν_1 és σ_1 paraméterekkel rendelkező levegő veszi körül.

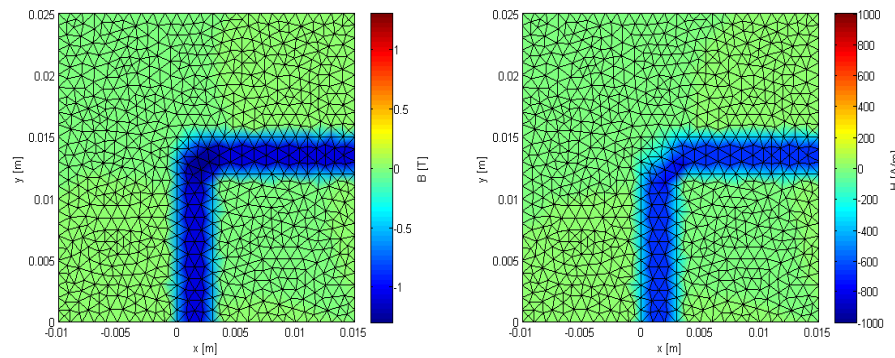
Γ_{NK} peremen az áramjárta vezetőt reprezentáló $\vec{K}$ felületi áramsűrűséget szükséges előírni, ami a tekercselés irányából adódóan a lemez egyik oldalán pozitív, a másik oldalán negatív előjellel kerül előírásra. Γ_D Dirichlet-peremen a csomóponti potenciálértékek kinullázásra kerülnek, hiszen ez a vizsgáldás tényleges határfelülete.



8.2. ábra. A szimulált geometriai elrendezés



8.3. ábra. A diszkrétizált geometria és a vektorpotenciál alakulása

8.4. ábra. $\vec{B}$ és $\vec{H}$ alakulása

Konklúzió, jövőbeli tervek

Dolgozatomban bemutattam a mágneses térerősség és a mágneses indukció közötti skaláris hiszteréziskapcsolat mérésének elvét, ismertettem az elvégzett mérések eredményeit és egy inverz-tangens görbével analitikus módon leírható modell paramétereinek identifikációjával egy nemlineáris karakterisztikát illesztettem a mérési eredményeimre. Bemutattam a Maxwell-egyenletek teljes rendszerét, felvázoltam a végeselem-módszer alapelvét, legfontosabb jellemzőit.

Bemutattam azokat a szükséges eljárásokat, amelyek a nemlineáris anyagtulajdonságok implementálásához szükségesek végeselem-módszer esetén, bemutattam a polarizációs formulát, az iterációs lépéseket két különböző formalizmus esetére. Felvázoltam a mágneses térerősségre épülő formalizmus alapegyenleteit, levezettem a problémát leíró differenciálegyenletet, az abból levezetett gyenge alakot, valamint megvalósítását végeselem-módszer segítségével. Az eredmények alapján látható, hogy a direkt $\vec{H}$ -ra épülő formalizmus eredménye jól kezelhető, fixpontos megoldás mellett is viszonylag gyorsan konvergál, hátránya viszont, hogy peremfeltételek megadása esetén direkt módon a mágneses térerősséget kell előírni, ami kevésbé gyakorlatias megoldás.

Egy általános és egy konkrét problémán keresztül bemutattam az örvényáramú, nemlineáris $\vec{A}$ -formalizmus alapegyenleteit, levezettem a megoldásra kerülő differenciálegyenletet és bemutattam a peremfeltételeket, levezettem a gyenge alakot, felvázoltam a megoldás során asszemblálásra kerülő mátrixokat és vektorokat, valamint az iterációs lépések sorrendjét, a megoldás mechanizmusát, végül ismertettem az eredményeket. Az eredmények alapján megfogalmazható, hogy az $\vec{A}$ -formalizmus implementálása összetett, komplexebb feladat, a direkt modell illesztése a szimulációhoz nehezebb, a fixpontos iteráció konvergenciája bár itt is biztosított, de sokkal lassabb, mint a mágneses térerősségre épülő feladat esetén. A módszer nagy előnye, hogy sokkal gyakorlatiasabb, hiszen a felületi áram peremfeltételként előírható, mint gerjesztés.

A legfontosabb jövőbeli tervem, hogy az elvégzett mérési eredményeim alapján egy jól működő, jól kezelhető skaláris *Preisach-modellt* illesszek a bemutatott szimulációhoz, így az eddigieken túl nemlineáris, többértékű, hiszterézises kapcsolatot valósítsak meg a mágneses térerősség és a mágneses indukció között.

Irodalomjegyzék

- [1] Dr. Kuczmann Miklós, Ph.D, A hiszterézis karakterisztikával jellemzett rendszerek és a numerikus térszámítás kapcsolata, habilitációs disszertáció, Széchenyi István Egyetem, 2010
- [2] Alfonso A. Irarrazabal, Luca David Opromolla, Hysteresis in Export Markets
- [3] Amália Iványi, Hysteresis Models In Electromagnetic Computation, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1997
- [4] Kuczmann M. Iványi A., The Finite Element Method In Magnetism, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008
- [5] Marcsa D., A Preisach-modell és alkalmazása a villamosmérnöki gyakorlatban, TMDK-dolgozat, Győr, 2009
- [6] <http://hungary.ni.com/labview> *Utolsó látogatás: 2014 március 4.*
- [7] <http://www.ni.com/data-acquisition> *Utolsó látogatás: 2014 március 4.*
- [8] <http://www.mathworks.com> *Utolsó látogatás: 2014 március 4.*
- [9] http://en.wikipedia.org/wiki/A_Dynamical_Theory_of_the_Electromagnetic_Field *Utolsó látogatás: 2014 március 4.*
- [10] http://hu.wikipedia.org/wiki/Oliver_Heaviside *Utolsó látogatás: 2014 március 4.*
- [11] I. N. Bronstein, K.A. Szemengyaljev, Matematikai kézikönyv, Typotex Kiadó, 2009
- [12] Iványi Amália, Folytonos és diszkrét szimulációk az elektrodinamikában, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2003
- [13] Dr. Simonyi Károly, Dr. Fodor György, Dr. Vágó István, Elméleti villamosságtan példatár, Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1980
- [14] Prof. Dr. habil. Kuczmann Miklós, Elektrodinamika oktatási jegyzetek <http://maxwell.sze.hu/~kuczmann/Elektrodinamika/Eloadasok/Eloadas03/Elmelet.pdf> *Utolsó látogatás: 2014. március 26.*
- [15] J.P.A. Bastos, N. Sadowski, Electromagnetic Modeling By Finite Element Methods, Mercel Dekker, 2003

- [16] <http://geuz.org/gmsh> / *Utolsó látogatás: 2014. április 1.*
- [17] Ivo Dolezel, Pavel Karban, Pavel Solin, Integral Methods in Low-Frequency Electromagnetics, John Wiley & Sons, Inc, Canada, 2009
- [18] G. Bertotti, I. Mayergoyz, The Science of Hysteresis, Academic Press, 2006
- [19] Z. Pólik, M. Kuczmann, Measuring and control the hysteresis loop by using analog and digital integrators, Journal of Optoelectronics and Advanced Materials, Vol. 10, No. 7, July 2008