

# RÁDIÓFREKVENCIÁS TEREK NUMERIKUS ANALÍZISE

KÉSZÍTETTE:

FRIEDL GERGELY

VILLAMOSMÉRNÖK MSC HALLGATÓ

KONZULENS:

PROF. DR. HABIL. KUCZMANN MIKLÓS

TANSZÉKVEZETŐ EGYETEMI TANÁR

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM  
ELEKTROMÁGNESES TEREK LABORATÓRIUM  
2014

# Tartalomjegyzék

|                                                            | Oldal     |
|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. BEVEZETÉS</b>                                        | <b>1</b>  |
| 1.1. A dolgozat célja . . . . .                            | 1         |
| 1.2. Köszönetnyilvánítás . . . . .                         | 2         |
| <b>2. ELMÉLETI ÁTTEKINTÉS</b>                              | <b>3</b>  |
| 2.1. Végeelem-módszer . . . . .                            | 3         |
| 2.1.1. Modell specifikációja . . . . .                     | 5         |
| 2.1.2. Előfeldolgozás . . . . .                            | 5         |
| 2.1.2.1. Csomóponti formafüggvény . . . . .                | 6         |
| 2.1.2.2. Élmenti formafüggvény . . . . .                   | 8         |
| 2.1.2.3. Interpoláció a formafüggvények segítségével . .   | 10        |
| 2.1.2.4. Gauss-kvadratura . . . . .                        | 12        |
| 2.1.3. Megoldás . . . . .                                  | 14        |
| 2.2. Elektromágneses terek . . . . .                       | 15        |
| 2.2.1. Maxwell-egyenletek általános alakjai . . . . .      | 15        |
| 2.2.2. A frekvenciatartománybeli hullámegyenlet . . . . .  | 17        |
| 2.2.3. Az időtartománybeli hullámegyenlet . . . . .        | 19        |
| <b>3. TÉRSZIMULÁCIÓ VÉGESELEM-MÓDSZERREL</b>               | <b>21</b> |
| 3.1. Frekvenciatartománybeli analízis . . . . .            | 21        |
| 3.1.1. Gyenge alak . . . . .                               | 21        |
| 3.1.1.1. Implementáció 1D probléma esetén . . . . .        | 23        |
| 3.1.1.2. Implementáció 2D probléma esetén . . . . .        | 24        |
| 3.1.2. 1D problémák a frekvenciatartományban . . . . .     | 25        |
| 3.1.2.1. Végtelen féltér probléma . . . . .                | 25        |
| 3.1.2.2. Levegőtől eltérő közeg hatása . . . . .           | 28        |
| 3.1.3. 2D problémák a frekvenciatartományban . . . . .     | 29        |
| 3.1.3.1. Csőtápvonal . . . . .                             | 30        |
| 3.1.3.2. Sáváteresztő szűrő tervezése írisz segítségével . | 31        |

|           |                                                                           |           |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.1.3.3.  | Parabola antenna . . . . .                                                | 33        |
| 3.1.3.4.  | Botantennák . . . . .                                                     | 35        |
| 3.2.      | Időtartománybeli analízis . . . . .                                       | 38        |
| 3.2.1.    | Gyenge alak . . . . .                                                     | 38        |
| 3.2.1.1.  | Megoldás <i>Newmark</i> – $\beta$ módszerrel . . . . .                    | 39        |
| 3.2.1.2.  | Implementáció 1D probléma esetén . . . . .                                | 40        |
| 3.2.1.3.  | Implementáció 2D probléma esetén . . . . .                                | 40        |
| 3.2.2.    | 1D problémák az időtartományban . . . . .                                 | 42        |
| 3.2.2.1.  | Végtelen féltér probléma . . . . .                                        | 42        |
| 3.2.2.2.  | Levegőtől eltérő közegek hatása . . . . .                                 | 43        |
| 3.2.3.    | 2D problémák az időtartományban . . . . .                                 | 45        |
| 3.2.3.1.  | Csőtápvonal íriszsel . . . . .                                            | 46        |
| 3.2.3.2.  | Négyszögletes rezonátor . . . . .                                         | 47        |
| <b>4.</b> | <b>SZÁMÍTÁSI IDŐ CSÖKKENTÉSÉNEK LEHETŐSÉGEI</b>                           | <b>51</b> |
| 4.1.      | Egyenletrendszer tárolása a memóriában . . . . .                          | 51        |
| 4.2.      | Problématér felosztása szimmetriasíkok mentén . . . . .                   | 52        |
| 4.3.      | Végeselem-módszer implementációja PETSc függvények segítségével . . . . . | 53        |

# 1. fejezet

## BEVEZETÉS

### 1.1. A dolgozat célja

Diákköri dolgozatom a rádiófrekvenciás elektromágneses problémák numerikus analízisének témakörében íródott. Antennarendszerek fejlesztésével, mikrohullámú áramkörök és érzékelők gyártásával foglalkozó vállalatok fő profiljába tartozik a végeselem-módszert alkalmazó szoftverekkel támogatott tervezés. Ilyen, végeselem-módszert alkalmazó, kereskedelmi forgalomban kapható szoftver például a *Comsol Multiphysics* [1], *HFSS* [2], vagy a *CST* [3]. A tervezés fő kritériumai közé tartozik legtöbbször a kívánt iránykarakterisztika megtervezése, különböző eszközök impedanciaillesztése, illetve elektromágneses kompatibilitással kapcsolatos problémák vizsgálata. A kritériumok kielégítésére analitikus, illetve közelítő módszerekkel is lehetőség van (például a Smith-diagrammal történő tervezés), bonyolultabb esetekben azonban ez nem mindig célravezető, numerikus módszerek alkalmazásával viszont tetszőleges geometriájú és jellegű probléma analízise lehetséges. Rádiófrekvenciás elektromágneses terek vizsgálata esetén sok esetben érdekes lehet egy eszköz idő- és frekvenciatartománybeli viselkedése is, ezek vizsgálatának módszereire és azok alkalmazási lehetőségeire bővebb betekintést ad dolgozatom.

A szimulációk megértéséhez szükséges elméleti háttér és azok implementációs lehetőségei egyaránt tárgyalásra kerülnek a dolgozatban. Az első fejezetben részletes betekintés található az elektromágneses tereket leíró *Maxwell*-egyenletek, és a bennük szereplő térmennyiségek viselkedéséről idő- és frekvenciatartományban egyaránt. A dolgozat a rádiófrekvenciás tereket leíró hullámegyenletek *Maxwell*-egyenletekből történő levezetésével folytatódik, a *Sommerfeld* sugárzási feltétel figyelembevételével. Röviden bemutatásra kerül a végeselem-módszer, annak lépései és implementálási lehetőségei, a csomóponti- és élmenti formafüggvények leírása és alkalmazhatósága, valamint a *Gauss*-kvadratura alkalmazásának szükségessége és rövid elméleti összefoglalása. A hullámegyenletekből és a *Sommerfeld* sugárzási feltételekből kiindulva levezetésre kerülnek az idő- és frekvenciatartománybeli analízis gyenge alakjai. A gyenge alakok alapján a végeselem-módszer implementálásának lehetőségeit szintén ebben a fejezetben tárgyalom, köztük a *Dirichlet*- és *Neumann*-típusú peremfeltételek beállítását, és az időlépések között kapcsolatot teremtő,

másodrendű inhomogén differenciálegyenlet-rendszerek megoldásához használható *Newmark- $\beta$*  módszert. Az elméleti alapokat alkalmazva megvalósított, egy- és kétdimenziós idő- és frekvenciatartománybeli térszimulációkon keresztül mutatom be a módszer alkalmazhatóságát, és ahol lehetséges, analitikus közelítésekkel támasztom az eredményeket. Dolgozatomban több alkalommal kitérek az idő- és frekvenciatartománybeli analízis alkalmazhatóságára, összefoglalom a módszerek előnyeit és hátrányait. Dolgozatom zárásaként megemlítek pár, a térszimulációk számítási idejének redukálására szolgáló technikát.

A kutatási munkám során a diszkretizálást minden 2D-s probléma esetén a GMSH [4] szoftver rácsgeneráló moduljának alkalmazásával végeztem el, a végeselem-módszer további lépéseit pedig Matlab [5, 22] illetve PETSc [6] függvények segítségével valósítottam meg. Dolgozatomat L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X környezetben készítettem el.

## 1.2. Köszönetnyilvánítás

A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú „*Nemzeti Kiválóság Program - Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program*” című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

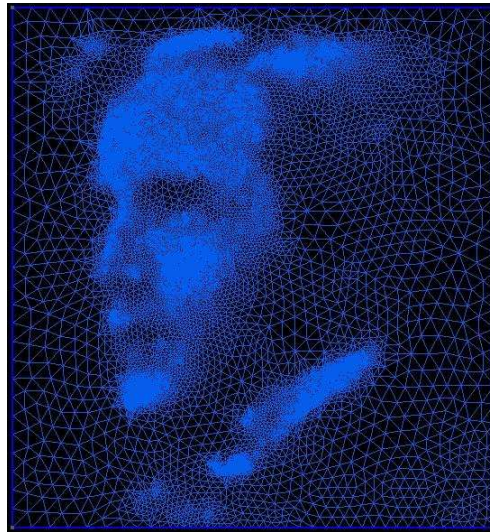
## 2. fejezet

# ELMÉLETI ÁTTEKINTÉS

A fejezet rövid ismertetést nyújt a végeselem-módszer elméleti alapjairól és a rádiófrekvenciás elektromágneses tereket leíró összefüggésekről. Bemutatom a végeselemes szimulációk lépéseit, a lépések implementálásához szükséges teendőket, illetve a csomóponti- és az élmenti formafüggvényeket leíró formulákat. Részletesen bemutatom a dolgozatban szereplő rádiófrekvenciás problémákat leíró idő- és frekvenciatartománybeli elektromos hullámegyenletek levezetését egészen a *Maxwell*-egyenletektől indulva.

### 2.1. Végeselem-módszer

Analitikusan nem, vagy csak nehezen megoldható parciális differenciálegyenletek megoldására numerikus módszereket alkalmaznak. A parciális differenciálegyenletek közelítő megoldása többek között a súlyozott maradék elv [7, 8, 10, 11] alkalmazásával lehetséges. A súlyozott maradék elv működése abban rejlik, hogy nem követeli meg sem a parciális differenciálegyenletek pontos megoldását, sem a peremfeltételek tökéletes kielégítését, ehelyett a parciális differenciálegyenletek és peremfeltételek maradékának egy tetszőleges súlyfüggvénnyel vett belső szorzatát teszi egyenlővé zérussal, és ennek a súlyozott maradéknak a megoldása adja a parciális differenciálegyenlet közelítő megoldását. A közelítés mértéke függ az időbeli és térbeli diszkretizálás mértékétől. Az időlépések illetve a számítani kívánt térbeli pontok sűrítésével a valósághoz közelebbi megoldásra lehet jutni, ennek viszont felső határt szab a számítási kapacitás igényének növekedése. A súlyozott maradék elvének családjába különböző technikák tartoznak. A legismertebbek talán a véges differenciák módszere, a peremelem-módszer illetve a végeselem-módszer. Az alkalmazott súlyfüggvény tetszőlegesen megválasztható. A súlyfüggvényt a *Galjorkin*-eljárásnak megfelelően az elemekre felírható formafüggvénynek megválasztva lehet eljutni a végeselem-módszer [7–11] technikájához, mellyel munkám során mélyrehatóbban foglalkoztam. Maga a végeselem kifejezés annyit jelent, hogy a módszer alkalmazásához a problémát véges számú elemre bontása, diszkretizálása szükséges (lásd 2.1 ábra), majd a már diszkrét elemeken a problémára érvényes egyenletek alapján a teljes térre érvényes egyenletrendszert kell felépíteni, asszemblálni.



2.1. ábra: James Clerk Maxwell arcképe elemekre bontva

A módszer alkalmazása a számítások során a véges elemszám és a véges időlépés miatt, valamint maga a súlyozott maradék elvének értelmében kis hibával jár, ám a módszer ezeket a hibákat az egész térfogaton egyenletesen elosztja, az eltérések átlagolódnak. A hiba mértékének csökkentésére több lehetőség is van, bár ezek a módszerek mind a számítási idő növekedésével járnak. Ezek a módszerek vagy az elemszám növelésével, vagy az elemekre felírható függvények rendjének növelésével, vagy mindkettővel járnak. A tervezés során tehát érdemes a diszkretizáció olyan mértékű megválasztása, hogy kevesebb ismeretlen esetén is már egy elfogadható hibahatáron belül maradjon az eredmény. Ezt a célt szolgálja az adaptív hálógenerálás, mely eljárás lényege abban rejlik, hogy ugyanazon probléma többször kerül megoldásra, és minden újabb számítás a kritikus pontok körül sűrített háló mellett történik. A háló sűrítése egészen addig történik, míg egy előre meghatározott kritériumnak megfelelő lesz az eredmény. Ilyen kritérium lehet például az egymással szomszédos elemeken felvett eredménynek százalékos eltérése. Az elemek méretének azonban sok esetben felső határt szab a geometria, illetve az eredmény valamilyen jellegű periodicitásának elemmérettel való összemérhetősége. Rádiófrekvenciás problémák esetén több ökölszabály is létezik a diszkrét elemek méretének felső határának meghatározására, melyek mind a hullámhossz és az elemekre felírható formafüggvények rendjének függvényei.

A végeselemes tervezés folyamata 4 főbb részre bontható:

1. *Modell specifikációja*: a probléma geometriájának és a problémára érvényes összefüggések meghatározása;
2. *Előfeldolgozás*: a geometria diszkretizálása;
3. *Számítás*: a problémára érvényes egyenletek alapján az elemegyenletek felírása, asszemblálás;
4. *Utőfeldolgozás*: az eredmény ábrázolása, kiértékelése.

A fenti lépések a későbbiekben példák útján is bemutatásra kerülnek, ebben a fejezetben csak általánosan, elméleti síkon történik a tárgyalásuk.

### 2.1.1. Modell specifikációja

A modell specifikációja alatt a vizsgálandó eszköz CAD(Computer Aided Design) modelljének a megvalósítását, a problémára érvényes összefüggések és peremfeltételek meghatározását kell érteni.

A geometria CAD-modelljének megalkotása során nem szükséges törekedni a tökéletes reprezentálásra, mivel az jelentősen megnövelheti az ismeretlenek számát és a számítási időt. A geometria egyszerűsítése során mérlegelni kell, hogy a szimulálni kívánt eszköz mely jellemzői azok, amelyek az eredményt befolyásolhatják. A geometriának az a eredményt nem befolyásoló jellemzőit érdemes egyszerűbb alakzatokkal helyettesíteni, ezáltal csökkenthető az ismeretlenek száma, így a megoldáshoz szükséges idő is. Ilyen egyszerűsítéssel lehet élni például egy tekercs esetében, a tekercs meneteinek pontos modelljét egy árammal átjárt felülettel helyettesítve. Tengelyesen szimmetrikus, illetve forgásszimmetrikus geometria esetén további egyszerűsítésekkel lehet élni. Tengelyesen szimmetrikus geometria esetén például elegendő csak a geometriának a szimmetriatengely mentén megfeleztett tér egyik felét modellezni, mivel a szimuláció eredménye változatlan marad. A fenti átalakítással az ismeretlenek száma is feleződik.

A probléma fizikai hátterét leíró összefüggéseit a végeelem-módszerhez illeszthető alakra kell hozni. Az átalakítás során az egyenletek súlyfüggvénnyel vett szorzatának a teljes térfogaton vett integrálját kell venni, majd a kapott összefüggésre alkalmazni kell a szorzatfüggvényekre vonatkozó integrálási tételt, mely által az irány szerinti deriváltak rendje eggyel csökken. Az így előállított formula az úgynevezett gyenge alak. Ennek numerikus technikához illesztését a későbbiekben részletesebben ismertetem.

### 2.1.2. Előfeldolgozás

A megvalósított modellt a numerikus eljáráshoz történő illesztés céljából diszkretizálni kell. A diszkretizálás során a teljes problémátér véges, diszjunkt elemekre bontása történik meg. Egydimenziós probléma esetén ez egyszerűen szakaszokra bontást jelent, míg a kétdimenziós modelleket felosztó diszkrét elemek lehetnek például háromszög illetve négyszög alakúak is. A dolgozatban közölt szimulációk során csak háromszög elemekre diszkretizált problémákkal foglalkoztam. Ez a választás természetesen nincs hatással a szimulációk eredményének jóségára. A diszkretizálás mértékének, tehát a rács sűrűségének helyes megválasztása kulcsfontosságú a szimulációk megvalósítása során. Rádiófrekvenciás tartományban az elemek méretére felső korlátot ad, hogy a problémákat elosztott paraméterű problémaként kell értelmezni, ami annyit jelent, hogy a geometria méretei összemérhetők az elektromágneses tér hullámhosszával. Ökölszabály, hogy elsőrendű formafüggvények alkalmazása esetén megfelelő választás az elemek maximális méretére a hullámhossz egytizede.

Az elemekre felírható formafüggvények a probléma jellegétől függően skalár csomóponti illetve vektor értékű éle menti formafüggvények lehetnek.

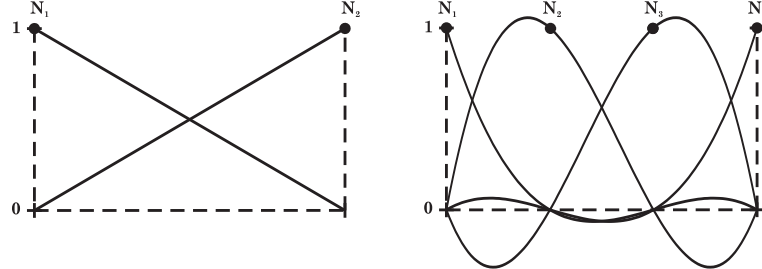
### 2.1.2.1. Csomóponti formafüggvény

Egyszerűbb problémák esetén, amikor az eredmény skalár mennyiség (az eredmény skalárisnak tekinthető, ha az merőleges a szimuláció síkjára), csomóponti formafüggvények alkalmazása szükséges. Minden csomóponti formafüggvény értelmezett a teljes problématerület felett, de mindegyik csak egy csomópontoz tartozik, ezen a csomóponton az értéke 1, minden más csomóponton pedig zérus értéket vesz fel. Minden csomóponti formafüggvény csak azon az elemeken vesz fel zérustól különböző értéket, mely elemeknek tagja az adott csomópont. Egydimenziós problémákon csak csomóponti formafüggvények értelmezettek.

Az egydimenziós formafüggvények [7, 10, 11, 14] a

$$N_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^m \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (2.1)$$

formula segítségével generálhatók, ahol  $N$  jelöli magát a formafüggvényt,  $x$  a változó az elem mentén,  $m$  az egy elem belüli csomópontok száma (ez egydimenziós esetben a formafüggvényt leíró polinom fokszáma  $+ 1$ ),  $x_i$  illetve  $x_j$  pedig a csomópontok koordinátáit jelenti. Az egy elemre felírható első- illetve harmadfokú formafüggvények a 2.2 ábrán láthatóak.

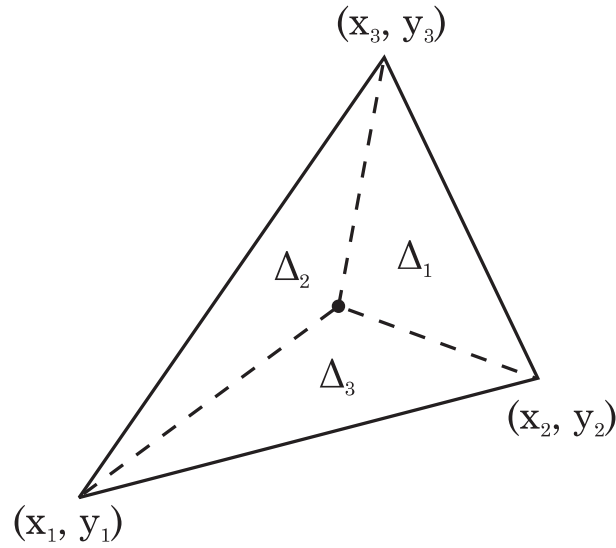


2.2. ábra: Első- illetve harmadfokú formafüggvények egy elemen

A háromszög felett értelmezett csomóponti formafüggvények általános felírása jóval bonyolultabb formulával lehetséges, kutatási munkám során viszont csak elsőrendű csomóponti formafüggvényeket alkalmaztam, így dolgozatomban csak ezek bemutatására szorítkozom. A lineáris formafüggvények bevezetéséhez a baricentrikus koordináta-rendszer ismerete szükséges (lásd 2.3 ábra). Egy háromszög csúcsainak koordinátái ismeretében a háromszög területe számítható az alábbi determináns segítségével:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

ahol  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  és  $(x_3, y_3)$  rendre a háromszög csúcsainak koordinátái az óramutató járásával ellenkező körüljárási irányt feltételezve. Egy háromszögön belül felvett tetszőleges pont koordinátáinak függvényében, a háromszög



2.3. ábra: Baricentrikus koordináták ábrázolása [7]

csúcsaival három részháromszöget alkotva három különböző területfüggvény definiálható. Ezek:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

ahol  $(x, y)$  a háromszögön belül egy tetszőleges pont koordinátái. A részháromszög és a teljes háromszög területének aránya rendre:

$$L_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}. \quad (2.4)$$

A fenti összefüggés nem más, mint a lineáris csomóponti formafüggvények [7, 10] leírására használható formula:

$$N_i = L_i. \quad (2.5)$$

Sok esetben szükség van a csomóponti formafüggvények  $x$ - és  $y$ -irányok szerinti parciális deriváltjaira. Ezek egyszerűen számíthatók elsőrendű formafüggvények esetén az alábbiak szerint:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = 0,5 \frac{y_2 - y_3}{\Delta}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = 0,5 \frac{x_3 - x_2}{\Delta}, \quad (2.7)$$

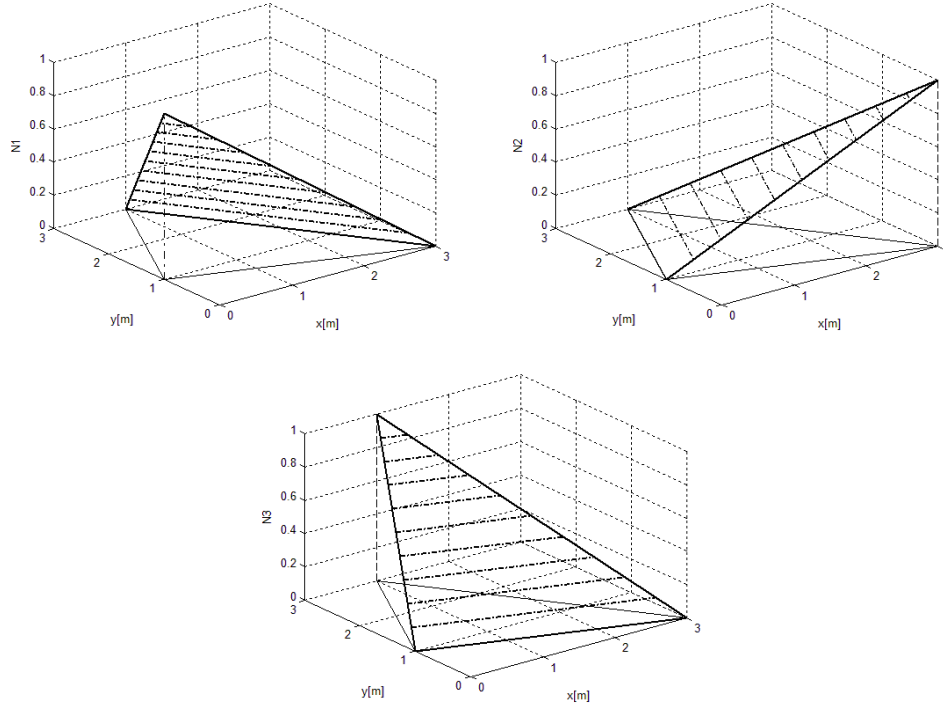
$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = 0,5 \frac{y_3 - y_1}{\Delta}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = 0,5 \frac{x_1 - x_3}{\Delta}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} = 0,5 \frac{y_1 - y_2}{\Delta}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial y} = 0,5 \frac{x_2 - x_1}{\Delta}. \quad (2.11)$$

A háromszög felett felírható formafüggvényeket szemlélíti a 2.4 ábra.



2.4. ábra: Háromszög feletti lineáris csomóponti formafüggvények

### 2.1.2.2. Élmenti formafüggvény

Élmenti formafüggvények alkalmazása szükséges olyan problémák esetén, melyeknél a szimuláció eredményének leírása csak vektorként lehetséges. Élmenti formafüggvények alkalmazása esetén az ismeretlen értékek az éleken kerülnek definiálásra, az eredmény vektora a szimuláció síkjában található, nincs a szimuláció síkjára merőleges komponense. Minden élmenti formafüggvény értelmezett a teljes problématerület felett, de mindegyik csak egy élhez tartozik, ezen az élen a vonalmenti integráljának értéke 1, minden más élen nincs tangenciális irányú komponense, tehát a vonalmenti integrálja ezeken az éleken zérus. Minden élmenti formafüggvény csak azon az elemeken vesz fel zérustól különböző értéket, mely elemeknek tagja az adott él. Az élmenti formafüggvények alkalmazásakor az él irányát a teljes tartományon definiálni kell. Asszemblálás során ez a lépés nagy jelentőséggel bír, ugyanis azon élírányok, melyek az elemen az óramutató járásával ellentétes körüljárási irányt feltételezve ezzel a körüljárási iránnyal ellenkező irányúak, -1-szeres értékkel számítanak. Az élmenti formafüggvényeket leíró formulák származtathatók a csomóponti

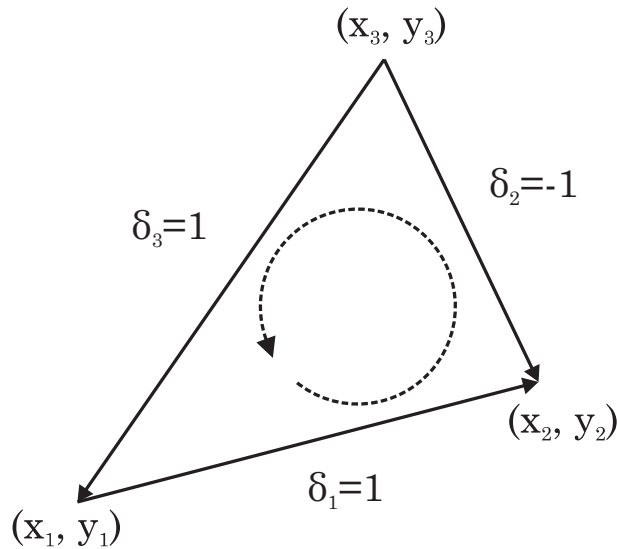
formafüggvények formuláiból:

$$\mathbf{W}_1(x, y) = l_1 \cdot (N_1 \nabla N_2 - N_2 \nabla N_1) \delta_1, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{W}_2(x, y) = l_2 \cdot (N_2 \nabla N_3 - N_3 \nabla N_2) \delta_2, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{W}_3(x, y) = l_3 \cdot (N_3 \nabla N_1 - N_1 \nabla N_3) \delta_3. \quad (2.14)$$

A fenti összefüggésekben  $\mathbf{W}_i$  magát az élmenti formafüggvényt,  $l_i$  az  $i$ -edik él hosszát jelenti,  $\delta_i$  értéke pedig 1 vagy -1, attól függően, hogy az  $i$ -edik él iránya megegyezik-e a körüljárási iránnyal (lásd: 2.5 ábra),  $\nabla$  pedig az úgynevezett nabla-operátor, vagy nabla-vektor, jelentése:  $\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ . A



2.5. ábra: Globális élírányok, és az elem körüljárási iránya

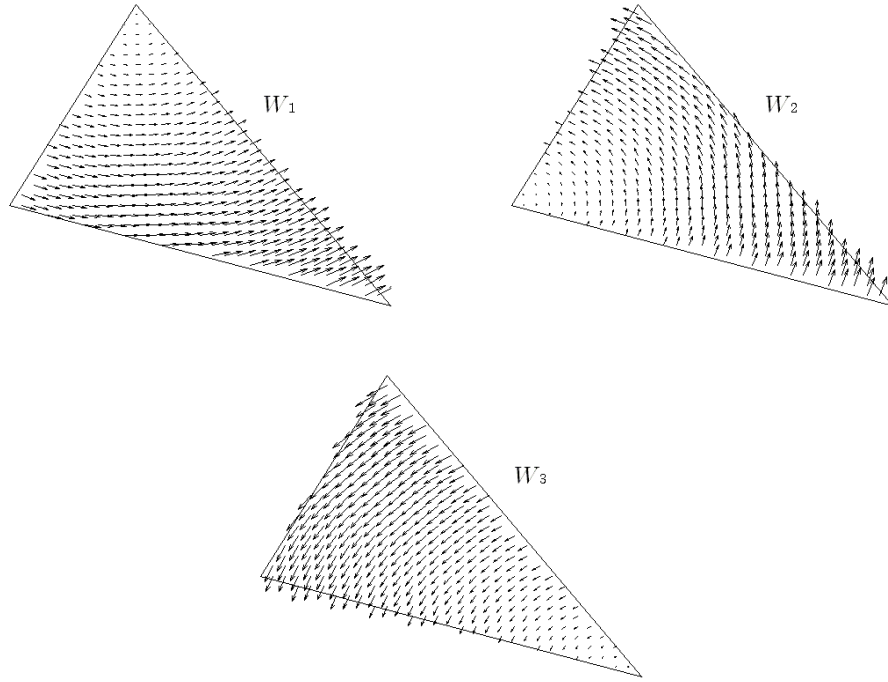
nabla-operátor alkalmazása egy skalárfüggvényre a skalárfüggvény gradiensét, a nabla-operátor és egy vektortér skaláris szorzata a vektortér divergenciáját, a nabla-operátor és a vektortér vektoriális szorzata a vektortér rotációját eredményezi. Számítások során szükség van az élmenti formafüggvények rotációjára is, ezek

$$\nabla \times \mathbf{W}_1 = 2l_1 \left( \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial y} \right) \delta_1, \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{W}_2 = 2l_2 \left( \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial y} - \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) \delta_2, \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{W}_3 = 2l_3 \left( \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial y} \right) \delta_3, \quad (2.17)$$

alakban írhatók fel. A háromszögön értelmezhető, a 2.4 ábrán látható csomóponti formafüggvényekből származtatott nulladrendű élmenti formafüggvényeket mutatja be a 2.6 ábra.



2.6. ábra: Háromszögön értelmezett nulladrendű élmenti formafüggvények

### 2.1.2.3. Interpoláció a formafüggvények segítségével

A problémátérre felírt egyenletrendszer megoldása után a formafüggvények segítségével az eredmény a problémátér tetszőleges pontjára kiszámítható interpoláció segítségével [7, 9, 10]. Az interpoláció csomóponti formafüggvények esetén az

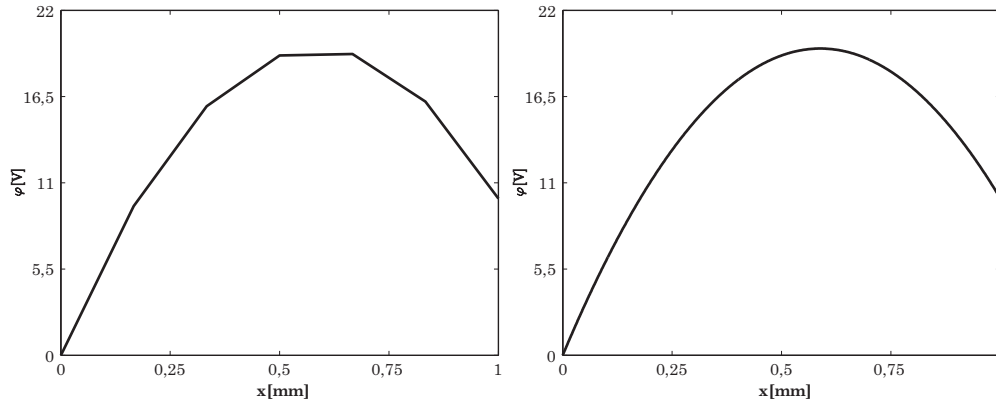
$$E(x, y) = \sum_{i=1}^m E_i N_i(x, y) \quad (2.18)$$

összefüggés alapján történik, ahol  $E_i$  az  $i$ -edik csomópontokban ismert értéket,  $m$  pedig az elemre felírt formafüggvények számát jelöli. Ugyanez élmenti formafüggvények esetén

$$\mathbf{E}(x, y) = \sum_{i=1}^m \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{W}_i(x, y) \quad (2.19)$$

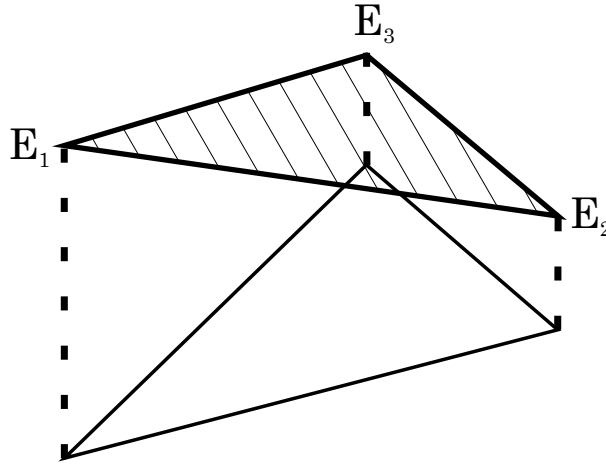
alakban írható fel.

A csomóponti formafüggvények fokszáma közötti különbséget az interpolált eredményen egy példán keresztül mutatom be. A példa egy egydimenziós probléma, egy síkkondenzátor (lásd 2.7 ábra). A kondenzátor két fegyverzetének távolsága 1mm, az egyik földpotenciálón van, a másik pedig 10 V feszültségre van kapcsolva. A két fegyverzet között  $0,001 \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$  töltéssűrűséget állítottam be. Az interpoláció kétdimenziós problémák esetén is egyszerűen bemutatatható. Legyenek egy háromszög elem csomópontjaira kiszámított értékek rendre  $E_1$ ,  $E_2$  illetve  $E_3$ . Ekkor a lineáris csomóponti formafüggvények



2.7. ábra: A szimulált potenciál értéke a két fegyverzet között első-(bal) illetve harmadfokú(jobb) formafüggvények alkalmazása esetén

segítségével az interpoláció eredménye egy elem felett a 2.8 ábrán láthatóak szerint alakul.

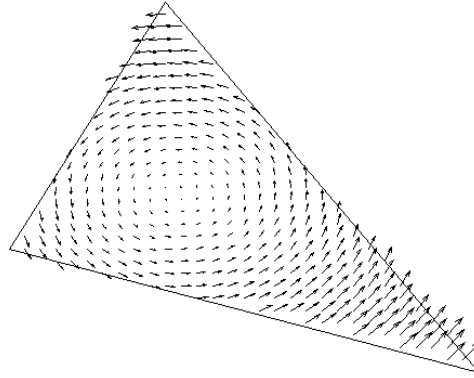


2.8. ábra: Interpoláció csomóponti formafüggvények alkalmazása esetén

Élmenti formafüggvények alkalmazásakor az interpolációt szintén csak egyetlen elemen mutatom be a 2.9 ábrán. Az elem minden élére egységesen 1-et adtam értékül a háromszög körüljárási irányának megfelelően, így az elem minden pontjában egyszerűen csak a formafüggvények értékeinek összege az eredmény, ezáltal az interpoláció eredménye örvényes jellegű. Ez az eredmény nem meglepő, hiszen egy elemről van szó, így minden éle megválasztható úgy, hogy az iránya a körüljárási iránnyal megegyezzen, így valóban örvényes jellegűnek tekinthető a megoldás ebben az esetben.

A numerikus analízis eredményének pontosítására több módszer is létezik. Ezek a következők:

- *h-FEM*: Végeselem-háló finomításával történő pontosítás;
- *p-FEM*: A formafüggvények fokszámának növelésével elért pontosítás;
- *hp-FEM*: A h-FEM és a p-FEM módszer kombinációjának alkalmazása.



2.9. ábra: Interpoláció élmenti formafüggvények alkalmazása esetén

Munkám során csak a *h-FEM* módszert alkalmaztam az első- illetve nulladrendű formafüggvények implementációjának egyszerűsége miatt.

#### 2.1.2.4. Gauss-kvadratúra

Az asszemblálás során egy olyan probléma lép fel, hogy egy tetszőleges tartomány felett magasabbrendű polinomok integráljának a kiértékelésére van szükség. Vonal felett az integrálok értéke még könnyen meghatározható, háromszög felett viszont a magasabbrendű polinomok integrálása nehéz. Numerikus integrálási módszerek [13] segítségével egyszerűen közelíthető egy tetszőleges polinom különböző tartományok felett értelmezett integrálja. Ezek a módszerek általában egy referenciatartomány felett értelmezettek. Az általam használt numerikus integrálmódszer a *Gauss*-kvadratúra [12], mely alkalmazásával gyors és pontos eredményre lehet jutni. Egydimenziós esetben egy  $f(\xi)$  polinom integrálja a  $[-1, 1]$  referenciatartományon:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n w_{n,i} f(\xi_{n,i}), \quad (2.20)$$

tehát egy polinom egy tartomány feletti integrálja közelíthető a polinom jól meghatározott pontjaiban felvett értékeinek a súlyozott összegével. Egy  $n$  pontos *Gauss*-kvadratúra pontos eredményt ad legfeljebb  $(2n + 1)$ -edfokú polinomok esetén. Egydimenziós szimulációk során egy tetszőleges elhelyezkedésű elemet át kell transzformálni a  $[-1, 1]$  tartományra, majd ott kell elvégezni a számításokat. A  $[-1, 1]$  tartományon felvett, az  $n$  pontos kvadratúra alkalmazásához szükséges pontok az  $n$ -edfokú *Legendre*-polinom zérushelyeiként [13] állíthatók elő. Mivel munkám során kizárólag lineáris formafüggvényekkel foglalkoztam, ezért maximálisan másodfokú polinomok integrálására volt szükségem, ebben az esetben elegendő az  $n = 1$  esetet alkalmazni, amikor  $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$   $w_0 = 1$  illetve  $\xi_2 = -\xi_0$   $w_1 = 1$ . Egy tetszőleges egydimenziós elem két végpontjának koordinátája legyen  $x_1$  és  $x_2$ . A transzformáció és az elemen belüli, a *Legendre*-polinom zérushelyei által meghatározott pontok egy

lépésben előállíthatók

$$x(\xi_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{x_2 - x_1}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2}, \text{ illetve } x(\xi_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{x_2 - x_1}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2}$$

formában.

Kétdimenziós esetben, háromszög elem esetén a referenciatartomány a  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  koordinátájú pontok által meghatározott háromszög (lásd: 2.10 ábra). Ekkor egy  $f(\xi, \chi)$  polinom integrálja a referenciatartományon:

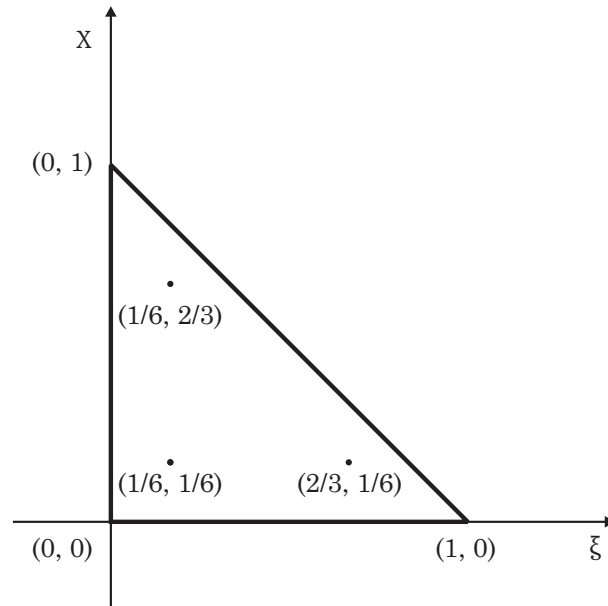
$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\xi, \chi) d\chi d\xi \approx \sum_{i=1}^n w_{n,i} f(\xi_{n,i}, \chi_{n,i}). \quad (2.21)$$

Az egydimenziós esethez hasonlóan, a háromszöget szintén át kell transzformálni a referenciatartományra, majd utána kell elvégezni a számításokat. Kétdimenziós esetben másodfokú polinom háromszög feletti integrálja  $\xi_1 = \frac{1}{3}$ ,  $\chi_1 = \frac{1}{3}$   $w_1 = \frac{1}{3}$ ,  $\xi_2 = \frac{2}{3}$ ,  $\chi_2 = \frac{1}{3}$ , illetve  $\xi_3 = \frac{2}{3}$ ,  $\chi_3 = \frac{1}{3}$   $w_3 = \frac{1}{3}$  helyettesítési értékekkel számíthatók. Legyenek egy tetszőleges háromszög elem csúcsainak koordinátái rendre  $x_1$  és  $y_1$ ,  $x_2$  és  $y_2$ , valamint  $x_3$  és  $y_3$ . Az elemen belül a behelyettesítési koordináták meghatározhatók

$$x_i = \xi_i a + \chi_i b + c, \quad \text{illetve} \quad x_i = \xi_i d + \chi_i e + c$$

összefüggés segítségével, ahol

$$\begin{aligned} a &= x_2 - x_1, & d &= y_2 - y_1, \\ b &= x_3 - x_1, & e &= y_3 - y_1, \\ c &= x_1, & f &= y_1. \end{aligned}$$



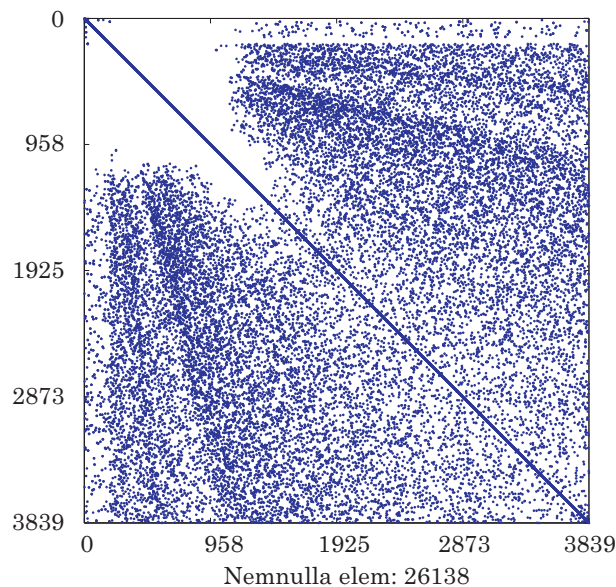
2.10. ábra: Kétdimenziós referenciatartomány és a behelyettesítési pontok

### 2.1.3. Megoldás

A geometria az előfeldolgozás után véges számú diszkrét elemből áll. A megoldás az egyenletek elemekre történő felírása során a probléma jellegétől függően az egyenletrendszer együtthatóit egy vagy több mátrixba kell szervezni. Az együttható-mátrixok ilyen felépítése az asszemblálás folyamata. Az együtthatók szétválasztásának dolgozatomban az időtartománybeli analízis tárgyalása során lesz jelentősége. A végeselemes szimulációk során felírt egyenletrendszer általánosan

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (2.22)$$

alakban írható fel, ahol  $\mathbf{K}$  az együtthatókat tartalmazó mátrix,  $\mathbf{u}$  az ismeretlen vektor,  $\mathbf{b}$  pedig a gerjesztést, illetve a peremfeltételeket tartalmazó vektor. A  $\mathbf{K}$  mátrix  $i$ -edik sora az  $i$ -edik csomópontra illetve élre felírt egyenlet. Az  $i$ -edik sor csak olyan  $j$ -edik oszlopában lesz nullától különböző érték, amely csomópontok illetve élek egy elemén található az  $i$ -edikkel. Ennek következményeképp a  $\mathbf{K}$  mátrix egy ritka, úgynevezett sparse mátrix. A 2.11 ábrán egy ilyen ritka mátrix látható. A mátrix egy  $3830 \times 3830$  méretű mátrix, melynek összesen 14668900 eleme van, de ennek csak töredékén, 26138 elemén vesz fel nullától különböző értéket. Ez az általánosított egyenletrendszer bonyolul-



2.11. ábra: Egyenletrendszer együtthatóiból összeálló ritka mátrix zérustól különböző értékei

tabb problémák esetén, mint amilyen a dolgozatban közölt időtartománybeli analízis, több részből építhető csak fel. Az általános feladat megoldása tehát:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{b}. \quad (2.23)$$

A szimuláció során ez a legkritikusabb, legidőigényesebb lépés. Sok ismeretlen esetén az inverz mátrix kiszámítása időigényes, ezért bonyolultabb problémák

esetén nem érdemes az egyenletrendszer ilyen úton megoldani. A számítási idő csökkentésére természetesen léteznek különböző direkt és iteratív megoldási sémák.

## 2.2. Elektromágneses terek

Az elektromágneses tereket leíró összefüggő egyenletrendszer *James Clerk Maxwell* [15, 16] először az 1865-ben megjelent *A dynamical theory of the electromagnetic field* című művében közölte. Ezek az egyenletek ma *Maxwell*-egyenletek (2.24-2.27) néven közismertek. Az összefüggéseket leíró egyenletek már korábban is léteztek *Ampère*, *Faraday*, és *Gauss* munkásságának köszönhetően, de *Maxwell* volt az, aki észrevette, hogy ezek a törvények nem függetlenek egymástól, és megalkotta a térjellemzőket leíró összefüggő egyenletrendszer. Ez az egyenletrendszer összesen 20 egyenletből állt, később *Oliver Heaviside* volt az a tudós, aki a vektoranalízis fogalmának bevezetésével ezt a rengeteg összefüggést négy egyenletre redukálta négy változóval.

### 2.2.1. Maxwell-egyenletek általános alakjai

Az egyenleteknek létezik mind integrális, mind differenciális alakja [17–20]. A két alak között fizikai különbség nincs, viszont a differenciális alak véges elem-módszerhez történő illesztése sokkal kényelmesebb. A *Maxwell*-egyenletek integrális alakja a tér tetszőleges  $\mathbf{r}$  pontjában, tetszőleges  $t$  időpillanatban az alábbiak szerint alakul:

$$\oint_l \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \int_A \left( \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.24)$$

$$\oint_l \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.25)$$

$$\oint_A \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (2.26)$$

$$\oint_A \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV, \quad (2.27)$$

ahol  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$  a mágneses térerősség,  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]$  az áramsűrűség,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \left[ \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right]$  az elektromos eltolás,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$  az elektromos térerősség,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \left[ \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \right]$  a mágneses indukció,  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t) \left[ \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right]$  pedig a töltéssűrűség. Az integrálási változók  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $V$  rendre a vonal, felület és térfogat szerint integrált jelentik. A (2.24) összefüggés az *Ampère*-féle gerjesztési törvény, a (2.25) összefüggés a *Faraday*-féle indukciós törvény, a (2.26) összefüggés a mágneses *Gauss*-törvény, a (2.27) összefüggés pedig az elektrosztatika *Gauss*-törvénye.

Az egyes közegek elektromos és mágneses tulajdonsággal bírnak, ezen tulajdonságok alapján felírhatók az úgynevezett konstitúciós relációk. Ezek lineáris izotróp közegben az alábbi alakban írhatók le:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_b), \quad (2.30)$$

ahol  $\mu_0$  a vákuum permeabilitása  $4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{H}}{\text{m}}\right]$  értékkel,  $\mu_r$  a közegre jellemző relatív permeabilitás,  $\varepsilon_0$  a vákuum permittivitása  $8,854 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{F}}{\text{m}}\right]$  értékkel,  $\varepsilon_r$  a közegre jellemző relatív permittivitás,  $\sigma$  a közeg vezetőképessége,  $\mathbf{E}_b$  pedig az úgynevezett beiktatott térerősség.

A *Maxwell*-egyenletek integrális alakjából levezethető a differenciális alak. Ehhez a (2.24) és (2.25) egyenletek bal oldalán a *Stokes*-tétel(2.31), a (2.26) és (2.27) egyenletek bal oldalán pedig a *Gauss-Osztrogradszkij*-tétel(2.32) alkalmazása szükséges. A fenti tételek:

$$\oint_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.31)$$

illetve:

$$\oint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV, \quad (2.32)$$

ahol  $\mathbf{v}$  tetszőleges vektor-vektor függvény. A tételek alkalmazása után az egyenletek mindkét oldalán ugyanazon változó szerinti integrálok lesznek, ezen integrálok elhagyhatók. A *Maxwell*-egyenletek differenciális alakja tehát:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (2.36)$$

Rádiófrekvenciás problémák esetén fontos lehet a frekvenciatartománybeli és az időtartománybeli viselkedés külön vizsgálata. A *Maxwell*-egyenletek frekvenciatartománybeli alakja felírható az időtartománybeli alak alapján, az idő szerinti differenciálás a mérnöki gyakorlatban  $j\omega$ -val történő szorzással helyettesíthető, ahol  $j$  a képzetes egység,  $\omega$  pedig a körfrekvencia.

Az egyenletrendszer szükséges kiegészíteni a közeghatárokon történő viselkedéssel, a peremfeltételekkel. Ezek a feltételeket a közeghatárokon az alábbi

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{K}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.38)$$

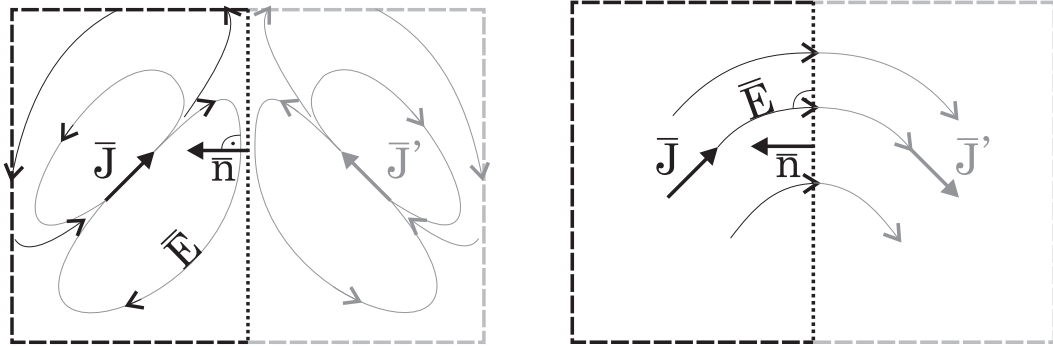
$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \vartheta, \quad (2.40)$$

összefüggések írják le, ahol  $\mathbf{n}$  a közeghatár felületének normálvektora,  $\mathbf{K} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}}\right]$  a felületi áramsűrűség,  $\vartheta \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right]$  pedig a felületi töltéssűrűség. Ez annyit jelent, hogy amennyiben nem folyik a felületen áram, illetve nincs a felületen töltés,

a közegethatárokon mágneses és az elektromos térerősség tangenciális (érintő irányú) komponense folytonos, míg a mágneses indukció és az elektromos eltolás normális (felületre merőleges) irányú komponense folytonos. Elektromosan tökéletesen vezetőnek tekinthető felületen az elektromos térerősségnek csak normális irányú komponense van.

Végelelem-módszer alkalmazásakor a tengelyesen szimmetrikus, valamint forgásszimmetrikus geometriák esetén a modell egyszerűsítésével lehet élni. Ekkor a szimmetriasíkot reprezentáló peremekre külön peremfeltételek vonatkoznak. A szimmetriatengelyen a szimmetria jellegétől függően a peremen az elektromos térerősség vektorára két kikötést lehet tenni (lásd: 2.12 ábra). Amennyiben a gerjesztések áramainak iránya valóban egymás tükörképeként írható le, úgy az elektromos térerősségnek a szimmetriaperemen csak tangenciális, míg amennyiben ellentétes az áramok iránya, úgy csak normális irányú komponense van.



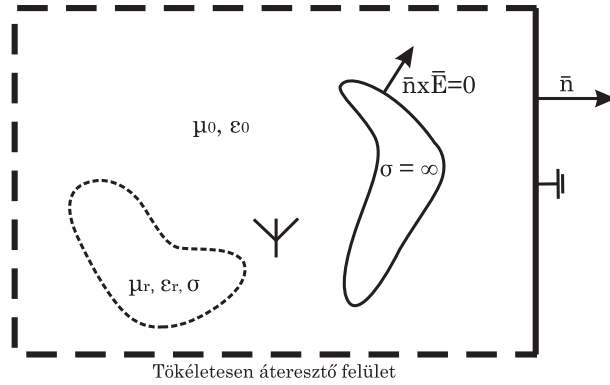
2.12. ábra: Tényleges, illetve módosított szimmetriaperem hatása az elektromos térerősség vektorára

Elektrosztatika és magnetosztatika problémák esetén az első illetve második *Maxwell*-egyenletben található időszerinti deriváltaknak nincs jelentőségük. Alacsonyfrekvenciás problémák esetén a (2.33) egyenletben található derivált tag továbbra is elhanyagolható, míg a (2.34) egyenletben található tag az örvényáramokért lesz felelős. A frekvencia növelésével egyre nagyobb szerephez jut az első egyenletben található  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  tag, az úgynevezett eltolási áram-sűrűség. Ezen okokból különböző összefüggésekkel célszerű leírni az alacsony és a nagyfrekvenciás problémákat. Rádiófrekvenciás problémák esetén bár a *Maxwell*-egyenletek egyszerűsítésével nem lehet élni, a gyakorlatban előforduló problémák többségében a térerősségek kis értékei miatt a közegek nemlineáris viselkedését figyelmen kívül lehet hagyni.

### 2.2.2. A frekvenciatartománybeli hullámegyenlet

A rádiófrekvenciás problémák vázlatát mutatja a 2.13 ábra. Az első (2.33) illetve második (2.34) *Maxwell*-egyenlet differenciális alakja frekvenciatartományban [8, 21] az alábbiak szerint alakul:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}, \quad (2.41)$$



2.13. ábra: Rádiófrekvenciás problémák általánosítva

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}. \quad (2.42)$$

A fenti egyenletekbe behelyettesítve a konstitúciós relációkat ((2.28) és (2.29)):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.43)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H}, \quad (2.44)$$

ahol  $\mu = \mu_0 \mu_r$ , illetve  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ . A (2.44) összefüggésből kifejezve  $\mathbf{H}$ -t, majd behelyettesítve (2.43) egyenletbe

$$\nabla \times \left( -\frac{1}{j\omega \mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) = \mathbf{J} + j\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.45)$$

kifejezésre lehet jutni. A kifejezést  $\mathbf{E}$ -re rendezve a

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 Z_0 \mathbf{J} \quad (2.46)$$

összefüggés kapható, ahol

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \quad (2.47)$$

a szabadtéri hullámszám,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi [\Omega] \quad (2.48)$$

pedig a vákuum hullámimpedanciája. A (2.46) összefüggés az elektromos hullámegyenlet.

Az elektromos térerősségnek tökéletes vezetőnek tekinthető felületen

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.49)$$

peremfeltételt kell kielégítenie. Az elektromos tér forrásától végtelen távolságra  $\mathbf{E}$ -nek ki kell elégítenie az úgynevezett *Sommerfeld*-féle sugárzási feltételt [8], amely az alábbi

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r [\nabla \times \mathbf{E} + jk_0 \mathbf{n} \times \mathbf{E}] = 0 \quad (2.50)$$

formulával írható le. Itt  $r$  az elektromos tér forrásától számított távolság,  $\mathbf{n}$  pedig a végtelen távolinak tekintett peremen a kifelé mutató normálvektor. Mivel végeelem-módszert használva a számítani kívánt problémátér nem lehet végtelen nagy, a feladatot véges térben kell elhelyezni. Ekkor a feladat külső peremét ideális átaresztő/elnyelő peremnek kell megválasztani, hogy a szimulált elektromos tér ezen ne szenvedjen reflexiót. Ezt azonban gyakorlatban megvalósítani lehetetlen, ehelyett egy közelítéssel [8] kell élni:

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E} + jk_0 \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{E} \approx 0, \quad (2.51)$$

mely összefüggés teljesen analóg a *Sommerfeld* sugárzási feltétellel (2.50), csak a fenti összefüggésben  $\mathbf{n}$  a számítani kívánt geometria külső peremének kifelé mutató normálvektora.

A frekvenciatartománybeli analízis során a frekvenciát, mint bemeneti paramétert használva kell az elektromos teret meghatározni. Az eredmény viszont csak egy adott frekvencián érvényes, a legtöbb antenaaanalízis során érdekes az antenna karakterisztikája szélesebb frekvenciatartományban is. Ez igen időigényes lehet keskeny- és szélessávú antennák esetén is. A gyakorlatban a legtöbbször elegendő egy eszköz frekvenciatartománybeli viselkedésének meghatározása.

### 2.2.3. Az időtartománybeli hullámegyenlet

Az első két *Maxwell*-egyenlet időtartománybeli alakja [8, 21]

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.52)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.53)$$

formában írható fel, ahol  $\sigma$  az elektromos vezetőképességet jelöli. A 2.52 összefüggésben szereplő  $\sigma \mathbf{E}$  tag külön kezelésére szükség van időtartománybeli analízis során, ugyanis a gerjesztés nem vezető anyagban található, a szimulációt elvégezve sem folyik áram a vezető közegekben, hanem azok úgy torzítják a teret, mintha az áramelemmel érintkező vezetők árammal átváltak lennének. Ennek köszönhetően a jól vezető közegekben nem szükséges elvégezni a szimulációt, elegendő a felületét tökéletesen vezető felületnek megválasztani, a szimuláció eredményét ez a döntés gyakorlatilag nem változtatja meg, viszont így jelentősen csökkenthető az ismeretlenek száma. A másik oka a  $\sigma \mathbf{E}$  tag külön kezelésének, hogy időtartományban nincs lehetőség a komplex permittivitás kezelésére. A (2.53) összefüggés rotációja:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H}. \quad (2.54)$$

A fenti összefüggésben  $\nabla \times \mathbf{H}$  helyére (2.52) jobb oldalát behelyettesítve

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{J} + \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.55)$$

alakra lehet jutni, amelyben felbontva a zárójelet, valamint átrendezve a kifejezést megkapható a hullámegyenlet időtartománybeli alakja:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (2.56)$$

Tökéletes vezető felületén az elektromos térerősségre érvényes peremfeltétel megegyezik az előző fejezetben közölt (2.49) összefüggéssel, illetve a (2.51) összefüggés időtartományban [8] módosul

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} \right) + Y_0 \mathbf{n} \times \left( \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \approx 0 \quad (2.57)$$

alakra, ahol  $Y_0$  a vákuum hullámadmittanciája.

Az időtartománybeli analízis során a szimuláció bemenete egy előre definiált tetszőleges jelalak. Ebből következik, hogy a frekvenciatartománnyal ellentétben, a szimuláció során tetszőleges spektrumú bemeneti jel által gerjesztett tér határozható meg. Tranziens analízis csak időtartományban valósítható meg. Az időtartománybeli analízis hátránya, hogy egy szimuláció során rengeteg időlépésben kell elvégezni a 2.23 összefüggésben közölt műveletet, kiértékelhető eredményig ez a folyamat hosszadalmas lehet.

## 3. fejezet

# TÉRSZIMULÁCIÓ VÉGESELEM-MÓDSZERREL

A fejezetben az idő- és frekvenciatartománybeli végeselemes szimuláció lépéseinek részletes tárgyalása található. A hullámegyenletekből kiindulva levezetésre kerülnek a problémákat leíró gyenge alakok. Bemutatásra kerül a módszer implementálásának menete, azok tesztelése egy- illetve kétdimenziós problémákon. A tesztfeladatok bemutatásakor a szimulációk validálása, amennyiben lehetséges, jól ismert analitikus összefüggések által kiszámítható értékekkel történő összehasonlítással történik. Minden végeselemhálót **GMSH** [4] szoftver segítségével készítettem el, a végeselem módszer további lépéseit pedig **Matlab** [5, 22] környezetben valósítottam meg.

### 3.1. Frekvenciatartománybeli analízis

Frekvenciatartománybeli analízis során a bemeneteti paraméter egy körfrekvencia érték, a megoldás pedig minden egyes csomópontban az elektromos térerősség komplex csúcsértéke. A kiszámított komplex csúcsérték egyszerűen átszámítható időtartománybeli alakra.

#### 3.1.1. Gyenge alak

A frekvenciatartománybeli hullámegyenlet a korábbiak során tárgyalt (2.46) összefüggés. A súlyozott maradék elvének megfelelően a végeselem-módszer alkalmazásához a hullámegyenlet mindkét oldalát meg kell szorozni egy tetszőleges  $\mathbf{T}$  súlyfüggvénnyel, valamint integrálni kell a teljes tartományon [7–10]:

$$-\int_V \mathbf{T} \cdot \left( \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \times \mathbf{E} \right) dV + \int_V \mathbf{T} \cdot k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} dV = \int_V \mathbf{T} \cdot j\omega \mu_0 \mathbf{J} dV. \quad (3.1)$$

A fenti összefüggésben az első integrál irány szerinti kétszeres deriváltat tartalmaz, megoldása nem célravezető. Vektoralgebrai azonosságok alkalmazása segítségével azonban a (3.1) egyenlet egyszerűbb alakra hozható. Ismeretes, hogy:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}, \quad (3.2)$$

érvényes bármely tetszőleges  $\mathbf{A}$  illetve  $\mathbf{B}$  vektor értékű függvényre. A (3.2) összefüggésben  $\mathbf{A} = \mathbf{T}$  és  $\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}$  helyettesítéssel élve:

$$\mathbf{T} \cdot \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) = (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot \left[ \mathbf{T} \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) \right]. \quad (3.3)$$

Visszahelyettesítve (3.1) első integráljába, az integrál felírható

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{T} \cdot \left( \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) dV &= \int_V \nabla \cdot \left[ \mathbf{T} \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) \right] dV \\ &- \int_V (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) dV \end{aligned} \quad (3.4)$$

alakban. Látható, hogy a jobb oldal első tagjában egy függvény divergenciájának térfogat szerinti integrálja található, ez átalakítható a (2.32) *Gauss-Osztrogradszkij*-tétel segítségével. Az átalakítás után a jobb oldal első tagja:

$$\int_V \nabla \cdot \left[ \mathbf{T} \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) \right] dV = \oint_A \mathbf{n} \cdot \left[ \mathbf{T} \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) \right] d\mathbf{A}. \quad (3.5)$$

A fenti átalakításokat felhasználva, illetve a *Sommerfeld* sugárzási feltétel frekvenciatartománybeli közelítését alkalmazva (2.51), az eredeti összefüggés (3.1):

$$\begin{aligned} &\int_V (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) dV - \int_V \mathbf{T} \cdot k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} dV - \\ &- \oint_{A_{tv}} (\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) dA + jk_0 \oint_A (\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dA = \\ &= \int_V \mathbf{T} \cdot jk_0 Z_0 \mathbf{J} dV, \end{aligned} \quad (3.6)$$

alakra hozható, ahol a harmadik integrálban a *tv* index a tökéletes vezető felületét jelenti. Ez az összefüggés már nem tartalmaz irány szerinti második deriváltakat. A (3.6) formula a frekvenciatartománybeli analízis gyenge alakja. A  $\mathbf{T}$  súlyfüggvényt a *Galjorkin*-eljárásnak megfelelően a formafüggvénynek megválasztva lehet a végeelem-módszer technikájához eljutni.

A végeelemes analízis végrehajtásához fel kell írni a gyenge alak alapján az egyenletrendszer mátrixos alakban [8]. Ez a frekvenciatartománybeli analízis során (2.22) alakjában felírva:

$$\sum_{j=1}^m K_{i,j} E_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.7)$$

ahol  $m$  a csomópontok száma,

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_V \left[ (\nabla \times \mathbf{T}_i) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{T}_j) - k_0^2 \mathbf{T}_i \cdot \varepsilon_r \mathbf{T}_j \right] dV + \\ &+ jk_0 \oint_A (\mathbf{n} \times \mathbf{T}_i) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{T}_j) dA, \end{aligned} \quad (3.8)$$

illetve

$$b_i = \int_V \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{j} k_0 Z_0 \mathbf{J} \, dV. \quad (3.9)$$

Az egyenletrendszer együtthatóinak megállapítása után az eredmény (2.23) alapján már egyértelműen számítható. A (3.8) összefüggésben a felületi körintegrált értelemszerűen csak a tökéletesen áteresztő felületre kell felírni. Ez a legtöbb szimuláció során levegőben található, ellenkező esetben az adott közege érvényes hullámszámmal kell számolni, ami:

$$k = k_0 \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}. \quad (3.10)$$

### 3.1.1.1. Implementáció 1D probléma esetén

A lineáris csomóponti formafüggvények skaláris mennyiségek, így a (3.8) összefüggésben az integrál első tagjában a rotáció képzés helyett a formafüggvény gradiensét kell képezni, így ez két nulladfokú összefüggés szorzatával lesz egyenlő. Egy konstans függvény integrálja egy szakasz felett a szakasz hosszával történő szorzással helyettesíthető. Az integrál második tagja két elsőfokú összefüggés szorzata, az eredmény másodfokú, az integrálás egyszerűsíthető a *Gauss*-kvadratura (2.20) segítségével. A peremfeltételekért felelős integrált külön mutatom be, mivel azok realizálása egy végeselem-módszert alkalmazó szimuláció során is külön történik. A peremfeltételeket az időtartománybeli analízis tárgyalásakor is külön mutatom be. A fentieket figyelembe véve az elemekre érvényes (3.8) elemmátrix összefüggése

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{elem} = & \left( \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} - \right. \\ & \left. - k_0^2 \varepsilon_r \sum_{i=1}^2 w_i \begin{bmatrix} N_1(\xi_i) \\ N_2(\xi_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1(\xi_i) & N_2(\xi_i) \end{bmatrix} \right) l \end{aligned} \quad (3.11)$$

alakra hozható, ahol  $l$  az elem hossza. Ennek eredménye egy 2x2-es mátrix, mely elemeit a csomópontok sorszámának megfelelőek hozzá kell adni a  $\mathbf{K}$  együttható-mátrix megfelelő elemeihez. Ha az elemhez tartozó csomópontok sorszáma  $a$  illetve  $b$ , akkor az asszemblálás ezen lépésénél a  $\mathbf{K}$  mátrix elemei az alábbiak szerint módosulnak:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \dots & K(a, a) + K_{elem}(1, 1) & \dots & K(a, b) + K_{elem}(1, 2) & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \dots & K(b, a) + K_{elem}(2, 1) & \dots & K(b, b) + K_{elem}(2, 2) & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

A  $\mathbf{b}$  vektort definiáló (3.9) összefüggésben nem szerepelnek a formafüggvények szorzatai, az integrandus tehát konstans. Ezt a tényt felhasználva  $\mathbf{b}$  vektor egy elemre felírható

$$\mathbf{b}_{elem} = j k_0 Z_0 J \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} l/2 \quad (3.13)$$

alakban. A fent bemutatott módhoz hasonlóan  $\mathbf{b}$  vektor is felépíthető az elemekre felírható  $\mathbf{b}_{elem}$  vektorok segítségével. Azokon a csomópontokon, ahol nincs definiálva áram,  $\mathbf{J}$  értéke értelemszerűen 0.

Az elektromosan tökéletesen vezető felület *Dirichlet*-peremet jelent. Amennyiben a tökéletesen vezető felület sorszáma  $i$ , az egyenletrendszer  $i$ -edik egyenletében elő kell írni, hogy az  $i$ -edik csomópontban az eredmény értéke 0. A tökéletesen elnyelő peremfeltétel *Neumann*-peremfeltétel. A (3.8) összefüggésben a vonalmenti integrál felelős a peremfeltételért. Mivel ez a perem egy csomópont, az integrandus értéke 1. Amennyiben az elnyelő peremen található csomópont sorszáma  $i$ , akkor a peremfeltétel implementálható úgy, hogy a  $\mathbf{K}$  főátlójának  $i$ -edik eleméhez kell asszemblálni  $jk_0$  értékét.

### 3.1.1.2. Implementáció 2D probléma esetén

Kétdimenziós probléma esetén a formafüggvények lehetnek skalár értékű csomóponti illetve vektor értékű élmenti formafüggvények is, attól függően, hogy a forrás áramának iránya merőleges a szimuláció síkjára, vagy a szimuláció síkjában folyik. Csomóponti formafüggvények alkalmazása esetén az elemekre felírható mátrix illetve vektor (3.11) és (3.13) összefüggéshez hasonló módon definiálható. Ezek alakja:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{elem} = & \left\{ \frac{1}{\mu_0} \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \right. \\ & \left. \cdot \begin{bmatrix} N_1(\xi_i, \chi_i) \\ N_2(\xi_i, \chi_i) \\ N_3(\xi_i, \chi_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1(\xi_i, \chi_i) & N_2(\xi_i, \chi_i) & N_3(\xi_i, \chi_i) \end{bmatrix} \right\} \Delta \end{aligned} \quad (3.14)$$

illetve

$$\mathbf{b}_{elem} = jk_0 Z_0 J \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta / 3. \quad (3.15)$$

A tökéletesen vezető felület megvalósítása az egydimenziós esetnél tárgyalattal analóg módon történik. A tökéletesen elnyelő felület megvalósítása esetén szükség van a peremen található élekre. Ezeken az éleken a (3.8) összefüggésben található felületi integrált kell kiszámítani, amely egy egydimenziós problémaként kezelhető, mivel csak az élekre történik a számítás.

Élmenti formafüggvények alkalmazása esetén az implementáció eddigiektől eltérő módon történik. Jelen esetben a formafüggvényeknek  $x$ - és  $y$ -irányú komponense is létezik, viszont a rotáció képzés eredménye csak egy komponensű. Figyelembe véve, hogy (2.12)-(2.14) összefüggések a *Gauss*-kvadratúra

alapján számított  $N(\xi_i, \chi_i)$  értékek segítségével határozhatók meg, (3.8) egy elemre felírva:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{elem} = & \left\{ \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} \nabla \times \mathbf{W}_1 \\ \nabla \times \mathbf{W}_2 \\ \nabla \times \mathbf{W}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla \times \mathbf{W}_1 & \nabla \times \mathbf{W}_2 & \nabla \times \mathbf{W}_3 \end{bmatrix} - \right. \\ & - k_0^2 \varepsilon_r \sum_{i=1}^3 w_i \left( \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(x) \\ \mathbf{W}_2(x) \\ \mathbf{W}_3(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(x) & \mathbf{W}_2(x) & \mathbf{W}_3(x) \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. \left. + \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(y) \\ \mathbf{W}_2(y) \\ \mathbf{W}_3(y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(y) & \mathbf{W}_2(y) & \mathbf{W}_3(y) \end{bmatrix} \right) \right\} \Delta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

A  $\mathbf{b}$  vektort definiáló (3.9) összefüggésben nem szerepelnek a formafüggvények szorzatai, az élmenti formafüggvények integrálja a hozzá tartozó él mentén pedig egységnyi. A fentiek alapján, (3.15) összefüggés alakja jelen esetben:

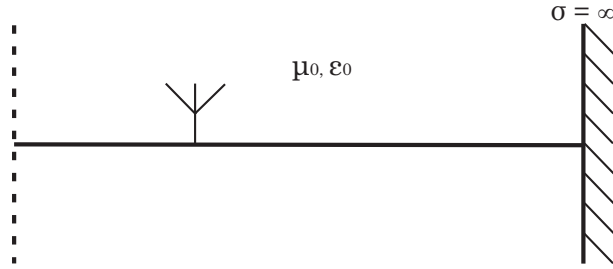
$$\mathbf{b}_{elem} = jk_0 Z_0 \mathbf{J} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta. \quad (3.17)$$

A tökéletesen vezető felület beállítása élmenti formafüggvények esetén a formafüggvények alapvető tulajdonságait kell figyelembe venni. Elektromosan tökéletesen vezető felületen (2.49) alapján az elektromos térerősségnek csak normális irányú komponense van. Mivel egy elem  $i$ -edik élén csak az  $i$ -edik formafüggvénynek van tangenciális irányú komponense (lásd: 2.6 ábra), ezért csak a peremen található élekhez tartozó ismeretleneket kell nullával egyenlővé tenni. Tökéletesen elnyelő perem beállítása (3.8) alapján  $\mathbf{K}$  együttható-mátrix főátlójának a peremet található értékeihez  $jk_0 l \delta$  értéknek asszemblálásával történik, ahol  $\delta$  az él és a körüljárási irány által meghatározott  $\pm 1$ -es szorzó. A gerjesztés sok esetben csak az élek mentén értelmezett, ekkor (3.17) összefüggésben  $\Delta$ -val történő szorzás helyett csak az élek hosszával szükséges a számításokat elvégezni.

### 3.1.2. 1D problémák a frekvenciatartományban

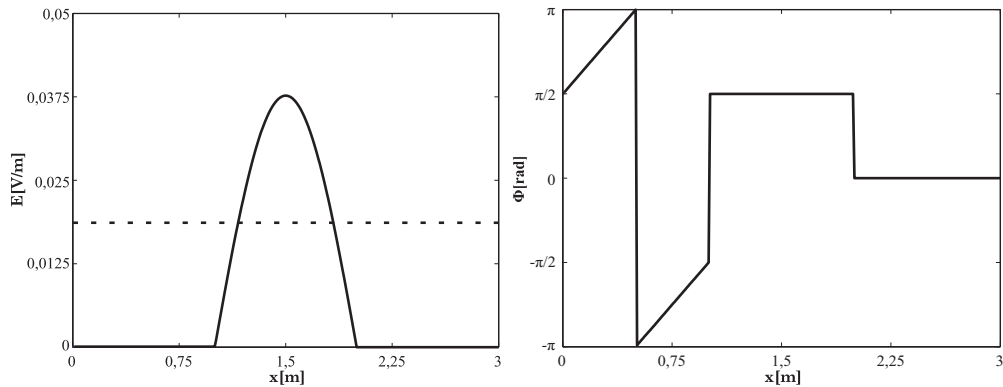
#### 3.1.2.1. Végtelen féltér probléma

Az első bemutatott példa az úgynevezett végtelen féltér probléma (lásd: 3.1 ábra), melynél elektromosan tökéletes vezető felület szeli ketté az egydimenziós teret. Tökéletes vezetőben elektromos térerősség nem alakul ki, ezért nem is haladhat át rajta, tehát a teljes elektromos hullámot reflektálja. Mivel a jel a reflexió során 180 fokos fázistolást szenved (tápvonalelméleti szempontból ez rövidzárral történő lezárást jelent), ezért ha fél hullámhossz egész számú többszöröse a távolság a vezető és a sugárzó között, a sugárzó túloldalára a haladó és a reflektált hullám ellentétes fázisban érkezik, teljes kioltás tapasztalható. Amennyiben a sugárzó és a tökéletes vezető közötti távolság a hullámhossz negyede plusz a hullámhossz felének egész számú többszöröse, teljes erősítés



3.1. ábra: Végtelen féltér probléma

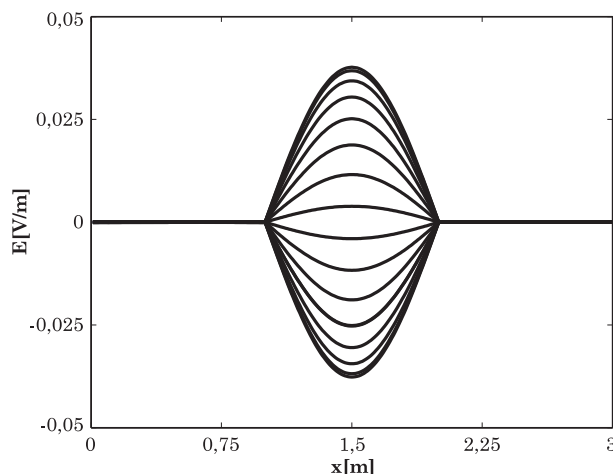
várható. A sugárzó és a tökéletes vezető felület között a teljes reflexió miatt állóhullámok alakulnak ki. A szimuláció eredménye minden csomópontban az elektromos térerősség komplex csúcértékét adja meg, az elektromos térerősség abszolútértékét és fázisát külön ábrán mutatom be. Amennyiben nincs jelen egy tökéletesen vezető felület, egydimenziós probléma esetén az elektromos térerősség abszolútértéke konstans, a fázisa pedig lineárisan változik a forrástól való távolság függvényében. Érdekesség, hogy egydimenzióban nincs szabadtéri csillapítás, mivel a hullám nem tud szétterülni minden irányba, ennek köszönhetően egydimenziós szimulációkkal kiválóan be lehet mutatni tápvonalelméleti feladatokat. Egydimenziós szimuláció során a geometria csak egyenes vonal lehet. A vonal hossza jelen esetben 3 m,  $x=0$  m-nél tökéletes elnyelő felület,  $x=1$  m-nél egy 1 cm szélességű antenna,  $x=2$  m-nél pedig tökéletes vezető felület található. Az első szimuláció egy 150 MHz frekvenciájú jellel történt, melynek hullámhossza  $\lambda = 2$  m. A hullámhossz a sugárzó és a tökéletes vezető felület távolságának kétszerese, ezért kioltás várható. A 3.2 ábrán látható a végtelen féltér probléma megoldása. A bal oldali ábrán lát-



3.2. ábra: Az elektromos térerősség abszolútértéke és fázisa 150 MHz frekvencián

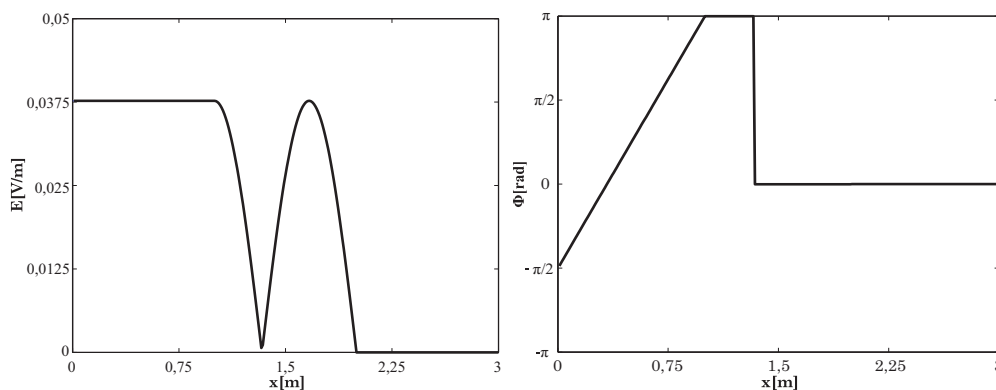
ható egyrészt, hogy az antennától balra az elektromos térerősség értéke közel 0, másrészt pedig szaggatottan látható a vezető fal nélküli szimuláció eredménye. A nem 0 érték annak köszönhető, hogy az antenna a szimuláció során nem végtelenül vékonyként lett beállítva. A jobb oldali ábrán látható az elektromos térerősség fázisa. Az antenna és a tökéletes vezető felület között a fázis értéke állandó. Ez annyit jelent, hogy azon a tartományon minden pont azonos

fázisban van, tehát állóhullám alakult ki. A kialakult állóhullámot ábrázolja a 3.3 ábra. Az ábra az időtartománybeli eredmény képének egy periódusra felvett több időlépését mutatja. A problémát 225 MHz frekvenciájú bemeneti



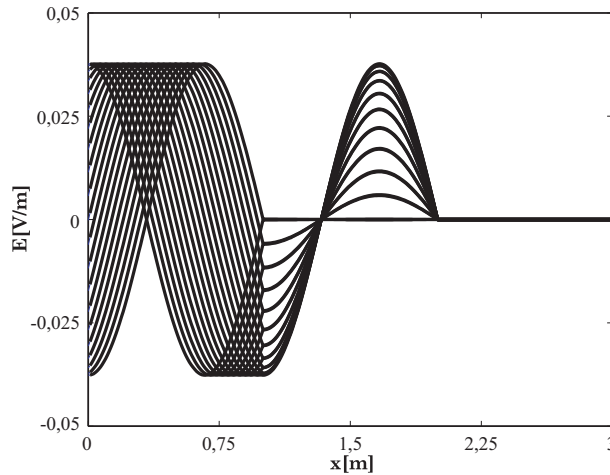
3.3. ábra: Kialakult állóhullám

jellel vizsgálva az eredmény lényegesen eltér a korábbiaktól. A 225 MHz frekvenciájú elektromágneses hullám szabadtéri hullámhossza  $\frac{4}{3}$  m. Az antenna síkjában reflektált hullám a haladó hullámmal azonos fázisban találkozik, tehát a két jel szuperpozíciója halad tovább. A szimuláció eredményét mutatja a 3.4 ábra.



3.4. ábra: Az elektromos térerősség abszolútértéke és fázisa 225 MHz frekvencián

Összehasonlítva az eredményt a 3.4 ábrán szaggatott vonallal bejelölt reflektáló fal nélküli eredménnyel, az elnyelő perem felé haladó hullám abszolútértéke pontosan annak kétszerese, tehát valóban összeadódott és valóban azonos fázisban találkozott a haladó és a reflektált hullám. A fázisábrán jól látható az állóhullám és a haladóhullám helye a térben. A hullám terjedése fél periódusidő alatt a 3.5 ábrán látható.



3.5. ábra: A hullám terjedésének illusztrációja

### 3.1.2.2. Levegőtől eltérő közeg hatása

Az elektromágneses hullámok különböző permittivitással és permeabilitással rendelkező anyagokban más sebességgel terjednek, a hullámhosszuk változik. Ha  $\lambda_0$  jelöli a hullámhosszt vákuumban, akkor a hullámhossz a közegben [23]:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}. \quad (3.18)$$

Amennyiben  $\mu_r$  és  $\varepsilon_r$  hányadosa nem egyezik meg egymást határoló közegekben, akkor a közeghatáron az elektromágneses hullám reflexiót szenved. Ha a közeghatárra merőlegesen haladó hullám  $Z_{01}$  hullámimpedanciájú közegből a  $Z_{02}$  hullámimpedanciájú közegbe tart, a reflexió értéke [23]

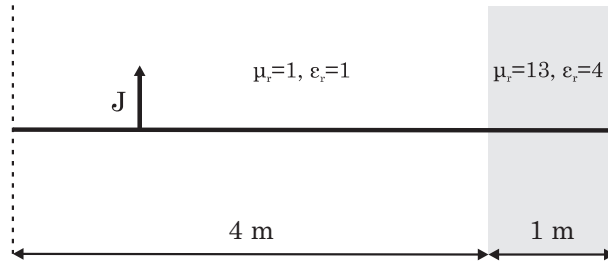
$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (3.19)$$

képlet alapján számolható. A szimuláció eredménye alapján az állóhullám-arány megállapítása lényegesen egyszerűbb. Ez a kialakult állóhullámon a maximális és a minimális térerősség hányadosa, de számítható a reflexiótényező ismeretében is:

$$r = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}, \quad (3.20)$$

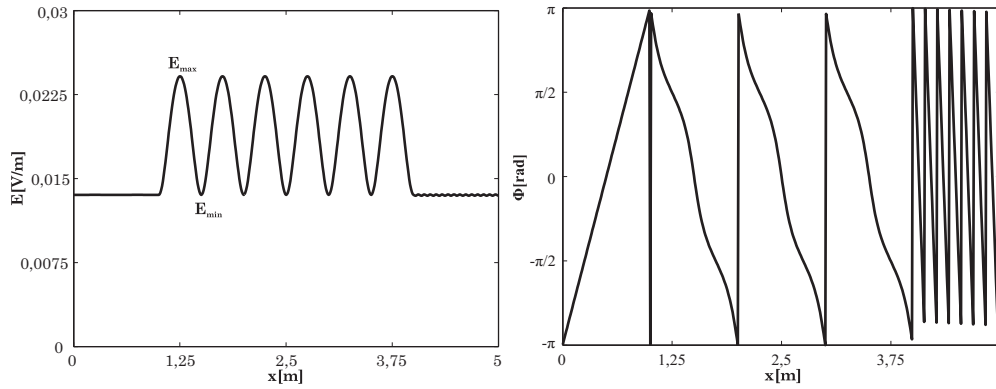
ahol  $E_{max} = \max_x |\mathbf{E}|$  és  $E_{min} = \min_x |\mathbf{E}|$ . A geometria most 5 méter hosszú, a bal perem tökéletesen áteresztő/elnyelő perem, 1 méternél található egy sugárzó a levegőben, 4 métertől 5 méterig pedig egy levegőtől eltérő paraméterekkel rendelkező közeg található (lásd: 3.6 ábra).

A geometria végén most egy levegőtől eltérő közegben van a tökéletes elnyelő felület. A gerjesztés frekvenciája most 300 MHz lesz az egyszerű számítások érdekében. A közeg relatív permittivitása  $\varepsilon_r = 13$ , relatív permeabilitása  $\mu_r = 4$ . Levegőben a 300 MHz frekvenciájú jel hullámhossza 1 m. A közegben (3.18) alapján a hullámhossz  $\frac{1[m]}{\sqrt{4 \cdot 13}} \approx 0,138$  m, a reflexiótényező pedig



3.6. ábra: Eltérő tulajdonságú közegek vizsgálatára alkalmazott geometria

(3.19) alapján  $\frac{\sqrt{\frac{4}{13}}120\pi[\Omega]-120\pi[\Omega]}{\sqrt{\frac{4}{13}}120\pi[\Omega]+120\pi[\Omega]} \approx -0,286$ . A szimuláció eredményét mutatja a 3.7 ábra. A szimuláció eredményének abszolútértékéről lehet leolvasni a szimulációban létrejövő reflexió mértékét. A 3.7 ábrán látható a maximális és minimális térerősség helye. A szimuláció alapján  $E_{max} = 0,0242 \frac{V}{m}$ , illetve



3.7. ábra: A szimuláció eredményének abszolútértéke és fázisa

$E_{min} = 0,0134 \frac{V}{m}$ . E két értékből számítható (3.20) alapján az állóhullámarány értéke, ami 1,806-ra adódik, így kiszámítható a reflexiótényező abszolútértéke, ami 0,286. Ez az érték tökéletesen megegyezik a korábbi számításokkal. A jobb oldalon található közegben a hullámhossz értékét a fázisábráról lehet könnyedén leolvasni. Az ábrán a függőleges vonalak természetesen nem ugrások a fázisban, csak körbeér a fázisvektor, tehát a függőleges vonalak távolságával könnyedén kiszámítható a hullámhossz. Levegőben ez az érték természetesen 1 m, a jobb oldali közegben pedig 0,14 m, ami a számított értéknek kielégítő közelítése.

### 3.1.3. 2D problémák a frekvenciatartományban

Kétdimenziós szimulációk esetén a reflexió és a megváltozott hullámhossz csak kevésbé komplex problémák esetén határozható meg egyszerűen. Ezen okból kifolyólag olyan problémák szerepelnek ebben az alfejezetben, melyeknek létezik analitikus megoldásuk, vagy jól ismert a viselkedésük.

### 3.1.3.1. Csőtápvonal

A négyszögletes csőtápvonalak a mikrohullámú technika alapvető építőelemei. A tápvonal falának anyaga elektromosan jó vezetőképességgel rendelkezik, ezáltal az elektromágneses tér nem hatol át rajta, hanem arról reflektálódik, így a tápvonalon belül terjed kis veszteséggel. A csőtápvonalon hullámterjedési közeg (dielektrikum) a legtöbb esetben levegő, viszont egy adott frekvenciára magasabb permittivitású dielektrikum mellett kisebb méretű csőtápvonal is méretezhető, azonban ebben az esetben tápvonal vesztesége megnő. Közismert, hogy a csőtápvonalon belül az elektromágneses tér hullámhossza nem egyezik meg a szabadtéri hullámhosszal [23, 24]. Levegő dielektrikumban ez a megváltozott hullámhossz a

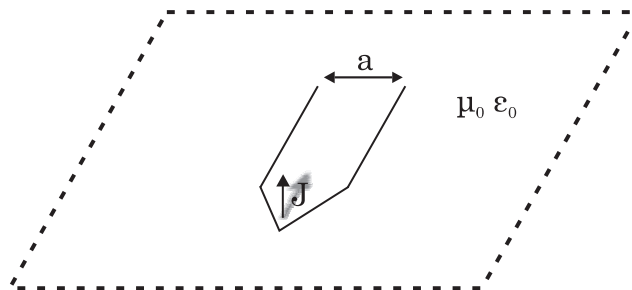
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_h^2}}} \quad (3.21)$$

képlet alapján számítható, ahol  $\lambda_0$  a szabadtéri hullámhossz,  $\lambda_h$  pedig a csőtápvonal határhullámhossza, melynél nagyobb hullámhosszúságú jel tisztán képzetes permittivitású dielektrikummal találkozhat, nagy csillapítást szenved. A határhullámhossz számítása a

$$\lambda_h = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (3.22)$$

összefüggés alapján lehetséges, ahol  $m$  és  $n$  a csőtápvonalban terjedő hullám módusát jelölik,  $a$  és  $b$  pedig a téglalap keresztmetszetű csőtápvonal oldalainak hossza.

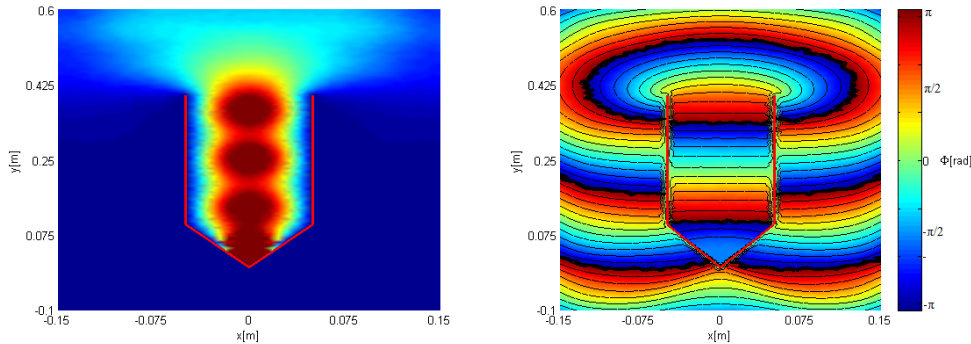
A szimuláció alapját képező probléma geometriája a 3.8 ábrán látható. A tápvonal zárt végén folyamatos kiszélesedés oka az, hogy így a zárt végről reflektálódó hullám által okozott állóhullámarányt nagyobb frekvenciatartományban közel állandóra lehet kényszeríteni. A nyitott végű csőtápvonal szélessége  $a = 0,1$  m. Mivel kétdimenziós modellről van szó, a síkra merőlegesen nem alakul ki módus, így a  $TE_{10}$  módushoz tartozó határhullámhossz (3.22) alapján 0,2 m. Ez minimálisan 1,5 GHz frekvenciát jelent. A tápvonal fala a szimulá-



3.8. ábra: A szimuláció alapját képező csőtápvonal modellje

ció során tökéletes vezető anyag, ezért a geometriája kiterjedés nélküli, mivel a tökéletes vezetőben elektromos tér nincs, számítása felesleges. A tápvonal betáplálása a modell síkjára merőleges, így az áram is a síkra merőlegesen folyik,

ezért az elektromos térerősségnek is csak a síkra merőleges komponense lehet. Ezen oknál fogva a szimuláció során elegendő csomóponti formafüggvények alkalmazása. A gerjesztés frekvenciája a szimuláció során 2 GHz. Ezen a frekvencián a tápvonalon belül mérhető hullámhossz a (3.21) összefüggés alapján közelítőleg 0,227 m. A szimuláció eredményét mutatja a 3.9 ábra. A csőtápv-



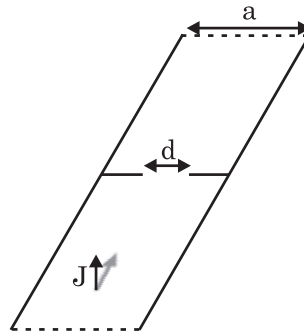
3.9. ábra: A csőtápvonal szimuláció eredményének abszolútértéke és fázisa

vonalan mérhető hullámhossz a fázisábráról könnyen leolvasható a színskála hirtelen változásainál, ugyanis ott ér körbe a fázisvektor, tehát két ugrás távolsága a csőben mérhető hullámhossz, ami jelen esetben közelítőleg 0,2268 m. A számított és a szimulált érték közötti eltérés elhanyagolható, nagyságrendjébe esik a szimuláció során alkalmazott átlagos elemméret, tehát a szimuláció eredménye kielégítő a diszkretizálás ilyen mértéke mellett. A fázisábráról az is leolvasható, hogy a nyitott végű csőtápvonal visszirányba is sugároz, bár a visszasugárzott elektromágneses teljesítmény értéke elhanyagolható az előre sugárzott teljesítményhez viszonyítva.

### 3.1.3.2. Sáváteresztő szűrő tervezése írisz segítségével

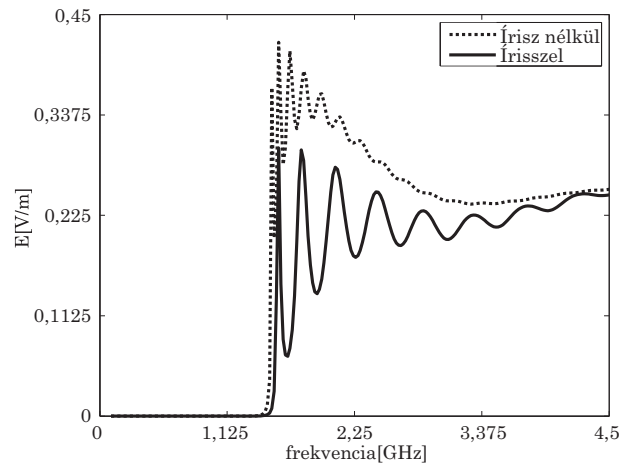
A különböző csőtápvonalakban az írisz egy keskeny, vezető anyagból kialakított rés, mely kialakításától függően kapacitív vagy induktív tagként, több írisz egymás után periodikusan elrendezve rezonáns üregeket alkotva pedig keskenysávú sáváteresztő szűrőként viselkedik. Amennyiben az írisz az elektromos térerősség vonalaira merőleges, abban az esetben kapacitív, amennyiben pedig a mágneses térerősség vonalaira merőleges, induktív tagként viselkedő íriszről lehet beszélni.

A vizsgált tápvonal szélessége ismét 10 cm, így (3.22) alapján a tápvonal alsó határfrekvenciája 1,5 GHz. Az írisz szélessége 5 cm (lásd: 3.10 ábra). Mivel a geometria síkjában csak a mágneses térerősségnek van komponense, ezért a kialakított írisz induktív. A tápvonal fala és az íriszt körülzáró felület tökéletes vezető felületként lett beállítva a szimuláció során. Mivel jelen esetben nem érdekes az elektromágneses tér viselkedése a tápvonal ezen szakaszán kívül, ezért a tápvonal eleje és vége tökéletesen áteresztő felületként lett beállítva, így az egész rendszer végtelen hosszúságú tápvonalként viselkedik mindkét irányban. A szimuláció (a határfrekvencia alatti viselkedés szemléltetése végett) 100 MHz frekvenciától 20 MHz-es lépésközzel egészen 4,5 GHz-ig



3.10. ábra: Csőtápvonal egy írisszel

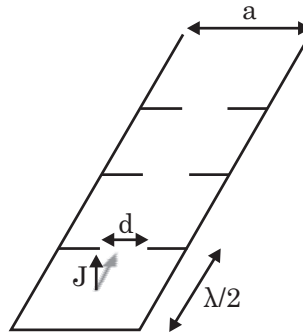
történt. A 3.11 ábrán a tápvonal végén kialakuló elektromos térerősség csúcserőssége látható a gerjesztés frekvenciájának függvényében. Az összehasonlítás céljából ugyanezen a geometrián írisz nélkül is végrehajtottam a szimulációt. A 3.11 ábrán látható, ahogy 1,5 GHz-nél alacsonyabb frekvenciájú elektromág-



3.11. ábra: Az írisszel rendelkező csőtápvonal viselkedése a frekvenciatartományban

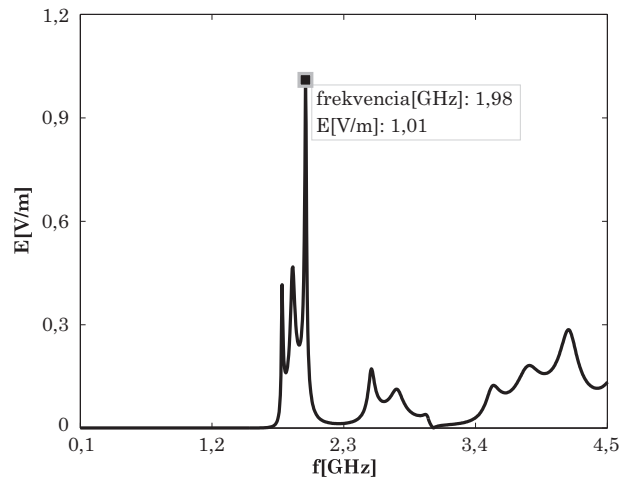
neses jelet nem, vagy csak nagy csillapítással engedi át, majd 1,5 GHz felett hirtelen az áteresztési tartományába kerül a csőtápvonal. A két eredmény frekvenciatartománybeli *hullámozása* a tápvonalon belül kialakuló állóhullámoknak, valamint annak köszönhető, hogy a különböző frekvenciájú jelek más fázisban érkeznek meg a tápvonal végére.

Látható, hogy egy írisz beiktatásával lényeges változás nem történt a rendszer frekvenciatartománybeli viselkedését tekintve. Több írisz beiktatásával általuk rezonáns részek alakíthatók ki a tápvonalon (lásd: 3.12 ábra). A rezonáns tagok a rezonanciafrekvenciájukon mutatják a legkisebb csillapítást, a rezonanciafrekvenciától kis mértékben is eltérő frekvenciájú jelekre viszont nagy csillapítást mutatnak. A tervezni kívánt szűrő legyen például 2 GHz frekvenciára méretezve. Ekkor a rezonáns szakaszok hossza, tehát az egymás után elhelyezett íriszek távolsága közelítőleg 0,1135 m. A tápvonalon összesen három rezonáns szakasz lett kialakítva. A szimuláció 100 MHz frekvenciától 20 MHz-es lépésközzel egészen 4,5 GHz-ig történt. Az elektromos térerősség



3.12. ábra: Csőtápvonal íriszekkel kialakított rezonáns szakaszokkal

csúcsértékének alakulása a tápvonal végén a frekvenciatartományban a 3.13 ábrán látható. A legkisebb csillapítást az elrendezés 1,98 GHz frekvencián mu-



3.13. ábra: A sáváteresztő szűrő viselkedése a frekvenciatartományban

tatta, mely jó közelítése az elvárt 2 GHz-nek, a hiba pedig kerekítési hibáknak illetve nem elegendően sűrű rácsnak is köszönhető. A magasabb frekvenciákon látható lokális maximumok az üreg méretéből adódó második illetve harmadik rezonáns frekvenciáknál találhatók.

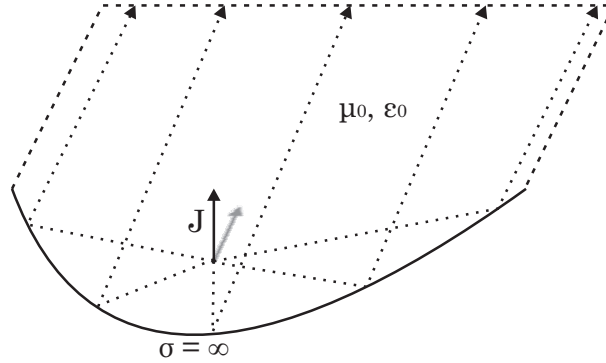
### 3.1.3.3. Parabola antenna

A parabola antennák az egyik legelterjedtebb eszközök a vezeték nélküli pont-pont kapcsolatok körében. A parabola antennák rendelkeznek az egyik legnagyobb antennanyerességgel, így ezek biztosítják az egyik legkisebb nyalábszélességet. A műholdas távközlés parabola antennák nélkül elképzelhetetlen lenne. A parabola antenna tányérjának mérete nagyobb kell legyen, mint az alkalmazott hullámhossz, ezáltal a sugárzó parabola antenna tengelyére merőleges síkban közelítőleg síkhullámok alakulnak ki.

*Descartes*-féle koordinátarendszerben, az  $y$  tengellyel megegyező tengelyű parabola egyenlete:

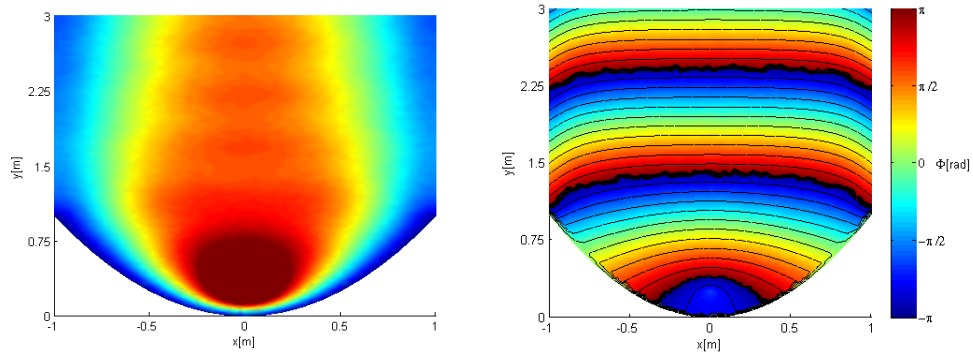
$$y = \frac{x^2}{4p}, \quad (3.23)$$

ahol  $p$  a parabola csúcsa és fókuszpontja közötti távolság. Parabola antennák fejegysége a fókuszpontban található, így a parabola tengelyének bármely síkjába a tányérról reflektált elektromágneses hullám ugyanolyan fázisban érkezik meg. A szimulációhoz használt geometria látható a 3.14 ábrán. A fókuszpont, így a fejegység távolsága a parabola csúcsától 0,25 m. A gerjesztés frekven-



3.14. ábra: A parabola antenna modellje

ciája a szimuláció során 300 MHz, melynek hullámhossza ugyan nem sokkal kisebb, mint a modellben szereplő parabola mérete, de az antenna geometriájának hatásának közelítő szemléltetésére alkalmas. Magasabb frekvenciákon a valósághoz közelebbi eredmény érhető el, de ennek hátránya, hogy mivel az elemek mérete jóval kisebb kell, hogy legyen, mint az alkalmazott hullámhossz, az egyenletrendszer mérete a végtelékig megnőhet. A parabola antenna a szimulációban tökéletes vezető felületként lett megvalósítva a teljes reflexió érdekében. A gyakorlatban ez hasonlóan történik, a parabola antenna tányérja elektromosan kitűnően vezető anyagból készül. A szimuláció eredménye a 3.15 ábrán látható. Az eredmény abszolútértékén látható, hogy az



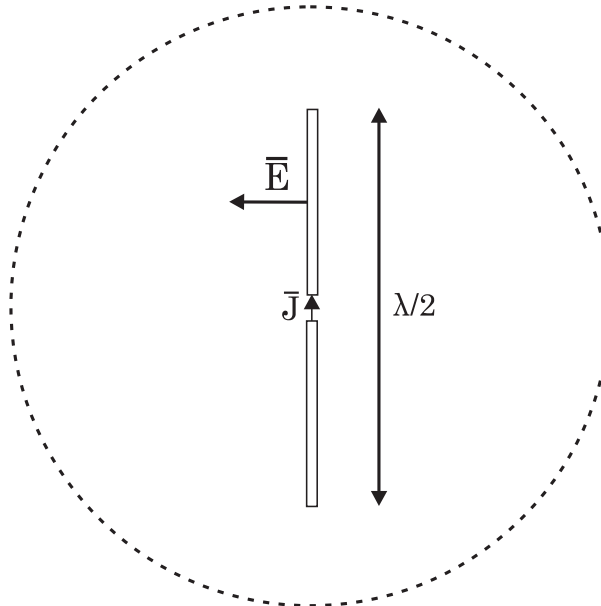
3.15. ábra: A parabola antenna szimulációjának abszolútértéke és fázisa

elektromágneses tér döntő része a parabola tengelyének irányába terjed, míg a fázisábrán látható, hogy a tengelyre merőleges síkban közel állandó a jel fázisa, tehát közelítőleg síkhullám indul a parabola antennáról. Szimuláció segítségével meghatározható az antenna iránykarakterisztikája. Ehhez meg kell határozni a problémater peremén az elektromos térerősség komplex csúcstértékét, mely alapján a távolféri viselkedés egy közeltér-távolfér transzformációs

eljárás segítségével határozható meg. Pontosabb eredményt a frekvencia növelésével illetve az elemméret csökkentésével lehet elérni.

#### 3.1.3.4. Botantennák

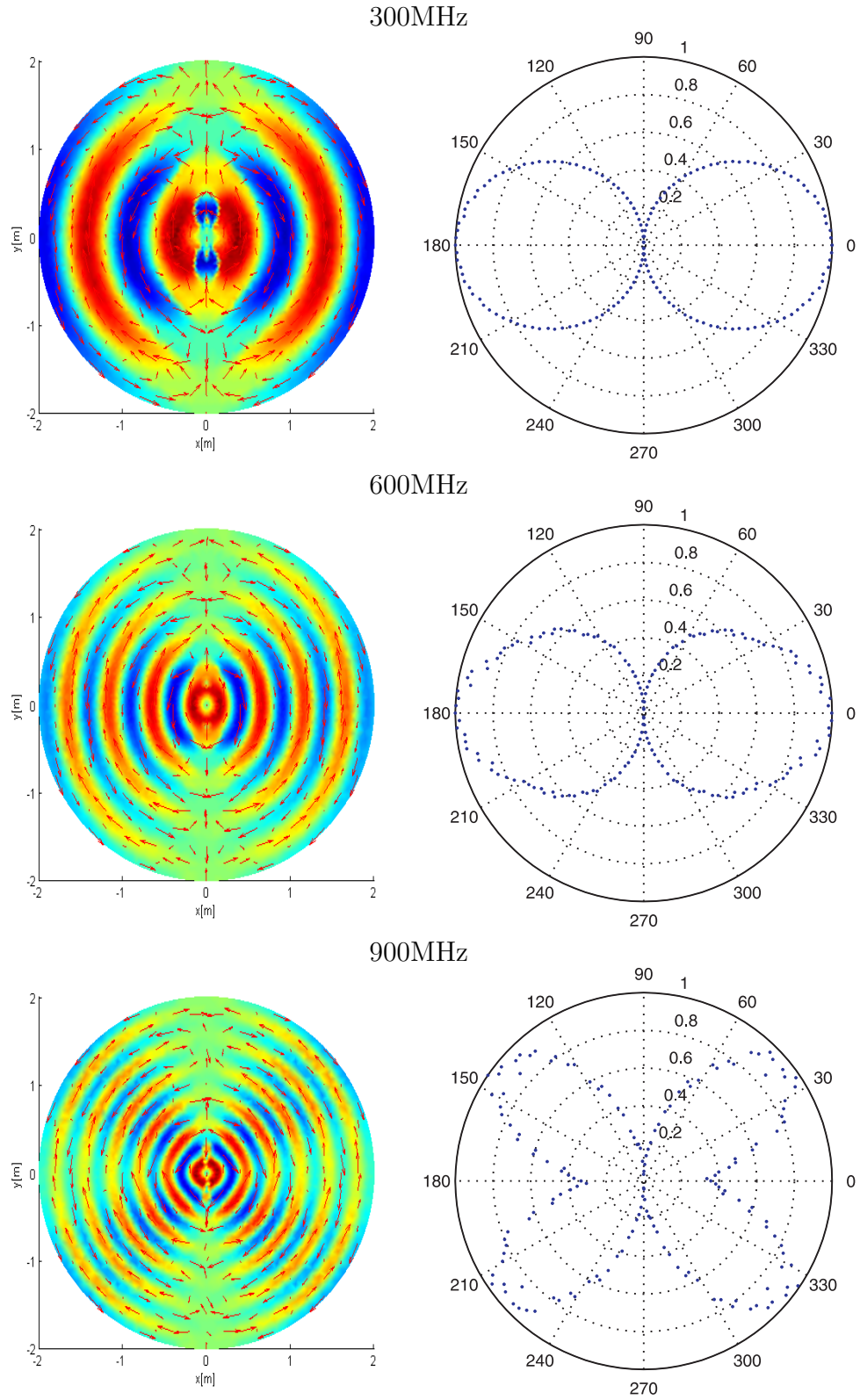
A dipól és monopól antennák (lásd: 3.16 illetve 3.18 ábra) a legalapvetőbb antennatípusok. Az általuk létrehozott elektromos tér szimulációjához elemi formafüggvények alkalmazása szükséges, mivel a gerjesztés a szimuláció síkjában található. Ez a gerjesztés jelen esetben egy, a gerjesztés hullámhosszához képest elhanyagolható méretű áramelem. Fontos megjegyezni, hogy rádiófrekvenciás szimulációk során nem terjed áram a vezető közegekben, azok csak az áramelem által létrehozott teret torzítják el a peremfeltételeknek köszönhetően. Egy elektromosan kiválóan vezető anyagban elektromos tér gyakorlatilag nincsen, ezért a szimuláció során az eredményt jól közelítő egyszerűsítéssel lehet élni, amennyiben a vezető közegeknek csak a pereme van figyelembe véve, így a közeg belsejében nem szükséges a számításokat elvégezni. A szimuláció



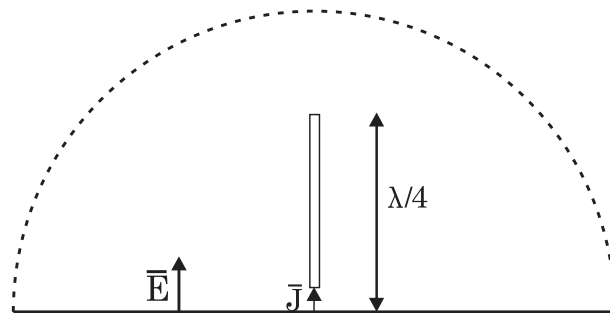
3.16. ábra: Dipólus antenna

egy 0,5 m magas, 300 MHz-en gerjesztett antennára vonatkozott, demonstrációs célból azonban ugyanezen geometrián bemutatom egy 600 és egy 900 MHz-es jel viselkedését is. A 3.17 ábra bal oldalán az antenna által létrehozott elektromos vektormező és annak nagysága látható különböző frekvenciákon, jobb oldalán pedig a közeltéri iránykarakterisztikák láthatók.

A monopól antennák (lásd: 3.18 ábra) viselkedésüket tekintve nem különböznek a dipól antennáktól. Eltérés, hogy a monopól antenna a dipól antenna két ága helyett csak egy, tökéletes vezető felületre merőleges ágból áll. A felület által okozott reflexiónak köszönhetően a monopól antenna által kisugárzott teljesítmény csak az egyik térrészre koncentrálódik azonos iránykarakteristikával. A 3.19 ábrán látható a 300 MHz-re hangolt negyedhullámú monopól

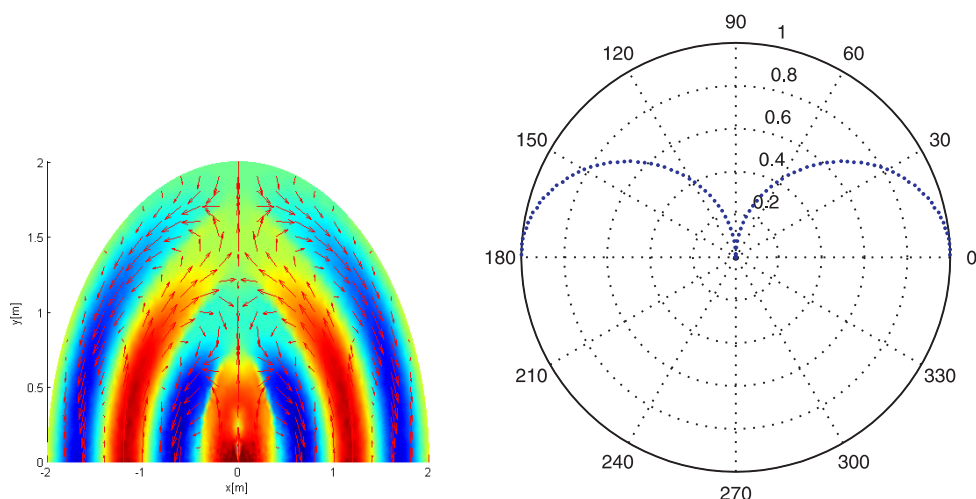


3.17. ábra: Dipól antenna kisugárzott tere és iránykarakterisztikája különböző frekvenciákon



3.18. ábra: Monopól antenna

antenna által sugárzott tér egy időpillanatban, illetve a közeltéri iránykarakterisztikája. Jól látható, hogy a vezető felület feletti tartományon gyakorlatilag megegyezik a dipól és a monopól antenna iránykarakterisztikája. Az alkal-



3.19. ábra: Monopól antenna kisugárzott tere és iránykarakterisztikája

mazott antennák jelentős része botantenna, vagy azokat elemi építőelemként használva felépíthető antennarendszerek, mint például a Yagi- vagy logaritmikusan periodikus antennák. Az elemi építőelem szimulációs metodikájának ismeretében a bonyolultabb antennarendszerek szimulációja elvi szinten nem nehezebb. Valóságban az antennák iránykarakterisztikája a fent bemutatott eredménytől eltér, mivel az antenna hozzávezetésére szolgáló koaxiális kábel ugyanúgy sugárzó elemnek tekinthető, mely hozzávezetésnek véletlenszerű geometriája lehet.

A frekvenciatartománybeli analízis nagy előnye, hogy egyetlen frekvencia, vagy keskeny frekvenciasáv vizsgálata kifejezetten gyors, tranziensektől mentes eredményt ad. A komplex csúcsertékként megkapott eredmény könnyen időtartománybeli alakra hozható. Ideális állóhullámok, hullámmintázatok meghatározására, alkalmazható antennák iránykarakterisztikájának közelítő számítására, szűrők átviteli karakterisztikájának meghatározására. Alkalmatlan viszont tranziensek vizsgálatára, impulzusszerű, folytonos spektrumú jelek által keltett elektromos tér vizsgálatára.

## 3.2. Időtartománybeli analízis

Időtartománybeli analízis során a bemeneti paraméter egy tetszőleges jel időtartománybeli alakja, a megoldás pedig minden egyes időlépésben az elektromos térerősség értéke minden egyes csomópontban. Az időlépések nagyságának a jel spektrumának legkisebb frekvenciájú komponensének a periódusidejéhez képest rövidnek kell lennie. A rosszul megválasztott időlépés numerikus problémákhoz vezethet, melyek következtében a számítások eredménye rossz lehet. A sok időlépés viszont bonyolult problémák esetén nagy számítási kapacitást igényel, így a szimuláció hosszadalmas lehet. A nemlineáris anyagtulajdonságok illetve az átmeneti jelenségek (tranziensek) vizsgálatára csak időtartománybeli analízis segítségével van lehetőség.

### 3.2.1. Gyenge alak

A (2.56) összefüggés az időtartománybeli hullámegyenlet. A súlyozott maradék elvének megfelelően, a végeselem-módszer alkalmazásához a hullámegyenlet mindkét oldalát meg kell szorozni egy tetszőleges  $\mathbf{T}$  súlyfüggvénnyel, és integrálni kell a teljes tartományon [7–10]:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{T} \cdot \nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) dV + \int_V \mathbf{T} \cdot \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} dV + \int_V \mathbf{T} \cdot \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dV = \\ = - \int_V \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Az első integrál itt is második deriváltakat tartalmaz. A második deriváltak kiküszöbölése a frekvenciatartománybeli gyenge alak levezetésekor tárgyalattal teljesen analóg. A (3.24) egyenlet első integráljára felírva (3.2) összefüggést  $\mathbf{A} = \mathbf{T}$  és  $\mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}$  helyettesítéssel, illetve alkalmazva a (2.57) közelítést, az időtartománybeli analízis gyenge alakja:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{E}) dV + \int_V \mathbf{T} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} dV + \int_V \mathbf{T} \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dV + \\ + Y_0 \oint_A (\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \cdot \left( \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dA = - \int_V \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ebben az egyenletben az ismeretlen elektromos térerősség első és második deriváltja is szerepel, így ez egy másodfokú inhomogén differenciálegyenlet-rendszer. Külön problémát okoz, hogy az egyenlet jobb oldalán a gerjesztésnek is az idő szerinti deriváltja szerepel. Az együtthatókat szétválasztva, a (3.25) egyenlet mátrixos alakban felírva [8] :

$$\mathbf{Q} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{S} \mathbf{E} = \mathbf{f}, \quad (3.26)$$

ahol

$$Q_{i,j} = \int_V \mathbf{T}_i \cdot \varepsilon \mathbf{T}_j dV, \quad (3.27)$$

$$R_{i,j} = \int_V \mathbf{T}_i \cdot \sigma \mathbf{T}_j \, dV + Y_0 \oint_A (\mathbf{n} \times \mathbf{T}_i) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{T}_j) \, dA, \quad (3.28)$$

$$S_{i,j} = \int_V (\nabla \times \mathbf{T}_i) \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{T}_j) \, dV, \quad (3.29)$$

illetve

$$f_i = - \int_V \mathbf{T}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \, dV. \quad (3.30)$$

A  $\mathbf{T}$  súlyfüggvény itt is tetszőlegesen megválasztható. Ahogy az a frekvenci tartománybeli analízis tárgyalásakor bemutatásra került, a súlyfüggvényt a *Galjorkin*-eljárásnak megfelelően a formafüggvénynek megválasztva lehet a végeelem-módszer technikájához eljutni.

### 3.2.1.1. Megoldás *Newmark* – $\beta$ módszerrel

Az időtartománybeli gyenge alak megoldása numerikusan sem az előrelépő *Euler*-módszerrel sem az úgynevezett *Crank-Nicolson*-módszerrel nem célravezető, mivel ezen módszerek csak elsőrendű differenciál-egyenletek megoldására vannak kifejlesztve.

Másodrendű inhomogén differenciálegyenletek közelítő megoldása számítható az úgynevezett *Newmark*- $\beta$  [25] módszer segítségével. Jelöljön egy időtől függő függvény  $u(t)$ . A módszer lényege, hogy a centrális differencia módszerét alkalmazza az első illetve a második deriváltakra. A centrális differencia séma az előrelépő és a hátralépő módszer számtani közepe. A *Newmark*- $\beta$  módszer alapján  $u(t)$  első és második idő szerinti deriváltjainak közelítő értéke:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} \approx \frac{u(t)^{n+1} - u(t)^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} \approx \frac{u(t)^{n+1} - 2u(t)^n + u(t)^{n-1}}{\Delta t^2}, \quad (3.32)$$

ahol  $n$  index jelöli azt az időpillanatot, amikor  $u(t) = u(n\Delta t)$ . A számításokhoz még szükség van a differenciálatlan mennyiségek súlyozott átlagára:

$$u \approx \beta u^{n+1} + (1 - 2\beta)u^n + \beta u^{n-1}, \quad (3.33)$$

ahol  $\beta$  egy paraméter 0 és 1 közötti értékkel. Behelyettesítve  $u$  helyére  $\mathbf{E}$  illetve  $\mathbf{J}$  függvényét, és visszahelyettesítve (3.31)-(3.33) összefüggéseket (3.26) kifejezésbe:

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{Q} \frac{1}{\Delta t^2} + \mathbf{R} \frac{1}{2\Delta t} + \beta \mathbf{S} \right) \mathbf{E}^{n+1} - \left( \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{Q} - (1 - 2\beta) \mathbf{S} \right) \mathbf{E}^n + \\ & + \left( \mathbf{Q} \frac{1}{\Delta t^2} - \mathbf{R} \frac{1}{2\Delta t} + \beta \mathbf{S} \right) \mathbf{E}^{n-1} = \beta \mathbf{f}^{n+1} + (1 - 2\beta) \mathbf{f}^n + \beta \mathbf{f}^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ez (2.22) összefüggés által ismertetett formában felírva:

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{Q} \frac{1}{\Delta t^2} + \mathbf{R} \frac{1}{2\Delta t} + \beta \mathbf{S} \right) \mathbf{E}^{n+1} = \left( \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{Q} - (1 - 2\beta) \mathbf{S} \right) \mathbf{E}^n - \\ & - \left( \mathbf{Q} \frac{1}{\Delta t^2} - \mathbf{R} \frac{1}{2\Delta t} + \beta \mathbf{S} \right) \mathbf{E}^{n-1} + \beta \mathbf{f}^{n+1} + (1 - 2\beta) \mathbf{f}^n + \beta \mathbf{f}^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Stabil eredményt lehet kapni  $\beta$  értékének jó megválasztásával. Megmutatható, ha  $\beta \geq \frac{1}{4}$  akkor a differenciálegyenlet feltétel nélkül stabil [8], így én számításaim során  $\beta = \frac{1}{4}$  értékkel dolgoztam.

### 3.2.1.2. Implementáció 1D probléma esetén

A gyenge alak implementációjának lényeges lépései már bemutatásra kerültek a 3.1.1.1 fejezetben, időtartományban az implementáció menete a korábbiakkal teljesen analóg, így ebben az alfejezetben csak a lényegesebb pontokra szorítokozom. Egydimenziós probléma esetén a  $\mathbf{Q}$  (3.27),  $\mathbf{R}$  illetve (3.28) $\mathbf{S}$  (3.29) mátrixok és az  $\mathbf{f}$  vektor alakja egyetlen elemre az alábbiak szerint alakul:

$$\mathbf{Q}_{elem} = \varepsilon \sum_{i=1}^2 w_i \cdot \begin{bmatrix} N_1(\xi_i) \\ N_2(\xi_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1(\xi_i) & N_2(\xi_i) \end{bmatrix} l, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{R}_{elem} = \sigma \sum_{i=1}^2 w_i \cdot \begin{bmatrix} N_1(\xi_i) \\ N_2(\xi_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1(\xi_i) & N_2(\xi_i) \end{bmatrix} l, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{S}_{elem} = \frac{1}{\mu} \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \end{bmatrix} \right) l, \quad (3.38)$$

illetve

$$\mathbf{f}_{elem} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial J}{\partial t} l. \quad (3.39)$$

A fenti, elemekre felírt 2x2 mátrixok együttható-mátrixban történő elhelyezéseinek menete a (3.12) összefüggéssel teljesen analóg módon történik.

A (3.28) összefüggés második integrálja felelős a tökéletesen elnyelő peremfeltételért. Ennek megvalósítása, hasonlóan a frekvenciatartománybeli analízis során tárgyaltakhoz,  $\mathbf{R}$  mátrix főátlójának a peremhez tartozó értékéhez kell  $Y_0$  hullámadmittancia értékét asszemblálni. A tökéletesen vezető felület beállítás az  $\mathbf{S}$  mátrixban, illetve az  $\mathbf{f}$  vektorban történik.

### 3.2.1.3. Implementáció 2D probléma esetén

Kétdimenziós problémák esetén a  $\mathbf{Q}$  (3.27),  $\mathbf{R}$  illetve (3.28) $\mathbf{S}$  (3.29) mátrixok és az  $\mathbf{f}$  vektor alakja csomóponti formafüggvények alkalmazásakor:

$$\mathbf{Q}_{elem} = \varepsilon \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \begin{bmatrix} N_1(\xi_i, \chi_i) \\ N_2(\xi_i, \chi_i) \\ N_3(\xi_i, \chi_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1(\xi_i, \chi_i) & N_2(\xi_i, \chi_i) & N_3(\xi_i, \chi_i) \end{bmatrix} \Delta, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{R}_{elem} = \sigma \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \begin{bmatrix} N_1(\xi_i, \chi_i) \\ N_2(\xi_i, \chi_i) \\ N_3(\xi_i, \chi_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1(\xi_i, \chi_i) & N_2(\xi_i, \chi_i) & N_3(\xi_i, \chi_i) \end{bmatrix} \Delta, \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{elem} = & \frac{1}{\mu} \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \right) \Delta, \end{aligned} \quad (3.42)$$

illetve

$$\mathbf{f}_{elem} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \Delta. \quad (3.43)$$

Élmenti formafüggvények alkalmazásakor, figyelembe véve, hogy  $\mathbf{W}_i$  formafüggvények  $N_i(\xi_i, \chi_i)$  és  $N_j(\xi_i, \chi_i)$  függvényei, fenti összefüggések alakja a továbbiak szerint módosul:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{elem} = & \varepsilon \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \left( \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(x) \\ \mathbf{W}_2(x) \\ \mathbf{W}_3(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(x) & \mathbf{W}_2(x) & \mathbf{W}_3(x) \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(y) \\ \mathbf{W}_2(y) \\ \mathbf{W}_3(y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(y) & \mathbf{W}_2(y) & \mathbf{W}_3(y) \end{bmatrix} \right) \Delta, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{elem} = & \sigma \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \left( \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(x) \\ \mathbf{W}_2(x) \\ \mathbf{W}_3(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(x) & \mathbf{W}_2(x) & \mathbf{W}_3(x) \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(y) \\ \mathbf{W}_2(y) \\ \mathbf{W}_3(y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(y) & \mathbf{W}_2(y) & \mathbf{W}_3(y) \end{bmatrix} \right) \Delta, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{S}_{elem} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \nabla \times \mathbf{W}_1 \\ \nabla \times \mathbf{W}_2 \\ \nabla \times \mathbf{W}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla \times \mathbf{W}_1 & \nabla \times \mathbf{W}_2 & \nabla \times \mathbf{W}_3 \end{bmatrix} \Delta, \quad (3.46)$$

illetve

$$\mathbf{f}_{elem} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \Delta. \quad (3.47)$$

A *Dirichlet*- és *Neumann*-peremfeltételek beállítása a 3.1.1.2 alfejezetben tárgyaltakkal teljesen analóg módon történik. A gerjesztés sok esetben csak az élek mentén értelmezett, ekkor (3.17) összefüggésben  $\Delta$ -val történő szorzás helyett csak az élek hosszával szükséges a számításokat elvégezni.

A gerjesztés jelalakjának beállítása során azonban egy probléma lép fel. Szinuszos gerjesztést feltételezve az elektromos térerősség képében egy nem várt offszet tapasztalható. Ezt az egyenletrendszerben szereplő idő szerinti parciális

deriváltak okozzák, mivel a  $t=0$  időpillanatban a jelnek a deriváltja nem folytonos a hirtelen meginduló gerjesztésnek köszönhetően. A  $t<0$  időpillanatokra numerikusan nem megoldható a rendszer szinuszos jellel gerjesztett feltételezett előéletének a beállítása, illetve ez nem is cél, mivel ebben az esetben a tranziens információk akár el is veszhetnének. Az offszet kiküszöbölésére egy módszer lehet, ha a periodikus jel amplitúdóját a szimuláció során egy meghatározott értékig és ideig lineárisan növeljük, ekkor a gerjesztés idő szerinti első deriváltja már ugrásoktól mentes. Ugyanez érvényes a jel *kikapcsolására* is, a hiteles eredmény eléréséhez érdemes erre a tulajdonságra odafigyelni.

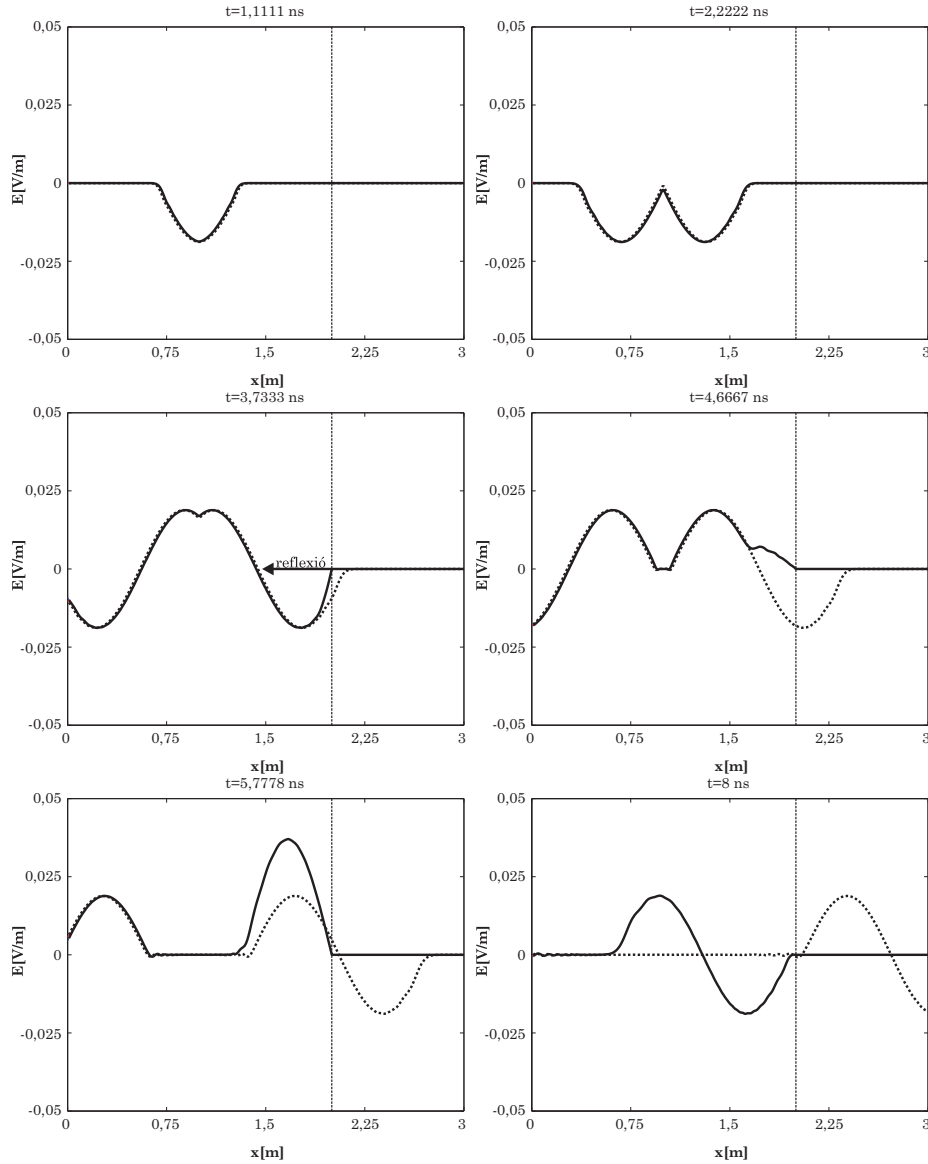
### 3.2.2. 1D problémák az időtartományban

#### 3.2.2.1. Végtelen féltér probléma

Az első példa bemutatásának célja az idő- illetve frekvenciatartománybeli szimulációk eredményeinek ekvivalenciájának bemutatása. Az itt bemutatásra kerülő végtelen féltér probléma tökéletesen megegyezik a korábban tárgyalttal (lásd: 3.1 ábra), a vizsgálat célja jelen esetben annak bemutatása, hogy a tranziensek lecsengése után az idő- illetve frekvenciatartománybeli szimuláció azonos eredménnyel szolgál. Természetesen e probléma megvalósítása nem célszerű időtartományban, a teljes szimulációs folyamat időigénye nagyságrendekkel több, mint frekvenciatartományban. A problémátér geometriája ugyanaz, mint a frekvenciatartománybeli analízis során, 3 méteres térrész legelső pontja egy tökéletesen elnyelő felület, 1 méternél egy sugárzó, 2 méternél pedig egy tökéletesen vezető felület található.

Először a tökéletes vezető nélküli esetet vetem össze a végtelen féltér esetével. A probléma egy periódusnyi 225 MHz frekvenciájú jellel kerül bemutatása a jobb átláthatóság érdekében. Mivel időtartománybeli analízis esetén az eredmény az elektromos térerősség időtartománybeli alakja, ezt papíron, nyomtatott formában ábrázolni nehézkes, az ábrákat több esetben sok időlépés eredményeinek egymásra terítésével készítettem el. Az egydimenziós szabadtéri terjedés és a végtelen féltér probléma időtartománybeli alakulásának összevetését mutatja a 3.20 ábra. A folytonos vonallal jelölt grafikon mutatja azt az esetet, amikor a problémátér tartalmazza a tökéletes vezető peremet. Látható, hogy a vezető falról az elektromágneses hullám ellentétes fázisban verődik vissza.

A következő példákban 150, illetve 225 MHz frekvenciájú folytonos jel hatására kialakuló elektromos teret mutatom be. A frekvenciatartománybeli szimulációk során bemutatásra került, hogy ezen geometrián 150 MHz frekvencia esetén a sugárzótól balra teljes kioltás, míg 225 MHz frekvencia esetén teljes erősítés figyelhető meg. A frekvenciatartománybeli eredménnyel való összehasonlítás végett a szimuláció utolsó periódusában a rács csomópontjaiban a maximális értékeket ábrázolom (lásd 3.21 ábra). Ez a maximális érték matematikailag nem jelent mást, mint a frekvenciatartománybeli analízis eredményeként kapott komplex csúcsértékek abszolútértékét. Szemmel láthatóan az eredmény tökéletesen megegyezik a 3.2 és a 3.4 ábrákon szereplőkkel, tehát az idő- és a frekvenciatartománybeli szimuláció eredménye azonos bemeneti

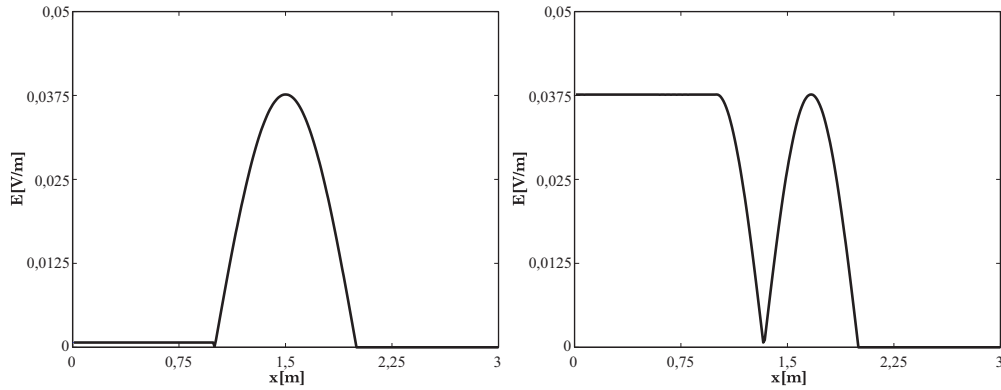


3.20. ábra: A szabadtér és a végtelen féltér összehasonlítása

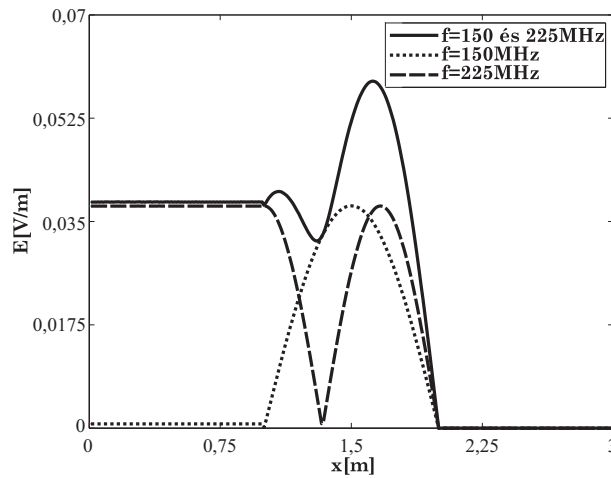
paraméterek mellett, ahogy az várható volt, teljes mértékben megegyezett. Időtartománybeli analízis alkalmazása során viszont lehetőség van tetszőleges spektrumú bemeneti jel mellett számításokat végezni. A következő példában a gerjesztés jelalakja az egyszerűség kedvéért egy 150 MHz és egy 225 MHz frekvenciájú jel összegeként áll elő. Az eredmény a 3.22 ábrán látható, mely a várakozásoknak megfelelően a gerjesztés spektrális komponensei által gerjesztett terek szuperpozíciója.

### 3.2.2.2. Levegőtől eltérő közegek hatása

Ahogy az már feljebb látható volt, eltérő tulajdonságú közegekben eltérő lehet a jel hullámhossza, illetve eltérő közegek határán az elektromágneses térben reflexió léphet fel, erre egy példa frekvenciatartományban már ugyanúgy bemutatásra került. A következő probléma geometriája és bemeneti paramétere-



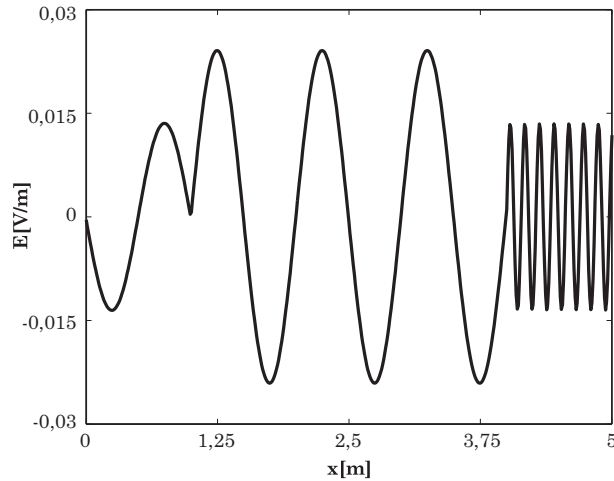
3.21. ábra: Az elektromos térerősség maximuma egy periódus alatt 150 MHz és 225 MHz frekvencián



3.22. ábra: Az összetett jel összehasonlítása a komponenseivel

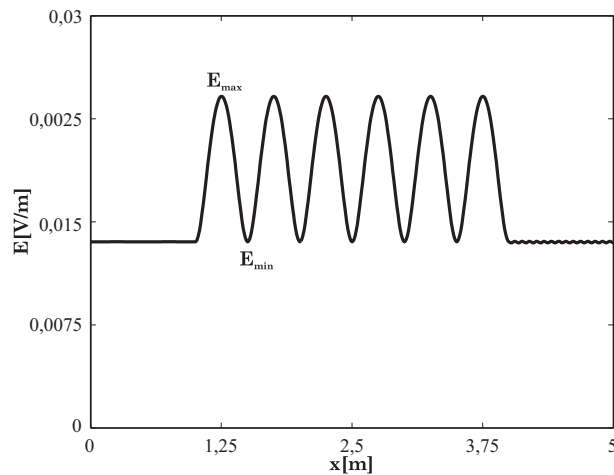
inek értékei tökéletesen megegyeznek a frekvenciatartománybeli analízis során alkalmazottakkal. A geometria egy 5 m hosszú vonal, a baloldali perem tökéletesen áteresztő perem, 1 m-nél található a forrás, 4 m-től jobbra pedig egy  $\mu_r = 4$ , illetve  $\varepsilon_r = 13$  anyagparaméterekkel rendelkező közeg. A hullámhossz változását adott paraméterekkel rendelkező közegben a (3.18) összefüggés írja le. Jelen esetben a jobb oldali közegben 300 MHz frekvenciájú jel esetén a közegben mérhető hullámhossz közelítőleg 0,138 m. Mivel időtartománybeli analízis eredménye egy valós szám, nem egy periodikus jel komplex csúcserőssége, ezért nem lehet a fázisábra alapján egyszerűen számítani. Ehelyett az eredményt egy időlépésben kell megvizsgálni, lehetőleg akkor, amikor már több hullámhossznyira behatolt az elektromágneses hullám a közegbe, hogy leolvasható legyen az ábráról a hullámhossz. A 3.23 ábra egyetlen időlépést ábrázol. Az ábráról leolvasható hullámhossz értéke: 0,139 m. Ez az érték jó közelítéssel megegyezik a számított, illetve a frekvenciatartománybeli szimuláció során szimulált értékkel.

A reflexió vizsgálata az összehasonlítás végett ugyanezen a geometrián történik. A (3.19) képlet alapján számított reflexió értéke erre a problémára  $\Gamma \approx -0,286$ . Frekvenciatartománybeli szimuláció során az eredmény abszo-



3.23. ábra: Szimuláció eredménye egy időpillanatban

lútértékéről leolvasható volt az antenna és a közeg között az elektromos térerősség maximuma és minimuma, melyből számítható volt az állóhullámarány. Ugyanez az ábra előállítható egy periódusnyi időtartománybeli szimuláció csomópontonkénti maximumával. Azonban ez a módszer csak akkor adja vissza a frekvenciatartománybeli eredményt, ha állandósult a jelalak, az átmeneti jelenségek lecsengtek, tehát újabb reflexiók már nem változtatják a periódusonkénti viselkedést. A csomópontonkénti maximumot mutatja a 3.24 ábra. Az antenna és a közeg között  $E_{min} = 0,0134 \frac{V}{m}$  illetve  $E_{max} = 0,0241 \frac{V}{m}$ , tehát az állóhullámarány 1,798. Az állóhullámarány értékének ismeretében a reflexiós tényező abszolútértéke 0,285. Ez közel megegyezik a számított értékkel, illetve a frekvenciatartománybeli szimuláció eredményével.



3.24. ábra: Egy periódusnyi hullám maximuma

### 3.2.3. 2D problémák az időtartományban

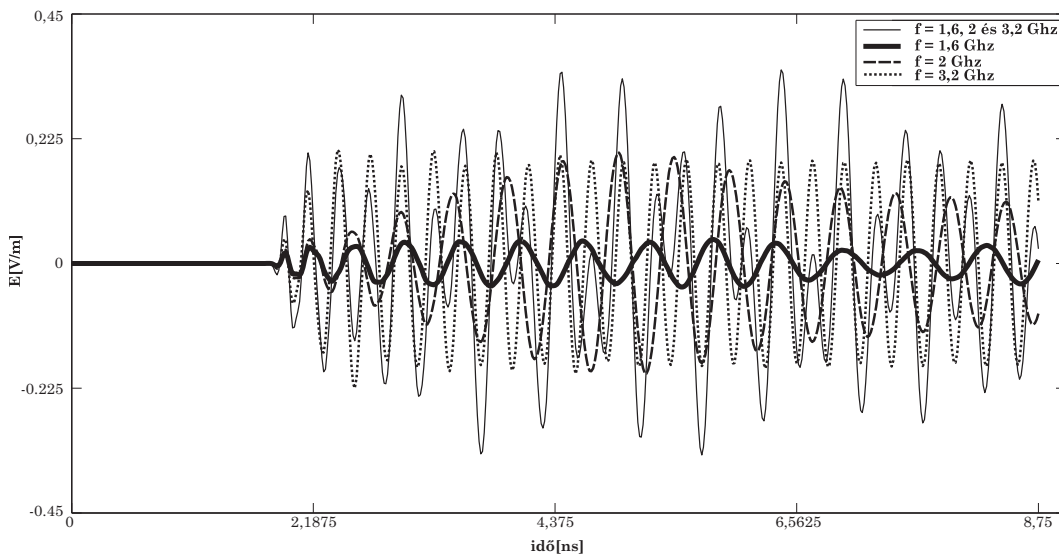
Az egydimenziós problémák idő- és frekvenciatartománybeli vizsgálatánál kiderült, hogy azonos feltételek mellett azonos eredményre lehet jutni. Azonban

vannak olyan problémák, melyek csak részlegesen, és vannak olyanok, melyek egyáltalán nem oldhatók meg a frekvenciatartománybeli analízissel. Ezek a problémák főképp tranziens jelenségeken alapulnak.

### 3.2.3.1. Csőtápvonal írisszel

A következőkben a 3.1.3.2 fejezetben már korábban bemutatott, egyetlen írisszel rendelkező csőtápvonal időtartománybeli viselkedését mutatom be. A tápvonal szélessége 10 cm, így (3.22) alapján a tápvonal alsó határfrekvenciája 1,5 GHz. Az írisz szélessége 5 cm. A tápvonal fala és az íriszt körülzáró felület tökéletes vezető felületként lett beállítva a szimuláció során, míg a tápvonal eleje és vége tökéletesen áteresztő felület. A szimuláció során olyan gerjesztést állítottam be, melynek spektruma több komponensű vonalas. A gerjesztés egy 1,6 GHz, egy 2 GHz, és egy 3,2 GHz frekvenciájú jel szuperpozíciója. A frekvenciatartománybeli analízis során kapott eredmény alapján (lásd: 3.11 ábra) következtetni lehet az időtartománybeli analízis eredményére.

Az írisszel rendelkező tápvonal átviteli viselkedésének köszönhetően a tápvonal végén várhatóan a 3,2 GHz frekvenciájú komponens fog dominálni. A szimulációt végrehajtottam az összetett jellel, illetve a komponensekkel külön az eredmény könnyebb átláthatóságaért. A szimulációk eredményeinek összehasonlítása látható a 3.25 ábrán. A különböző frekvenciakomponensek által



3.25. ábra: Az összetett jel, és annak komponensei a csőtápvonal végén

létrehozott térerősségek összege megegyezik azzal az értékkel, ami az összetett jellel történő szimuláció eredménye, ezért ezt külön ábrán nem szemléltetem. Az ábrán látható, hogy a szimuláció alapján az 1,6 GHz frekvenciájú komponens nagy mértékű csillapítást szenved a csőtápvonal végéig, a 3,2 GHz frekvenciájú komponens rövid idő után közel állandó amplitúdóval, és a legkisebb csillapítással ér a tápvonal végére, míg a 2 GHz frekvenciájú jel a kettő közötti csillapítást szenved. Mindhárom komponens váltakozó amplitúdóval ér a tápvonal végére. Ez az ingadozás tápvonalon belüli reflexióknak köszönhető,

mely egy tranziens folyamat, ezért frekvenciatartománybeli analízissel nem kimutatható. Az is észrevehető, hogy van olyan időtartomány, ahol a 2 GHz frekvenciájú jel nagyobb amplitúdót képvisel, mint a 3,2 GHz-es frekvenciakomponens.

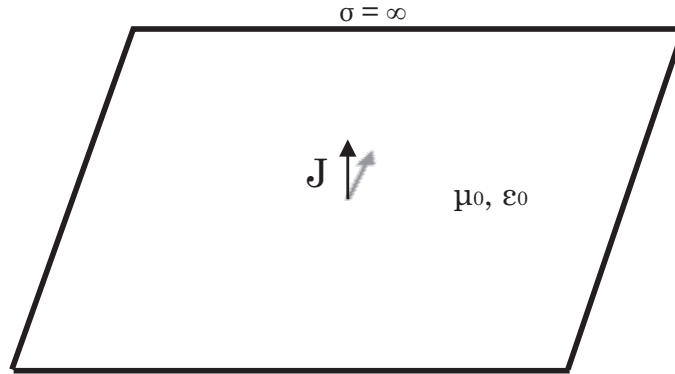
### 3.2.3.2. Négyszögletes rezonátor

Az üregrezonátor egy rádiófrekvenciás rezonáns rendszer, egy jól vezető anyaggal körülzárt légüres, vagy dielektrikummal kitöltött tér. Sokszor oszcillátorként és szűrőként alkalmazzák, de üregrezonátornak tekinthető például a mikrohullámú sütő is. A rezonátorba a bebocsátott jelnek bizonyos frekvenciakomponenseire nagyobb, bizonyos frekvenciakomponenseire pedig kisebb jósági tényezőt mutat. Ezt általában csak a rezonanciafrekvenciákra szokták számolni. A jósági tényező, másnéven körjóság az a szám, amely megmutatja, hogy a rezonanciafrekvenciákon a jel hány periódus alatt csökken  $e$ -ad részére. A négyszögletes rezonátor rezonanciafrekvenciája [21, 23, 24] az alábbi összefüggés alapján számítható:

$$f_{mnl} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2}, \quad (3.48)$$

ahol  $m$ ,  $n$  és  $l$  a rezonátorban kialakuló módusokat jelöli,  $c$  a fénysebesség,  $a$ ,  $b$  és  $d$  rendre a négyszögletes rezonátor szélességét, magasságát és hosszát jelölik.

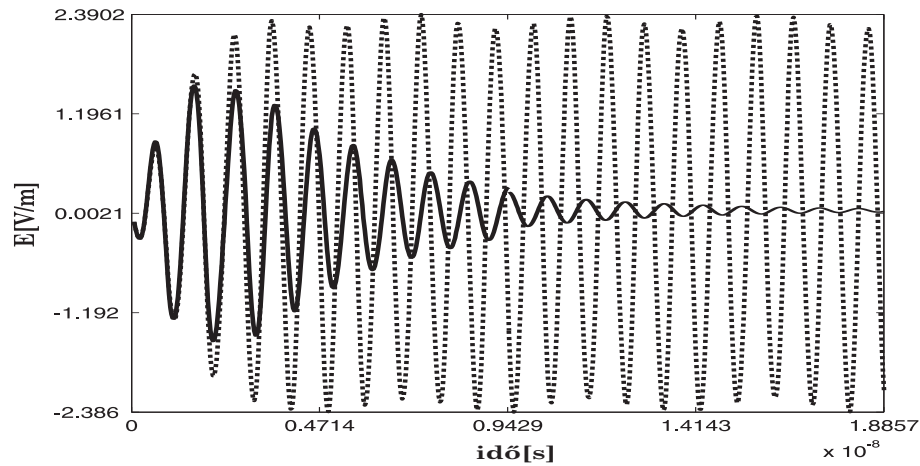
Az első szimuláció egy tökéletes vezető fallal rendelkező üregrezonátor viselkedése. A probléma modellje a 3.26 ábrán látható. A szimulálandó elren-



3.26. ábra: Az üregrezonátor modellje

dezés egy  $TE_{101}$  módusú rezonátor, mivel kétdimenzióban nem lehet a síkra merőleges kiterjedése a geometriának. A (3.48) összefüggés alapján a rendszer első rezonanciafrekvenciája 1,0606 GHz, a többi ennek egész számú többszöröse. A rendszerre kapcsolt jelnek a frekvenciája a rezonanciafrekvencia, az amplitúdója egy periódusig lineárisan növekvő, egy periódusig konstans, egy periódusig pedig lineárisan csökkenő. Az amplitúdó ilyen mértékű szabályozása az időtartománybeli analízis stabilitása miatt szükséges. A rendszer viselkedésének vizsgálata későbbi, már gerjesztésmentes állapotban történik.

Az eredmény időtartományban jobban szemléltethető, kerül ábrázolásra az elektromos térerősség alakulása az idő függvényében. Mint az íriszel rendelkező csőtápvonal esetében is, úgy itt is látható, hogy a térerősség értéke nem egyenletes az idő múlásával, ez az időbeli ingadozás többek között annak köszönhető, hogy a gerjesztés mérete nem végtelenül kicsi, nem pontszerű, így a rezonátoron belül az egyes csomópontokba a gerjesztésen található diszkrét elemekről megindult hullámok kis fáziskülönbséggel érkezhetnek. Amennyiben az üregrezonátor fala nem tökéletes vezető, a jósági tényező már nem végtelen, így az üregből a teljesítmény egy része eldisszipálódik. A következő szimuláció egy kifejezetten rossz üregrezonátort fog bemutatni a gyors disszipáció érdekében. A 3.26 ábrán bemutatott geometriát a veszteséges esetben körülveszi egy 1 cm vastag réteg, melynek relatív permeabilitása és permittivitása  $\mu_r = \varepsilon_r = 2$ , vezetőképessége pedig  $\sigma = 10 \left[ \frac{S}{m} \right]$ . A veszteséges, illetve veszteségmentes eset összehasonlítása a 3.27 ábrán látható. Az eredmény nem

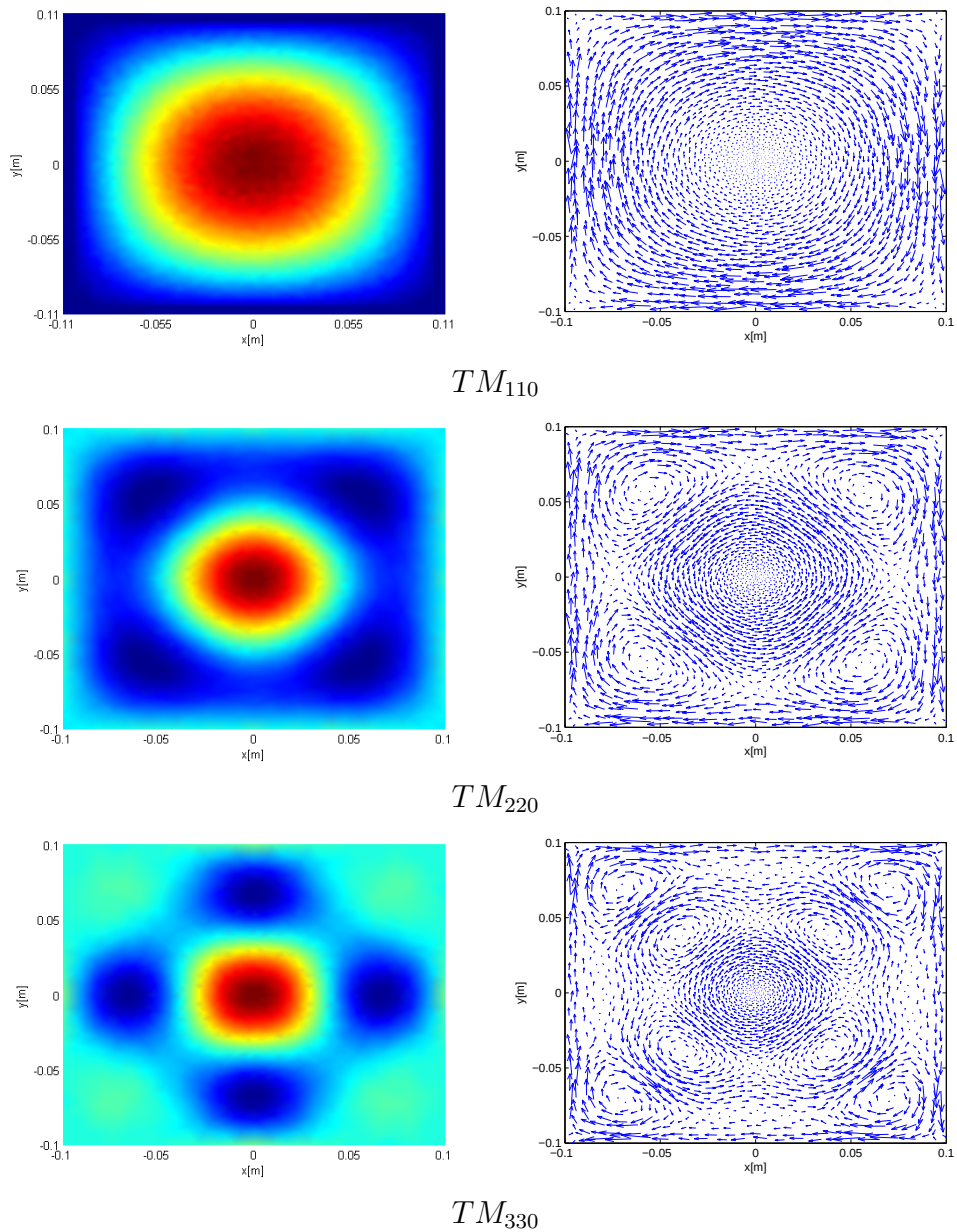


3.27. ábra: Az elektromos térerősség alakulása időben, egy tetszőleges pontban

meglepő, hiszen amennyiben rezonátor fala tökéletesen vezető anyag, tehát a zárt üregből az elektromágneses teljesítmény nem disszipálódik el, a rezonátor jósági tényezője végtelen, a rendszer végtelenül sokáig rezeg. A veszteséges rezonátor esetén ellenben a rezonátor falába az elektromágneses hullám behatol, mely közeget komplex permittivitás jellemez. Komplex permittivitású közegen keresztül az elektromágneses teljesítmény eldisszipálódik, a rezonátor enegriatárolási hatásfoka alacsony. A jósági tényező definíciójából kiindulva fenti ábráról közelítőleg leolvasható a jósági tényező értéke egészre kerekítve, mely a jelen geometria és anyagparaméterek mellett  $Q \approx 6$ . A gyakorlatban az üregrezonátorok jósági tényezője ennél jóval magasabb, akár  $10^6$  értéket is felveheti. Ugyanezen a frekvencián passzív áramköri építőelemek használatával  $10^2$  nagyságrendű jósági tényezőjű rezgő rendszereket lehet létrehozni. A szimuláció célja a jósági tényező értékének egy közelítő meghatározási lehetőségének bemutatása volt. Frekvenciatartományban egy tökéletesen vezető fallal rendelkező üreg modelljén a számítások elvégzése nem lehetséges, ugyanis a vezető felület a teljes tartományt körülveszi, az egyenletrendszer megoldása

során szingularitási probléma lép fel, a szimuláció minden csomópontban végtelen értéket eredményez. A jelenségre magyarázatul szolgál, hogy a frekvenciatartománybeli analízis stacionárius eredménnyel szolgál, mely végtelen ideje tartó gerjesztettséget jelent, végtelen ideje gerjesztett tökéletes rezonátorban az elektromos térerősség abszolút értéke pedig végtelenül nagy.

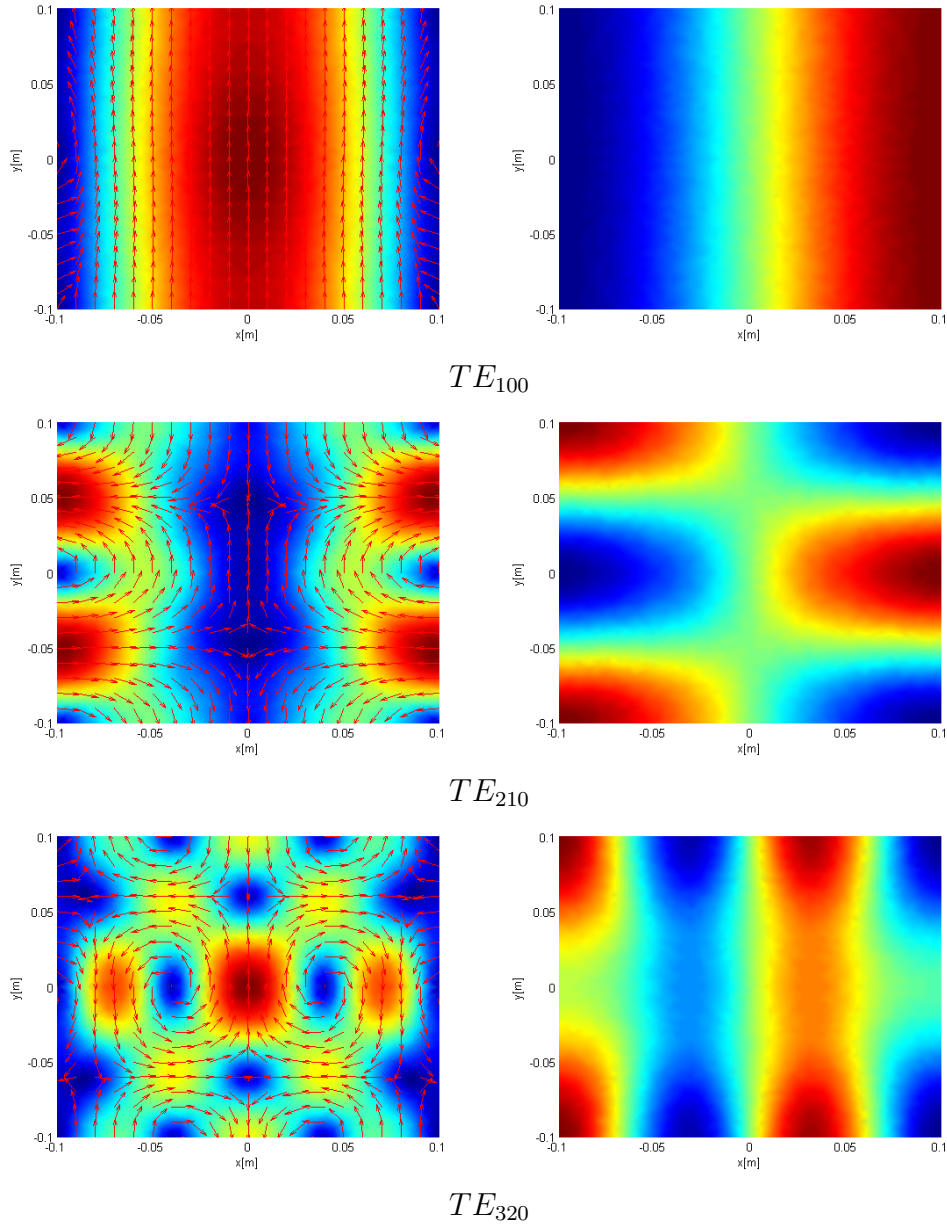
Időtartománybeli analízis segítségével a rezonátorokban kialakuló módusok [26] vizsgálatára is lehetőség van. A szimuláció síkjára merőleges gerjesztés esetén a rezonanciafrekvencia 1,0606 GHz, így a szimulációk e frekvencia, illetve harmónikusai mellett történtek.



3.28. ábra: A rezonátorban kialakuló módusok

A rezonanciát, illetve a módusok kialakulását a rezonátor egy másik met-szetén is érdemes megvizsgálni. A demonstráció érdekében a következő analízis

tárgyát képező geometria megegyezik a korábbi esettel, viszont ebben az esetben a gerjesztés a szimuláció síkjában található középén, az oldalsó falakkal párhuzamosan. Ebben az esetben a rezonanciafrekvencia 750 MHz, a következő szimulációk tehát 750 MHz harmónikusai mellett történtek. A 3.29 ábrán látható elektromos és mágneses terek jellege megegyezik a négyszögletes csőtápvonalak keresztmetszetében tapasztalható elektromágneses viselkedéssel.



3.29. ábra: A rezonátorban kialakuló módusok

Időtartománybeli analízis kiválóan alkalmas átmeneti folyamatok vizsgálatára, tetszőleges időtartománybeli alakkal rendelkező jellel történő szimulációra. Könnyen elvégezhető elektromágneses kompatibilitás vizsgálata. Hátránya, hogy kiértékelhető eredményhez megfelelő mennyiségű időlépés szükséges, így egy probléma megoldása hosszadalmas lehet.

## 4. fejezet

# SZÁMÍTÁSI IDŐ CSÖKKENTÉSÉNEK LEHETŐSÉGEI

Munkám során több probléma megoldása során is azt tapasztaltam, hogy a számítási folyamatuk meglehetősen hosszadalmas. A több ezer, több tízezer ismeretlennel rendelkező egyenletrendszerek méretének redukálására viszont sokszor nincs lehetőség, mivel rádiófrekvenciás problémák esetén az elemek méretének felső határt szab a hullámhosszal való összemérhetőség. A számítási idő villamosmérnöki gyakorlatban kritikus pont lehet bonyolult elrendezések analízise során, ezért dolgozatomnak e fejezetében néhány főbb számítási idő csökkentésére szolgáló módszert mutatok be.

### 4.1. Egyenletrendszer tárolása a memóriában

Az előálló egyenletrendszer együtthatóit reprezentáló  $\mathbf{K}$  együttható-mátrix (lásd: 2.22 összefüggés) csak azon helyein vesz fel zérustól különböző értéket, amelyek az egymással kapcsolatban álló csomópontokat illetve éleket jelölik, például amennyiben az  $i$ -edik csomópont a  $j$ -edik csomóponttal valahol a problémátéren azonos elemen belül található, abban az esetben a  $\mathbf{K}$  együttható-mátrix  $i$ -edik sorának  $j$ -edik oszlopában, illetve a  $j$ -edik sorának  $i$ -edik oszlopában tartalmaz zérustól különböző értékeket. Egy csomópont vagy egy él tehát kevés szomszédos csomóponttal illetve éllel rendelkezik, ennek köszönhetően az együtthatókat reprezentáló együttható-mátrix úgynevezett ritka mátrix. A gyakorlatban az ilyen típusú mátrixot sok esetben az angol megfelelőjeként *sparse* mátrixként említik. Egy ilyen sparse mátrixot mutattam be korábban a 2.11 ábrán, amely egy 3830 ismeretlenes egyenletrendszert ábrázol. Az együttható-mátrix ezáltal 14668900 elemet tartalmaz, viszont ennek csak töredékén, 26138 pontjában vesz fel nullától különböző értéket. Ennek ismeretében a számításokhoz elegendő az együttható-mátrix nem nulla elemeinek tárolása, melynek eredményeként a memóriaigény jelentősen csökken.

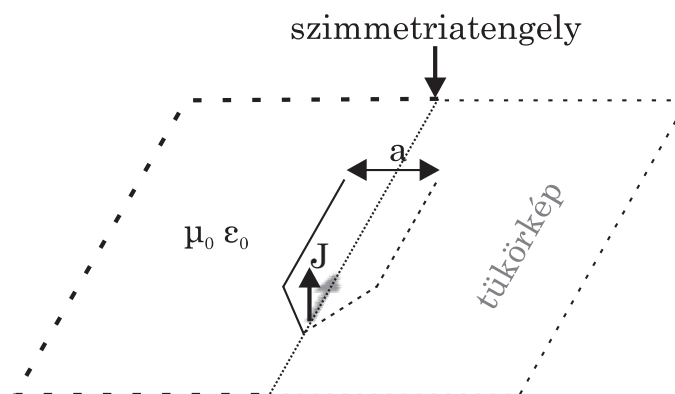
A két különböző mátrix tárolási módszert, ezáltal a számítási idő különbségét a 3.1.3.3 fejezetben található parabola antenna problémáján keresztül mutatom be, mely probléma zérustól különböző elemeit pontosan a 2.11 ábra mutatja. Leszögezném, hogy ebben a fejezetben főként az egyenletrendszer

megoldásához szükséges idő vizsgálatát tartottam fontosnak a két esetben, mivel az asszemblálás elvégzésére fordított idő a két esetben nem mutatott lényeges különbséget. A teljes együttható-mátrix memóriában történő tárolása esetén 99,51 másodperc a számításokhoz szükséges idő, míg ugyanez az együttható-mátrix kizárólag zérustól különböző elemeinek tárolása esetén csupán 0,143 másodperc. Az eredményekből látszik, hogy a számításokhoz szükséges időigény aránya (697,957) *közelítőleg* megegyezik az eltárolt *double* értékek arányával (561,21). Természetesen itt a *közelítőleg* megegyezés azt jelenti, hogy a két érték egy nagyságrendbe esik. A ritka mátrixként tárolt együttható-mátrix asszemblálása során az egyes elem mátrixok indexelt elhelyezése lassabb művelet, mint a teljes egészében tárolt mátrix esetében, ennek köszönhetően az első esetben az asszemblálásra fordított idő 23,13 másodperc, míg a második esetben ez a művelet 16,32 másodpercet vett igénybe.

## 4.2. Problématér felosztása szimmetriasíkok mentén

Mint ahogyan azt említettem a 2.1.1 fejezetben, a végeselem-módszer nagy előnye, hogy a szimmetriasíkok mentén a problématér megfeleltethető az ismeretlenek számának csökkentése érdekében. Szimmetriatengelyen az elektromos térerősségnek, a szimmetria típusától függően, vagy csak normális, vagy csak tangenciális irányú komponense van, ami *Neumann*-típusú peremfeltételt jelent.

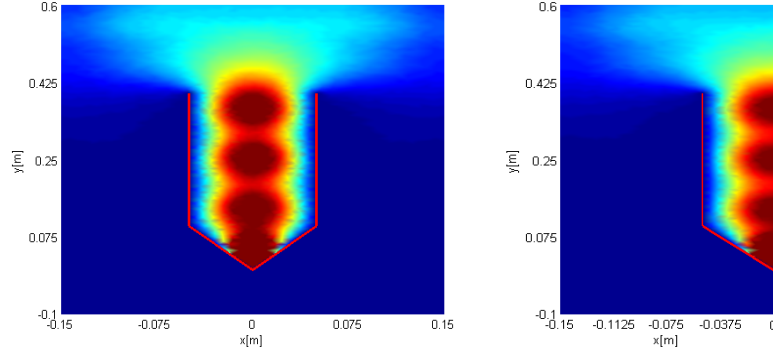
A szimmetriák által nyújtott egyszerűsítési lehetőség bemutatására a 3.1.3.1 fejezetben bemutatott nyitott végű csőtápvonal problémája (lásd: 4.1 ábra). A probléma érdekessége, hogy bár a felezett geometria csak a csőtápvonal modelljének felét mutatja, a szimuláció eredményeként mégis az várható, hogy az elektromos tér úgy viselkedik, mintha a tápvonalat modellező tökéletesen vezető felület másik fele is jelen lenne. A teljes problémateret ebben az eset-



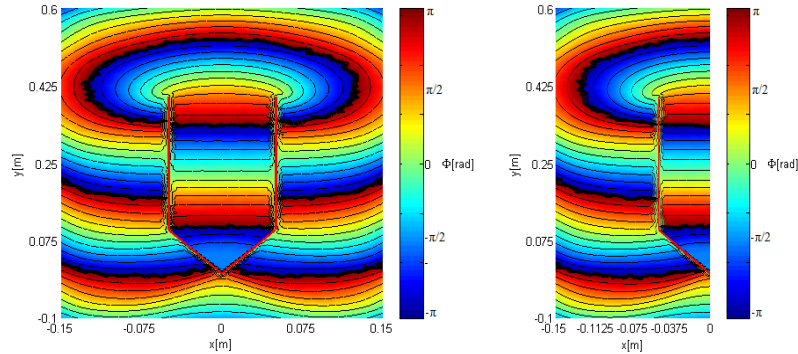
4.1. ábra: A problématér megfeleltetése a szimmetriatengely mentén

ben 4579, míg a felezett problémateret 2344 ismeretlen írja le. A mátrixokat a már korábban bemutatott ritka mátrixként tárolta a program. Mivel ebben

az esetben mind az asszemblálásra, mind pedig az egyenletrendszer megoldására fordított idő értelemszerűen különbözik, ezért a teljes program lefutásához szükséges időket hasonlítottam össze. A teljes problémátér megoldására fordított idő 23,18 másodperc, míg a felezett problémátér esetén minderre 10,27 másodpercre volt szükség, tehát a számításokra fordított idő a geometria elfelezésével kevesebb mint a felére csökkent. Az eredmények összehasonlítása a 4.2, illetve a 4.3 ábrán látható.



4.2. ábra: Az eredmények abszolút értékének összehasonlítása



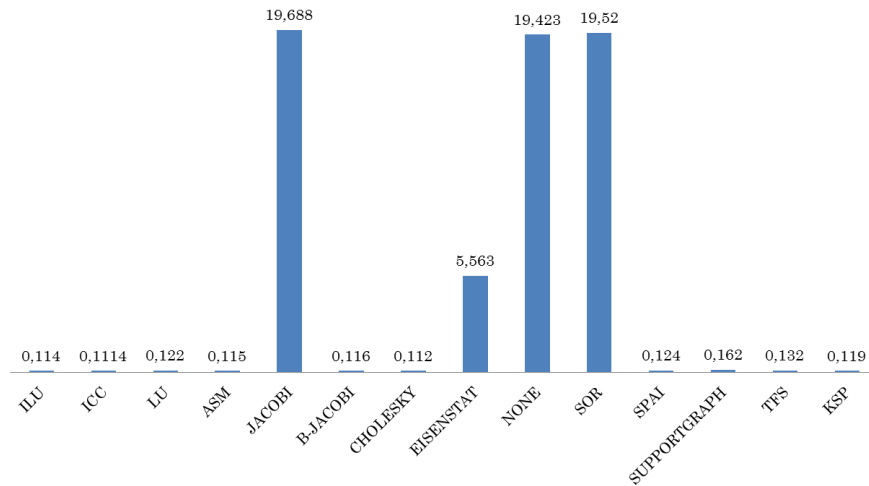
4.3. ábra: Az eredmények fázisának összehasonlítása

### 4.3. Végeselem-módszer implementációja PETSc függvények segítségével

A PETSc [6] a *Portable Extensible Toolkit for Scientific computations* rövidítése, mely egy nyílt forrású C könyvtár tudományos számítások támogatására. A PETSc könyvtár használatakor különböző adatstruktúrákat, mint például mátrixokat is létre lehet hozni, melyek tárolása alapértelmezetten *sparse* mátrixként történik.

Az egyenletrendszerek megoldására lehetőség van direkt és iteratív megoldó algoritmusok segítségével is. A direkt megoldó algoritmusok az egyenletrendszer pontos megoldását szolgáltatják. Az iteratív megoldó algoritmusok

lényege abban rejlik, hogy olyan konvergens sorozatot konstruálnak, melynek határértéke a  $\mathbf{Ku} = \mathbf{b}$  egyenletrendszer egyértelmű megoldása. Ilyen iteratív módszerek például a *Jacobi*-iteráció, vagy a konjugált gradiens módszer. PETSc környezetben lehetőség van az egyenletrendszer prekondicionálására. A prekondicionáló az egyenletrendszer együtthatóit olyan módon alakítja át, hogy a direkt vagy az iteratív megoldó algoritmus futásához szükséges idő minimális legyen. A különböző prekondicionáló algoritmusok alkalmazása során az egyes problémák megoldási ideje lényegesen eltérő lehet. A 4.4 ábrán egy 5000 ismeretlenes egydimenziós frekvenciatartománybeli analízis futási ideje látható a különböző prekondicionálók alkalmazásakor. A vizsgálat arra mutatott rá,



4.4. ábra: Az egyes prekondicionálók alkalmazásakor a szimuláció futási ideje másodpercben

hogy az iteratív megoldó algoritmusok alkalmazása frekvenciatartománybeli analízis futtatására nem szerencsés, a konvergencia sebessége komplex együtthatók esetén kifejezetten lassú. Összehasonlításként, Matlab környezetben a probléma megoldása direkt megoldó algoritmust alkalmazva 2,35 másodpercet vett igénybe.

# KONKLÚZIÓ, JÖVŐBELI TERVEK

Dolgozatom a rádiófrekvenciás terek numerikus analízisének témakörében íródott, mellyel bőséges betekintést kívántam nyújtani mind a végeselem-módszer elméleti hátterébe, mind a rádiófrekvenciás elektromágneses terek viselkedésébe különböző problémák bemutatásai segítségével.

Dolgozatomban részletesen bemutattam a végeselem-módszer alapvető lépéseit, azok elméleti hátterét. Bevezettem az elektromágneses térelmélet alapjait leíró *Maxwell*-egyenleteket, illetve a peremfeltételeket. Ezek idő-, illetve frekvenciatartománybeli leírása alapján levezetésre kerültek az elektromos térerősségre vonatkozó hullámegyenletek. A hullámegyenletek és a *Sommerfeld* sugárzási feltételek alapján bemutattam a végeselem-módszer implementációjához szükséges gyenge alakokat, melyek implementációjának lépései mindkét tartományban részletesen bemutatásra kerültek, ezen felül a másodfokú inhomogén differenciálegyenletek megoldására szolgáló, úgynevezett *Newmark- $\beta$*  numerikus módszer alkalmazását is leírtam. Az elméleti alapok lefektetése után a módszerek alkalmazásának eredményességét több, különböző jellegű, analitikusan jó közelítéssel leírható problémán keresztül végeztem el, majd ahol lehetőség volt rá, gyakorlatban jól ismert összefüggések és eredmények segítségével támasztottam alá a szimulációk eredményeit. A csomóponti és élmenti formfüggvények alkalmazása egyaránt megtörtént. A problémák megoldása során tapasztaltak alapján röviden jellemeztem az idő- és a frekvenciatartománybeli analízisek előnyeit és hátrányait, valamint alkalmazhatóságuk feltételeit és határait egyaránt. Dolgozatom zárásaként több, a végeselem-módszer számítási időigényének csökkentésére szolgáló módszert, illetve azok megvalósítását és összehasonlítását mutattam be. A kutatási munkám során minden kétdimenziós geometria diszkretizálását az ingyenes, végeselemháló generálására alkalmas *GMSH* [4] szoftver rácsgeneráló moduljának segítségével valósítottam meg, a végeselem-módszer minden egyéb lépését pedig *Matlab* [5] illetve *PETSc* [6] környezetben implementáltam. Bemutattam néhány, a térszimulációk számítási idejének redukálására szolgáló technikát.

A következő időszak célkitűzése egyrészt a szimulációs metodika kiterjesztése háromdimenziós problémákra, valamint egy *PETSc* környezetben kialakított keretrendszer megvalósítása tetszőleges geometriájú problémák megoldására. További terv evolúciós és hibrid algoritmusok kifejlesztése szigorúan specifikált sugárzási karakterisztikák kialakítása céljából.

# Irodalomjegyzék

- [1] Comsol Multiphysics, <http://www.comsol.com>, (*utolsó látogatás: 2014.04.13.*).
- [2] HFSS, <http://www.ansys.com>, (*utolsó látogatás: 2014.04.13.*).
- [3] CST, <https://www.cst.com>, (*utolsó látogatás: 2014.04.13.*).
- [4] Gmsh, <http://geuz.org/gmsh/>, (*utolsó látogatás: 2014.04.13.*).
- [5] Matlab, [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com), (*utolsó látogatás: 2014.04.13.*).
- [6] PETSC, <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, (*utolsó látogatás: 2014.04.13.*).
- [7] Kuczmán M., Iványi A.: *The Finite Element Method in Magnetism*. Akadémiai kiadó, Budapest, 2008.
- [8] J. Jin: *Finite Element Analysis of Antennas and Arrays*. John Wiley & Sons, New York, 2009.
- [9] J. Jin: *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [10] Iványi A.: *Folytonos és diszkrét szimulációk az elektrodinamikában*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2003.
- [11] J. P. A. Bastos, N. Sadowski: *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*. Marcel Dekker, New York, 2003.
- [12] I. N. Bronstein, K. A. Szemengyajev, G. Musiol, H. Mühling: *Matematikai kézikönyv*. Typotex, Budapest, 2009.
- [13] I. Dolezel, P. Karban, S. Solin: *Integral Methods in Low-Frequency Electromagnetics*. John Wiley & Sons, New York, 2009.
- [14] Friedl G.: *Mágneses indukció szimulációja véges elem-módszer segítségével*. Universitas, Győr, 2013.
- [15] J. C. Maxwell: *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. Philosophical Transactions of the Royal Society, London, 1865.
- [16] J. C. Maxwell: *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Macmillan & Co, London, 1873.

- [17] Simonyi K., Zombory L.: *Elméleti villamosságatan*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000.
- [18] Simonyi K.: *Villamosságatan*, Akadémiai Könyvkiadó, Budapest, 1964.
- [19] Fodor Gy.: *Elektromágneses terek*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1996.
- [20] Standeisky I.: *Elektrodinamika*. Universitas, Győr, 2006.
- [21] D. M. Pozar.: *Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, New York, 2012.
- [22] Stoyan G.: *Matlab - frissített kiadás*. TypoTex Kiadó, 2005.
- [23] Kolos T.: *Mikrohullámú technika 1*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- [24] Istvánffy E.: *Tápvonalak, antennák, hullámterjedés*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
- [25] N. M. Newmark: *A method of computation for structural dynamics*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1959.
- [26] Y. T. Lo, S. W. Lee: *Antenna Handbook*. Chapman & Hall, New York, 1993.
- [27] R. S. Elliott: *Antenna Theory and Design*. John Wiley & Sons, New York, 2003.
- [28] C. Geuzaine, J.F. Remacle: *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 79(11), pp. 1309-1331, 2009.