

Hadronzápor hatáskeresztmetszetek nagy pontosságú számítása

Szőr Zoltán

TDK dolgozat

Témavezető: prof. Trócsányi Zoltán

Kísérleti Fizikai Tanszék

Debreceni Egyetem

2014.07.07.

Tartalomjegyzék

1. Előszó	2
2. Elméleti háttér	3
2.1. A standard modell alapjai	3
2.2. Az erős kölcsönhatás	5
2.3. Perturbációs számítás a kvantum-színdinamikában	6
3. Hadronizációs hatáskeresztmetszetek	9
3.1. Teljes hatáskeresztmetszet	10
3.2. Differenciális hatáskeresztmetszet	13
3.3. Az infravörös-divergenciák forrásai	14
3.4. Levonási sémák	15
3.5. Levonási séma NNLO rendben	16
4. Közelítő módszer	18
4.1. Kinematikai változók	19
4.2. A közelítés menete	20
5. Mester integrálok illesztése	22
5.1. $\mathcal{I}_{1\mathcal{C},0}$ kollineáris integrálok	24
5.2. $\mathcal{I}_{2\mathcal{C},1}$ tripla kollineáris integrálok	25
5.3. $\mathcal{I}_{2\mathcal{C},6}$ dupla kollineáris integrálok	29
6. Az I_2 operátor ϵ^{-2} pólusának illesztése	31
7. Összefoglalás	34
8. Köszönetnyilvánítás	34
9. Hivatkozások	36
A. Kutatási feladat	38
B. A TDK és a diplomadolgozat összehasonlítása	39

1. Előszó

Napjainkban a fizika egyik izgalmas és új felfedezésekkel kecsegtető ága a részecskefizika. A 2012-es évben nagy felfedezés született ezen a területen, megtalálták a *Higgs-bozont*, így felkerült a korona az elemi világot leíró elméletre, a *standard modellre*. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy készen lennénk, ugyanis több jelenséget is ismerünk, amelyek nem férnek bele ebbe a keretbe: ilyen például a neutrínók tömege, mely a standard modellben zérus, azonban a *neutrínó-oszcilláció* jelensége miatt mégis kell, hogy rendelkezzenek vele (még ha az igen-igen kicsi is). Másik példa a világegyetem jelenlegi felépítésének kialakulásában nagy szerepet játszó, úgynevezett *sötét anyag*, vagy a világegyetem gyorsuló tágulásáért felelős *sötét energia*¹. A részecskefizikában ezeken túl még több jelenség is található, melyek kérdései megoldatlanok, illetve zavarják a szépségérzetünket.

Az egyetemen végzett munkám alatt elektron-pozitron ütköztetések alkalmával keletkező, úgynevezett hadrondzsetek hatáskeresztmetszetének elméleti számításával foglalkoztam. *Trócsányi Zoltán* vezetésével csatlakoztam be ebbe a kutatásba, mely egy meglehetősen nehéz feladat, és rengeteg technikai munkát tartalmaz. Jómagam jelenleg még főleg programozási feladatokat végzek, a számítások automatizálásával, valamint egy közelítési módszer kidolgozásával foglalkozom. Jelen dolgozatom az utóbbi témát mutatja be.

Kezdetben egy rövid bevezetést nyújtok a számítások mögött rejlő elméletbe, kihagyva a bonyolult matematikai levezetéseket és csak a főbb mozzanatok egyszerűsített formájára koncentrálva. Így végül eljutunk a munkánk részét képező problémához, a hadrondzset hatáskeresztmetszet sugárzási korrekcióinak meghatározásához, ahol alkalmazni szeretnénk a kidolgozott illesztési módszert. Röviden ismertetem az illesztés menetét, majd néhány példán keresztül bemutatom annak pontosságát. A dolgozat egészében a részecskefizikában szokásos $c = \hbar = 1$ természetes egységrendszert fogom használni.

¹Mind a sötét anyag, mind sötét energia csupán hangzatos elnevezések egy-egy jelenség olyan oksági forrásaira, melyeket jelenleg még nem ismerünk, nem kell mögójük misztikus dolgokat gondolnunk.

2. Elméleti háttér

2.1. A standard modell alapjai

A standard modell a részecskefizika jelenleg használt érvényes elmélete, mely leírja az elemi részecskék fizikáját és köztük működő kölcsönhatásokból hármat: az erőset, az elektromágnesest és a gyengét. A gravitáció kilóg a sorból, gyengesége miatt teljesen elhanyagolható ezen a területen. Az anyagot és a kölcsönhatásokat egyaránt *részecske-hullám* tulajdonsággal rendelkező „részecskékkel” írjuk le, melynek fizikai elméletét kvantummezőméletnek² nevezzük. A kvantummezőelmélet fizikai mezők kvantumelméleti leírására alkalmas. A mezők gerjesztéseit nevezzük részecskéknek, az anyagmezők részecskéi a fermionok, míg a kölcsönhatási mezők részecskéi a bozonok közé tartoznak. A standard modellben 12 darab fermion és azok antirészecskéi és 12 darab bozon, valamint a Higgs-bozon található³. A fermionokat az 1. táblázatban láthatjuk, a felső két sor a kvarkokat tartalmazza, míg az alsó két sor a leptonokat. A kvarkok mindhárom fajtajú kölcsönhatásban részt vesznek, míg a leptonok közül az elektron, a müon és a tau részecskék csak elektromágnesesen és gyengén hatnak kölcsön, a neutrínók pedig kizárólag gyengén. Az elemi fermionokból felépíthetők más összetettebb részecskék is. A kölcsönhatásokat közvetítő részecskéket a 2. táblázat sorolja föl. Az elektromágneses kölcsönhatás részecskéje a jól ismert foton (γ), az erőse a nyolc darab gluon (g), a gyengéé pedig a W^- , W^+ és a Z^0 bozonok.

u	c	t
d	s	b
e	μ	τ
ν_e	ν_μ	ν_τ

1. táblázat. Elemi fermionok: felső két sor: kvarkok; alsó két sor: leptonok

A kölcsönhatásokat a standard modell lokális szimmetriákból vezeti le. Kvantummezőelméletben egy fizikai rendszert az $\mathcal{L}$ *Lagrange-sűrűségfüggvény* felírásával

²A magyar nevezéktanban elterjedten használt a kvantumtérelmélet elnevezés is.

³Az összeszámlálás valójában több módon is lehetséges attól függően, hogy még milyen tulajdonságok alapján különböztetjük meg a részecskéket.

elektromágneses	erős	gyenge
γ	8 db g	W^-, W^+, Z^0

2. táblázat. Elemi bozonok

adunk meg [16]. A rendszeren transzformációkat végezhetünk el, mint például a koordinátarendszer elforgatása, az idő tükrözése, de vannak a téridőhöz nem köthető úgynevezett *belső transzformációk* is. Ilyen például az elektromos töltés tükrözése. Egy transzformáció akkor lesz szimmetriája a rendszernek, ha azt elvégezve a Lagrange-sűrűségfüggvényen az $\mathcal{L}$ alakja ugyanaz marad. A transzformáció globális, ha a téridő minden pontjában ugyanakkora mértékben változtatunk és lokális ha minden egyes pontban más és más ez az érték. A globális szimmetriák megmaradó „töltésekhez” (itt a töltést általánosan értjük, mely lehet tetszőleges fizikai mennyiség) vezetnek a *Noether-tétel* értelmében. Globális szimmetriát lokálissá téve pedig kölcsönhatást kapunk a fermionok között, mivel a lokális szimmetria plusz bozonikus mezők bevezetésével érhető el. Az elektromágneses kölcsönhatás az $U(1)$ csoportba tartozó transzformációkkal szembeni lokális szimmetriából ered, az erős kölcsönhatás pedig az $SU(3)^4$ lokális szimmetriából. Azt gondolhatnánk, hogy a gyenge kölcsönhatás is hasonlóan működik, azonban vele gondba ütközünk. A gyenge kölcsönhatás szimmetriacsoportja az $SU(2)$, azonban ebből levezetve a kölcsönhatást nem a ténylegesen megfigyelhető fizikát kapjuk. A lokális szimmetriához szükséges bozonmezők részecskéi ugyanis nem rendelkeznek tömeggel. Viszont a gyenge kölcsönhatás három bozonja igen, méghozzá elég jelentőssel! Ezt a problémát oldja meg a *BEH-mechanizmus* (Brout-Englert-Higgs), mely bevezet egy új skalármezőt, megsértve ezzel a szimmetriát és a mechanizmus során tömeget ad a három gyenge bozonnak. Emellett a BEH-mező az elemi fermionokkal is kölcsönhat és tömeget generál számukra. E skalármező gerjesztése a Higgs-bozon, mely megtalálása oly sokáig váratott magára.

⁴Az $SU(N)$ az $N \times N$ -es speciális unitér mátrixok csoportját jelöli.

A standard modell Lagrange-sűrűségfüggvénye tömören és egyszerűsítve az

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
& + i\bar{\psi}\not{D}\psi + h.c. \\
& + \psi_i y_{ij} \psi_j \phi + h.c. \\
& + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

alakban írható fel. Az első sor tartalmazza a bozonmezők kinetikus tagjait, a második a fermionok és a bozonok kölcsönhatását, a harmadik a fermionok tömegnyerését a BEH-mező által, az utolsó pedig a Φ BEH-mező és a bozonmenzők kölcsönhatását. Ez a függvény lokálisan (és globálisan is) invariáns az $SU(3)_C \otimes (SU(2)_L \otimes U(1)_Y)$ csoport transzformációival szemben. A C a színekölcsönhatásra utal, az L a gyenge kölcsönhatás azon tulajdonságára, hogy csak balkezes részecskék és jobbkezes antirészecskék vesznek benne részt, az Y pedig a gyenge hipertöltést jelöli, mely az elektromágneses töltés és a gyenge izospin kombinációjából adódik. A zárójellel jelölt részt nevezzük a standard modell szimmetriasértő részének, melyhez a BEH-mechanizmus kapcsolódik; míg az erős kölcsönhatást a standard modell tiszta részének.

2.2. Az erős kölcsönhatás

A négy alapvető kölcsönhatás közül az erős kölcsönhatás a legerősebb, melynek kvantumelméletét *kvantum-színdinamikának* (QCD - Quantum-ChromoDynamics) hívjuk [17]. Az erős kölcsönhatás felelős az atommagot felépítő protonok és neutronok létrejöttéért, valamint azért, hogy az atommag egyáltalán egyben tud maradni és az elektromágneses taszítás miatt nem lökik szét egymást a protonok. Az erős kölcsönhatásban az elemi részecskék közül kizárólag csak a kvarkok vesznek részt. A kölcsönhatás töltése a *színtöltés*⁵, melynek értéke lehet R, G és B , valamint ezek antiszínei. A három alapszín, vagy szín és antiszín összege színtelent eredményez. A színalgebrát leíró matematika az $SU(3)$ csoport algebrája, mely csoportból vett transzformációkkal szemben a standard modell Lagrange-sűrűségfüggvénye globálisan és lokálisan is in-

⁵Ez csupán egy elnevezés, senki ne gondolja azt, hogy egy kvark ténylegesen kék vagy zöld.

variáns. A kölcsönhatást közvetítő bozonok, a gluonok is rendelkeznek színtöltéssel (kétszer akkorával), emiatt a kvark-gluon kölcsönhatás mellett gluon önkölcsönhatás is jelen van. Ez igen nagy különbség szemben az elektromágneses kölcsönhatással, ahol a foton nem rendelkezik elektromos töltéssel. Ennek eredménye az úgynevezett *kvarkbezárás* jelensége, ami miatt a kvarkok alacsony energián (≈ 300 MeV alatt) kizárólag kötött állapotban, összetett részecskék formájában léteznek és ezért még soha senki nem figyelt meg szabad kvarkot a természetben. A tapasztalat szerint csupán három kvarkból és egy-egy kvarkból és antikvarkból felépülő részecskék léteznek, melyek színtelenek.⁶ A három kvarkból felépülő részecskéket *barionoknak*, míg a kvark-antikvark állapotokat *mezonoknak* nevezzük. Barion például a proton és a neutron; mezon pedig a pion. Összefoglaló nevén *hadronoknak* hívjuk őket.

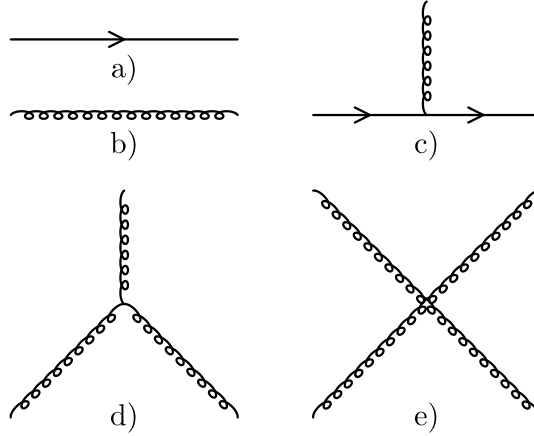
2.3. Perturbációszámítás a kvantum-színdinamikában

A részecskefizikában az egyes folyamatok jellemzésére egyik leggyakrabban használt fizikai mennyiség a hatáskeresztmetszet, mely a reakció valószínűségével áll kapcsolatban. Az ehhez vezető könnyebb út miatt ezen a területen a *Feynman-féle pálya-integrálos* kvantálást alkalmazzák. Ennek nagy előnye, hogy klasszikus mezőelmélet szintjén felírt $\mathcal{L}$ függvény, mely tartalmazza a szükséges szimmetriákat, kvantálható a szimmetria megtartása mellett. Definiálhatunk egy $Z[J]$ generáló funkcionált az alábbi módon:

$$Z[J] := \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d^4x (\mathcal{L}(\phi) + J\phi) \right\} \quad (2.2)$$

A fenti kifejezésből ezután a funkcionálanalízis eszköztárával tetszőleges részecskefizikai folyamatot lezármaztathatunk, melyet az átmeneti mátrixelem jellemez. Számolásuk kölcsönhatás esetén perturbációszámítással történhet, azaz a $g \ll 1$ csatolás szerint sorbafejtjük a kifejezést. A tagokat csak $\mathcal{O}(g^n)$ rendig vesszük figyelembe, ahol n jelöli a perturbációszámítás rendjét. Emellett szokásos jelölés az LO (leading-order), NLO (next-to-leading-order) és általánosan $N^m LO$.

⁶Az LHCb kísérlet közben megfigyelt egy ezektől eltérő egzotikus állapotot. Bővebben: arxiv.org/abs/1404.1903



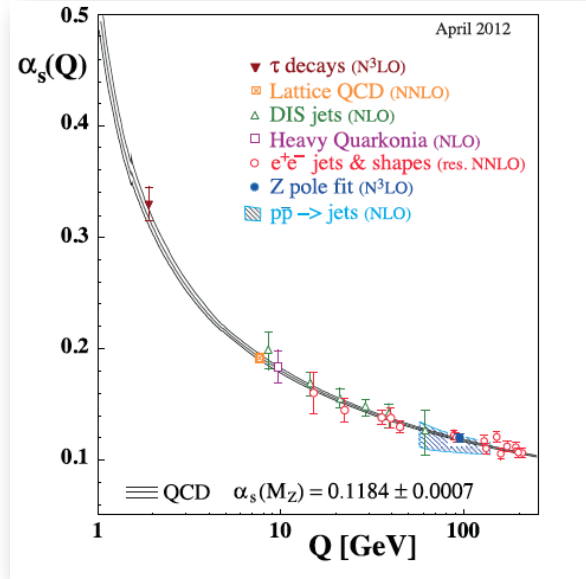
1. ábra. QCD gráfok

A perturbációs számítás során megjelenő matematikai kifejezések helyettesíthetők *Feynman-gráfokkal*, melyek átláthatóbbá és szemléletessé teszik a számolásokat. A felírt $\mathcal{L}$ függvényből a Feynman-szabályok alapján megkaphatjuk az adott elmélet alapgráfjait, melyekből azután tetszőleges folyamat ábrája felépíthető. A kvantum-színdinamika esetén ezek az alapgráfok a következők (1. ábra): *a)* fermion propagátor; *b)* gluon propagátor; *c)* kvark-gluon kölcsönhatás; *d)* 3 gluon kölcsönhatás; *e)* 4 gluon kölcsönhatás.

A gráfok között megjelenhetnek hurkok is, ezek *virtuális részecskéket* jelentenek. A korrekciók diagramjaiban az elemi folyamat ábrájához képest plusz részecske vonalak és hurkok tűnnek föl. Fura tény, hogy a virtuális részecskék is járulékot adnak az átmeneti amplitudóhoz, teljes elhanyagolásuk esetén pontatlan eredményt kapunk. Egy virtuális részecske impulzusa azonban tetszőleges értékű lehet, így a matematikai kifejezésekben az impulzus zérustól végtelenig vett integrálja szerepel. Ez több gráf esetében is végtelent eredményez a felső határ miatt, ezt hívjuk ultraibolya- (UV-) divergenciának. Tudjuk azonban, hogy a számolandó fizikai mennyiségek véges értékűek, hiszen a kísérletek véges számú részecskét észlelnek. Az értelmetlen végtelen járulékokat tehát el kell távolítani valamilyen módon. A probléma megold-

dásához először *regularizációt* alkalmazunk, így a végtelenek viselkedése ismertté és matematikailag kezelhetővé válik. A többféle lehetséges módszer közül a perturbatív QCD a dimenzionális regularizációt használja, mely során a téridő $d = 4$ dimenzióját $d = 4 - 2\epsilon$ ($\epsilon > 0$) értékűre változtatjuk. Ekkor a végtelenek ϵ^{-n} típusú pólusok formájában jelennek meg. A pólusok ezt követően eltávolíthatóak úgy, hogy levonjuk őket a Lagrange-sűrűség eredeti alakjából. A divergens gráfok formuláiban az $\mathcal{L}$ -ben lévő tagokkal arányos kifejezések jelennek meg, így beleolvaszthatóak egy, az adott tagot szorzó állandóba. Ez a *renormálás* módszere, mely során az egyes fizikai mennyiségek újraszámolódnak [17, 8]. A renormálást a perturbációs számítás minden rendjében újra el kell végezni, eggyel feljebb lépve a korábban már renormált $\mathcal{L}$ -függvényből kell kiindulni. A renormálás következményeként a fizikai mennyiségek – mint például a csatolás, vagy a tömeg – energiafüggővé válnak, azaz értékük a különböző energiájú folyamatokban más és más. A csatolás viselkedését tanulmányozva kiderül, hogy a QCD aszimptotikusan szabad elmélet: az energiával végtelenbe tartva a csatolás erőssége nullához tart (2. ábra). Így magasabb energián ténylegesen alkalmazhatjuk a perturbációs számítást, melynek kérdéséről eddig hallgattunk. A napjainkban működő részecskegyorsítók energiáján azonban az erős csatolás nem elegendően kicsi. A 2. ábrán látható, hogy még 100 GeV környékén sem éri el az erős csatolás α_S értéke⁷ a 0.1-et, és a csökkenés mértéke egyre alacsonyabb. Első pillantásra ezért a QCD értelmetlennek is tűnhet, az LO rendben végzett számolás csak egy nagyságrendi becslés a kísérleti adatokra, mindenképp szükség van az első sugárzási korrekció (melynek értéke akár 70 % is lehet az LO-hoz képest!) figyelembe vételére. Még egy tagot hozzáadva, azaz NNLO szinten az elmélet már szerencsére perturbatíván kezd viselkedni és egyezést ad a kísérleti eredményekkel. Például a 3. ábrán a Z^0 gyenge bozon tömegével egyenlő energián megmért *hadronos R arány* μ skálafüggését láthatjuk különböző perturbációs rendekben. Az R arány megadja, hogy e^-e^+ ütközés esetén $\mu^-\mu^+$ végállapothoz képest milyen gyakran keletkeznek hadronos végállapotok. A μ skála egy a renormálás során az elméletbe bevezetett *nem-fizikai* skála, a mérhető mennyiségek függetlenek ettől. Mivel perturbációs számítás esetén mindig elhanyagolunk tagokat, ezért bizonyos fokig mindig

⁷ $\alpha_S = \frac{g_S^2}{4\pi}$

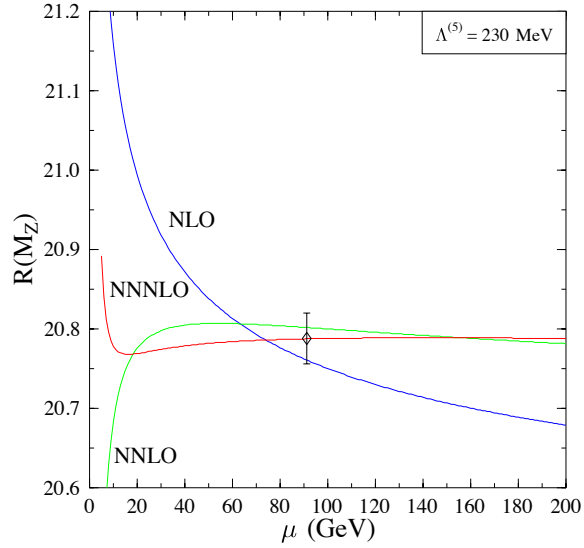


2. ábra. Az erős csatolás energiafüggése

bent marad a μ függés, azonban a rend növelésével ennek egyre gyengébbnek kell lennie. Azt gondolhatnánk tehát, hogy akkor minden szükséges folyamatot kiszámolunk legalább NNLO rendben, azonban majd láthatjuk, hogy ez a gyakorlatban nem ilyen egyszerű. A lehetséges gráfok száma és a befektetendő munka rohamosan nő a magasabb rendű korrekciók figyelembevételével.

3. Hadrondzset hatáskeresztmetszetek

Láttuk, hogy a renormálás segítségével az UV-divergenciák eltávolíthatóak, így egy matematikailag jól definiált elméletet kapunk és végre nekiállhatunk a számolásnak. Ettől a fejezettől kezdve már a kutatásom tárgyát képező folyamat példáján haladunk tovább, ez pedig az elektron-pozitron ütköztetések során keletkező hadrondzsetek. A hadronok, mint már korábban említettem, kvarkokból felépülő részecskék, hadrondzsetnek pedig ilyen részecskék egy irányba haladó csoportját nevezzük (4. ábra). Dzsetből mindig legalább kettő keletkezik az impulzusmegmaradás miatt,



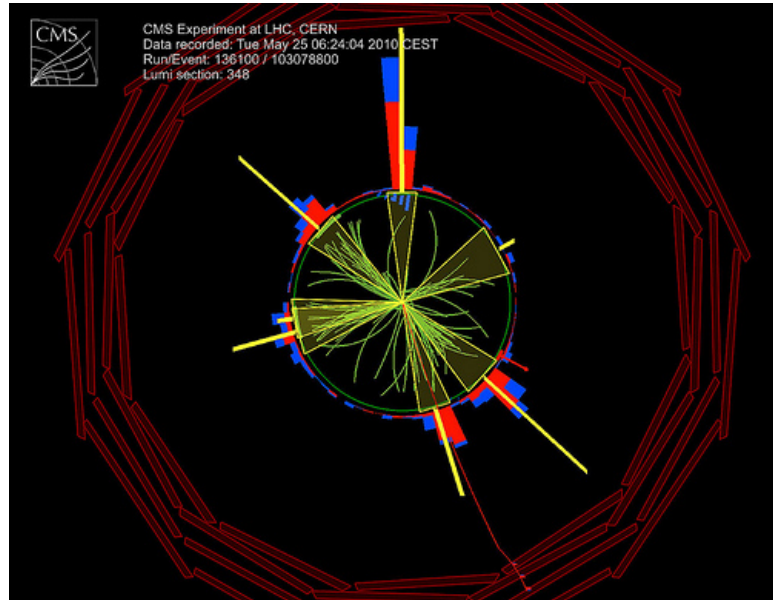
3. ábra. A hadronikus R arány μ skálafüggése

azonban felső korlát nincs (habár a valószínűség a dzset számmal egyre csökken).

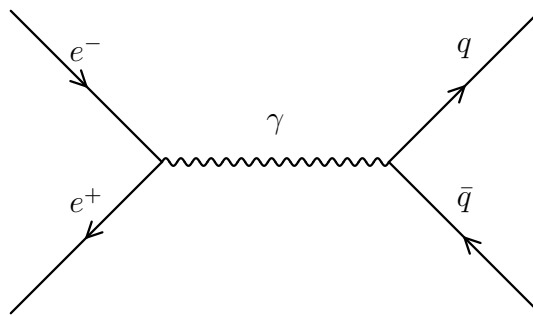
Probléma, hogy szabad kvarkot vagy gluont (összefoglaló néven partont) még senki nem mért a természetben és a QCD csak a partonokkal való számolásokra ad útmutatást, hadronokra nem. Jelenleg a hadronizációnak, azaz annak folyamatnak, mikor a szabad kvarkok összetett részecskéket formálnak, csak tapasztalati modellje van. Esetünkben ezt el is hanyagoljuk és egy dzsetet egy partonnak feleltetünk meg. Ezt nevezik *hadron-parton* dualitásnak. Például két dzsetet a $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$ folyamattal írjuk le a perturbációszámítás legalacsonyabb rendjében (fagráf szinten – 5. ábra).

3.1. Teljes hatáskeresztmetszet

A szórási folyamatok esetén az legjellemzőbb fizikai mennyiség a szórási hatáskeresztmetszet. A teljes hatáskeresztmetszet arányos a hadronos végállapotok keletkezésének valószínűségével, a luminozitással megszorozva megkapjuk a szórt részecskék idő- és térfogategységenkénti számát. A teljes hatáskeresztmetszetet kvantummező-



4. ábra. Hat dzsetes esemény az LHC CMS detektorában



5. ábra. $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$

elmélet esetén a következő formulával számolhatjuk:

$$\sigma_{teljes} = \frac{1}{2s} \int d\phi_n(p_1, \dots, p_n; Q) \frac{1}{S} \sum_{spin} |\mathcal{M}_n|^2, \quad (3.1)$$

ahol Q a teljes bejövő négyesimpulzus, $s = Q^2$, S a spinek átlagolásából és szimetriából származó faktor. $|\mathcal{M}_n|^2$ tartalmazza az adott folyamat összes lehetséges Feynman-gráfját (átmeneti mátrixelemét), $d\phi_n$ pedig az n darab részecskéből álló végállapot fázistere:

$$d\phi_n(p_1, \dots, p_n; Q) = (2\pi)^d \delta^d\left(Q^\mu - \sum_{j=1}^n p_j^\mu\right) \prod_{j=1}^n \frac{d^d p_j}{(2\pi)^{d-1}} \delta_+(p_j^2 - m_j^2) \quad (3.2)$$

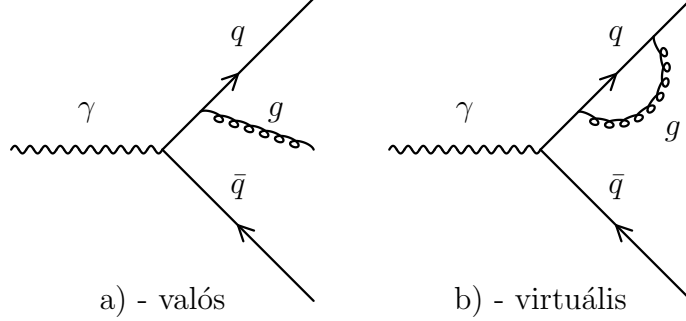
Itt $d = 4 - 2\epsilon$ a dimenziószám, $\delta^d\left(Q^\mu - \sum_{j=1}^n p_j^\mu\right)$ a négyesimpulzus megmaradását fejezi ki, δ_+ pedig arra utal, hogy csak a pozitív energiás megoldásokat tekintjük.

Elektron-pozitron ütköztetés esetén a teljes hatáskeresztmetszet felírható szeparált alakban: egy $L_{\mu\nu}$ leptontenzor és egy $H^{\mu\nu}$ hadronikus tenzor szorzataként.

$$\sigma_{teljes}(e^- e^+ \rightarrow hadronok) = \frac{1}{s^2} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \quad (3.3)$$

A leptontenzor tartalmazza a kizárólag elektromágneses részt, mely a perturbációszámítás során végig azonos marad, a hadrontenzor pedig a QCD folyamatokat, melyeket sorfejtünk. LO szinten a már említett 5. ábrával számolunk. NLO szinten $H^{\mu\nu}$ kifejezésben megjelennek a H_V virtuális és H_R valós gluon sugárzási korrekciós tagok, melyek a 6. ábrán látható gráfokból származnak.

A valós korrekcióban egy plusz részecske, egy gluon jelenik meg a végállapotban, míg virtuális esetben egy gluon hurok. Mindkét tag tartalmaz egy $\frac{1}{(p_i + p_j)^2}$ alakú kifejezést, mely végtelenhez vezet a $p_i, p_j \rightarrow 0$ határesetben. Az eltávolított UV-divergenciák után egy újabb fajtájú végtelen, az infravörös- (IR-) divergencia marad, melyet ismét el kell távolítanunk a mátrixelemekből. Erre is több módszer lehetséges és ismét alkalmazható a dimenzionális regularizáció. Miután elvégeztük a renormálást, eltüntettük az UV pólusokat és vettük a $d = 4 - 2\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} d = 4$ hatáértéket, azután a dimenziószámot ismét $d = 4 - 2\epsilon$ értékűre folytatjuk, ezúttal azonban $\epsilon < 0$



6. ábra. NLO korrekciós gráfok

választással. Így a végtelenek ismét ϵ^{-n} pólusok formáiban jelennek meg. Ha a szükséges számolásokat végigcsináljuk, akkor kiderül, hogy mind H_R , mind H_V azonos alakú pólusokat tartalmaz, ráadásul ellentétes előjellel!

$$H_R = \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + \frac{19}{2} - \pi^2 + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3.4)$$

$$H_V = -\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 + \pi^2 + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3.5)$$

Tehát a két kifejezés összege eltünteti a végteleneket $H^{\mu\nu}$ -ben és végül értelmes eredményt kapunk [17].

3.2. Differenciális hatáskeresztmetszet

Az előző alfejezetben felvázolt módszerrel megkaphatjuk a teljes hatáskeresztmetszet értékét. Ez elégséges, ha csak a végállapotok számáról és a folyamat valószínűségéről akarunk adatot. Ha viszont már a végállapotok részecskéinek térbeli szerkezete, vagy valamilyen változó szerinti eloszlása is érdekes, akkor a σ_{teljes} mennyiség nem lesz megfelelő. Az ilyen esetekre használjuk a *differenciális hatáskeresztmetszet* fogalmát. A $\frac{d\sigma(f)}{df}df$ arányos a szórt részecskék f fizikai mennyiség $[f, f + df]$ tartományába eső keletkezési valószínűségével. A végállapotok jellemzésére *alakparamétereket* használunk, mint például a döfet(thrust), szfericitás, aplanaritás. Általánosan ezt egy $J_m^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ *dzsetfüggvény* formájában írhatjuk melynek konkrét

megtestesítője lehet valamely fentebb említett alakparaméter. Perturbatív kvantum-színdinamikában azonban csak olyan alakparaméterekkel tehetünk elméleti jóslatokat, melyek infravörös végesek. Ekkor az alakparaméterben differenciális hatáske-resztszmet

$$d\sigma = \frac{1}{2s} \int d\phi_n |\mathcal{M}_n|^2 J_m^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \quad (3.6)$$

alakot ölti. A korábban már említett dőfetet a (3.7) képlettel definiáljuk, melyről belátható, hogy egy IR-véges mennyiség.

$$T(\{p_i\}) = \max_{\vec{n}} \frac{\sum_i |\vec{p}_i \vec{n}|}{\sum |\vec{p}_i|} \quad (3.7)$$

Így például a dzsetfüggvény lehet egy Dirac-delta: $J_m = \delta(T - T(\{p_i\}))$.

Most alkalmazzuk az új módszert a teljes hatáskeresztszmet esetén számolt $e^-e^+ \rightarrow \text{hadronok}$ folyamatra. Teljes hatáskeresztszmet esetén az első sugárzási korrekció

$$\int d\sigma^{NLO} = \int d\sigma_3^{NLO,R} + \int d\sigma_2^{NLO,V} \quad (3.8)$$

alakban is felírható, ahol az integráljel a fázistérre vett integrálásra utal, az alsó index száma, pedig a végállapotban lévő részecskék számára (az R valós korrekció tartalmaz egy plusz gluont!). Hogy differenciális hatáskeresztszmetet kapjunk, ebbe egyszerűen beillesztjük a megfelelő dzsetfüggvényeket:

$$\int d\sigma^{NLO} = \int d\sigma_3^{NLO,R} J_3 + \int d\sigma_2^{NLO,V} J_2 \quad (3.9)$$

Itt máris felfigyelhetünk arra, hogy a valós és virtuális korrekciókat nem tudjuk egyszerűen összerakni úgy, hogy az összegük véges legyen, mivel két különböző dzsetfüggvényt tartalmaznak. Mielőtt továbblépnénk vizsgáljuk meg, hogy milyen folyamatok okozzák az infravörös-végtelen járulékokat.

3.3. Az infravörös-divergenciák forrásai

Korábban említettem, hogy az átmeneti mátrixelemben megjelenik egy $\frac{1}{(p_i + p_j)^2}$ alakú tag. Ha elvégezzük a négyzetreemelés, akkor $(p_i + p_j)^2 = 2p_i p_j$, ami két négyesvek-

tor szorzata. Itt kihasználtuk, hogy a végállapotban megjelenő részecskék *tömeghélión* vannak, azaz ki kell elégítsék a $p^2 = m^2$ feltételt. Gluonok esetén $m = 0$ mindig fennáll, kvarkok esetén pedig élhetünk a $m \approx 0$ közelítéssel (mivel a tömeg eltűnik növekvő energiákon) perturbatív QCD esetén. Az ebből a közelítésből származó hiba jóval kisebb, mint amely a sugárzási korrekciók elhanyagolásából származik, viszont kényelmesebbé teszi a számolást. Írjuk át az impulzusokat tartalmazó kifejezést más változókkal kifejezve:

$$2p_i p_j = 2E_i E_j (1 - \cos \theta) \approx E_i E_j \theta^2, \quad (3.10)$$

ahol E_i és E_j az i és j részecske energiái, θ pedig a köztük bezárt szög. Vegyük például azt az esetet, mikor egy kvark kibocsájt egy gluont (6.a ábra). A $\frac{1}{E_k E_g \theta^2}$ tag divergál, ha $E_g \rightarrow 0$ vagy $\theta \rightarrow 0$ (esetleg a kettő egyszerre) határeseteket vesszük. Az első nevezük *lágynak*, míg a másodikat *kollineárisnak* (párhuzamosnak). Fennállhatna még divergencia $E_k \rightarrow 0$ esetben is, azonban más számlálóban lévő tagok ezt mindig kompenzálják, így a lágynak kvark határérték integrálja mindig véges lesz. Ha elképzeljük a lágynak és kollineáris határeseteket, akkor a két részecske határesetben megkülönböztethetetlen lesz a detektorban, így olyan mintha csak egyet látnánk. Ez lesz az egyik kulcs a végtelen tagok kezelésére.

3.4. Levonási sémák

Térjünk vissza a (3.9) egyenlethez. A kifejezés véges, kivéve a lágynak és kollineáris határeseteket, amikor a különböző számú részecskékre vonatkozó dzsetfüggvények miatt nem tudjuk összerakni a két korrekciós tagot, így a divergenciák nem esnek ki. Most, hogy már értjük az IR-divergenciák okait kiköthetjük, hogy csak olyan dzsetfüggvényeket használhatunk, melyek – ahogy már korábban említettem – IR-végesek, és teljesítik a

$$\lim_{\text{lágynak, koll.}} J_3 \rightarrow J_2 \quad (3.11)$$

feltételt. Ekkor a fentebbi határérték esetén a hatáskeresztmetszet végessé tehető. Gyakorlatban ezt úgy tesszük, hogy az eredeti kifejezéshez hozzáadjuk, majd le is

vonjuk ugyanazt a tagot. NLO szinten ez a

$$d\sigma^{NLO} = d\sigma_3^{NLO,R} J_3 - d\sigma_3^{NLO,A} J_2 + d\sigma_2^{NLO,V} J_2 + \left(\int_1 d\sigma_3^{NLO,A} \right) J_2 \quad (3.12)$$

formában írható el, ahol elhagytuk a korábban feltüntetett teljes fázistérre vett integrálást. A $d\sigma^{NLO,A}$ a közelítő hatáskeresztmetszet, melyet 3 darab részecskékre írtunk fel, ezért a második tag esetében egy részecske fázissterére integrálnunk kell. Megmutatható, hogy m részecskés végállapot esetén

$$d\sigma_{m+1}^A = d\sigma_m^B \otimes I_m(\epsilon) \quad (3.13)$$

kapcsolat áll fent, ahol B a Born-közelítésre utal (LO). $I_m(\epsilon)$ a szintéren ható operátor, ezért röviden *szín-operátornak* nevezzük, mely független a dzsetfüggvénytől. Így végül a levonási trükk olyan tetszőleges dzsetfüggvényre használható, amely kielégíti a szükséges követelményeket. Összefoglalva:

$$\int_m \left(d\sigma_m^V + \int_1 d\sigma_{m+1}^A \right) \Big|_{\epsilon=0} J_m \rightarrow \text{véges} \quad (3.14)$$

$$\int_{m+1} \left(d\sigma_{m+1}^R J_{m+1} - d\sigma_{m+1}^A J_m \right) \Big|_{\epsilon=0} \rightarrow \text{véges} \quad (3.15)$$

A levonást többféleképpen is meg lehet tenni, attól függően miként definiáljuk $d\sigma^A$ -t. Ez nem egyértelműen meghatározott feladat, több olyan lépést is tartalmaz, amelyet sokféle úton is el lehet végezni. Emiatt előfordulhat, hogy az ember csak nehezen ér el a végcélba.

3.5. Levonási séma NNLO rendben

Ha a hatáskeresztmet második sugárzási korrekcióját is meg szeretnénk határozni, akkor a dolog még tovább bonyolódik. A fagráfhoz most két részecskét kell hozzáadnunk, mely ez esetben lehet kvark és gluon egyaránt. A hatáskeresztmetszet ekkor a következő három tagból áll:

$$\sigma^{\text{NNLO}} = \int_{m+2} d\sigma_{m+2}^{\text{RR}} J_{m+2} + \int_{m+1} d\sigma_{m+1}^{\text{RV}} J_{m+1} + \int_m d\sigma_m^{\text{VV}} J_m. \quad (3.16)$$

A felső indexek a korrekciók típusaira utalnak: RR a kétszeresen valós, RV a valós-virtuális, VV pedig a duplán virtuális korrekció.

A közelítő hatáskeresztmetszet megalkotása itt már nem olyan egyszerű feladat ugyanis a különböző korrekciós tagokban fellépő szingularitások részben átfednek egymással. Emiatt többféle $d\sigma^A$ is lesz. Mint fentebb említettem egy levonási séma megalkotása nem egyértelmű, ezért különböző lehetőségek vannak. Jelen dolgozatban a *Somogyi Gábor, Trócsányi Zoltán és Vittorio Del Duca* által kidolgozott algoritmust [12, 13, 10, 11, 1, 2, 3, 4, 9] használom. Ekkor a (3.16) egyenletet átírhatjuk a következővé:

$$\sigma^{\text{NNLO}} = \int_{m+2} d\sigma_{m+2}^{\text{NNLO}} + \int_{m+1} d\sigma_{m+1}^{\text{NNLO}} + \int_m d\sigma_m^{\text{NNLO}}, \quad (3.17)$$

ahol az egyes tagok

$$d\sigma_{m+2}^{\text{NNLO}} = \left\{ d\sigma_{m+2}^{\text{RR}} J_{m+2} - d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_2} J_m - \left[d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_1} J_{m+1} - d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_{12}} J_m \right] \right\}_{\epsilon=0}, \quad (3.18)$$

$$d\sigma_{m+1}^{\text{NNLO}} = \left\{ \left[d\sigma_{m+1}^{\text{RV}} + \int_1 d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_1} \right] J_{m+1} - \left[d\sigma_{m+1}^{\text{RV},A_1} + \left(\int_1 d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_1} \right)^{A_1} \right] J_m \right\}_{\epsilon=0}, \quad (3.19)$$

$$d\sigma_m^{\text{NNLO}} = \left\{ d\sigma_m^{\text{VV}} + \int_2 \left[d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_2} - d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_{12}} \right] + \int_1 \left[d\sigma_{m+1}^{\text{RV},A_1} + \left(\int_1 d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_1} \right)^{A_1} \right] \right\}_{\epsilon=0} J_m \quad (3.20)$$

alakot öltenek. Itt is fennállnak a (3.13) egyenlettel azonos formájú összefüggések, így minden külön levonási taghoz tartozik egy-egy szín-operátor, melyeket egyenként kell definiálnunk. Ez nem egyszerű feladat, ugyanis a szingularitások átfedései miatt nem elegendő csak a sima lágy és kollineáris divergenciákat eltávolítani, hanem a kereszttagok eltüntetésére is ügyelni kell. Ennek ellenére az eljárás általános formában megfogalmazható, a nagyobb problémát a megjelenő integrálok kiszámítása adja.

4. Közelítő módszer

A szín-operátorok definiálásakor a teljes kifejezést egymástól független tagokra bontjuk szét, melyek a különböző, úgynevezett *mester integrálokat* adják. Az operátor az egyes integrálok lineáris kombinációjaként áll össze. A hatáskeresztmetszet eredetileg a négyesimpulzusoktól függött, azonban a mester integrálok esetén egy transzformáció segítségével áttérhetünk más változók használatára. Bizonyos változókra elvégezhettük az integrálást, míg a többi változó paraméterként benne marad az integrál kifejezésében. Ezen paraméterek változtatásakor az integrálokat újra és újra ki kell értékelni, ami nagyon számítás igényes munka. Egy mester integrál tipikusan 2-3 soros integrandust tartalmaz, melyet 3-4-5 változóban is kiintegrálunk. A primitív függvények vagy egyáltalán nem léteznek, vagy ha igen, akkor teljes analitikus meghatározásuk túl költséges feladat. Ezért numerikus módszerek alkalmazására van szükség. Az ebben a problémakörben felmerülő integrálok numerikus kiértékelésére írt egyik programcsomag például a SecDec [7]. A SecDec a Wolfram Mathematica program segítségével először *Laurent-sorba* (negatív hatványkitevőket is tartalmazó hatványsor) fejti az integrandust, majd az egyes pólusok együtthatóit a Cuba [6] numerikus algoritmusával kiintegrálja. Az integrálok eredményeit nagy pontossággal szeretnénk ismerni, ezért általában $10^{-7} - 10^{-8}$ -as relatív pontosságot használunk a numerikus számolás alatt. Ezen okból és az integrandusok bonyolultsága miatt a tipikus futási idő percekben mérhető egyetlen pontban. Ha megnézzük a (3.16) egyenletet, akkor láthatjuk, hogy a sugárzási korrekció értékének kiszámolásához integrálnunk kell a differenciális hatáskeresztmetszetet a teljes fázistéren. Ezt Monte Carlo integrálás segítségével szeretnénk elvégezni, ami tipikusan $\mathcal{O}(10^5) - \mathcal{O}(10^6)$ darab pontbeli függvényhívást jelent. Ha csak csupán egy mester integrálunk lenne, az összes pontban történő kiértékelés akkor is napokat venne igénybe. A helyzet valójában még rosszabb, ugyanis a mester integrálok száma százas nagyságrendben mérhető, ami jóval megnöveli a szükséges számítási időt. Ezt elkerülendő a szín-operátorok bonyolult kifejezéseit jóval egyszerűbb, gyorsan kiértékelhető függvényekkel szeretnénk egyszerűsíteni, ezért célul tűztük ki egy közelítési módszer kidolgozását és megvalósítását. Ennek segítségével szeretnénk majd megmutatni a szinguláris pólusok numerikus kiejtését 2 és 3 dzset esetére, valamint kiszámolni a

sugárzási korrekciót.

4.1. Kinematikai változók

A négyesimpulzosokról új változókra való áttérés után az integrálokban a következő kinematikai változók szerepelhetnek paraméterként:

$$x_i = \frac{2E_i}{Q}, \quad (4.1)$$

$$Y_{ij} = \frac{p_i p_j}{2E_i E_j}. \quad (4.2)$$

Q a teljes tömegközépponti energia elektron-pozitron ütköztetésben, p_i és p_j , pedig az i és j -edik részecske négyesimpulzusa. Az x_i változó az i parton tömegközépponti energia felével normált energiáját adja meg, míg Y_{ij} az i és j partonok impulzusai között bezárt χ_{ij} szöggel áll kapcsolatban ($\cos \chi_{ij} = 1 - 2Y_{ij}$). Az operátorok szintjén azonban az y_{ij} két részecske invariáns változót használjuk, melynek definíciója:

$$y_{ij} = \frac{2p_i p_j}{Q^2}. \quad (4.3)$$

Az y_{ij} , x_i és Y_{ij} változók nem függetlenek egymástól, közöttük a

$$x_i = \sum_{j,j \neq i} y_{ij}, \quad (4.4)$$

$$Y_{ij} = \frac{y_{ij}}{x_i x_j} \quad (4.5)$$

relációk állnak fent. Egy m dzsetes eseménynél az $\mathbf{I}$ operátorok $m - 1$ független y_{ij} változóktól fognak függeni, mivel y_{ij} -k szimmetrikusak és fennáll a négyesimpulzus megmaradása ($\sum_{i,j} y_{ij} = 1$).

Két dzset esetén nincs tényleges függés, háromnál pedig y_{13} -at és y_{23} -at választjuk független változóknak. A két változó egy $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzetes tartományt feszít ki, azonban a négyesimpulzus megmaradás miatt a fázistér háromszög alakú lesz, mely szimmetrikus a két y felcserélésre. Az operátorok illesztését tehát ezen a tartományon kell elvégeznünk, míg ha mester integrálokat kívánjuk illeszteni, akkor

az integrál változói által kifeszített felület fölött, mely magasabb dimenziószámmal is rendelkezhet, mint kettő.

4.2. A közelítés menete

A közelítő módszerünket a $d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_2}$ -ban található $\mathbf{I}_2$ operátoron kezdtük el kidolgozni. Párhuzamosan egy másik hallgató, *Tulipánt Zoltán* szintén egy hasonló logikájú közelítésen dolgozik egy másik szín-operátoron, azonban egy másfajta illesztési módszert, a *Csebishev-polinomokat* alkalmazva. Így a végén lehetőségünk nyílik majd a két módszer összehasonlítására.

A közelítés logikája a következő: megfelelő – de a Monte Carlo integrálás során szükséges pontszám nagyságrendjénél jóval kisebb – számú pontban numerikusan kiszámoljuk a mester integrálokat a SecDec segítségével. Ezután az adatokból két általam C++ nyelven írt program (*MakeAllRes* és *TransDat* [15]) és egy Wolfram Mathematica-ban írt program segítségével felépíthetjük az $\mathbf{I}_2$ operátort és megkapjuk annak értékét az adott pontokban. Az illesztést valójában két szinten is elvégezhetjük: illeszthetjük egyenként az összes mester integrált, majd felépíthetjük az operátor függvényét; vagy pedig előbb numerikusan felépítjük $\mathbf{I}_2$ -t és azt illesztjük meg. Kezdetben mindkét út jónak tűnt, azonban a jelenlegi tapasztalatok azt mutatják, hogy az utóbbi lesz az egyszerűbb és pontosabb. Ennek oka, hogy míg $\mathbf{I}_2$ csak két változótól függ, addig egyes mester integrálok 3–4 változótól is függhetnek és az illesztés meglehetősen nehezebb egy ilyen esetben. Továbbá a körülbelül száz darab integrál illesztése miatt a végső hiba előreláthatólag nagyobb lenne, mintha csak az operátort illeszténénk. Igaz, hogy ekkor például egy $110\ y_{13} - y_{23}$ pontpárt tartalmazó rács esetén hozzávetőlegesen 22000 pontban kell integrálnunk, de ez mégis kedvezőbb, mint a három változós illesztés, ahol rácsponatok száma rohamosan nő a dimenzió növekedésével és fázistér felosztása a jobb illesztés reményében sem egyértelmű.

A közelítőfüggvény megillesztésére a jól ismert és széles körben alkalmazott *legkisebb négyzetek módszerét* használok. Az illesztési pontokat, hibákat és az illesztendő

$\mathcal{F}$ függvényt egy

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(\mathcal{F}(\bar{x}_i) - y_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (4.6)$$

formulába tesszük bele, majd a χ^2 mennyiséget minimalizáljuk úgy, hogy változtatjuk az $\mathcal{F}$ -ben szereplő függvényegyütthatókat. A χ^2 minimumának értéke információt szolgáltat az illesztés jóságáról [18]. Erre érdekesebb azonban a

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{N - n - 1} \quad (4.7)$$

redukált mennyiséget használni, ahol N az illesztési pontok, n pedig az illesztett paraméterek száma. $\chi_{red}^2 \gg 1$ esetben az illesztett függvény nem megfelelő, ha $\chi_{red}^2 > 1$, akkor az illesztés nem teljesen megfelelően illeszkedik a pontokra. $\chi_{red}^2 \approx 1$ jól járunk el, azonban ha $\chi_{red}^2 < 1$, akkor az adatokat „túlillesztettük”, és a közelítő görbe követi a zajból eredő változásokat is. Az illesztés elvégzése után összehasonlíthatjuk $\mathcal{F}$ -et a numerikus értékekkel és meghatározhatjuk a relatív pontosságot.

A közelítőfüggvény alakját egy- és kétváltozós mester integrálok illesztésének segítségével határoztuk meg [14, 5]. Azt találtuk, hogy a függvény felírható általános alakban, amely így egyszerűen generálható automatikusan. Az $x_1, x_2, \dots, x_s$ változók esetén $\mathcal{F}$ -et két függvény szorzataként definiálhatjuk:

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_s) = \mathcal{P}^m(x_1, x_2, \dots, x_s) \mathcal{L}^n(x_1, x_2, \dots, x_s), \quad (4.8)$$

ahol $\mathcal{P}$ az x_i változók polinomjait, míg $\mathcal{L}$ a változók logaritmusainak polinomjait tartalmazó függvények:

$$\mathcal{P}^m(x_1, x_2, \dots, x_s) = \prod_{i=1}^s P^m(x_i) \quad ; \quad \mathcal{L}^n(x_1, x_2, \dots, x_s) = \prod_{k=1}^s L^n(x_k), \quad (4.9)$$

$$P^m(x_i) = \sum_{j=0}^m a_{ij} x_i^j \quad ; \quad L^n(x_k) = \sum_{l=0}^n b_{kl} \log^l(x_k), \quad (4.10)$$

és $a_{ij}, b_{kl} \in \mathbb{R}$. Mivel az operátorok és a mester integrálok pólusai egyértelműen meghatározzák az előforduló logaritmusok lehetséges maximális l hatványát, ezért a

$\log x_i$ tagok l_i kitevőire egy kényszert írunk elő:

$$l_1 + l_2 + \dots + l_s \leq n. \quad (4.11)$$

Hasonlóan a polinomkitevőkre:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_s \leq m. \quad (4.12)$$

A (4.8) egyenletet a behelyettesítés és a szorzások elvégzése után átírhatjuk egy másik alakba, mely jobban tükrözi a közelítő függvény felépítését:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_s) = \sum_{p_i, l_i} C_{m; p_1, p_2, \dots, p_s; l_1, l_2, \dots, l_s} (x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_s^{p_s}) \\ \times (\log^{l_1}(x_1) \log^{l_2}(x_2) \dots \log^{l_s}(x_s)). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ezt az alakot használva másod- és harmadfokú polinom választással élve az egy- és kétváltozós mester integrálok példáján 10^{-4} relatív pontosságot tudtunk elérni (lásd 5. fejezet).

A $\mathbf{I}_2$ operátor egyes pólusai kisebb-nagyobb munkával kiszámolhatóak analitikusan is. Ezeket a kifejezéseket tanulmányozva az derült ki, hogy az y_{13}, y_{23} függés csak logaritmusok és polinomok összegeként jelenik meg, eltűnnek az $y_{ij} \log y_{kl}$ típusú kevert tagok, így $\mathcal{F}$ helyett elegendő egy egyszerűbb alakot használni. Ez is azt megérzésünket láttatja, hogy célszerűbb az illesztést a szín-operátor szintjén elvégezni.

5. Mester integrálok illesztése

Ahogy korábban is említettem az illesztési módszer kidolgozását a mester integrálok szintjén kezdtük el. Ebben a fejezetben az elvégzett illesztésekből mutatok be néhány példát egy- és kétváltozós esetre egyaránt, melyek a [14, 5] hivatkozásokban is megtalálhatóak. Az illesztéseket az általam írt `myCalc` nevű `C++` nyelven íródott programmal végeztem. A `myCalc` a `R00T` adatillesztésre fejlesztett programcsomagját, a külön is elérhető `Minuit2` függvényminimalizáló algoritmusait használja.

Tapasztalatunk szerint az illesztési tartományt érdemes több részre bontani, ugyanis úgy javítható a pontosság. Egyváltozós esetben aszimptotikus és nem-aszimptotikusra választjuk szét az x_i változók $(0, 1)$ halmazát:

- aszimptotikus: $x_i \leq 10^{-4}$
- nem-aszimptotikus: $x_i > 10^{-4}$.

Két változó esetében az x_i, x_j változók $(0, 1) \times (0, 1)$ négyzet alakú fázisterét háromfelé vágjuk a következő módon:

- aszimptotikus: $x_i, x_j \leq 10^{-4}$
- közép: $x_i, x_j > 10^{-2}$
- perem: $x_i \leq 10^{-2}$ vagy $x_j \leq 10^{-2}$.

Az illesztés logikája mindkét fajtánál azonos: először csak a logaritmikus részt tartalmazó függvénnyel megillesztjük az aszimptotikus részt, majd ennek eredményét felhasználva illesztjük a többi tartományt.

Általánosan elmondható, hogy az $\mathcal{F}$ függvénnyel történő illesztés a mester integráloknál sikeresen teljesítette az általunk kitűzött célokat. A pontosság meghatározásához a „mérések” (numerikus integrálás eredményei) és a közelítő értékek különbségeit, illetve hányadosait használjuk. A közelítések a mérési eredményektől legtöbb esetben csupán 10^{-4} -es relatív eltéréssel különböznek. Néhány esetben megfigyelhető ennek a relatív pontosságnak a romlása, ami a függvény előjelváltásának tartományában jelentkezik. Az abszolút eltérés azonban ekkor is kielégítő. Az $n = 1$, néha $n = 2$ logaritmus kitevők esetén célszerű a harmadfokú polinom használata a jobb eredmény érdekében, egyébként elégséges a másodfok is.

5.1. $\mathcal{I}_{1\mathcal{C},0}$ kollineáris integrálok

Az $\mathcal{I}_{1\mathcal{C},0}$ az $\mathbf{I}_1^{(0)}$ operátorban megjelenő kollineáris mester integrál. A négyesimpulzusokról új változókra történő áttérés után az integrál definíciója:

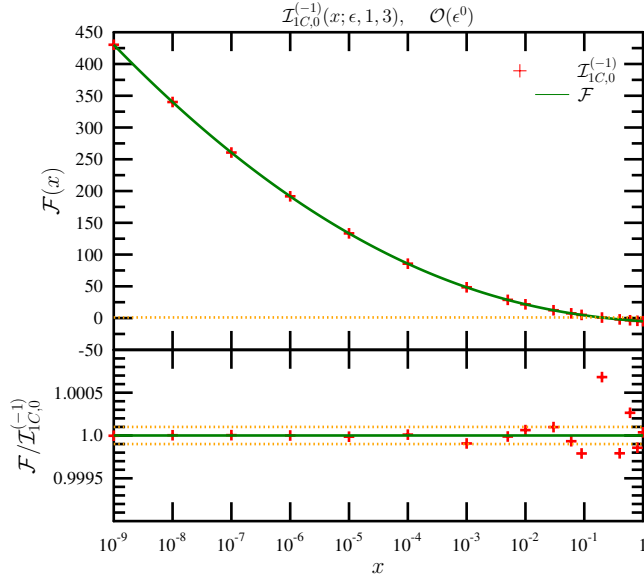
$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1\mathcal{C},0}^{(k)}(x; \epsilon, \alpha_0, d_0) &= x \int_0^{\alpha_0} d\alpha \int_0^1 dv \alpha^{-1-\epsilon} (1-\alpha)^{2d_0-1} (\alpha + (1-\alpha)x)^{-1-\epsilon} \\ &\times v^{-\epsilon} (1-v)^{-\epsilon} \left(\frac{\alpha + (1-\alpha)xv}{2\alpha + (1-\alpha)x} \right)^k, \end{aligned} \quad (5.1)$$

ahol az x a kinematikai változó, α és v integrálási változók, α_0 , d_0 , k konstansok, ϵ pedig a regularizáló paraméter, mely szerint az integrálás során a sorfejtés történik.

Elsőként tekintsük az $\alpha_0 = 1, d_0 = 3, k = -1$, esetet. A (7). ábrán jól látható, hogy a hányadosok többsége az $\mathcal{F}/\mathcal{I}_{1\mathcal{C},0} = 1$ egyenesen helyezkedik el. Nagyobb eltérés a nem-aszimptotikus részen jelentkezik, egy kiugró pontot vehetünk észre a függvény előjelváltásánál, amire a korábbiakban utaltunk. Általánosan tapasztalat, hogy az aszimptotikus részek, egy- vagy kétváltozós esetben is, nagyobb pontossággal közelíthetők a többi tartományhoz képest. Az első példában rendelkezésünkre állt még egy igen jelentős ellenőrzési lehetőség. Korábbi számolásokból az integrál analitikus megoldása ismert ezen paraméterértékek mellett. Azt találtuk, hogy az analitikus függvény és a közelített függvény eredményei 10^{-6} -os pontossággal megegyeznek, ami igencsak jónak mondható.

Az első, még nem az általános függvényalakokkal történő vizsgálat során az aszimptotika analitikus alakját szinte teljes egészében (az utolsó tag kivételével) sikerült meghatározni a numerikus számolás segítségével. Sajnos az általános illesztőfüggvény ennek a rovására megy, ugyanis az ilyesfajta kereséshez nagyobb fokú függvény specializáció szükséges, amire a forráskódban viszonylag egyszerűen lehetőség van, azonban az általános kifejezéssel nagyobb pontosság érhető el, és nem jár további bajlódással.

Második példában az $\alpha_0 = 0.1, d_0 = 3 - 3\epsilon, k = -1$ paraméterekkel rendelkező $\mathcal{I}_{1\mathcal{C},0}$ integrált vizsgáltuk (8. ábra). Itt sajnos nem ismert az analitikus megoldás, így csak a mérési eredményekhez tudtunk viszonyítani. A függvény előjelváltásánál itt is kisebb pontosságú a közelítés, a többi pont viszont az előző esethez képest jobban



7. ábra. Az $\mathcal{I}_{1C,0}^{(-1)}(x; \epsilon, 1, 3)$ integrál illesztése

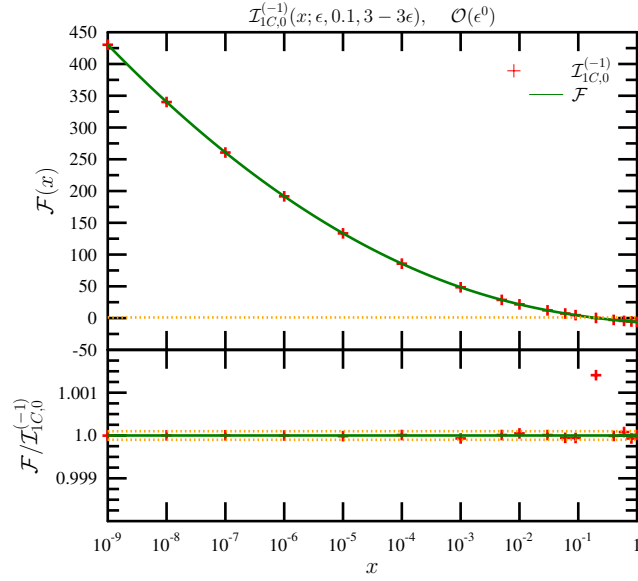
illeszkedik az $\mathcal{F}/\mathcal{I}_C = 1$ egyenesre.

5.2. $\mathcal{I}_{2C,1}$ tripla kollineáris integrálok

Az $\mathcal{I}_{1C,0}$ kollineáris integrálhoz hasonlóan az $\mathcal{I}_{2C,1}$ is az egyváltozós esetek közé tartozik, azonban az $\mathbf{I}_2$ szín-operátor részét képezi. Az integrál kifejezése már sokkal bonyolultabb alakot vesz fel az előzőhöz képest:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{2C,1}^{(k_1,k_2,k_3,l)}(x_{\widetilde{irs}}, \epsilon; \alpha_0, d_0) &= 2^{-4\epsilon} \frac{\Gamma^2(1-\epsilon)}{\pi\Gamma(1-2\epsilon)} x_{\widetilde{irs}} \int_0^{\alpha_0} d\alpha \int_0^1 dt_{is} d\tau_{rs} dv_r dw_s \\
&\times \alpha^{-1-2\epsilon} (1-\alpha)^{2d_0-3+2\epsilon} (\alpha + (1-\alpha)x_{\widetilde{irs}})^{-1-2\epsilon} (2\alpha + (1-\alpha)x_{\widetilde{irs}})^{-l} \\
&\times t_{is}^{k_2+k_3+1-2\epsilon} (1-t_{is})^{k_1+k_3+l+1-2\epsilon} \tau_{rs}^{k_3-\epsilon} (1-\tau_{rs})^{k_1-\epsilon} v_r^{-\epsilon} (1-v_r)^{-\epsilon} \\
&\times w_s^{-1/2-\epsilon} (1-w_s)^{-1/2-\epsilon} (1-\tau_{rs} + \tau_{rs} t_{is})^{-k_1-k_3-2+2\epsilon} (\alpha + (1-\alpha)x_{\widetilde{irs}} v_r)^l.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Ezen tripla kollineáris integrál illesztéséből öt példát mutatok be, melyek különböző paraméterválasztásait a 3. táblázat tartalmazza, a pontosságok bemutatását pedig



8. ábra. Az $\mathcal{I}_{1C,0}^{(-1)}(x; \epsilon, 0.1, 3 - 3\epsilon)$ integrál illesztése

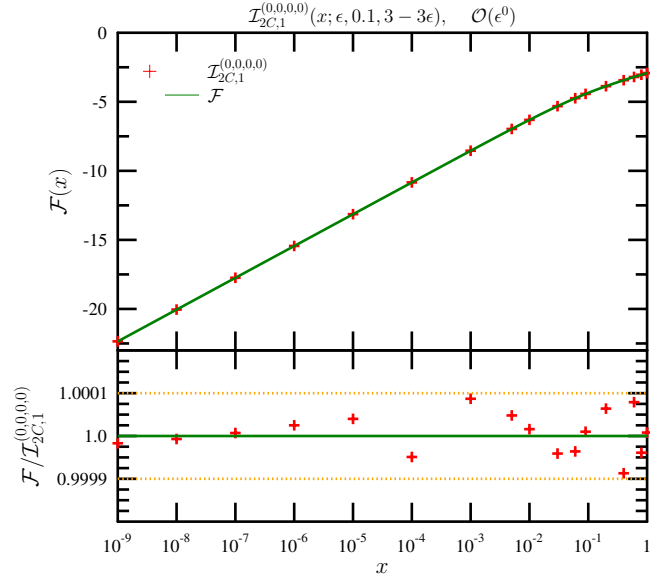
a 9., 10., 11., 12. és a 13. ábrákon láthatjuk. Megfigyelhetjük, hogy a **(C)** eset

$\mathcal{I}_{2C,1}$	k_1	k_2	k_3	l
A	0	0	0	0
B	2	-2	0	0
C	-1	-1	0	0
D	-1	0	-1	1
E	-1	0	-1	2

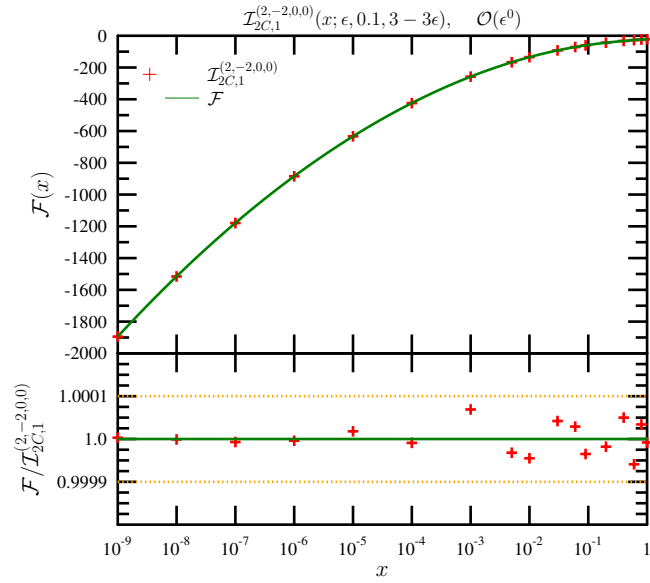
3. táblázat. Az $\mathcal{I}_{2C,1}$ példái

kivételével a hányadosok mindenhol 0.9999 és 1.0001 közé esnek. A (11). ábrán is csupán négy pont található a tartományon kívül, de még ezek is jóval ezrelék alatti pontosságot jelentenek. Tekintsük még meg példaként az **(E)** esetben illesztett függvényt két tizedesjegy pontossággal megadott paraméterekkel:

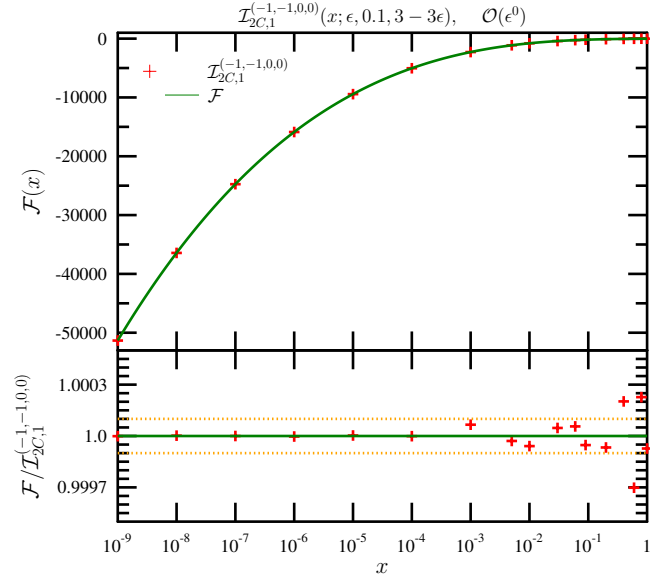
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2C,1}(E) = & 4.81 - 28.45x + 31.94x^2 - 3.77 \log(x) - 18.35x \log(x) - 17.31x^2 \log(x) + \\ & + 1.33 \log^2(x) - 0.53x \log^2(x) + 3.21x^2 \log^2(x). \end{aligned} \quad (5.3)$$



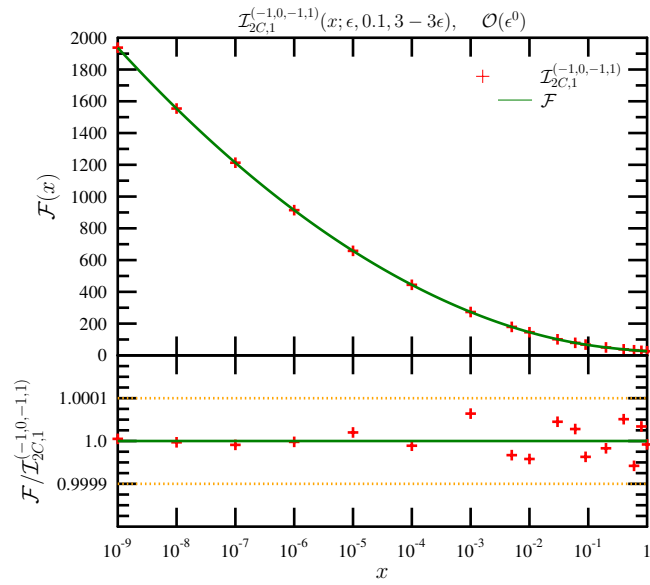
9. ábra. $\mathcal{I}_{2C,1}$ tripla kollináris integrál A példa



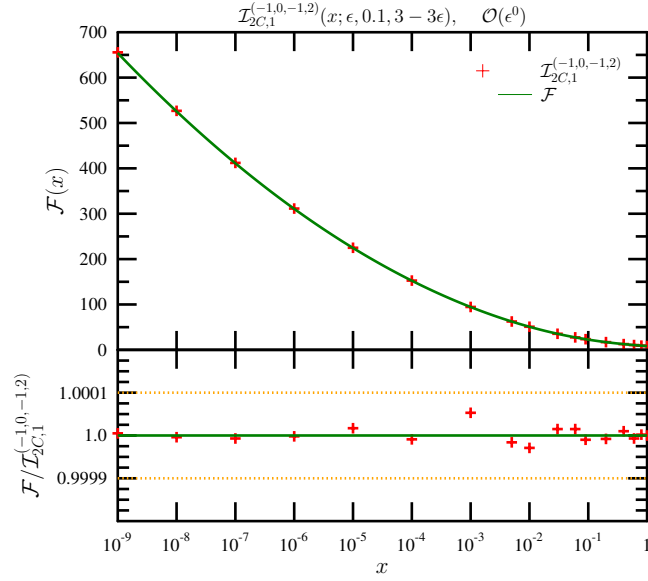
10. ábra. $\mathcal{I}_{2C,1}$ tripla kollináris integrál B példa



11. ábra. $\mathcal{I}_{2C,1}$ tripla kollináris integrál C példa



12. ábra. $\mathcal{I}_{2C,1}$ tripla kollináris integrál D példa



13. ábra. $\mathcal{I}_{2C,1}$ tripla kollináris integrál példa

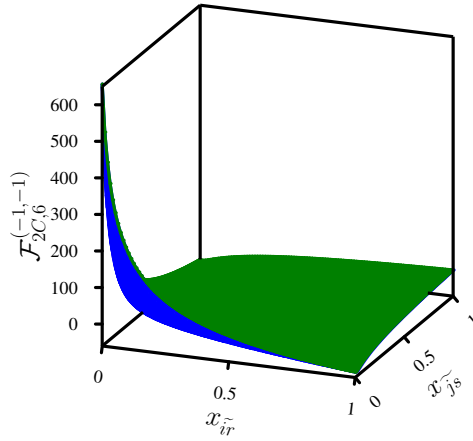
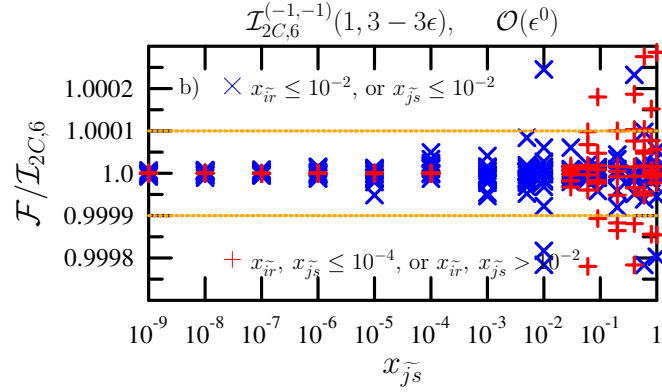
Ez a függvény megadja a sorfejtés ϵ^0 tagjának az együtthatóját. Egy ilyen függvény kiszámítása számítógéppel igen csekély időt vesz igénybe, míg az egy pontbeli numerikus integrálás jelen esetben percekben mérhető idejű, az analitikus eredmény pedig szinte reménytelen.

5.3. $\mathcal{I}_{2C,6}$ dupla kollineáris integrálok

A két kinematikai változóval rendelkező integrálok illesztését az $\mathcal{I}_{2C,6}$ dupla kollineáris integrálon teszteltük. Ezen mester integrál definíciója a következő.

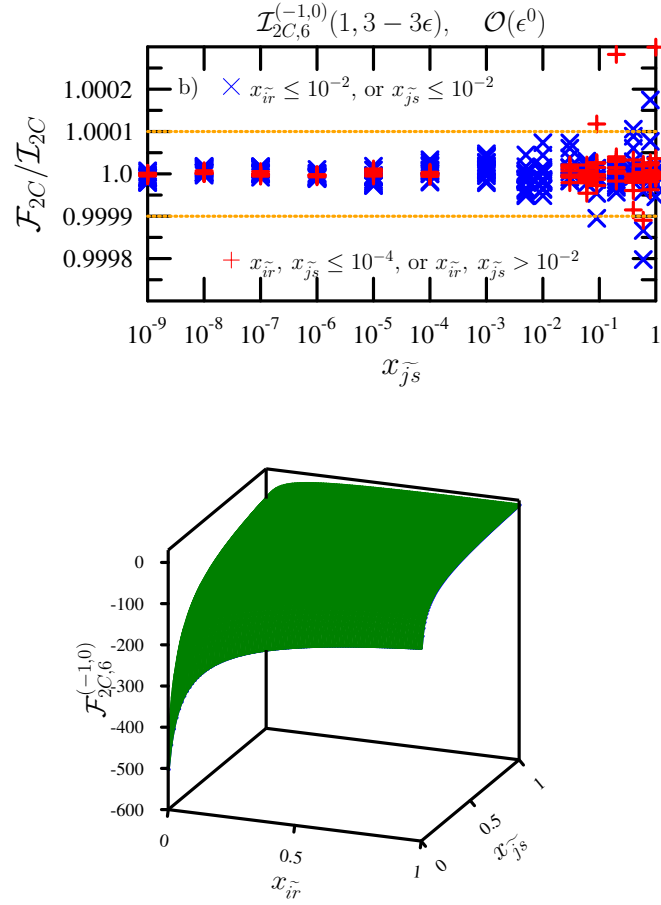
$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{2C,6}^{(k_2,k_3)}(x_{\widetilde{ir}}, x_{\widetilde{js}}; \epsilon, \alpha_0, d_0) &= x_{\widetilde{ir}} x_{\widetilde{js}} \int_0^1 d\alpha d\beta \Theta(\alpha_0 - \alpha - \beta) \int_0^1 dv du \\
&\times \alpha^{-1-\epsilon} \beta^{-1-\epsilon} (1 - \alpha - \beta)^{2d_0-2(1-\epsilon)} v^{-\epsilon} (1 - v)^{-\epsilon} u^{-\epsilon} (1 - u)^{-\epsilon} \\
&\times [\alpha + (1 - \alpha - \beta)x_{\widetilde{ir}}]^{-1-\epsilon} [\beta + (1 - \alpha - \beta)x_{\widetilde{js}}]^{-1-\epsilon} \\
&\times \left(\frac{\alpha + (1 - \alpha - \beta)x_{\widetilde{ir}}v}{2\alpha + (1 - \alpha - \beta)x_{\widetilde{ir}}} \right)^{k_2} \left(\frac{\beta + (1 - \alpha - \beta)x_{\widetilde{js}}u}{2\beta + (1 - \alpha - \beta)x_{\widetilde{js}}} \right)^{k_3},
\end{aligned} \tag{5.4}$$

mely egy meglehetősen bonyolult kifejezés. Az $\mathcal{I}_{2C,6}$ integrálra illesztett görbéket és azok pontosságát a $k_2 = -1, k_3 = -1$ és $k_2 = -1, k_3 = 0$ paraméterértékek mellett a 14. és a 15. ábra mutatja. A hányadost itt csak az egyik változó függvényében ábrázoltuk, így egy $x_{\tilde{js}}$ értéknél az összes hozzátartozó $x_{\tilde{ir}}$ fel van tüntetve. Az



14. ábra. $\mathcal{I}_{2C,6}$ dupla kollineáris első példa

illesztések itt is hozzák a kívánt tízezerlékes pontosságot, azonban a túl általános alak és a sok illesztési paraméter miatt lehetséges, hogy $\mathcal{F}$ túlságosan leköveti a statisztikus zajt.



15. ábra. $\mathcal{I}_{2C,6}$ dupla kollineáris második példa

6. Az $\mathbf{I}_2$ operátor ϵ^{-2} pólusának illesztése

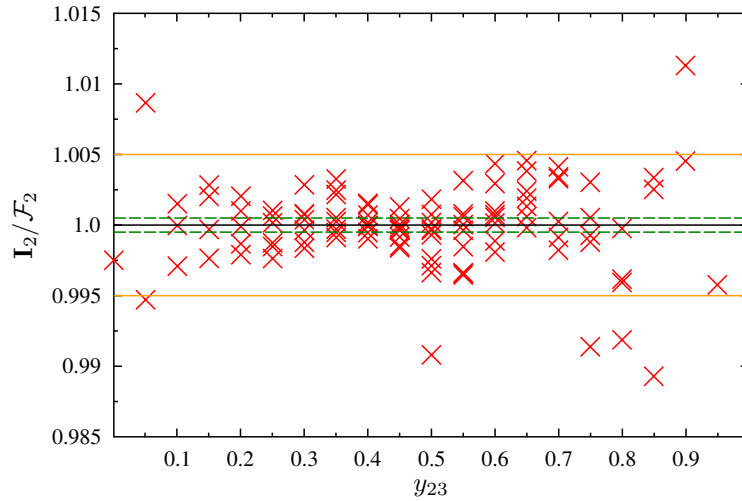
Célünk a szín-operátor véges pólusának megillesztése, először azonban tovább szeretnénk tesztelni és finomítani módszerünket az operátor más pólusain. Ennek előnye, hogy $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$ rendig bezárólag ismerjük $\mathbf{I}_2$ -t analitikusan is, így lehetőségünk nyílik a numerikus adatok és az analitikus eredmények összevetésére. A beprogramozott Mathematica kód segítségével a mester integrálok numerikus eredményeiből felépíthető az $\mathbf{I}_2$ operátor [15]. Az illesztéshez szükséges $y_{13} - y_{23}$ rácsot egy saját C++ programmal generáltam le, majd (4.5) összefüggések alapján áttértem x_i, Y_{ij} változókra és előállítottam a numerikus integráláshoz szükséges bemeneti fájlokat. A pontokat a

y_{13}	y_{23}	$(\mathbf{I}_2(\epsilon^{-2}))_{an}$	$(\mathbf{I}_2(\epsilon^{-2}))_{num}$
0.3004	0.5998	119.7974777	119.7982364
0.0509	0.6497	418.0282414	418.0286620
0.3503	0.5	126.9412935	126.9410218
0.001	0.4002	1508.788856	1508.793831
0.2505	0.3503	242.9649032	242.9651966
0.001	0.9491	1239.487427	1238.187587

4. táblázat. Az operátor ϵ^{-2} pólusának analitikus és numerikus számolásának összehasonlítása

$(y_{13}, y_{23}) \in [0.001, y_{23}] \times [0.001, 0.999]$ tartományból vettem úgy, hogy mindig teljesüljön az $y_{13} + y_{23} < 1$ feltétel. Egy $y_{13} - y_{23}$ pontpárhoz több x_i, Y_{ij} pontra is ki kell számolni az egyes mester integrálokat, így végül 110 y -beli rácsponthoz szükség volt 22291 integrálás elvégzésére. A folyamat gyorsítása végett a véges pólusokat csak kis pontossággal számoltam, azonban néhány esetben míg így is túl lassúnak bizonyult a számolás (az integrálások idejének döntő részét az ϵ^{-1} és ϵ^0 pólusok kiszámítása adja). Az idő szűke miatt a szokásos 10^{-7} relatív pontosságot lecsökkentettem 10^{-5} -re a szükséges esetekben. A kapott eredményekből felépítettem az $\mathbf{I}_2$ operátort, melyet ellenőrzésképpen hat véletlenszerűen választott rácspontban összehasonlítottam az analitikus képletek numerikus kiértékelésével (4. táblázat). Az eredmények 5-6 jegyre egyezést mutatnak, egy esetben van jelentősebb eltérés, ami valószínűleg a csökkentett pontosság számlájára írható. Az ellenőrzést követően az operátor numerikus kifejezéséből levontam az analitikusan ismert aszimptotikus részt és kizárólag csak a nem-aszimptotikus tartományt illesztettem meg egy kétváltozós polinommal.

Sajnálatos módon a mester integráloknál használt myCalc programot nem tudtam itt is használni, mivel a Minuit2 feltelepítésével problémák akadtak (telepítés során használt más programban egy bug jelentkezett), így inkább a Mathematicában végeztem el a feladatot ugyanúgy a legkisebb négyzetek módszerét használva. Modellfüggvénynek egy hetedfokú, változóiban szimmetrikus polinom bizonyult a legmegfelelőbbnek, melynek az illesztett pontokkal vett hányadosát a 16. ábrán tüntettem fel. Az illesztés egyelőre nem hozta teljesen a kívánt pontosságot (zöld vonallal jelzett sáv), de szerencsére a pontok nagy része öt ezrelékes relatív pontosságon belül



16. ábra. Az $\mathbf{I}_2$ nem-aszimptotikus illesztésének pontossága

y_{13}	y_{23}	$(\mathbf{I}_2(\epsilon^{-2}))_{an}$	$\mathcal{F}$
0.341	0.23	68.80372524	68.88590685
0.11	0.021	109.0848365	108.5239647
0.45	0.45	22.17613520	22.20468108
0.0034	0.95333	47.43013672	46.89883055

5. táblázat. Az analitikus és illesztett eredmények összehasonlítása

van (sárga vonallal jelzett sáv). Az alacsonyabb pontosság valószínűsíthető okai a következők: az integrálások nem voltak elég pontosak, a hibaterjedés megvalósítása még nem a legoptimálisabb, és a modellfüggvényhez más tagok is kellenek. Ezek rendszerére javítható dolgok és reményeim szerint a közeljövőben orvosolásra kerülnek.

Az illesztés után a kapott függvényt próbaként az illesztési rácson nem szereplő négy pontban összehasonlítottam az analitikus formulákból kapott számokkal, melyeket az 5. táblázat tartalmaz. A pontok öt ezrelékes pontossággal egyeznek a nem-aszimptotikus tartományon, azon kívül azonban elromlik az $\mathcal{F}$ függvény pontossága,

de ott más függvényt kívánunk használni, így ez nem okoz tényleges problémát.

7. Összefoglalás

A dolgozatban rövid betekintést nyerhettünk a részecskefizika erős kölcsönhatással foglalkozó elméletébe, érzékelhettük az ezen a területen végzett számítások nehézségeit és problémáit. Ezt követően bemutattam a szín-operátorok illesztésére fejlesztett közelítési módszerünk lényegét. Néhány példán keresztül igazoltam, hogy a használt módszerrel egy- és kétváltozós esetben egyaránt képesek vagyunk a mester integrálok 10^{-4} relatív pontosságú közelítésére. Ahol ismerjük az integrálok analitikus kifejezését, ott az értékek a numerikus számolás eredményeivel 5-6 jegyre egyeznek. A módszert alkalmaztuk az $\mathbf{I}_2$ operátor ϵ^{-2} pólusának közelítésére, amely már keményebb feladatnak bizonyult. A csökkentett integrálási pontosság és a hibaterjedés ellenére itt is legalább százalékos egyezést tudtunk elérni, a numerikus mérések és az analitikus kifejezésekkel egyaránt, amely elegendő végső célunk, az operátorok véges részeinek kiszámolására.

A jövőben szeretnénk a jelenlegi $\mathbf{I}_2$ illesztési teszt pontosságán javítani, majd alkalmazni az egész eljárást a véges pólusra. Ezt követően lehetőségünk nyílna a hatáskeresztmetszet értékének meghatározására, melynek eredményét folyóiratban kívánjuk közölni. Munkámat Phd hallgatóként szeretném folytatni a részecskefizikai ezen területén 2014. szeptemberétől a Debreceni Egyetemen.

8. Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, *Trócsányi Zoltánnak*, aki bevezetett engem a részecskefizikai számítások mögött rejlő elméletbe, mindig készségesen segített ha kérdéssel fordultam hozzá és kiváló tanácsokkal látott el tudományos munkáim során. Gondos vezetése nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre. Szeretném megköszönni családomnak, barátnőmnek és barátaimnak a támogatást az általuk nyújtott támogatást. Végül szeretnék köszönetet mondani a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 „Nemzeti Kiválóság Program” által nyújtott támogatásért.

A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú „Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program” című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

9. Hivatkozások

- [1] Ugo Aglietti, Vittorio Del Duca, Claude Duhr, Gábor Somogyi, and Zoltán Trócsányi. Analytic integration of real-virtual counterterms in NNLO jet cross sections. I. *JHEP*, 0809:107, 2008.
- [2] Paolo Bolzoni, Sven-Olaf Moch, Gábor Somogyi, and Zoltán Trócsányi. Analytic integration of real-virtual counterterms in NNLO jet cross sections. II. *JHEP*, 0908:079, 2009.
- [3] Paolo Bolzoni, Gábor Somogyi, and Zoltán Trócsányi. A subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: integrating the iterated singly-unresolved subtraction terms. *JHEP*, 1101:059, 2011.
- [4] Vittorio Del Duca, Gábor Somogyi, and Zoltan Trócsányi. Integration of collinear-type doubly unresolved counterterms in NNLO jet cross sections. *JHEP*, 1306:079, 2013.
- [5] Z. Trócsányi G. Somogyi, Z. Szőr. Computation of integrated subtraction terms numerically. 2012.
- [6] T. Hahn. Cuba - a library for multidimensional numerical integration. 2005.
- [7] G. Heinrich J. Carter. SecDec: A general program for sector decomposition. 2011.
- [8] Sailer Kornél. Szimmetriák és sérülésük a kvantumtérelméletben. Egyetemi jegyzet, 1994-2013.
- [9] Gábor Somogyi. A subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: integrating the doubly unresolved subtraction terms. *JHEP*, 1304:010, 2013.
- [10] Somogyi, Gábor and Trócsányi, Zoltán. A Subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: Regularization of real-virtual emission. *JHEP*, 0701:052, 2007.

- [11] Somogyi, Gábor and Trócsányi, Zoltán. A Subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: Integrating the subtraction terms. I. *JHEP*, 0808:042, 2008.
- [12] Somogyi, Gábor and Trócsányi, Zoltán and Del Duca, Vittorio. Matching of singly- and doubly-unresolved limits of tree-level QCD squared matrix elements. *JHEP*, 0506:024, 2005.
- [13] Somogyi, Gábor and Trócsányi, Zoltán and Del Duca, Vittorio. A Subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: Regularization of doubly-real emissions. *JHEP*, 0701:070, 2007.
- [14] Szőr Zoltán. Hadronsugár hatáskeresztmetszetek nagy pontosságú számítása. szakdolgozat, Debreceni Egyetem, Kísérleti Fizikai Tanszék, 2012.
- [15] Szőr Zoltán. Hármass hadronzár keletkezése elektron-pozitron szétsugárzásban. diplomamunka, Debreceni Egyetem, Kísérleti Fizikai Tanszék, 2014.
- [16] Trócsányi Zoltán. Kvantumtérelmélet. Egyetemi jegyzet, 1991.
- [17] Trócsányi Zoltán. Quantum field theory II: Non-abelian gauge theories in the Standard Model. Egyetemi jegyzet, 2007.
- [18] Wikipedia. Goodness of fit. http://en.wikipedia.org/wiki/Goodness_of_fit.

Függelék

A. Kutatási feladat

Kutatásunk tárgya az elektron-pozitron ütköztetések során keletkező hadrondzsetek hatáskeresztmetszetének második sugárzási korrekciójának kiszámítása. A számolás perturbatív módon végezhető a szín-kölcsönhatás kvantumelméletében, a kvantumszíndinamikában. A perturbatív sorfejtési tagokban megjelennek infra-vörös divergenciák, melyeket el kell távolítani, azonban erre még nem létezik egyértelmű módszer. A témavezetőm, *Trócsányi Zoltán* által fejlesztett levonási séma segítségével ez feladat megoldható, azonban ehhez szükség van több száz darab bonyolult integrál többszöri kiszámítására. Ezt elkerülendő közelítést célszerű alkalmazni, melynek kidolgozását én kaptam feladatul. Munkám során kifejtettem egy illesztési algoritmust, mely segítségével a nehezen számolható képletek egyszerűen és gyorsan kiértékelhető függvényekre cserélhetőek le. A kinematikai változók egy rácsán numerikusan kiértékelt integrálokat legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva illesztettem meg. A módszert a mester integrálok egy- és kétváltozós esetein, valamint az ezekből felépített $\mathbf{I}_2$ szín-operátoron is kipróbáltam. Előbbin átlagosan 10^{-4} -es relatív pontosságot tudtam elérni, míg a második esetben ez az érték $10^{-2}, 5 \cdot 10^{-3}$, amely azonban javíthatónak tűnik. A jelenlegi eredményeket és a további fejlesztéseket felhasználva a módszer segítségével képesek leszünk a sugárzási korrekció egyszerű kiszámolására, mely jelenleg még nem ismert eredmény. Később ez felhasználható proton-proton ütköztetési folyamatok számolásában is, mely ütköztetések a svájci CERN LHC gyorsítójában jelenleg is zajlanak.

B. A TDK és a diplomadolgozat összehasonlítása

Végzős MSc-s hallgatóként diplomamunkámat *Hármas hadrondzset keletkezése elektron-pozitron ütköztetésben* [15] címmel írtam meg Trócsányi Zoltán témavezetésével a 2013/2014-es tanév tavaszi félévében.

A diplomamunka első felében bemutatom a kutatási területünk alapjait képező kvantummezőelméletet, a kvantum-színdinamikát. Ezt követően a perturbációs számítás második rendjében végzett levonási sémát ismertetem. Feladatom az egyik levonási tagban megjelenő $\mathbf{I}_2$ szín-operátor matematikai kifejezésének számítógépbe történő pontos és ellenőrzött beprogramozása volt, mely elengedhetetlen az operátor egy adott pontbeli numerikus és analitikus kifejezésének meghatározásához. Ismert analitikus képletekkel történő összevetéssel, valamint a témavezetőmmel egymástól függetlenül végzett számolások összehasonlításával meggyőződhattünk arról, hogy a kód megfelelően működik és később használható más feladatokban, mint például jelen dolgozatban az $\mathbf{I}_2$ értékének kiszámolásához a mester integrálok eredményeiből. Emellett írtam még saját két C++ programot, melyek a numerikus integrálási eredmények nagy adathalmazának automatikus mozgatását és szükséges formázását végzik az integrálásra használt SecDec és az operátort összerakó Mathematica kód között.

Mivel a két dolgozat elméleti kerete azonos, ezért az elméleti háttérbe való bevezetés fejezetei megegyeznek. Azonban az ezt követő fejezetek eltérőek: a diplomamunkában az $\mathbf{I}_2$ operátor részletes szerkezetével és annak számítógépes implementálásával, valamint egyéb programozási feladatokkal foglalkozom; míg a TDK dolgozatban egy technikai fejlesztés, egy kidolgozott illesztési módszer általános bemutatásával és ellenőrzésével.