

Három hadronzápor keletkezése elektron-pozitron szétsugárzásban

Szőr Zoltán

Fizikus MSc Diplomamunka

Témavezető: prof. Trócsányi Zoltán

Kísérleti Fizikai Tanszék

Debreceni Egyetem

2014

Tartalomjegyzék

1. Előszó	2
2. Elméleti háttér	3
2.1. A standard modell alapjai	3
2.2. Az erős kölcsönhatás	5
2.3. Perturbációs számítás a kvantum-színdinamikában	6
3. Hadrondzset hatáskeresztmetszetek	9
3.1. Teljes hatáskeresztmetszet	10
3.2. Differenciális hatáskeresztmetszet	13
3.3. Az infravörös-divergenciák gyökerei	14
3.4. Levonási sémák	15
4. Hadrondzset hatáskeresztmetszet NNLO rendben	16
4.1. Egy levonási séma NNLO rendben	17
4.2. Az I_2 operátor szerkezete	17
5. Az I_2 operátor implementációja	23
5.1. A program ellenőrzése	25
5.2. Hibaterjedés	26
6. Segédprogramok	26
6.1. A MakeAllRes program	26
6.2. A TransDat program	27
7. Összefoglalás	28
8. Köszönetnyilvánítás	28
9. Hivatkozások	29

1. Előszó

Napjainkban a fizika egyik izgalmas és új felfedezésekkel kecsegtető ága a részecskefizika. A 2012-es évben nagy felfedezés született ezen a területen, megtalálták a *Higgs-bozont*, így felkerült a korona az elemi világot leíró elméletre, a *standard modellre*. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy készen lennénk, ugyanis több jelenséget is ismerünk, melyek nem férnek bele ebbe a keretbe: ilyen például a neutrínók tömege, mely a standard modellben zérus, azonban a *neutrínó-oszcilláció* jelensége miatt mégis kell, hogy rendelkezzenek vele (még ha az igen-igen kicsi is). Másik példa a világegyetem jelenlegi felépítésének kialakulásában nagy szerepet játszó, úgynevezett *sötét anyag*, vagy a világegyetem gyorsuló tágulásáért felelős *sötét energia*¹. A részecskefizikában ezeken túl még több jelenség is található, melyek kérdései megoldatlanok, illetve zavarják a szépségérzetünket.

Az egyetemen végzett munkám alatt elektron-pozitron ütköztetések alkalmával keletkező, úgynevezett hadrondzsetek hatáskeresztmetszetének elméleti számításával foglalkoztam. *Trócsányi Zoltán* vezetésével csatlakoztam be ebbe a kutatásba, mely egy meglehetősen nehéz feladat, és rengeteg technikai munkát tartalmaz. Jómagam jelenleg még főleg programozási feladatokat végzek, a számítások automatizálásán, valamint egy illesztési módszer kidolgozásán dolgozom. Jelen dolgozatom az előbbivel foglalkozik.

Kezdetben egy rövid bevezetést nyújtok a számítások mögött rejlő elméletbe, kihagyva a bonyolult matematikai levezetéseket és csak a főbb mozzanatok egyszerűsített formájára koncentrálva. Így végül eljutunk a munkánk részét képező problémához, a hadrondzset hatáskeresztmetszet sugárzási korrekcióinak meghatározásához. Végül bemutatom a programozási feladatot és annak megvalósítását. A dolgozat egészében a részecskefizikában szokásos $c = \hbar = 1$ természetes egységrendszert fogom használni.

¹Mind a sötét anyag, mind sötét energia csupán hangzatos elnevezések egy-egy jelenség olyan oksági forrásaira, melyeket jelenleg még nem ismerünk, nem kell mögójük misztikus dolgokat gondolnunk.

2. Elméleti háttér

2.1. A standard modell alapjai

A standard modell a részecskefizika jelenleg használt érvényes elmélete, mely leírja az elemi részecskék fizikáját és köztük működő kölcsönhatásokból hármat: az erőset, az elektromágnesest és a gyengét. A gravitáció kilóg a sorból, gyengesége miatt teljesen elhanyagolható ezen a területen. Az anyagot és a kölcsönhatásokat egyaránt *részecske-hullám* tulajdonsággal rendelkező „részecskékkel” írjuk le, melynek fizikai elméletét kvantummezőméletnek² nevezzük. A kvantummezőelmélet fizikai mezők kvantumelméleti leírására alkalmas. A mezők gerjesztéseit nevezzük részecskéknek, az anyagmezők részecskéi a fermionok, míg a kölcsönhatási mezők részecskéi a bozonok közé tartoznak. A standard modellben 12 darab fermion és azok antirészecskéi és 12 darab bozon, valamint a Higgs-bozon található³. A fermionokat az 1. táblázatban láthatjuk, a felső két sor a kvarkokat tartalmazza, míg az alsó két sor a leptonokat. A kvarkok mindhárom fajtajú kölcsönhatásban részt vesznek, míg a leptonok közül az elektron, a müon és a tau részecskék csak elektromágnesesen és gyengén hatnak kölcsön, a neutrínók pedig kizárólag gyengén. Az elemi fermionokból felépíthetők más összetettebb részecskék is. A kölcsönhatásokat közvetítő részecskéket a 2. táblázat sorolja föl. Az elektromágneses kölcsönhatás részecskéje a jól ismert foton (γ), az erőse a nyolc darab gluon (g), a gyengéé pedig a W^- , W^+ és a Z^0 bozonok.

u	c	t
d	s	b
e	μ	τ
ν_e	ν_μ	ν_τ

1. táblázat. Elemi fermionok: felső két sor: kvarkok; alsó két sor: leptonok

²A magyar nevezéktanban elterjedten használt a kvantumtérelmélet elnevezés is.

³Az összeszámlálás valójában több módon is lehetséges attól függően, hogy még milyen tulajdonságok alapján különböztetjük meg a részecskéket.

elektromágneses	erős	gyenge
γ	8 db g	W^-, W^+, Z^0

2. táblázat. Elemi bozonok

A kölcsönhatásokat a standard modell lokális szimmetriákból vezeti le. Kvantummezőelméletben egy fizikai rendszert az $\mathcal{L}$ *Lagrange-sűrűségfüggvény* felírásával adunk meg [11]. A rendszeren transzformációkat végezhetünk el, mint például a koordinátarendszer elforgatása, az idő tükrözése, de vannak a téridőhöz nem köthető úgynevezett *belső transzformációk* is. Ilyen például az elektromos töltés tükrözése. Egy transzformáció akkor lesz szimmetriája a rendszernek, ha azt elvégezve a Lagrange-sűrűségfüggvényen az $\mathcal{L}$ alakja ugyanaz marad. A transzformáció globális, ha a téridő minden pontjában ugyanakkora mértékben változtatunk és lokális ha minden egyes pontban más és más ez az érték. A globális szimmetriák megmaradó „töltésekhez” (itt a töltést általánosan értjük, mely lehet tetszőleges fizikai mennyiség) vezetnek a *Noether-tétel* értelmében. Globális szimmetriát lokálissá téve pedig kölcsönhatást kapunk a fermionok között, mivel a lokális szimmetria plusz bozonikus mezők bevezetésével érhető el. Az elektromágneses kölcsönhatás az $U(1)$ csoportba tartozó transzformációkkal szembeni lokális szimmetriából ered, az erős kölcsönhatás pedig az $SU(3)^4$ lokális szimmetriából. Azt gondolhatnánk, hogy a gyenge kölcsönhatás is hasonlóan működik, azonban vele gondba ütközünk. A gyenge kölcsönhatás szimmetriacsoportja az $SU(2)$, azonban ebből levezetve a kölcsönhatást nem a ténylegesen megfigyelhető fizikát kapjuk. A lokális szimmetriához szükséges bozonmezők részecskéi ugyanis nem rendelkeznek tömeggel. Viszont a gyenge kölcsönhatás három bozonja igen, méghozzá elég jelentőssel! Ezt a problémát oldja meg a *BEH-mechanizmus* (Brout-Englert-Higgs), mely bevezet egy új skalármezőt, megsértve ezzel a szimmetriát és a mechanizmus során tömeget ad a három gyenge bozonnak. Emellett a BEH-mező az elemi fermionokkal is kölcsönhat és tömeget generál számukra. E skalármező gerjesztése a Higgs-bozon, mely megtalálása oly sokáig váratott magára.

⁴Az $SU(N)$ az $N \times N$ -es speciális unitér mátrixok csoportját jelöli.

A standard modell Lagrange-sűrűségfüggvénye tömören és egyszerűsítve az

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
& + i\bar{\psi}\not{D}\psi + h.c. \\
& + \psi_i y_{ij} \psi_j \phi + h.c. \\
& + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

alakban írhatjuk fel. Az első sor tartalmazza a bozonmezők kinetikus tagjait, a második a fermionok és a bozonok kölcsönhatását, a harmadik a fermionok tömegnyerését a BEH-mező által, az utolsó pedig a Φ BEH-mező és a bozonmenzók kölcsönhatását. Ez a függvény lokálisan (és globálisan is) invariáns az $SU(3)_C \otimes (SU(2)_L \otimes U(1)_Y)$ csoport transzformációival szemben. A C a színekölcsönhatásra utal, az L a gyenge kölcsönhatás azon tulajdonságára, hogy csak balkezes részecskék és jobbkezes antirészecskék vesznek benne részt, az Y pedig a gyenge hipertöltést jelöli, mely az elektromágneses töltés és a gyenge izospin kombinációjából adódik. A zárójellel jelölt részt nevezzük a standard modell szimmetriasértő részének, melyhez a BEH-mechanizmus kapcsolódik; míg az erős kölcsönhatást a standard modell tiszta részének.

2.2. Az erős kölcsönhatás

A négy alapvető kölcsönhatás közül az erős kölcsönhatás a legerősebb, melynek kvantumelméletét *kvantum-színdinamikának* (QCD - Quantum-ChromoDynamics) hívjuk [12]. Az erős kölcsönhatás felelős az atommagot felépítő protonok és neutronok létéért, valamint azért, hogy az atommag egyáltalán egyben tud maradni és az elektromágneses taszítás miatt nem lökik szét egymást a protonok. Az erős kölcsönhatásban az elemi részecskék közül kizárólag csak a kvarkok vesznek részt. A kölcsönhatás töltése a *színtöltés*⁵, melynek értéke lehet R, G és B , valamint ezek antiszínei. A három alapszín, vagy szín és antiszín összege színtelent eredményez. A színalgebrát leíró matematika az $SU(3)$ csoport algebrája, mely csoportból vett transzformációkkal szemben a standard modell Lagrange-sűrűségfüggvénye globálisan és lokálisan is invariáns. A kölcsönhatást közvetítő bozonok, a gluonok is rendelkeznek színtöltéssel

⁵Ez csupán egy elnevezés, senki ne gondolja azt, hogy egy kvark ténylegesen kék vagy zöld.

(kétszer akkorával), emiatt a kvark-gluon kölcsönhatás mellett gluon önkölcsönhatás is jelen van. Ez igen nagy különbség szemben az elektromágneses kölcsönhatással, ahol a foton nem rendelkezik elektromos töltéssel. Ennek eredménye az úgynevezett *kvarkbezárás* jelensége, ami miatt a kvarkok alacsony energián (≈ 300 MeV alatt) kizárólag kötött állapotban, összetett részecskék formájában léteznek és ezért még soha senki nem figyelt meg szabad kvarkot a természetben. A tapasztalat szerint csupán három kvarkból és egy-egy kvarkból és antikvarkból felépülő részecskék léteznek, melyek színtelenek.⁶ A három kvarkból felépülő részecskéket *barionoknak*, míg a kvark-antikvark állapotokat *mezonoknak* nevezzük. Barion például a proton és a neutron; mezon pedig a pion. Összefoglaló nevén *hadronoknak* hívjuk őket.

2.3. Perturbációszámítás a kvantum-színdinamikában

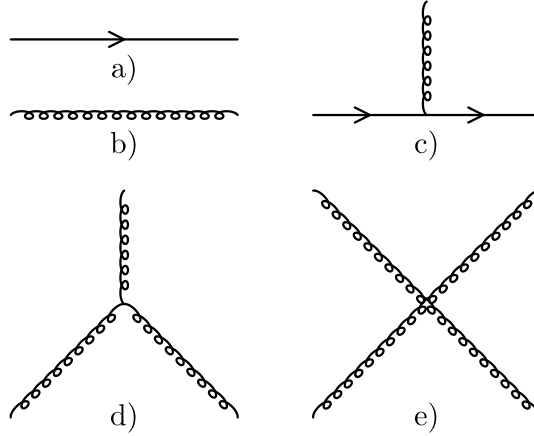
A részecskefizikában az egyes folyamatok jellemzésére egyik leggyakrabban használt fizikai mennyiség a hatáskeresztmetszet, mely a reakció valószínűségével áll kapcsolatban. Az ehhez vezető könnyebb út miatt ezen a területen a *Feynman-féle pálya-integrálos* kvantálást alkalmazzák. Ennek nagy előnye, hogy klasszikus mezőelmélet szintjén felírt $\mathcal{L}$ függvény, mely tartalmazza a szükséges szimmetriákat, kvantálható. Definiálhatunk egy $Z[J]$ generáló funkcionált az alábbi módon:

$$Z[J] := \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d^4x (\mathcal{L}(\phi) + J\phi) \right\} \quad (2.2)$$

A fenti kifejezésből ezután a funkcionálanalízis eszköztárával tetszőleges részecskefizikai folyamatot lezármaztathatunk, melyet az átmeneti mátrixelem jellemez. Számolásuk kölcsönhatás esetén perturbációszámítással történhet, azaz a $g \ll 1$ csatolási állandó szerint sorbafejtjük a kifejezést. A tagokat csak $\mathcal{O}(g^n)$ rendig vesszük figyelembe, ahol n jelöli a perturbációszámítás rendjét. Emellett szokásos jelölés az *LO* (leading-order), *NLO* (next-to-leading-order) és általánosan $N^m LO$.

A perturbációszámítás során megjelenő matematikai kifejezések helyettesíthetők *Feynman-gráfokkal*, melyek átláthatóbbá és szemléletessé teszik a számolásokat. A felírt $\mathcal{L}$ függvényből a Feynman-szabályok alapján megkaphatjuk az adott

⁶Az LHCb kísérlet közben megfigyelt egy ezektől eltérő egzotikus állapotot. Bővebben: arxiv.org/abs/1404.1903

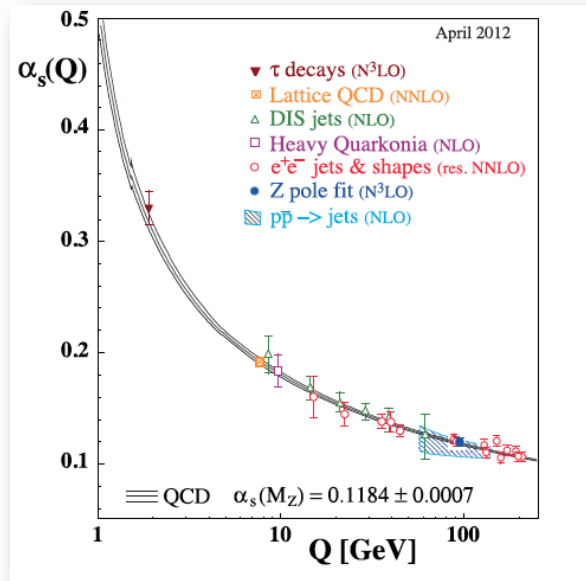


1. ábra. QCD gráfok

elmélet alapgráfjait, melyekből azután tetszőleges folyamat ábrája felépíthető. A kvantum-színdinamika esetén ezek az alapgráfok a következők (1. ábra): *a)* fermion propagátor; *b)* gluon propagátor; *c)* kvark-gluon kölcsönhatás; *d)* 3 gluon kölcsönhatás; *e)* 4 gluon kölcsönhatás.

A gráfok között megjelenhetnek hurkok is, ezek *virtuális részecskéket* jelentenek. A korrekciók diagramjaiban az elemi folyamat ábrájához képest plusz részecske vonalak és hurkok tűnnek föl. Fura tény, hogy a virtuális részecskék is járulékot adnak az átmeneti amplitudóhoz, teljes elhanyagolásuk esetén pontatlan eredményt kapunk. Egy virtuális részecske impulzusa azonban tetszőleges értékű lehet, így a matematikai kifejezésekben az impulzus zérustól végtelenig vett integrálja szerepel. Ez több gráf esetében is végtelent eredményez a felső határ miatt, ezt hívjuk ultraibolya- (UV-) divergenciának. Tudjuk azonban, hogy a számolandó fizikai mennyiségek véges értékűek, hiszen a kísérletek véges számú részecskét észlelnek. Az értelmetlen végtelen járulékokat tehát el kell távolítani valamilyen módon. A probléma megoldásához először *regularizációt* alkalmazunk, így a végtelenek viselkedése ismertté és matematikailag kezelhetővé válik. A többféle lehetséges módszer közül a perturbatív QCD a dimenzionális regularizációt használja, mely során a téridő $d = 4$ dimenzió-

ját $d = 4 - 2\epsilon$ ($\epsilon > 0$) értékűre változtatjuk. Ekkor a végtelenek ϵ^{-n} típusú pólusok formájában jelennek meg. A pólusok ezt követően eltávolíthatóak úgy, hogy levonjuk őket a Lagrange-sűrűség eredeti alakjából. A divergens gráfok formuláiban az $\mathcal{L}$ -ben lévő tagokkal arányos kifejezések jelennek meg, így beleolvaszthatóak egy, az adott tagot szorzó állandóba. Ez a *renormálás* módszere, mely során az egyes fizikai mennyiségek újraskálázódnak [12, 5]. A renormálást a perturbációs számítás minden rendjében újra el kell végezni, eggyel feljebb lépve a korábban már renormált $\mathcal{L}$ -függvényből kell kiindulni. A renormálás következményeként a fizikai mennyiségek – mint például a csatolási állandó, vagy a tömeg – energiafüggővé válnak, azaz értékük a különböző energiájú folyamatokban más és más. A csatolási állandó viselkedését tanulmányozva kiderül, hogy a QCD aszimptotikusan szabad elmélet: az energiával végtelenbe tartva a csatolás erőssége nullához tart (2. ábra). Így magasabb energián ténylegesen alkalmazhatjuk a perturbációs számítást, melynek kérdéséről eddig hallgattunk.



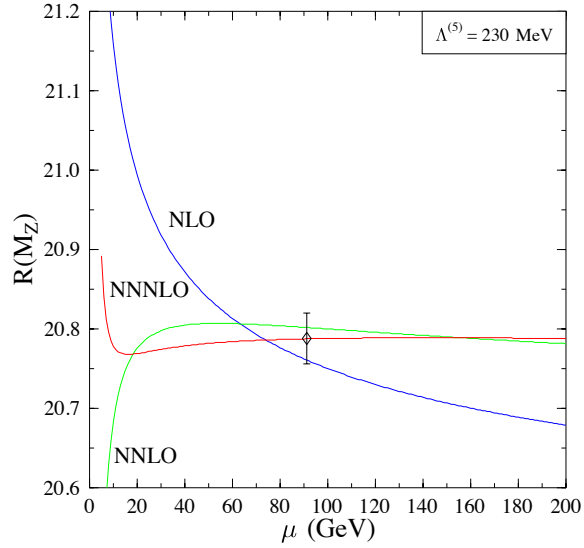
2. ábra. Az erős csatolási állandó energiafüggése

A napjainkban működő részecskegyorsítók energiáján azonban az erős csatolás nem elegendően kicsi. A 2. ábrán látható, hogy még 100 GeV környékén sem éri el az erős csatolás α_S értéke⁷ a 0.1-et, és a csökkenés mértéke egyre alacsonyabb. Első pillantásra ezért a QCD értelmetlennek is tűnhet, az LO rendben végzett számolás csak egy durva becslés a kísérleti adatokra, mindenképp szükség van az első sugárzási korrekció (melynek értéke akár 70 % is lehet az LO-hoz képest!) figyelembevételére. Még egy tagot hozzáadva, azaz NNLO szinten az elmélet már szerencsére perturbatíván kezd viselkedni és egyezést ad a kísérleti eredményekkel. Például a 3. ábrán a Z^0 gyenge bozon tömegével egyenlő energián megmért *hadronos R arány* μ skálafüggését láthatjuk különböző perturbációs rendekben. Az R arány megadja, hogy e^-e^+ ütközés esetén $\mu^-\mu^+$ végállapothoz képest milyen gyakran keletkeznek hadronos végállapotok. A μ skála egy a renormálás során az elméletbe bevezetett *nem-fizikai* skála, a mérhető mennyiségek függetlenek ettől. Mivel perturbációs számítás esetén mindig elhanyagolunk tagokat, ezért bizonyos fokig mindig bent marad a μ függés, azonban a rend növelésével ennek egyre gyengébbnek kell lennie. Azt gondolhatnánk tehát, hogy akkor minden szükséges folyamatot kiszámolunk legalább NNLO rendben, azonban majd láthatjuk, hogy ez a gyakorlatban nem ilyen egyszerű. A lehetséges gráfok száma és a befektetendő munka rohamosan nő a magasabb rendű korrekciók figyelembevételével.

3. Hadrondzset hatáskeresztmetszetek

Láttuk, hogy a renormálás segítségével az UV-divergenciák eltávolíthatóak, így egy kezelhető elméletet kapunk és végre nekiállhatunk a számolásnak. Ettől a fejezettől kezdve már a kutatásom tárgyát képező folyamat példáján haladunk tovább, ez pedig az elektron-pozitron ütköztetések során keletkező hadrondzsetek. A hadronok, mint már korábban említettem, kvarkokból felépülő részecskék, hadrondzsetnek pedig ilyen részecskék egy irányba haladó csoportját nevezzük (4. ábra). Dzsetből mindig legalább kettő keletkezik az impulzusmegmaradás miatt, azonban felső korlát nincs (habár a valószínűség a dzset számmal egyre csökken).

⁷ $\alpha_S = \frac{g_S^2}{4\pi}$



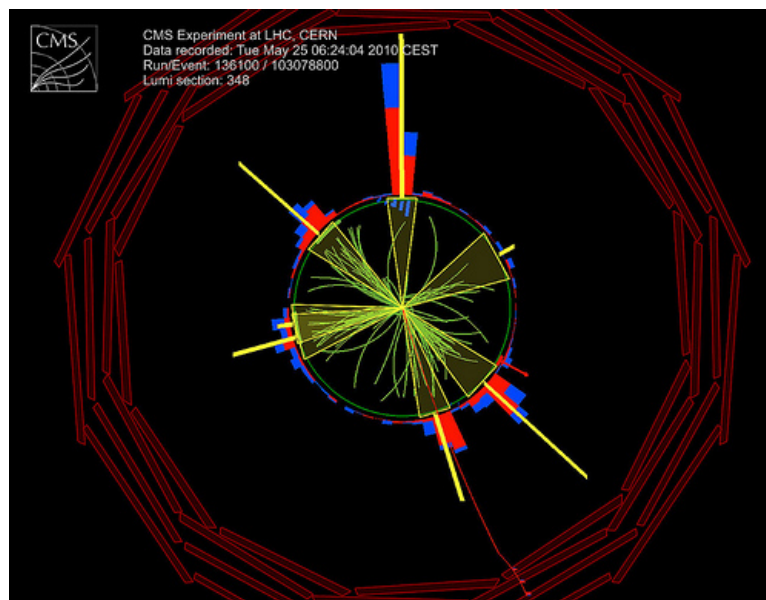
3. ábra. A hadronikus R arány μ skálafüggése

Probléma, hogy szabad kvarkot vagy gluont (összefoglaló néven partont) még senki nem mért a természetben és a QCD csak a partonokkal való számolásokra ad útmutatást, hadronokra nem. Jelenleg a hadronizációnak, azaz annak folyamatnak, mikor a szabad kvarkok összetett részecskéket formálnak, csak tapasztalati modellje van. Esetünkben ezt el is hanyagoljuk és egy dzsetet egy partonnak feleltetünk meg. Ezt nevezik *hadron-parton* dualitásnak. Például két dzsetet a $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$ folyamattal írjuk le a perturbációs számítás legalacsonyabb rendjében (5. ábra).

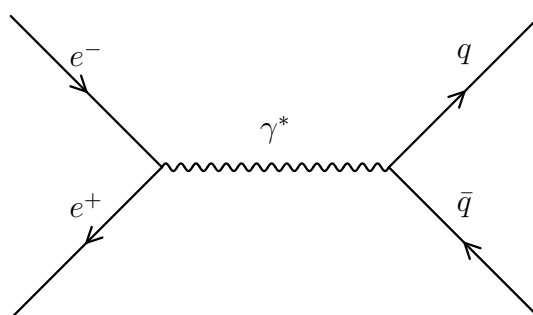
3.1. Teljes hatáskeresztmetszet

A szórási folyamatok esetén az legjellemzőbb fizikai mennyiség a szórási hatáskeresztmetszet. A teljes hatáskeresztmetszet arányos a hadronos végállapotok keletkezésének valószínűségével, a luminozitással megszorozva megkapjuk a szórt részecskék idő- és térfogategységenkénti számát. A teljes hatáskeresztmetszetet kvantummezőelmélet esetén a következő formulával számolhatjuk:

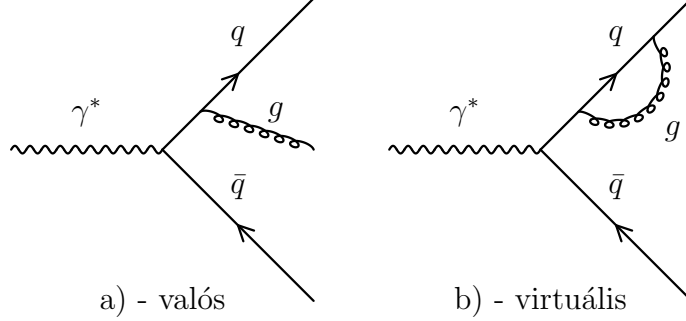
$$\sigma_{teljes} = \frac{1}{2s} \int d\phi_n(p_1, \dots, p_n; Q) \frac{1}{S} \sum_{spin} |\mathcal{M}_n|^2, \quad (3.1)$$



4. ábra. Hat dzsetes esemény az LHC CMS detektorában



5. ábra. $e^- e^+ \rightarrow q \bar{q}$



6. ábra. NLO korrekciós gráfok

ahol Q a teljes bejövő négyesimpulzus, $s = Q^2$, S a spinek átlagolásából és szimetriából származó faktor. $|\mathcal{M}_n|^2$ tartalmazza az adott folyamat összes lehetséges Feynman-gráfját (átmeneti mátrixelemét), $d\phi_n$ pedig az n darab részecskéből álló végállapot fázistere:

$$d\phi_n(p_1, \dots, p_n; Q) = (2\pi)^d \delta^d\left(Q^\mu - \sum_{j=1}^n p_j^\mu\right) \prod_{j=1}^n \frac{d^d p_j}{(2\pi)^{d-1}} \delta_+(p_j^2 - m_j^2) \quad (3.2)$$

Itt $d = 4 - 2\epsilon$ a dimenziószám, $\delta^d\left(Q^\mu - \sum_{j=1}^n p_j^\mu\right)$ a négyesimpulzus megmaradását fejezi ki, δ_+ pedig arra utal, hogy csak a pozitív energiás megoldásokat tekintjük.

Elektron-positron ütköztetés esetén a teljes hatáskeresztmetszet felírható szeparált alakban: egy $L_{\mu\nu}$ leptontenzor és egy $H^{\mu\nu}$ hadronikus tenzor szorzataként.

$$\sigma_{teljes}(e^- e^+ \rightarrow \text{hadronok}) = \frac{1}{s^2} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \quad (3.3)$$

A leptontenzor tartalmazza a kizárólag elektromágneses részt, mely a perturbációszámítás során végig azonos marad, a hadrontenzor pedig a QCD folyamatokat, melyeket sorfejtünk. LO szinten a már említett 5. ábrával számolunk. NLO szinten $H^{\mu\nu}$ kifejezésben megjelennek a H_V virtuális és H_R valós korrekciós tagok, melyek a 6. ábrán látható gráfokból származnak.

A valós korrekcióban egy plusz részecske, egy gluon jelenik meg a végállapotban, míg virtuális esetben egy gluon hurok. Mindkét tag tartalmaz egy $\frac{1}{(p_i + p_j)^2}$ alakú

kifejezést, mely végtelenhez vezet a $p_i, p_j \rightarrow 0$ határesetben. Az eltávolított UV-divergenciák után egy újabb fajtájú végtelen, az infravörös- (IR-) divergencia marad, melyet ismét el kell távolítanunk a mátrixelemekből. Erre is több módszer lehetséges és ismét alkalmazható a dimenzionális regularizáció. Miután elvégeztük a renormálást, eltüntettük a pólusokat és vettük a $d = 4 - 2\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} d = 4$ hatáértéket, azután a dimenziószámot ismét $d = 4 - 2\epsilon$ értékűre folytatjuk, ezúttal azonban $\epsilon < 0$ választással. Így a végtelenek ismét ϵ^{-n} pólusok formáiban jelennek meg. Ha a szükséges számolásokat végigcsináljuk, akkor kiderül, hogy mind H_R , mind H_V azonos alakú pólusokat tartalmaz, ráadásul ellentétes előjellel!

$$H_R = \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + \frac{19}{2} - \pi^2 + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3.4)$$

$$H_V = -\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 + \pi^2 + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3.5)$$

Tehát a két kifejezés összege eltünteti a végteleneket $H^{\mu\nu}$ -ben és végül értelmes eredményt kapunk [12].

3.2. Differenciális hatáskeresztmetszet

Az előző alfejezetben felvázolt módszerrel megkaphatjuk a teljes hatáskeresztmetszet értékét. Ez elégséges, ha csak a végállapotok számáról és a folyamat valószínűségéről akarunk adatot. Ha viszont már a végállapotok részecskéinek térbeli szerkezete, vagy valamilyen változó szerinti eloszlása is érdekes, akkor a σ_{teljes} mennyiség nem lesz megfelelő. Az ilyen esetekre használjuk a *differenciális hatáskeresztmetszet* fogalmát. A $\frac{d\sigma(f)}{df}df$ arányos a szórt részecskék f fizikai mennyiség $[f, f + df]$ tartományába eső keletkezési valószínűségével. A végállapotok jellemzésére *alakparamétereket* használunk, mint például a döfet(thrust), szfericitás, aplanaritás. Általánosan ezt egy $J_m^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ *dzsetfüggvény* formájában írhatjuk melynek konkrét megtestesítője lehet valamely fentebb említett alakparaméter. Perturbatív kvantumszíndinamikában azonban csak olyan alakparaméterekkel tehetünk elméleti jóslatokat, melyek infravörös végesek. Ekkor az alakparaméterben differenciális hatáskeresztmetszet

$$d\sigma = \frac{1}{2s} \int d\phi_n |\mathcal{M}_n|^2 J_m^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \quad (3.6)$$

alakot ölti. A korábban már említett döfetet a (3.7) képlettel definiáljuk, melyről belátható, hogy egy IR-véges mennyiség.

$$T(\{p_i\}) = \max_{\vec{n}} \frac{\sum_i |\vec{p}_i \vec{n}|}{\sum |\vec{p}_i|} \quad (3.7)$$

Így például a dzsetfüggvény lehet egy Dirac-delta: $J_m = \delta(T - T(\{p_i\}))$.

Most alkalmazzuk az új módszert a teljes hatáskeresztmetszet esetén számolt $e^-e^+ \rightarrow \text{hadronok}$ folyamatra. Teljes hatáskeresztmetszet esetén az első sugárzási korrekció

$$\int d\sigma^{NLO} = \int d\sigma_3^{NLO,R} + \int d\sigma_2^{NLO,V} \quad (3.8)$$

alakban is felírható, ahol az integráljel a fázistérre vett integrálásra utal, az alsó index száma, pedig a végállapotban lévő részecskék számára (az R valós korrekció tartalmaz egy plusz gluont!). Hogy differenciális hatáskeresztmetszetet kapjunk, ebbe egyszerűen beillesztjük a megfelelő dzsetfüggvényeket:

$$\int d\sigma^{NLO} = \int d\sigma_3^{NLO,R} J_3 + \int d\sigma_2^{NLO,V} J_2 \quad (3.9)$$

Itt máris felfigyelhetünk arra, hogy a valós és virtuális korrekciókat nem tudjuk egyszerűen összerakni úgy, hogy az összegük véges legyen, mivel két különböző dzsetfüggvényt tartalmaznak. Mielőtt továbblépnénk vizsgáljuk meg, hogy milyen folyamatok okozzák az infravörös-végtelen járulékokat.

3.3. Az infravörös-divergenciák gyökerei

Korábban említettem, hogy az átmeneti mátrixelemben megjelenik egy $\frac{1}{(p_i + p_j)^2}$ alakú tag. Ha elvégezzük a négyzetreemelés, akkor $(p_i + p_j)^2 = 2p_i p_j$, ami két négyesvektor szorzata. Itt kihasználtuk, hogy a végállapotban megjelenő részecskék *tömeghéljon* vannak, azaz ki kell elégítsék a $p^2 = m^2$ feltételt. Gluonok esetén $m = 0$ mindig fennáll, kvarkok esetén pedig élhetünk a $m \approx 0$ közelítéssel (mivel a tömeg eltűnik növekvő energiákon) perturbatív QCD esetén. Az ebből a közelítésből származó hiba jóval kisebb, mint amely a sugárzási korrekciók elhanyagolásából származik, viszont kényelmesebbé teszi a számolást. Írjuk át az impulzusokat tartalmazó kifejezést más változókkal kifejezve:

$$2p_i p_j = 2E_i E_j (1 - \cos \theta) \approx E_i E_j \theta^2, \quad (3.10)$$

ahol E_i és E_j az i és j részecske energiái, θ pedig a köztük bezárt szög. Vegyük például azt az esetet, mikor egy kvark kibocsájt egy gluont (6.a ábra). A $\frac{1}{E_k E_g \theta^2}$ tag divergál, ha $E_g \rightarrow 0$ vagy $\theta \rightarrow 0$ (esetleg a kettő egyszerre) határeseteket vesszük. Az elsőt nevezzük *lág*y esetnek, míg a másodikat *kollineárisnak* (párhuzamosnak). Fennállhatna még divergencia $E_k \rightarrow 0$ esetben is, azonban más számlálóban lévő tagok ezt mindig kompenzálják, így a lág kvark határérték integrálja mindig véges lesz. Ha elképzeljük a lág és kollineáris határeseteket, akkor a két részecske határesetben megkülönböztethetetlen lesz a detektorban, így olyan mintha csak egyet látnánk. Ez lesz az egyik kulcs a végtelen tagok kezelésére.

3.4. Levonási sémák

Térjünk vissza a (3.9) egyenlethez. A kifejezés véges, kivéve a lág és kollineáris határeseteket, amikor a különböző számú részecskékre vonatkozó dzsetfüggvények miatt nem tudjuk összasadni a két korrekciós tagot, így a divergenciák nem esnek ki. Most, hogy már értjük az IR-divergenciák okait kiköthetjük, hogy csak olyan dzsetfüggvényeket használhatunk, melyek – ahogy már korábban említettem – IR-végesek, és teljesítik a

$$\lim_{\text{lág, koll.}} J_3 \rightarrow J_2 \quad (3.11)$$

feltételt. Ekkor a fentebbi határérték esetén a hatáskeresztmetszet végessé tehető. Gyakorlatban ezt úgy tesszük, hogy az eredeti kifejezéshez hozzáadjuk, majd le is vonjuk ugyanazt a tagot. NLO szinten ez a

$$d\sigma^{NLO} = d\sigma_3^{NLO,R} J_3 - d\sigma_3^{NLO,A} J_2 + d\sigma_2^{NLO,V} J_2 + \left(\int_1 d\sigma_3^{NLO,A} \right) J_2 \quad (3.12)$$

formában írható el, ahol elhagytuk a korábban feltüntetett teljes fázistérre vett integrálást. A $d\sigma^{NLO,A}$ a közelítő hatáskeresztmetszet, melyet 3 darab részecskékre írtunk fel, ezért a második tag esetében egy részecske fázisterére integrálnunk kell. Megmutatható, hogy m részecskés végállapot esetén

$$d\sigma_{m+1}^A = d\sigma_m^B \otimes I_m(\epsilon) \quad (3.13)$$

kapcsolat áll fent, ahol B a Born-közelítésre utal (LO). $I_m(\epsilon)$ -t *szín-operátornak* nevezzük, mely független a dzsetfüggvénytől. Így végül a levonási trükk olyan tet-

szóleges dzsetfüggvényre használható, amely kielégíti a szükséges követelményeket. Összefoglalva:

$$\int_m \left(d\sigma_m^V + \int_1 d\sigma_{m+1}^A \right) \Big|_{\epsilon=0} J_m \rightarrow \text{véges} \quad (3.14)$$

$$\int_{m+1} \left(d\sigma_{m+1}^R J_{m+1} - d\sigma_{m+1}^A J_m \right) \Big|_{\epsilon=0} \xrightarrow{\text{lágy, koll.}} \text{véges} \quad (3.15)$$

A levonást többféleképpen is meg lehet tenni, attól függően miként definiáljuk $d\sigma^A$ -t. Ez nem egyértelműen meghatározott feladat, több olyan lépést is tartalmaz, amelyet sokféle úton is el lehet végezni. Emiatt előfordulhat, hogy az ember csak nehezen ér el a végcélba.

4. Hadrondzset hatáskeresztmetszet NNLO rendben

Célünk az $e^-e^+ \rightarrow \text{hadronok}$ típusú folyamatok differenciális hatáskeresztmetszetének numerikus kiszámítása NNLO rendben. Az NLO esethez képest már több lehetséges tagot is figyelembe kell vennünk. Mint látni fogjuk, most többféle szín-operátor is megjelenik, melyeket külön meg kell határozunk. Ez sajnos nem egyszerű feladat, azonban egy jól megválasztott levonási logika esetén mindegyik szisztematikusan felépíthető és utána programozható. A hatáskeresztmetszet meghatározásához – mint láttuk korábban – integrálnunk kell az átmeneti mátrixelemet a teljes fázistéren. Ez tipikusan Monte Carlo integrálás segítségével történik, ami alatt $\mathcal{O}(10^5) - \mathcal{O}(10^6)$ nagyságrendű alkalommal kell az integrandust kiértékelnünk. Mivel az integrálandó kifejezés meglehetősen bonyolult, ezért ez a folyamat túlságosan is hosszú időt venne igénybe. Ezt elkerülendő közelítést szeretnénk alkalmazni, amihez szükséges, hogy a formulák számítógépen precízen be legyenek programozva.

Ebben a fejezetben bemutatom a *Somogyi Gábor*, *Trócsányi Zoltán* és *Vittorio Del Duca* által kidolgozott levonási algoritmust, valamint az általam beprogramozott I_2 operátor szerkezetét.

4.1. Egy levonási séma NNLO rendben

NNLO esetben a korrekci ok Feynman-gr fjaiban a vezető rendű, úgynevezett fagr fhoz képest két darab plusz részecske jelenik meg. Ezek adhatnak tisztán valós (RR), tisztán virtuális (VV)  s kevert (RV) j r l kokat is,  gy a teljes sug rzs i korrekció három tagból áll:

$$\sigma^{\text{NNLO}} = \int_{m+2} d\sigma_{m+2}^{\text{RR}} J_{m+2} + \int_{m+1} d\sigma_{m+1}^{\text{RV}} J_{m+1} + \int_m d\sigma_m^{\text{VV}} J_m. \quad (4.1)$$

A levonást ez esetben trükkösen kell elv gezn nk, ugyanis az egyes szingularitások átfedhetnek egymással,  gy könnyen bennemaradhatnak a hatáskeresztmetszetben nem kívánt kifejezések. A következőekben röviden leírt levonási algoritmust a [9, 10, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 6] publik ci okban olvashatjuk bővebben. Ezek alapján elvégezve a levonást az egyes tagokban, majd  jrarendezve őket, az  l bbi alakot kapjuk:

$$\sigma^{\text{NNLO}} = \int_{m+2} d\sigma_{m+2}^{\text{NNLO}} + \int_{m+1} d\sigma_{m+1}^{\text{NNLO}} + \int_m d\sigma_m^{\text{NNLO}}, \quad (4.2)$$

ahol az egyes kifejezések jelent sei:

$$d\sigma_{m+2}^{\text{NNLO}} = \left\{ d\sigma_{m+2}^{\text{RR}} J_{m+2} - d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_2} J_m - \left[d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_1} J_{m+1} - d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_{12}} J_m \right] \right\}_{\epsilon=0}, \quad (4.3)$$

$$d\sigma_{m+1}^{\text{NNLO}} = \left\{ \left[d\sigma_{m+1}^{\text{RV}} + \int_1 d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_1} \right] J_{m+1} - \left[d\sigma_{m+1}^{\text{RV},A_1} + \left(\int_1 d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_1} \right)^{A_1} \right] J_m \right\}_{\epsilon=0}, \quad (4.4)$$

$$d\sigma_m^{\text{NNLO}} = \left\{ d\sigma_m^{\text{VV}} + \int_2 \left[d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_2} - d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_{12}} \right] + \int_1 \left[d\sigma_{m+1}^{\text{RV},A_1} + \left(\int_1 d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_1} \right)^{A_1} \right] \right\}_{\epsilon=0} J_m. \quad (4.5)$$

Hasonlóan a (3.13) NLO rendbeli esethez itt is fennállnak azonos alakú összefüggések. Ezek közül a legbonyolultabb a $d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_2}$, mely felírható a következő formában:

$$\int_2 d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_2} = d\sigma_m^{\text{B}} \otimes \mathbf{I}_2^{(0)}(\{p\}_m; \epsilon). \quad (4.6)$$

4.2. Az $\mathbf{I}_2$ operátor szerkezete

A $d\sigma_{m+2}^{\text{RR},A_2}$ -ban megjelenő $\mathbf{I}_2$ sz n-operátor a kétszeresen valós (doubly unresolved) j r l kok lágy és kollineáris hat areseteit regulariz lja. K t valódi részecske megjelenése a végállapotban divergenciához vezethet az  l bbiakban:

- egy kollineáris parton hármass kibocsátása
- két kollineáris parton páros kibocsátása
- egy lágy gluon és egy kollineáris parton páros kibocsátása
- egy lágy kvark-antikvark páros kibocsátása
- két lágy gluon kibocsátása

A különböző lágy és kollineáris szingularitások azonban átfedhetnek egymással. Levonáskor ezért figyelni kell arra, hogy az átfedéseket is eltüntessünk, és semmit ne számoljunk kétszer. A logika az, hogy az operátort szétszedjük egymástól független, különálló tagokra, majd a szükséges számolások után az egészet újra összerakjuk és végeredményként egy „viszonylag” ⁸ egyszerű kifejezést kapunk. Az $\mathbf{I}_2$ operátort általánosan m darab dzset esetére következőképpen definiáljuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2^{(0)}(\{p\}_m; \epsilon) = & \left[\frac{\alpha_s}{2\pi} S_\epsilon \left(\frac{\mu^2}{Q^2} \right) \right]^2 \left\{ \sum_i \left[C_{2,i}^{(0)} \mathbf{T}_i^2 + \sum_{j \neq i} C_{2,ij}^{(0)} \mathbf{T}_j^2 \right] \mathbf{T}_i^2 \right. \\ & + \sum_l \sum_{j \neq l} \left[S_2^{(0),(j,l)} C_A + \sum_i C S_{2,i}^{(0),(j,l)} \mathbf{T}_i^2 \right] \mathbf{T}_j \mathbf{T}_l \\ & \left. + \sum_{i,j,k,l} S_2^{(0),(i,k)(j,l)} \{ \mathbf{T}_i \mathbf{T}_k, \mathbf{T}_j \mathbf{T}_l \} \right\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

ahol $\mathbf{T}_i$ -k a színtöltés operátorok, az összegzések pedig a különböző *parton ízekre* (kvark, antikvark vagy gluon) vonatkoznak. A (4.7) egyenletben megjelenő kinema-

⁸Ez persze relatív, de egy több ezer tagot számláló kifejezéshez képest, egy száztagú már jóval egyszerűbbnek számít.

tikai függvények definíciói:

$$\begin{aligned}
C_{2,i}^{(0)} &= \left(C_{irs}^{(0)} \right)_{f_i} - \left(C_{irs} \mathcal{CS}_{ir;s}^{(0)} \right)_{f_i} - \left(C_{irs} S_{rs}^{(0)} \right)_{f_i} + \left(C_{irs} \mathcal{CS}_{ir;s} S_{rs}^{(0)} \right)_{f_i} , \\
C_{2,ij}^{(0)} &= \left(C_{ir;js}^{(0)} \right)_{f_i f_j} - \left(C_{ir;js} \mathcal{CS}_{ir;s}^{(0)} \right)_{f_i f_j} + \left(C_{ir;js} S_{rs}^{(0)} \right)_{f_i f_j} , \\
\mathcal{CS}_{2,i}^{(0),(j,l)} &= \left(\mathcal{CS}_{ir;s}^{(0)} \right)_{f_i}^{(j,l)} - \left(\mathcal{CS}_{ir;s} S_{rs}^{(0)} \right)_{f_i}^{(j,l)} , \\
S_2^{(0),(j,l)} &= \left(S_{rs}^{(0)} \right)^{(j,l)} , \\
S_2^{(0),(i,k)(j,l)} &= \left(S_{rs}^{(0)} \right)^{(i,k)(j,l)} .
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Az egyenletek jobb oldalán található $(\dots)$ függvények jelölése az egyes fajtájú határértékekre utal. Például $C_{irs} \mathcal{CS}_{ir;s}^{(0)}$ arra, hogy előbb vesszük az átmeneti mátrix-elem lágy-kollineáris határesetét, mikor az i és r részecskék kollineárisak, s pedig lágy, majd ezután mikor mindhárom együtt kollineáris. Ez a tag a kollineáris par-ton hármas kibocsájtása és a lágy gluon és kollineáris pár kibocsájtásának átfedését adja. Az összes eset definíciói a következők:

1. Tripla kollineáris:

$$\begin{aligned}
\left(C_{irs}^{(0)} \right)_q &= \frac{1}{2} \left\{ [C_{irs}^{(0)}]_{qgg}^{(ab)} + [C_{irs}^{(0)}]_{qgg}^{(nab)} \right\} + n_f [C_{irs}^{(0)}]_{q\bar{q}'q'} + \frac{1}{2} [C_{irs}^{(0)}]_{q\bar{q}q}^{(id)} , \quad q' \neq q . \\
\left(C_{irs}^{(0)} \right)_g &= \frac{1}{6} [C_{irs}^{(0)}]_{ggg} + n_f \left\{ [C_{irs}^{(0)}]_{gq\bar{q}}^{(ab)} + [C_{irs}^{(0)}]_{gq\bar{q}}^{(nab)} \right\} .
\end{aligned} \tag{4.9}$$

2. Tripla kollineáris – lágy kollineáris:

$$\begin{aligned}
\left(C_{irs} \mathcal{CS}_{ir;s}^{(0)} \right)_q &= [C_{irs} \mathcal{CS}_{ir;s}^{(0)}]_{qg} , \\
\left(C_{irs} \mathcal{CS}_{ir;s}^{(0)} \right)_g &= \frac{1}{2} [C_{irs} \mathcal{CS}_{ir;s}^{(0)}]_{gg} + n_f [C_{irs} \mathcal{CS}_{ir;s}^{(0)}]_{q\bar{q}} .
\end{aligned} \tag{4.10}$$

3. Dupla kollineáris:

$$\begin{aligned}
\left(C_{ir;js}^{(0)}\right)_{qq} &= \frac{1}{2}[C_{ir;js}^{(0)}]_{qq;qq}, \\
\left(C_{ir;js}^{(0)}\right)_{qg} &= \frac{1}{4}[C_{ir;js}^{(0)}]_{qg;gg} + \frac{n_f}{2}[C_{ir;js}^{(0)}]_{qg;q\bar{q}}, \\
\left(C_{ir;js}^{(0)}\right)_{gq} &= \frac{1}{4}[C_{ir;js}^{(0)}]_{gg;qg} + \frac{n_f}{2}[C_{ir;js}^{(0)}]_{q\bar{q};qg}, \\
\left(C_{ir;js}^{(0)}\right)_{gg} &= \frac{1}{8}[C_{ir;js}^{(0)}]_{gg;gg} + \frac{n_f^2}{2}[C_{ir;js}^{(0)}]_{q\bar{q};q'q'} \\
&\quad + \frac{n_f}{4}\left\{[C_{ir;js}^{(0)}]_{gg;q\bar{q}} + [C_{ir;js}^{(0)}]_{q\bar{q};gg}\right\}, \quad \forall q, q'.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

4. Dupla kollineáris – lágy kollineáris:

$$\begin{aligned}
\left(C_{ir;js}\mathbf{CS}_{ir;s}^{(0)}\right)_{qf} &= [C_{ir;js}\mathbf{CS}_{ir;s}^{(0)}]_{qg}, \\
\left(C_{ir;js}\mathbf{CS}_{ir;s}^{(0)}\right)_{gf} &= \frac{1}{2}[C_{ir;js}\mathbf{CS}_{ir;s}^{(0)}]_{gg} + n_f[C_{ir;js}\mathbf{CS}_{ir;s}^{(0)}]_{q\bar{q}}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

5. Lágy kollineáris:

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{CS}_{ir;s}^{(0)}\right)_q^{(j,l)} &= [\mathbf{CS}_{ir;s}^{(0)}]_{q\bar{q}}^{(j,l)}, \\
\left(\mathbf{CS}_{ir;s}^{(0)}\right)_g^{(j,l)} &= \frac{1}{2}[\mathbf{CS}_{ir;s}^{(0)}]_{gg}^{(j,l)} + n_f[\mathbf{CS}_{ir;s}^{(0)}]_{q\bar{q}}^{(j,l)}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

6. Tripla kollineáris – dupla lágy:

$$\left(C_{irs}S_{rs}^{(0)}\right)_f = \frac{1}{2}[C_{irs}S_{rs}^{(0)}]_{fgg} + n_f[C_{irs}S_{rs}^{(0)}]_{f\bar{q}q}. \tag{4.14}$$

7. Tripla kollineáris – lágy kollineáris– dupla lágy:

$$\left(C_{irs}\mathbf{CS}_{ir;s}S_{rs}^{(0)}\right)_f = [C_{irs}\mathbf{CS}_{ir;s}S_{rs}^{(0)}]. \tag{4.15}$$

8. Dupla kollineáris – dupla lágy:

$$\left(C_{ir;js}S_{rs}^{(0)}\right)_{f_1f_2} = \frac{1}{2}[C_{ir;js}S_{rs}^{(0)}]. \tag{4.16}$$

9. Dupla lágy:

$$\begin{aligned} \left(S_{rs}^{(0)}\right)^{(i,k)(j,l)} &= \frac{1}{2} [S_{rs}^{(0)}]^{(i,k)(j,l)} , \\ \left(S_{rs}^{(0)}\right)^{(j,l)} &= \frac{1}{2} [S_{rs}^{(0)}]_{gg}^{(j,l)} + n_f [S_{rs}^{(0)}]_{\bar{q}q}^{(j,l)} . \end{aligned} \quad (4.17)$$

10. Lágy kollineáris – dupla lágy:

$$\left(\text{CS}_{ir;s} S_{rs}^{(0)}\right)_f^{(j,l)} = [\text{CS}_{ir;s} S_{rs}^{(0)}]^{(j,l)} . \quad (4.18)$$

Végül a (4.9) - (4.18) egyenletek jobb oldalain szereplő függvényeket tovább bonthatjuk, melyek így úgynevezett *mester integrálok* összegeiként fognak előállni. A mester integrálok a különböző lágy és kollineáris részecskekibocsátásokat írják le és az integrálás a négyesimpulzus szerint történik. Új változókat bevezetve néhány változóra elvégezhető az integrál, míg a többi így paraméterként marad benne a kifejezésben, tehát a paraméter megváltoztatásával az integrálokat újra és újra ki kell számolni. Az $\mathbf{I}_2$ felépítéséből látható, hogy az tulajdonképpen a mester integrálok lineáris kombinációjából épül fel. A lehetséges integrálások végrehajtásával végül elérhető, hogy a szín operátor például csak energiahányados típusú változóktól függjön, ilyen lehet az amely megadja, hogy a teljes ütköztetési energia hanyad részét viszi el egy-egy dzset. A (4.9) - (4.18) egyenletek [...] függvényei az alábbi módon épülnek fel az egyes mesterintegrálokból:

1. Tripla kollineáris

$$[C_{irs}^{(0)}]_{f_i f_r f_s} = a_{f_i f_r f_s} \sum_{i=1}^5 \sum_{j,k,l,m} c_{f_i f_r f_s; i}^{(0),j,k,l,m} \mathcal{I}_{2\mathcal{C},i}^{(j,k,l,m)}(x_{\widetilde{irs}}, \epsilon; \alpha_0, d_0) . \quad (4.19)$$

2. Dupla kollineáris

$$[C_{ir;js}^{(0)}]_{f_i f_r; f_j f_s} = a_{f_i f_r} a_{f_j f_s} \sum_{k,l=-1}^2 c_{f_i f_r}^{(0),k} c_{f_j f_s}^{(0),l} \mathcal{I}_{2\mathcal{C},6}^{(k,l)}(x_{\widetilde{ir}}, x_{\widetilde{js}}; \epsilon, \alpha_0, d_0) . \quad (4.20)$$

3. Lágy kollineáris

$$[\text{CS}_{ir;s}^{(0)}]_{f_i f_r}^{(j,k)} = a_{f_i f_r} \sum_{l=-1}^2 c_{f_i f_r}^{(0),l} \mathcal{I}_{2\mathcal{CS},1}^{(l)}(x_{\widetilde{ir}}, Y_{\widetilde{ir} \widetilde{j}, Q}, Y_{\widetilde{ir} \widetilde{k}, Q}, Y_{\widetilde{j} \widetilde{k}, Q}; \epsilon, \alpha_0, y_0, d_0, d'_0) , \quad (4.21)$$

ha $j \neq \widetilde{ir}$, és

$$[\mathbf{CS}_{ir;s}^{(0)}]_{f_i f_r}^{(ir,k)} = a_{f_i f_r} \sum_{l=-1}^2 c_{f_i f_r}^{(0),l} \left[\mathcal{I}_{2\mathbf{CS},2}^{(l)}(x_{\widetilde{ir}}, Y_{\widetilde{ir} \widetilde{k},Q}; \epsilon, \alpha_0, y_0, d_0, d'_0) \right. \\ \left. + \mathcal{I}_{2\mathbf{CS},3}^{(l)}(x_{\widetilde{ir}}; \epsilon, \alpha_0, y_0, d_0, d'_0) \right]. \quad (4.22)$$

ha $j = \widetilde{ir}$.

4. Tripla kollineáris – lágy kollineáris

$$[\mathbf{C}_{irs} \mathbf{CS}_{ir;s}^{(0)}]_{f_i f_r} = a_{f_i f_r} \sum_{l=-1}^2 c_{f_i f_r}^{(0),l} \mathcal{I}_{2\mathbf{CS},4}^{(l)}(x_{\widetilde{ir}}; \epsilon, \alpha_0, y_0, d_0, d'_0). \quad (4.23)$$

5. Dupla kollineáris – lágy kollineáris

$$[\mathbf{C}_{ir;js} \mathbf{CS}_{ir;s}^{(0)}]_{f_i f_r} = a_{f_i f_r} \sum_{l=-1}^2 c_{f_i f_r}^{(0),l} \mathcal{I}_{2\mathbf{CS},5}^{(l)}(x_{\widetilde{ir}}, Y_{\widetilde{ir} \widetilde{j},Q}; \epsilon, \alpha_0, y_0, d_0, d'_0). \quad (4.24)$$

6. Dupla lágy

$$[\mathbf{S}_{rs}^{(0)}]^{(i,k)(j,k)} = \mathcal{I}_{2\mathcal{S},1}(Y_{\widetilde{i} \widetilde{k},Q}, Y_{\widetilde{i} \widetilde{j},Q}, Y_{\widetilde{j} \widetilde{k},Q}; \epsilon; y_0, d'_0), \quad (4.25)$$

$$[\mathbf{S}_{rs}^{(0)}]^{(i,k)(i,k)} = \mathcal{I}_{2\mathcal{S},2}(Y_{\widetilde{i} \widetilde{k},Q}; \epsilon; y_0, d'_0), \quad (4.26)$$

$$[\mathbf{S}_{rs}^{(0)}]_{gg}^{(i,k)} = \mathcal{I}_{2\mathcal{S},2}(Y_{\widetilde{i} \widetilde{k},Q}; \epsilon; y_0, d'_0) - \mathcal{I}_{2\mathcal{S},3}(Y_{\widetilde{i} \widetilde{k},Q}; \epsilon; y_0, d'_0) \\ - 2\mathcal{I}_{2\mathcal{S},4}(Y_{\widetilde{i} \widetilde{k},Q}; \epsilon; y_0, d'_0) + \mathcal{I}_{2\mathcal{S},5}(Y_{\widetilde{i} \widetilde{k},Q}; \epsilon; y_0, d'_0) \\ + 4\mathcal{I}_{2\mathcal{S},6}(Y_{\widetilde{i} \widetilde{k},Q}; \epsilon; y_0, d'_0) + 2(1 - \epsilon)\mathcal{I}_{2\mathcal{S},7}(Y_{\widetilde{i} \widetilde{k},Q}; \epsilon; y_0, d'_0) \\ - (1 - \epsilon)\mathcal{I}_{2\mathcal{S},8}(\epsilon; y_0, d'_0), \quad (4.27)$$

$$[\mathbf{S}_{rs}^{(0)}]_{q\bar{q}}^{(i,k)} = \frac{T_R}{C_A} \left[-\mathcal{I}_{2\mathcal{S},6}(Y_{\widetilde{i} \widetilde{k},Q}; \epsilon; y_0, d'_0) - 2\mathcal{I}_{2\mathcal{S},7}(Y_{\widetilde{i} \widetilde{k},Q}; \epsilon; y_0, d'_0) \right. \\ \left. + 2\mathcal{I}_{2\mathcal{S},9}(\epsilon; y_0, d'_0) \right]. \quad (4.28)$$

7. Tripla kollineáris – dupla lágy

$$[C_{irs}S_{rs}^{(0)}]_{gg}^{(ab)} = 4\mathcal{I}_{2\mathcal{S},10}(\epsilon; y_0, d'_0), \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} [C_{irs}S_{rs}^{(0)}]_{gg}^{(\text{nab})} = \frac{C_A}{\mathbf{T}_{irs}^2} & \left[4(1 - \epsilon)\mathcal{I}_{2\mathcal{S},11}(\epsilon; y_0, d'_0) - 4(1 - \epsilon)\mathcal{I}_{2\mathcal{S},12}(\epsilon; y_0, d'_0) \right. \\ & - 8\mathcal{I}_{2\mathcal{S},13}(\epsilon; y_0, d'_0) + 2\mathcal{I}_{2\mathcal{S},14}(\epsilon; y_0, d'_0) - 4\mathcal{I}_{2\mathcal{S},15}(\epsilon; y_0, d'_0) \\ & \left. - 2\mathcal{I}_{2\mathcal{S},16}(\epsilon; y_0, d'_0) + 2\mathcal{I}_{2\mathcal{S},17}(\epsilon; y_0, d'_0) + 2\mathcal{I}_{2\mathcal{S},18}(\epsilon; y_0, d'_0) \right], \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$[C_{irs}S_{rs}^{(0)}]_{q\bar{q}} = \frac{T_R}{\mathbf{T}_{irs}^2} \left[-4\mathcal{I}_{2\mathcal{S},11}(\epsilon; y_0, d'_0) + 4\mathcal{I}_{2\mathcal{S},12}(\epsilon; y_0, d'_0) + 2\mathcal{I}_{2\mathcal{S},13}(\epsilon; y_0, d'_0) \right]. \quad (4.31)$$

8. Dupla kollineáris – dupla lágy

$$[C_{ir;s}S_{rs}^{(0)}] = 4\mathcal{I}_{2\mathcal{S},19}(Y_{i\tilde{j},Q}, \epsilon; y_0, d'_0). \quad (4.32)$$

9. Lágy kollineáris – dupla lágy

$$[CS_{ir;s}S_{rs}^{(0)}]^{(j,l)} = -2\mathcal{I}_{2\mathcal{S},20}(Y_{j\tilde{l},Q}, \epsilon; y_0, d'_0), \quad (4.33)$$

ha (ir) különböző, mint j és l , $j = (ir)$ esetre pedig

$$[CS_{ir;s}S_{rs}^{(0)}]^{(i,l)} = -2\mathcal{I}_{2\mathcal{S},21}(x_{i\tilde{i}}, Y_{i\tilde{l},Q}, \epsilon; y_0, d'_0). \quad (4.34)$$

10. Tripla kollineáris – lágy kollineáris – dupla lágy

$$[C_{irs}CS_{ir;s}S_{rs}^{(0)}] = 4\mathcal{I}_{2\mathcal{S},22}(x_{i\tilde{i}}, \epsilon; y_0, d'_0) + 4\mathcal{I}_{2\mathcal{S},23}(x_{i\tilde{i}}, \epsilon; y_0, d'_0). \quad (4.35)$$

A (4.19) - (4.35) egyenletekben lévő együtthatók táblázatait, valamint a mester integrálok definícióit a [6] és [4] publikációkban találhatjuk meg.

5. Az I_2 operátor implementációja

A kiszámolandó mester integrálok száma körülbelül száz, melyeket numerikus módszereket használó programok segítségével (pl. **SecDec**) értékelhetünk ki. Először

vesszük az integrandus *Laurent-sorfejtését*, majd az egyes pólusok együtthatóit numerikusan integráljuk. Mivel végső soron a szín-operátort szeretnénk megilleszteni, ezért ehhez $\mathbf{I}_2$ -t egy, a változók fázisterét jól lefedő rácson kell numerikusan kiszámolnunk. Az integrandus sorfejtésének együtthatói analitikusan is meghatározhatóak, azonban n csökkentésével a $\mathcal{O}(\epsilon^{-n})$ rendben végzett számolás egyre nehezebb. Ezért emellett célszerű numerikus számolást is végezni (már csak az ellenőrzés miatt is) és csupán az $m = 2, 3$ dzsetes esetekre szorítkozunk, mivel így néhány mester integrál egyszerűsödik. Ezután a kapott eredményekből fel kell építenünk $\mathbf{I}_2$ -t, mely feladatot mindenképp szükséges automatizált módon végezni az óriási adathalmaz miatt. Az operátor végső soron csak y_{ij} ($i, j = 1, \dots, m$) változóktól fog függeni, mester integrálok szintjén azonban célszerűbb x_i és Y_{ij} ($i, j = 1, \dots, m$) változókat használni. Ezek nem függetlenek egymástól, definícióik és kapcsolatuk alább látható:

$$y_{ij} = \frac{2p_i p_j}{Q^2} \quad (5.1)$$

$$x_i = \sum_{j:j \neq i} y_{ij} \quad (5.2)$$

$$Y_{ij} = \frac{y_{ij}}{x_i x_j}, \quad (5.3)$$

ahol Q a teljes ütköztetési energia, p_i, p_j pedig négyesimpulzusok. Látható, hogy y_{ij} és Y_{ij} változók szimmetrikusak, azaz $y_{ij} = y_{ji}$ (Y -ra hasonlóan). A szimmetria és az impulzusmegmaradás miatt $\mathbf{I}_2$ m dzset esetén $m - 1$ változótól függ. Valójában két dzset esetén minden változó értéke megegyezik, ott nincs tényleges függés, azonban három dzsetnél már igen. Így választhatjuk mondjuk y_{13} és y_{23} -t függetlennek és generálhatunk az általuk kifeszített síkon egy rácst. Azonban egy ilyen változópárhoz több x_i és Y_{ij} pontban meghatározandó integrál is tartozhat, így például 110 darab $y_{13} - y_{23}$ rácspont esetén az összes integrálás száma tízezres nagyságrendű. Ekkora adathalmaz kezelése kézzel reménytelen, így számítógépen automatizálni kell az egész eljárást.

Az $\mathbf{I}_2$ operátorban megjelenő összegzések, sok együttható és a rengeteg integrál miatt célszerű olyan programozási nyelvet használni, amelyen könnyen megfogalmazhatóak matematikai formulák. Ilyen programozási nyelvvel rendelkezik a **Wolfram Mathematica**, amely numerikus és szimbolikus számolások kezelésére is alkalmas.

A Mathematica-ban a legtöbb matematikai függvény és eljárás előre definiálva van, azonban saját magunk is könnyen hozhatunk létre függvényeket. Az $\mathbf{I}_2$ szín operátor maximum három dzsetre érvényes kifejezését és a szükséges integrálegyütthatókat Mathematica nyelven beprogramoztam a számítógépbe. A programba bemenetként meg kell adnunk az $\mathcal{I}_{2\mathcal{C},i}$, $\mathcal{I}_{2\mathcal{CS},i}$ és $\mathcal{I}_{2\mathcal{S},i}$ integrálok kifejezéseit. Ez történhet analitikus és numerikus módon egyaránt, és az integrálok több ezer pontban történő definiálása sem okoz gondot a Mathematica-nak. Kimenetként végül megkapjuk a felépített szín-operátort.

5.1. A program ellenőrzése

Egy program írásakor elkerülhetetlen feladat a működésének ellenőrzése, főleg akkor, ha a program segítségével akarunk később fizikai jelentéssel bíró számításokat végezni. A bonyolultság miatt célszerű több szinten ellenőrizni, hogy a lehetséges hibákat minél egyszerűbben, és gyorsabban megtalálhassuk. Mint korábban említettem a sorfejtés első két-három tagja még kevésbé fáradságos munkával meghatározható, így az integrálok és a belőlük felépített függvények analitikusan ismertek $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$ rendig. A [4, 6] cikkekben található analitikus formulákat szintén beprogramoztam, majd a témavezetőmtől kapott mester integrálokat felhasználva a programom segítségével előállítottam én is a szükséges függvényeket. A [...], (...) és a kinematikai függvények szintjén is elvégeztem az ellenőrzést, valamint magát az $\mathbf{I}_2$ operátor sorfejtését is összehasonlítottam $m = 2, 3$ dzsetre egyaránt és a felmerülő hibákat kijavítottam.

Az analitikus ellenőrzés után két előre kiválasztott pontban végeztünk numerikus ellenőrzést. Az $x_i = 2/3, Y_{ij} = 3/4$ szimmetrikus pontban és az $x_1 = 0.996820, x_2 = 0.241846, x_3 = 0.761333, Y_{12} = 0.99, Y_{13} = 0.999, Y_{23} = 0.0172697$ kollineáris pontban egyaránt kiszámoltam a mester integrálokat, majd az eredményeket összevettük témavezetőmmel, a hibákat pedig megkerestük és kijavítottuk. Az analitikus képleteket a szimmetrikus és kollineáris pontokban numerikusan kiértékelve szintén össze tudtuk hasonlítani a tisztán numerikus eredményekkel. Így meggyőződhetünk, hogy a későbbiekben használhatjuk a programot fizikai számolásokhoz (habár az ördög sohasem alszik).

5.2. Hibaterjedés

Az $\mathbf{I}_2$ operátor illesztését *legkisebb négyzetek módszerével* szeretnénk elvégezni, amihez szükség van az illesztett pontok hibájára. Mivel a tényleges számolások az integrálok szintjén történnek, ezért a szín-operátor hibáját hibaterjedés útján határozhatjuk meg. A mester integrálokat numerikus módszerekkel történő számítása miatt a hiba statisztikus jellegű. Ilyen esetben a hibaterjedést a *Gauss-féle hibaterjedés* írja le. Általánosan megfogalmazva az $f(\bar{x})$ függvény ($\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, x_i -k egymástól függetlenek) hibája az $\bar{x}_0$ pontban lineáris sorfejtéssel közelítve a következő:

$$\sigma_f \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 \sigma_{x_i}^2}, \quad (5.4)$$

ahol σ_{x_i} az x_i változó hibája. Korábban láttuk, hogy $\mathbf{I}_2$ -ben a mester integrálok csak lineárisan szerepelnek, tehát a deriváltak az integrálok együtthatói lesznek. Ez jó hír így ugyanis kevés módosítással (az együtthatókat és az integrálhibákat kell négyzetre emelni, majd a végén egy gyökvonást elvégezni) az operátor felépítésére megírt program könnyen módosítható úgy, hogy adott pontban megadja $\sigma_{\mathbf{I}_2}$ értékét.

6. Segédprogramok

A $\mathbf{I}_2$ operátor egy adott $y_{13} - y_{23}$ pontbeli értékének megkapásához pár száz numerikus integrálás eredményére van szükségünk. Azonban az egyes feladatokat külön programok végzik, a numerikus integrálást a SecDec, míg az operátor előállítását a Mathematica. A két program nyelve azonban eltérő, ezért kapcsolatot kell képeznünk közöttük. Ehhez két általam C++ nyelven írt programot használok, melyek a `MakeAllRes` és a `TransDat` fantázianevekre hallgatnak. Ebben a fejezetben ezen programok feladatát és működési logikáját mutatom be.

6.1. A MakeAllRes program

Az integrálások eredményeit a SecDec minden pontban külön fájlba írja. Ezek a fájlok tartalmazzák az adott pont értékét, az egyes pólusok együtthatóit és a hoz-

zátartozó hibát. Ezen kívül még egyéb információkat találhatunk az integráláshoz kapcsolódóan, illetve szöveges részeket. A fájl szerkezete miatt ezt közvetlenül nem tudjuk beolvasni Mathematica-ba, ezért előtte át kell alakítanunk a formátumot. A MakeAllRes program soronként beolvassa az integráleredményeket tartalmazó szöveges fájlokat és kiszedi belőlük a szükséges számokat: a változók, az eredmények és a hibák értékeit. Az azonos integrálhoz tartozó különböző pontbeli számításokat egy fájlba gyűjti és kimenetként egy számokból álló táblázatot kapunk, amit könnyű kezelni.

Azonban még mindig nem ezeket a fájlokat olvassuk be Mathematica-ba, hanem előtte további módosításokat hajtunk végre. A két lépés valójában egybevonható lenne, de ha a későbbiekben meg szeretnénk vizsgálni, hogy az operátor vagy a mester integrálok szintjén célszerű az illesztést elvégezni, akkor a mester integrálok illesztéséhez szükség van az integrálási eredményeket tartalmazó táblázatokra.

6.2. A TransDat program

Az adattáblázatok elkészítése után futtathatjuk a TransDat nevű programot, mely minden pontban definiálja az integrálok értékeit a Mathematica nyelvén. A definícióhoz szükségünk van az integrál paramétereire, illetve, hogy milyen rendig megy a sorfejtése, ezeket egy konfigurációs fájlban adhatjuk meg a programnak. A TransDat a konfigurációs fájlból beolvassa szükséges paramétereket, majd a korábban elkészített adattáblázatok felhasználva automatikusan legenerál egy fájlt, amely tartalmazza az integrálok összes kiszámított pontbeli definícióit. Ezt beolvassva Mathematica-ba, a mester integrálok különböző pontokban való meghívásakor mindig a megfelelő numerikus értékeket kapjuk vissza.

Végeredményként tehát a SecDec és a Mathematica közötti adathalmaz mozgatót egy gombnyomással tudjuk elvégezni. Ez csökkent a hiba lehetőségét is és jelentős időt spórolunk meg.

7. Összefoglalás

Dolgozatomban betekintést nyújtottam a részecskefizika elméletének és a hadron-dzsetek fizikájának egy részébe, hogy érzékeltessem és bemutassam a számolások során felmerül(het)ő nehézségeket. Ezután ismertettem a már több éves kutatás tárgyát képező NNLO levonási séma algoritmusát, mely munka hamarosan a végéhez ér. Felvázoltam az ebbe a kutatásba tartozó általam végzett egyik részfeladatot, amely igaz technikai jellegű, azonban elengedhetetlen a tényleges fizikai eredményeket nyújtó számolásokhoz. Röviden összefoglaltam a programozási feladat kivitelezését és az általam írt plusz segédprogramokat. Ez az eredmény lehetővé teszi, hogy a korábban, BSc tanulmányaim végén írt szakdolgozatomban ismertetett illesztési módszert magára az $\mathbf{I}_2$ operátorra is alkalmazhassuk és azon továbbfejleszhessük. Jelenleg ez még folyamatban van és egy része a TDK dolgozatomban kerül bemutatásra. A módszer tökéletesítését követően pedig végül meghatározhatjuk az $e^-e^+ \rightarrow \text{hadronok}$ folyamatok NNLO rendű sugárzási korrekcióját, mely eredményt cikkben szeretnénk közzéadni.

8. Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, *Trócsányi Zoltánnak*, aki bevezetett engem a részecskefizika mélyebb elméletébe, mindig készségesen segített ha kérdéssel fordultam hozzá és kiváló tanácsokkal látott el tudományos munkáim során. Szeretnék továbbá köszönetet mondani tanárainak, akik átadták tudásukat azzal a céllal, hogy jó fizikust faragjanak belőlem. Végül szeretném megköszönni családomnak, barátaimnak, barátnőmnek és csoporttársaimnak mindazt a támogatást, segítséget és szeretetet, amit nekem nyújtottak.

9. Hivatkozások

- [1] Ugo Aglietti, Vittorio Del Duca, Claude Duhr, Gábor Somogyi, and Zoltán Trócsányi. Analytic integration of real-virtual counterterms in NNLO jet cross sections. I. *JHEP*, 0809:107, 2008.
- [2] Paolo Bolzoni, Sven-Olaf Moch, Gábor Somogyi, and Zoltán Trócsányi. Analytic integration of real-virtual counterterms in NNLO jet cross sections. II. *JHEP*, 0908:079, 2009.
- [3] Paolo Bolzoni, Gábor Somogyi, and Zoltán Trócsányi. A subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: integrating the iterated singly-unresolved subtraction terms. *JHEP*, 1101:059, 2011.
- [4] Vittorio Del Duca, Gábor Somogyi, and Zoltan Trócsányi. Integration of collinear-type doubly unresolved counterterms in NNLO jet cross sections. *JHEP*, 1306:079, 2013.
- [5] Sailer Kornél. Szimmetriák és sérülésük a kvantumtérelméletben. Egyetemi jegyzet, 1994-2013.
- [6] Gábor Somogyi. A subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: integrating the doubly unresolved subtraction terms. *JHEP*, 1304:010, 2013.
- [7] Somogyi, Gábor and Trócsányi, Zoltán. A Subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: Regularization of real-virtual emission. *JHEP*, 0701:052, 2007.
- [8] Somogyi, Gábor and Trócsányi, Zoltán. A Subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: Integrating the subtraction terms. I. *JHEP*, 0808:042, 2008.
- [9] Somogyi, Gábor and Trócsányi, Zoltán and Del Duca, Vittorio. Matching of singly- and doubly-unresolved limits of tree-level QCD squared matrix elements. *JHEP*, 0506:024, 2005.

- [10] Somogyi, Gábor and Trócsányi, Zoltán and Del Duca, Vittorio. A Subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: Regularization of doubly-real emissions. *JHEP*, 0701:070, 2007.
- [11] Trócsányi Zoltán. Kvantumtérelmélet. Egyetemi jegyzet, 1991.
- [12] Trócsányi Zoltán. Quantum field theory II: Non-abelian gauge theories in the Standard Model. Egyetemi jegyzet, 2007.