

OTDK-dolgozat

2015

**A Gauss kopula modell korrelációs struktúrájának általánosításai,
CDO árazáshoz**

Generalisation of the Gaussian copula model in pricing CDOs

Kézirat lezárása: 2014. július 17.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Fedezett adósságkötelezettségek	2
2.1. CDO-k csoportosítása	2
2.2. Credit default swapok	3
2.3. Adatok	4
2.3.1. Példa	5
3. Árazási modellek	5
3.1. CDS alapmodell	6
3.2. CDO árazás	8
3.2.1. Kopulák	11
3.2.2. Gauss kopula	13
3.2.3. Szimulációs lehetőségek	15
3.2.4. Egyfaktoros Gauss kopula	15
3.2.5. Gauss-Hermite kvadratúra	18
4. A korrelációs struktúra vizsgálata	21
4.1. A korreláció hatása	21
4.2. A konstans együttható feloldása	27
4.2.1. Kalibráció	31
4.3. További korrelációs modellek a Gauss kopulán belül	33

4.3.1. Többfaktoros Gauss kopula	33
4.3.2. Egyéb modellek	34
4.4. Gauss kopula hiányosságai, alternatívák	35
5. Összefoglalás, kitekintés	37

Ábrák jegyzéke

1. Veszteségeloszlás	17
2. Tranche árak upfrontban, a running spread rendre: 500, 100, 100 (bps) . .	22
3. Bázis és valódi korreláció	24
4. A korrelációs paraméter kalibrációjának eredményei	26
5. Érzékenységvizsgálat	29
6. Korrelációs együttható, a CDS spreadjétől függően	32
7. Kalibrált eltérések az upfronttól és báziskorrelációk	33

1. Bevezetés

Sokan okolják a bonyolult hitelderivatív termékek elterjedését a 2008-ban kezdődött világgazdasági válság kialakulásáért. Többek között a CDS-ek és CDO-k valóságtól elrugaszkodott modellezését, a Gauss kopula használatából eredő pontatlan árazást és kockázatkezelést tartják felelősnek. A témában számos cikk és szakdolgozat született, így az én dolgozatomban a múlt helyett a CDO-k árazásának jövőjére koncentrálok, megvizsgálva a Gauss kopula modell illeszkedésének javítását célzó törekvéseket. A hitelderivatívák és a válság kapcsolatáról Medvegyev – Gyarmati [2011] ad részletes bemutatást.

Habár a Gauss kopula modellt rengeteg megalapozott kritika érte, és számos kutatás ajánlott a historikus adatokra jobban illeszkedő, a normálistól különböző többdimenziós eloszlásokat alkalmazó modelleket, a piaci szereplők mégis a mai napig a Gauss kopula modell változatait használják CDO-k árazására és kockázatkezelésre. Tops [2010] a Gauss kopula modellt a vastagabb farkú és gyakoribb együttes extrém értéket generáló t-kopulához hasonlítja, és az utóbbi modellt lényegesen jobbnak találta a CDO-k árazásához szükséges együttes csődeloszlások modellezésére. A kérdést megvizsgálva, hogy miért maradt a válsággal egyértelművé vált helytelen együttes csődvalószínűségeket jósoló modell továbbra is használatban azt találták, hogy amellet, hogy a Gauss kopula egyszerűen kezelhető és sokkal kisebb számításigényű, a t-kopula magasabb árakat ad, ezért amíg a piac többsége a Gauss kopulával áraz, az egyéni szereplőknek nem érdemes ettől eltérni.

A Gauss kopula modell vizsgálata tehát máig aktuális kutatási terület. Annál is inkább, mert amíg nem születik egy modell, amely egyértelműen fölülmúlja a klasszikus modellt mind illeszkedésben, mind könnyű interpretálhatóságban és kis számításigényben, és amely modellre a releváns piaci szereplőknek megéri áttérni, a leginkább járható útja a CDO árazáshoz alkalmazott modellek továbbfejlesztésének a Gauss kopula modell tökéletesítése.

A Gauss kopula modell egy széles körben használt eszköz a portfólió korrelációk modellezésére. A kopulák használatának előnye, hogy két egymástól független feladatra bontja a többdimenziós valószínűségi változók eloszlásának leírását. Első lépése a többdimenziós eloszlás határeloszlásainak definiálása, majd a második lépés a függőségi struktúra megállapítása. A függőségi struktúrát a kopulák korrelációs mérőszámok nélkül írják le. A Gauss kopula modellnek rengeteg változata létezik, a legtöbbjük a korrelációs struktúrát egyetlen paraméterrel igyekszik megragadni, tehát a korrelációs mátrix alakja rendkívül egyszerű, a változók varianciája egységnyi, míg minden páronkénti korreláció megegyezik. Dolgozatomban azt vizsgálom, hogy ezzel az egyszerűítéssel mekkora rugalmassága veszik el a modellnek, és tanulmányozom a bonyolultabb korrelációs struktúra

bevezetésének hatásait a modell illeszkedésére.

Dolgozatom további részében először bemutatom a fedezett adósságkötelezettségek (CDO-k) felépítését, majd a használatos árazási megközelítéseket és a Gauss kopula modellt, a modellel való árazás lépéseinek bemutatásával. Az egyparaméteres Gauss kopula modellt a kapott CDO tranche adatokkal és a CDS spreadekkel a piachoz kalibrálom. A korrelációs struktúra általánosításának egy lehetséges irányát saját kutatással is megvizsgálom, és értékelem az illeszkedés javulását az egyparaméteres esethez képest. A befejező részben az általános korrelációs struktúrával rendelkező egyéb Gauss kopula modelleket mutatom be. A dolgozat zárásaként összegzem a dolgozat eredményeit, és a Gauss kopula modell legjelentősebb hátrányait tárgyalom

2. Fedezett adósságkötelezettségek

A CDO (Collateralized Debt Obligation), vagyis a fedezett adósságkötelezettség egy olyan strukturált eszközalapú kötvény, amelynek fedezete egy vállalati kötvény portfólió. A CDO-k azért váltak ennyire népszerűvé közvetlenül a válság előtt, mert a pénzügyi innováció fénykorában a hasonló adósságok összegyűjtésével (*pooling*), a különböző szenioritási osztályok kialakításával (*tranching*) és az értékpapírosítással (*securitizing*) különböző befektetői igényeket tudtak egyszerre kielégíteni az egyszerűen vásárolható, likvid értékpapírokon keresztül, a klasszikus értékpapíroknál magasabb hozamot ígérve. A CDO-k általános forgatókönyve, hogy az eszközportfóliót kezelő úgynevezett SPV (*special purpose vehicle*) a bejövő pénzáramlásokból először a senior tranche tulajdonosainak fizet, aztán a fennmaradó összegből a mezzanine tranche tulajdonosok követeléseit elégíti ki, majd az esetleges maradékot a legalsó, *equity tranche* tulajdonosai kapják. A veszteségeket tehát alulról az equity tranche fogja fel, a junior tranche-ok csak akkor szenvednek veszteséget, ha az equity tranche kiürül (névértéke leíródik), és a veszteség *belép* a junior tranche-ba. A tranche-ok által felfogott veszteségek alsó határát *attachment*, felső határát *detachment* pontnak nevezik.

2.1. CDO-k csoportosítása

A market-value CDO olyan fedezett adósságkötelezettség, amelynek a fedezetéül szolgáló hitelpapírportfólió összetétele változik, egy portfóliómenedzser aktív kereskedési tevékenysége folytán. Mivel ezeknek a CDO-knak a kifizetése a portfóliót alkotó hitelpapírok piaci értékének változásából származik, tehát a kereskedéssel elért hozamból, az értékpapír ér-

téke erősen függ a portfóliómenedzser kereskedési teljesítményétől. A cash-flow CDO-k eszközfedezetűül szolgáló portfólió a befektetés időtávjára változatlan, így ez a fajta értékpapír nincsen kitéve a portfóliómenedzser teljesítményének nem ismeréséből fakadó bizonytalanságnak. Dolgozatomban kizárólag állandó összetételű, cash-flow CDO-kkal foglalkozom, hiszen a market-value CDO-k értékeléséhez a pénzügyi alapokon kívül viselkedési megfontolások is szükségesek lennének a portfóliómenedzser teljesítményének figyelembe vételéhez.

A cash CDO-k eszközportfóliójában hitelek, vállalati kötvények vagy egyéb hitelderivatív termékek szerepelnek, és a CDO-tranche-ok tulajdonosai ezekből a termékekből származó bevételeket kapnak meg úgy, hogy a veszteséget a senioritással fordítottan viselik. A szintetikus CDO-t kibocsátó SPV portfóliójában nincsenek hitelek vagy vállalati kötvények, a hitelkockázat-vállalást CDS (*credit default swap*)-eken keresztül érik el.

A CDS egy olyan szerződés, amely biztosítást nyújt egy bizonyos vállalat (*reference entity*) csődje ellen. A biztosítás vevője rendszeres díjfizetés (prémium, kupon) ellenében jogot kap arra, hogy csődesemény (*credit event*) bekövetkezése esetén névértéken eladja a birtokolt kötvényeit a biztosítás eladójának, akinek kötelessége van a kötvényeket megvenni.

Csakúgy, mint a cash CDO-k esetében, a szintetikus CDO-ba fektetők is rendszeres kamatfizetésben részesülnek, még hozzá a prémiumokat kapják meg, illetve egy-egy vállalat csődjénél a befektetők befektetésének névértéke csökken. A veszteségeket először a junior, majd a senior tranche-ok szenvedik el. A cash CDO-kkal ellentétben a szintetikus CDO-k senior tranche-aiba fektetőknek általában nem kell a vásárlásnál tőkét lekötöniük, csak az esetlegesen bekövetkező, a senior tranche alsó határát túllépő veszteségek esetén. Dolgozatomban kizárólag a szintetikus CDO-k árazásának vizsgálatára szorítkozom.

2.2. Credit default swapok

A *credit default swap*ok, röviden CDS-ek OTC piacon kereskedett pénzügyi termékek. A legtöbb CDS standardizált az ISDA által kibocsátott dokumentáció szerint, de természetesen a felek eltérhetnek az alapértelmezettől, ezért nagyon sok variáció létezik. A vizsgálatomban standardizált CDS-ek szerepelnek, így ezeknek az árazását mutatom be. A vizsgált szintetikus CDO fedezetét egy CDS indexet alkotó CDSek alkotják.

Népszerű CDS index például az európai iTraxx és a CDX. Az iTraxx-ból félévente jelenik meg új sorozat március és szeptember 20-án, 3, 5, 7 és 10 éves lejáratokkal. A lejáratok a megfelelő év december vagy március 20-a, amikor a fedezeti portfóliót alkotó

CDS-ek lejárnak. A kuponfizetések szintén standardizáltak, negyedévente kell fizetni, minden hárommal osztható sorszámú hónap 20. napján. A fizetett kupont évesítve jegyzik, a tényleges kupon a periódus napjainak számával arányosan jár (*Day Count Fraction = Act/360* szabály alapján). Ha a kuponfizetés standard dátuma nem a szerződésben meghatározott kalendárium szerinti munkanapra esik, a kuponfizetés dátumát módosítják a 20-a utáni első banki munkanapra. (Az általam implementált modellben ez a módosítás nem szerepel). Néhány CDS esetében a negyedéves kuponfizetésen kívül upfront díjat is kell fizetni a CDS vásárlásánál.

Ha csődesemény történik két kuponfizetés között, csak a fennálló időre kell a kupont kifizetni, illetve ekkor a védelem nyújtója névértéken megveszi a védelem vevőjétől a birtokolt kötvényt. A rendezés népszerűbb formája a készpénzfizetéssel (*cash settlement*) történő, mely esetén a védelem nyújtója kiegészíti az megtérülésen (*recovery rate*) fölül álló részt, vagyis a befektetés azon részét, amelyhez a befektetők nem jutnak hozzá csőd esetén.

2.3. Adatok

A számításokhoz felhasznált adatsor egy 125 CDS-ből álló referenciaportfólióra szóló CDO. Az adatok 2010. november 17-i árak 2, 4 és 7 éves lejáratokra. A tranche-ok határait és árait a következő táblázat foglalja össze:

Név	Határok	Running spread	2 éves	4 éves	7 éves
Equity:	0-3%	500	35,625	58,375	71,00
Junior:	3-7%	500	1,625	1,6875	24,00
Junior mezzanine:	7-10%	500	-7,5625	-6,9375	2,00
Mezzanine:	10-15%	100	-1,125	0,8125	7,6875
Senior:	15-30%	100	-1,80	-2,10	-1,15
Super senior:	30-100%	100	-1,915	-3,10	-4,075
Index	0-100%	Running spread:	87	112	131

A CDO lejáratok standardizáltak, 2010. november 17-én a 2, 4 és 7 éves CDO-k lejártai rendre: 2012. december 20., 2014. december 20. és 2017. december 20. Az Running spread negyedévente fizetendő, az upfront díj pedig azonnal, a tranche névértékének százalékában.

A referenciaportfólióban azonos névértékkel szerepel minden CDS, amelyek névértéke eredetileg a CDO névértékének 0,8%-a volt. A jegyzés dátumáig négy csődesemény

történt, összesen a portfólió névértékének 0,71492%-a veszteség lett. A számolásaimban ezzel a bekövetkezett veszteséggel korrigáltam az egy CDS-re jutó százalékos névértéket és a tranche-ok határait, hogy a jegyzett árakkal és a várható veszteségekkel összhangban legyen.

Az adatokat a Morgan Stanley hozzájárulásával használtam, a CDS-ekre vonatkozóan csak a jegyzett prémiumokat kaptam meg, azt nem, hogy mire vonatkozott a CDS. A számolásokhoz felhasználtam még a Bloomberg S23-as számú diszkontgörbéjének 2010. november 17-i historikus értékeit. A dolgozatomban szereplő összes számolást a Matlab szoftver segítségével végeztem, ahol nem említem külön, a hatodik tizedesjegy pontosságra törekedve. Az ábrákat szintén a Matlabbal készítettem.

2.3.1. Példa

A fenti CDO tranche-ok legyenek a példa tárgyai. Az egész CDO névértéke a kibocsátás-kor legyen 100 millió dollár. Ebből 2010. november 17-re 96,8 millió dollár maradt. A bekövetkező veszteséget, 715 ezer dollárt az equity tranche tulajdonosai fizették ki, mivel 3 millió dollár alatt maradt a veszteség. Ezentúl az equity tranche már csak a fennmaradó 2,285 millió dollár névértékre kap negyedévenként évesítve számolva 500 bázispontnyi running spreadet. Ne felejtjük, hogy a megtérülési értékig a super senior tranche-ot is érintik a csődök. Ennek a tranche-nak nem kellett fizetnie, viszont ezentúl már csak 27,515 millió dollár névértékre jár a kupon. Ha ma (2010.11.17-én) valaki védelmet szeretne vásárolni az equity tranche-ra, akkor a fennmaradó névérték 35,625%-át kellene fizetnie, és a következő 2,3606%-nyi veszteség ellen követelhet kompenzációt.

3. Árazási modellek

A CDS-es és CDO-k árazása minden modellben a kockázatsemleges mérték létezésének feltételén alapul. Az eszközárzás első alaptétele szerint a piac arbitrázsmentessége ekvivalens a kockázatsemleges mérték létezésével. A piac arbitrázsmentessége nem garantálja azonban a kockázatsemleges mérték egyértelműségét, ehhez a piac teljessége szükséges.

3.1. CDS alapmodell

A szintetikus CDO-k fedezetét egy CDS-ekből álló portfólió adja. Így először is a CDS-ek árazását mutatom be, amelyre szükségünk van a CDO-k árazásához, még hozzá a keresett együttes eloszlás peremeloszlásainak meghatározásánál. Második lépésként a peremeloszlásokat összekapcsoló együttes eloszlások meghatározását mutatom be, amelynek eszköze a kopula.

Egy CDS fair árfolyamát úgy kapjuk meg, hogy egyenlővé tesszük a prémium és a védelem (*protection*) láb diszkontált várható értékét. A csőd a valóságban bármelyik pillanatban bekövetkezhet, így precízen egy folytonos modellt kellene használni. A gyakorlatban viszont az egyszerűség kedvéért sokszor azt feltételezzük, hogy ha csőd következik be, akkor a periódus közepén történik. Az implementálás folyamán én is ezzel a feltételezéssel éltem. Habár ez a megkötés nem reális, a fair árfolyamot nem befolyásolja jelentősen. Kritikusabb pontja a használatos modelleknek, hogy a megtérülési rátát időtől és vállalati kötvénytől függetlenül konstansnak, leggyakrabban 40%-nak szokták venni, ami a fair árat is nagymértékben befolyásolja.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(PV_{prem}) &= u + c \sum_{i=1}^M B_{t_i} a(t_i, t_{i-1}) \mathbb{P}(\tau > t_i) \\ &\quad + c \sum_{i=1}^M B_{\frac{t_i+t_{i-1}}{2}} a\left(\frac{t_i+t_{i-1}}{2}, t_{i-1}\right) (\mathbb{P}(\tau > t_{i-1}) - \mathbb{P}(\tau > t_i)) \\ \mathbb{E}(PV_{prot}) &= (1 - R) \sum_{i=1}^M B_{\frac{t_i+t_{i-1}}{2}} (\mathbb{P}(\tau > t_{i-1}) - \mathbb{P}(\tau > t_i))\end{aligned}$$

ahol:

- u — upfront díj
- c — évesített kupon, más néven running spread
- M — periódusok száma lejáratig
- B_{t_i} — az i . kuponfizetési dátumhoz tartozó diszkonttényező
- $a(t_i, t_{i-1})$ — a i . és $(i-1)$. kuponfizetési dátumok DCF-je
- τ — csőd időpontja
- $\mathbb{P}(\cdot)$ — kockázatsemleges valószínűség
- R — megtérülés

Így az egyenletekben két meghatározandó paraméter van, a kupon és az upfront

díj nagysága. A gyakorlatban két eset lehetséges. Az első eset az, ha meg van adva a kupon nagysága, és az upfront díj nagyságát határozza meg a piac (ez általában a CDO tranche-okra jellemző). A második eset pedig az, ha egyáltalán nincsen upfront díj, és a piac a negyedévenként fizetendő kupon nagyságát határozza meg (CDS indexek és CDS-ek esetén).

Ha tudjuk a kockázatmentes valószínűségeket, u és c meghatározása egyszerű feladat. Az első esetben:

$$\begin{aligned} u^* &= \sum_{i=1}^M B_{\frac{t_i+t_{i-1}}{2}} (\mathbb{E}(L_{t_i}) - \mathbb{E}(L_{t_{i-1}})) \\ &\quad - c \sum_{i=1}^M B_{t_i} a(t_i, t_{i-1}) \mathbb{E}(N_{t_i}) \\ &\quad + c \sum_{i=1}^M B_{\frac{t_i+t_{i-1}}{2}} a\left(\frac{t_i+t_{i-1}}{2}, t_{i-1}\right) (\mathbb{E}(N_{t_{i-1}}) - \mathbb{E}(N_{t_i})) \end{aligned}$$

A második esetben $u = 0$, és:

$$c^* = \frac{\sum_{i=1}^M B_{\frac{t_i+t_{i-1}}{2}} (\mathbb{E}(L_{t_i}) - \mathbb{E}(L_{t_{i-1}}))}{\sum_{i=1}^M B_{t_i} a(t_i, t_{i-1}) \mathbb{E}(N_{t_i}) + \sum_{i=1}^M B_{\frac{t_i+t_{i-1}}{2}} a\left(\frac{t_i+t_{i-1}}{2}, t_{i-1}\right) (\mathbb{E}(N_{t_{i-1}}) - \mathbb{E}(N_{t_i}))}$$

Fontos észrevennünk, hogy egy modellen belül a running spread upfront díjjá számítása egyértelmű, a csődök eloszlásának ismerete nélkül viszont az upfront nem számítható át running spread értékre vagy fordítva, az átkonvertálás modelfüggő.

Látható, hogy a probléma nehezebbik része nem az egyenletmegoldás, hanem a kockázatmentes várható értékek megtalálása. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ filtrált valószínűségi mező, és $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték. Egy CDS csődjének ideje τ pozitív valószínűségi változó. A csőd egy nem állandó intenzitású Poisson folyamat beérkezési ideje, vagyis a t -ig bekövetkező csőd valószínűsége:

$$p_i(t) = \mathbb{P}(\tau < t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(s) ds},$$

ahol $\lambda(s)$ úgynevezett (determinisztikus) cső dintenzitás-függvény (*hazard function*). Dolgozatomban a cső dintenzitás-függvény a legegyszerűbb, lépcsős alakú, ahol az ugrások helyei a lejáratok. Például $T_1=3$, $T_2=5$, $T_3=7$ és $T_4=10$ éves CDSek esetén:

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \chi_{t \in (T_{i-1}, T_i]},$$

ahol $T_0=0$.

A megfelelő paraméterek illesztésének klasszikusan három útja van. Az első kézenfekvő megoldás a historikus adatok használata. A probléma ezzel a szokásos érvelés, vagyis hogy a múltbeli historikus valószínűségeket elméletileg nem megalapozott változatlanoknak tekinteni a jövőre nézve. A csődvalószínűségek esetében a helyzetet még súlyosbítja az is, hogy a csödesemények ritka események, így kevés adat áll rendelkezésre, sőt, a jelenben értékelendő vállalatokra nem is mindig létezik múltbeli csődadat, tehát nem kerülhetjük el a vállalatok közötti általánosítást, ami pedig szintén nem reális. A harmadik probléma az empirikus megközelítéssel az, hogy a valóságban megfigyelt csődvalószínűségek nem egyeznek meg a kockázatsemleges csődvalószínűségekkel, így árazásra nem lehetne használni őket.

A második lehetőség az elméleti modell építése, például Merton [1974] alapján. Merton bebizonyította, hogy a csödesemény modellezhető a Black-Scholes modell keretein belül, hiszen a részvény gyakorlatilag egy call opció a vállalat eszközeire.

A harmadik módszer, amelyet én is használtam, az implicit csődvalószínűségek illesztése a piaci adatokhoz, például CDS spreadekből vagy kötvényárakból. A CDS-re jellemző csődentenzitás-függvényeket a piaci CDS adatokhoz kalibráltam, bootstrap módszerrel. Először meghatároztam a legrövidebb lejáráthoz tartozó λ_1 -et, amellyel a modell a piacon található kupont adja. Ha nincsen upfront, λ_1 körülbelül $c/(1-R)$, de ezt torzítja a negyedévenkénti, tehát nem folytonos kuponfizetés, és felfelé torzítja a DCF. Ezután a λ_1 -ből számolt csődvalószínűségeket felhasználva az első lejáratig tartó időszakra, a második lejárat adataiból kiszámoltam a λ_2 -t, és így tovább. A hazárfüggvény különböző szofisztikált módszerekkel simítható, például Baranovski et al. [2009] új módszert ajánl sima csődentenzitás-függvény becslésére CDS és kötvény spreadekből. Számomra az egyedi csődentenzitás-függvények csak az egyéni bedőlési valószínűségek, tehát az együttes csődeloszlás határeloszlásainak meghatározásához kellettek, így a lépcsős hazárfüggvényt használtam.

3.2. CDO árazás

A szintetikus CDO-k árazása sok szempontból hasonlít a CDS-ek árazásához. Az alap helyzet ugyanaz, CDO tranche befektetője biztosítást vállal bizonyos veszteségek ellen, cserébe upfront díjat és negyedévente fizetendő prémiumot kap. A különbség csupán annyi, hogy nem egyetlen entitásra szól a biztosítás, hanem bizonyos, bonyolultabb kifizetésfüggvény határozza meg a fizetendő összegeket, a csődök függvényében.

Kosár hitelderivatívnak nevezzük az olyan pénzügyi termékeket, amelyek kifizetése nem egyetlen vállalat csődjétől függ, hanem egy hitelportfóliótól vagy CDS portfóliótól. A legegyszerűbb ilyen termék talán a CDS index swap, amely úgy viselkedik, mintha egyetlen CDS lenne, amelyben a csőd nem bináris értékeket vehet föl, hanem a veszteség a bedőlt CDS-ek névértékével (az egész portfólió névértékéhez képest) és megtérülési rátájával arányos. Népszerű és könnyen megérthető kosár hitelderivatív termékek továbbá a *first-to-default* vagy *nth-to-default* swapok, amelyek az első vagy sorban az *n*-ként becsődölt CDS-re nyújtanak biztosítást, tehát a prémiumfizetés az *n*. csődig tart, vagy a biztosítási időszak végéig, ha addig nem történik *n* csőd. Az *n*. csőd bekövetkezésekor a megtérülési értéken fölül levő részt fizeti a hitelderivatíva befektetője, és a szerződés befejeződik, tehát ha ezután több csőd is bekövetkezik, a biztosítás eladójának nincsen fizetési kötelezettsége. Látható, hogy egyrészt ez a termék értékesebb egy CDS-nél, de kevésbé értékes az egész portfólióra szóló kötelezettségnél, és szoros kapcsolatban áll az értékelése a CDS-ekéhez.

Az előző fejezetben bemutatott formula, kis változtatással használható kosár hitel-derivatívák, így CDO-k árazásához is:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(PV_{prem}) &= u + c \sum_{i=1}^M B_{t_i} a(t_i, t_{i-1}) \mathbb{E}(N_{t_i}) \\ &\quad + c \sum_{i=1}^M B_{\frac{t_i+t_{i-1}}{2}} a\left(\frac{t_i+t_{i-1}}{2}, t_{i-1}\right) (\mathbb{E}(N_{t_{i-1}}) - \mathbb{E}(N_{t_i})) \\ \mathbb{E}(PV_{prot}) &= \sum_{i=1}^M B_{\frac{t_i+t_{i-1}}{2}} (\mathbb{E}(L_{t_i}) - \mathbb{E}(L_{t_{i-1}}))\end{aligned}$$

ahol:

$$\begin{aligned}N_{t_i} &- \text{ a névérték } t_i\text{-ben} \\ L_{t_i} &- t_i\text{-ig bekövetkezett veszteség, melyre} \\ L_{t_i} &= (1 - R)N_{t_i}, \text{ ha egyetlen CDS-ről van szó, és} \\ L_{t_i} &= \sum_{j=1}^n (1 - R_j)N_{j,t_i}, \text{ ha } n \text{ CDS-ből álló portfólióról.}\end{aligned}$$

A szintetikus CDO-k fedezete egy CDS portfólió, mely úgy működik, mint egy biztosítás a megfelelő kötvényportfólió ellen. A CDO *n* darab CDS-ből áll, az összértéke $\sum_{i=1}^n N_i$, ahol N_i az *i*. CDS névértéke. A befektetők gyakorlatilag védelmet adnak el, megkapják a negyedévenként járó kuponjukat, de csőd esetén kifizetik biztosítás értékét. Ha az *i*. CDS-re csőd következik be, akkor a befektetők két forrásból is veszteséget szenved-

nek. Először is ki kell fizetniük a megtérülési ráta fölé eső névértéket, tehát $(1 - R_i)N_i$ -t, másrészt a következő negyedévben már csak a bedőlt CDS névértékével csökkentett névértékre kapnak prémiumot. A helyzetet bonyolítja, ha a CDO (mint általában) szenioritási osztályokra van darabolva. Ilyenkor a csődki fizetés alulról kumulálódik, ahogyan a megtérülési értéken felül levő névérték veszteség is, míg a megtérülési értékkel megegyező névértékveszteség fölülről kumulálódik. Vagyis ha csőd következi be, akkor a legalsó tranche fizeti a biztosítást, $(1 - R_i)N_i$ -t, és ennyivel kevesebb prémiumot kap a következő periódusban, még a szenior tranche R_iN_i -vel kevesebb névértékre kap prémiumot. A fenti képlet tehát úgy alkalmazható a CDO tranche-ok árazására, ha a tranche-ra jutó induló névértéket módosítjuk időszakonként az adott tranche-ra jutó veszteségekkel. Ha a az adott tranche attachment pontja, és b a detachment pontja, a portfólióra számított értékeket felső indexben pf -fel jelölve és az egész portfólió névértékét 1-nek véve (különben csupán meg kell szorozni az egyenletek mindkét oldalát N_0^{pf} -val):

$$\begin{aligned} L_{t_i}(a, b) &= \max \left(\min \left(L_{t_i}^{pf}, b \right), a \right) - a \\ N_{t_i}(a, b) &= (b - a) - L_{t_i}(a, b) - \max \left(\min \left(R_{t_i}^{pf}, 1 - a \right), 1 - b \right) - (1 - b) \end{aligned}$$

ahol:

$$R_{t_i}^{pf} = a \text{ } t_i\text{-ig csődbement CDS-ek összes megtérülési értéke}$$

A piacon az upfrontokat az adott tranche-ra jutó névérték százalékában jegyzik, tehát a fenti képletből kapott upfrontot még normalizálnunk kell a névértékkel. Ha például egy olyan CDO-ból szeretnénk piaci árakat kapni, amelynek a fedezeti portfóliójában a kibocsátása óta történt csődesemény, akkor a tranche-okra jutó névértékek a bekövetkezett veszteséggel csökkennek, ugyanakkor az egyes CDS-ekhez tartozó névérték nem változik, így a tranche-ok határai is megváltoznak.

Fontos tulajdonsága a CDO tranche-oknak, hogy mindegyik tranche kifejezhető két equity tranche különbségeként. Először a veszteségre végezve a számolást, a minimum és maximum operátor disztributív tulajdonságait kihasználva egymásra és az összeadásra, valamint felhasználva, hogy $b > a$ (az átláthatóság kedvéért az indexek nélkül):

$$\begin{aligned} L(a, b) &= \max \left(\min \left(L, b \right), a \right) - a = \min(L, b) + \max \left(0, a - \min(L, b) \right) - a = \\ &= \min(L, b) - \min \left(0, \min(L - a, b - a) \right) - a = \min(L, b) - \min(L, a) = \\ &= L(0, b) - L(0, a) \end{aligned}$$

Analóg módon elvégzett számolással a megtérülési értékre is hasonló összefüggést kapunk, amellyel a névértékekre is bebizonyítható, hogy az (a, b) határú tranche a b és

az a detachment pontú equity tranche-ok különbsége. A gyakorlatban, ha ily módon számoljuk a tranche-ok árát (mondjuk bootstrap módszerrel, felhasználva az előzőleg kiszámolt equity tranche árát), némi meggondolást igényel a megfelelő névértékkel való normalizálás (hiszen a tranche-ok árát a tranche-ra jutó névérték százalékában jegyzik). Ha tranche-onként különböző a prémium kupon nagysága, a kisebb equity tranche veszteségeloszlására is szükségünk lesz, mert a spread különbség csak a prémium lábon okoz eltérést, amely értékét nem tudjuk megállapítani pusztán az upfrontból, szükséges hozzá egy modell.

Mivel a kosár hitelderivatívák, így a CDO-k fedezete egy kötvényportfólió vagy egy CDS portfólió, és a kifizetés bonyolult módon függ az egyedi csődöktől, a CDO-k árazásához nem elég ismernünk a határeloszlásokat, vagyis a csődök egyedi eloszlását, hanem az egész kötvényportfólióban levő kötvények együttes csődeloszlását kell ismernünk. Kivételt képez a CDS index swap (amely például a super senior tranche fenti módszerrel történő árazásában a legnagyobb equity tranche-nak felel meg), hiszen ennek az értéke nem függ az indexet alkotó CDS-ek csődeseményeinek korrelációjától, mert minden csőd egyformán hat az egész portfólióra. Ekkor a várható veszteség egyszerűen a CDS-enként várható veszteségek összege.

Míg eddig általánosan igaz tulajdonságokat vizsgáltam, dolgozatom további részében egyenlő névértéket és egyenlő, konstans megtérülési rátát feltételezek.

3.2.1. Kopulák

A CDO-k árazásához szükséges együttes eloszlás leírására leggyakrabban kopulákat használnak. A kopulák használatának az előnye, hogy megadott egyedi eloszlásokkal lehet vele függőségi struktúrát definiálni, vagyis egyedi eloszlásokat tudunk összekapcsolni együttes eloszlásokká a kopulák segítségével. A korreláció mérésére nincsen egyértelműen jó mérőszám, a szakirodalom csak abban ért egyet, hogy minden mérőszámnak megvan a maga hátránya és korlátja, egyik sem használható univerzálisan. Ha jobban belegondolunk, nem is várhatjuk el egyetlen skalártól, hogy egyszerre jellemezze a valószínűségi változók átlagos korrelációját, az extrém értékek korrelációját, legyen könnyen számolható, univerzálisan használható és független az eloszlásoktól, valamint feleljen meg számos racionalitáson alapuló elvárásoktól, például a független, a *co-* és *counter monotone* esetre. A függőség méréséről és a népszerű mérőszámok használatának hátrányairól Embrechts et al. [2002] ír bővebben.

A kopulákkal teljesen le tudunk írni együttes eloszlásokat, anélkül, hogy a korrelációs mérőszámok hátrányos tulajdonságait próbáljuk kiküszöbölni.

3.1. definíció. Ha $U_1, U_2, \dots, U_m$ m egyenletes eloszlású valószínűségi változó, a C együttes eloszlást leíró függvény, vagyis kopula függvény:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_m) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_m \leq u_m)$$

Általánosan, az $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ n -dimenziós valószínűségi vektorváltozó C kopula függvénye az n -dimenziós eloszlásfüggvénye az

$$\mathbf{Y} = (F_1(X_1), F_2(X_2), \dots, F_n(X_n))'$$

vektor valószínűségi változónak, ahol F_i az i . változó határeloszlása.

3.2. Tétel. (Sklar [1973]) $\mathbf{F}$ n -dimenziós eloszlásfüggvény, $F_1, F_2, \dots, F_n$ határeloszlásokkal. Ekkor $\exists C$ kopula, melyre

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(X_1), F_2(X_2), \dots, F_n(X_n))$$

Ha a határeloszlások folytonosak, akkor C ráadásul egyértelmű. A tétel megfordítása is igaz, ha adottak a $F_1, F_2, \dots, F_n$ határeloszlások, és C egy tetszőleges kopula, akkor az $\mathbf{F}$ egy n -dimenziós eloszlásfüggvény, az adott határeloszlásokkal.

3.3. Tétel. (Invariancia tétel:) Legyenek $X_1, \dots, X_n$ folytonos eloszlású valószínűségi változók, C_X kopulával. Legyenek $h = h_1, \dots, h_n$ szigorúan növekvő függvények az $X_1, \dots, X_n$ értékkészletén. Ekkor $C_X = C_{h(X)}$, vagyis a kopula invariáns a valószínűségi változók szigorú monoton transzformációjára.

A tétel bizonyítása kétváltozós esetben Nelsen [1999] 22. oldalán található, amellyel a többdimenziós eset analóg módon bizonyítható. A kopula invarianciáját a CDO árazásnál a marginális eloszlások (csődidők eloszlása) egyenletes eloszlássá történő transzformációnál használjuk ki.

3.4. definíció. A

$$C_G(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

képlettel megadott kopulát Gauss kopulának nevezzük. $(\Phi)_{\Sigma}$ a Σ korrelációs mátrixú együttes n -dimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

3.2.2. Gauss kopula

Sklar tétele csak azt mondja, hogy minden együttes eloszláshoz és marginális eloszláshoz létezik kopula függvény, de nem ad útmutatást ennek a kopulának a megtalálására. A probléma megoldása tehát nem egyértelmű. (Nyilván a jó megoldás lehet egyértelmű, csak mi nem tudjuk, hogy melyik az.)

Li [2000] alapozta meg a kopulák használatát a CDO-k árazására. Már a cikk előtt is voltak modellek, amelyek kopulát használtak, de Li cikke foglalta össze a matematikai hátteret és igazolta a modell érvényességét a csődök modellezésére.

A régóta használatos CreditMetrics és a KMV vállalat modellje a bedőlés valószínűségének modellezésére látens változó modellt használnak. Tipikusan a csőd akkor következik be, ha ez a látens változó egy bizonyos küszöbérték alá esik, például ha az eszközérték az idegen tőke szintje alá esik. Ezekben a modellekben a függőségi viszonyok a látens változók korrelációjával valósulnak meg. A KMV és a CreditMetrics modellek alapvető feltevése a változók együttes normalitása. A KMV modell látens változója a vállalat eszközértékének változása, tehát az eszközökön elért hozam. A CreditMetrics modelljében a látens változó a hitelképességet jelöli. Frey et al. [2001] ezeket a látens változós modelleket vizsgálva arra jutott, hogy bár a modellek interpretációja nem egyezik meg, ha azonosan vannak kalibrálva, akkor ezek a modellek ugyanarra a strukturális felépítésre vezetnek (hiszen mindkettő az egyfaktoros Gauss kopulán alapszik). Az empirikus kutatások szerint a hozamok együttes normalitás feltevése viszont nem helytálló.

Az általános egyfaktoros Gauss kopula modell a túlélési valószínűségekre a következő együttes eloszlást adja:

$$\mathbb{P}(\tau_1 < T, \dots, \tau_n < T) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(F_1(T)), \dots, \Phi^{-1}(F_n(T))),$$

ahol a k . vállalat túlélési idejének (τ_k) az eloszlásfüggvénye F_k , és Φ_{Σ} n dimenziós normális eloszlásfüggvény, Σ korrelációs mátrixszal (a többdimenziós normális eloszlást ugyanis egyértelműen meghatározza a várható érték vektora, és a korrelációs mátrixa).

Közvetlenül az eszközök együttlmozgásából következtetve a többdimenziós csődeloszlásra, Li [2000] az exponenciális marginális eloszlásokat vegyíti a Gauss kopulával, a következő együttes eloszlásfüggvényt eredményezve:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C_R^{Ga}(1 - \exp(-\lambda_1 x_1), \dots, 1 - \exp(-\lambda_n x_n))$$

A modell az aktuáriusi tudományból vett technikákat használja fel a vállalati csődöket

tartalmazó problémák kezelésére. Li felismerte, hogy a csődök közti korreláció önmagában nem egyértelműen mérhető, hiszen nem mindegy, hogy milyen időtávon vizsgáljuk a csődök valószínűségét és korrelációját, tehát a korreláció sztochasztikus.

Li modellje a már fentebb definiált csődig eltelt időt (*time until default*), vagy másnéven túlélési időt (*survival time*), τ -t használja a csődesemények bekövetkezésének leírására, tehát a már a CDS árazásnál bemutatott modell segítségével határozza meg a marginális eloszlásokat. Az i . és j . vállalat korrelációját a csődidők közti korrelációval definiálja:

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(\tau_i, \tau_j)}{\sqrt{Var(\tau_i)Var(\tau_j)}}$$

A kopulák használatánál a csődök bekövetkezésének, tehát τ_i eloszlásának vizsgálata helyett bevezetünk X_i állapotváltozókat, és eme változók eloszlását modellezzük. Az egyedi csődvalószínűségeknek megfelelően bevezetünk vállalatról és időről függő egyedi korlátokat (*thresholds*), $k_i(t)$, mely korlátok jelentik a csőd határát. Ha a látens változó értéke, X_i , a korlát alá süllyed, csőd következik be. A korlátokat pontosan úgy határozzuk meg, hogy a csőd valószínűsége megegyezzen a kívánt határeloszlásból következővel.

Li a korrelációs paramétert az eszközök valóságban megfigyelhető korrelációjával határozza meg. Az a feltevés, hogy a vállalatok csődjének korrelációját kizárólag az eszközök együttmozgása okozza nem reális. Tops [2010] például ennek a cáfolására azt a példát hozta, hogy két vállalat csődjének a korrelációját okozhatja közös kitettség is valamely harmadik vállalat felé, amiből nem következik, hogy az eszközeik együtt mozognának. Li modelljének az alkalmazhatósága általánosabb, például ha a valóságban megfigyelhető páronkénti eszközkorrelációk helyett a piacon megfigyelhető árakhoz kalibráljuk a modell határeloszlásait (a bedőlési küszöböt), illetve a korrelációs paramétert (paramétereket), akkor a bedőlési küszöbök értelmezése csupán egy kellemes interpretációvá válik, amellyel könnyen értelmezhetővé teszi a Gauss kopula (természetesen vitatható alkalmazhatóságú) eszközét az együttes eloszlás modellezésére.

A kopuláknál használt korrelációt korrelációs paraméternek nevezzük, mert nem azonosítható egyszerűen a gyakran használatos Pearson, Spearman vagy Kendhall által bevezetett korrelációs definíciókkal, hiszen a kopulát jellemző korrelációnak függetlennek kell lennie a határeloszlásoktól (a kopulában minden határeloszlást egyetlenessé transzformálunk), és a fenti korrelációs mérőszámok nem rendelkeznek az eloszlástól való függetlenség tulajdonságával. A használandó paraméter még csak nem is a csődig eltelt idők korrelációjával egyezik meg, amely sokkal kisebb az eszközök közti korrelációnál.

3.2.3. Szimulációs lehetőségek

Tetszőleges korrelációs mátrixszal rendelkező kopulát közvetlenül elő tudunk állítani, vagyis a kopula segítségével tetszőleges korrelációs mátrixszal rendelkező n -dimenziós valószínűségi változót tudunk generálni. Ehhez generálnunk kell n darab független valószínűségi változót: $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ -t, majd transzformálnunk kell őket, hogy a megfelelő korrelációs struktúrával rendelkezzenek. A keresett $n \times n$ -es C mátrix:

$$\Sigma = CC^T$$

A felbontást például Cholesky dekompozícióval kaphatjuk meg, ami C -re egy felső háromszögmátrixot eredményez. Ekkor $C^T Y = X$ a keresett korrelációjú valószínűségi változók vektora. A változókat ezután egyenletes eloszlásúvá kell transzforálalnunk (invariancia):

$$(u_1, \dots, u_n) = (\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n))$$

Ezután a csődidők meghatározása $\tau_i = F(u_i)$ alapján történik. Ha valamelyik $\tau_i \leq t$, akkor az i . CDS csődbe ment t -ig. Ebből meghatározhatjuk a különböző tranche-ok veszteségét. Ez egy futás (egy időpontra). Ezt a lépéssorozatot kell megismételni minden időpontra, tetszőlegesen sokszor, a megfelelő pontosságú várható érték meghatározásához.

A közvetlen szimulációs megközelítés hátránya, hogy nagyon sok futást kell végezni az eredmények kívánt pontosságához (hiszen a bedőlések ritka események), aminek nagy a számításigénye. Ezért a gyakorlatban a Gauss kopula egy másik változatát, az egyfaktoros Gauss kopula modellt használják a csődök együttes eloszlásának meghatározására a közvetlen szimulációs megközelítés helyett.

3.2.4. Egyfaktoros Gauss kopula

A csődeloszlás meghatározásának lépéseit az egyfaktoros Gauss kopulával *Advanced Credit Portfolio Modeling and CDO Pricing* [2008] alapján ismertetem. A levezetés eltér a cikkben bemutatottnál, ugyanis a cikkben a CDS kosárban szereplő összes CDS csődintenzitása megegyezik, míg én CDS-enként kalibráltam a hazárfüggvényt.

Az egyfaktoros Gauss kopula lényege, hogy a korreláció egy közös faktoron keresztül valósul meg, vagyis a csőd bekövetkezése egy közös és egy egyedi faktortól függ. A közös faktor reális feltevés, hiszen a piaci környezet minden vállalatra hatással van, és a vállalati

csődök nem függetlenek sem a piaci környezettől, sem egymástól.

$$X_i := \sqrt{\rho}M + \sqrt{1-\rho}Z_i, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

ahol $M, Z_1, \dots, Z_n$ független és standard normális eloszlású valószínűségi változók. Könnyen ellenőrizhető, hogy X_i 0 várható értékű és 1 szórású normális valószínűségi változó, és $\text{Corr}(X_i, X_j) = \rho, i \neq j$.

A korlátokat úgy definiáljuk, hogy a bedőlés valószínűsége t -ig megegyezzen a kívánt eloszlásból következő valószínűséggel, tehát azzal a valószínűséggel, amelyet a piacon forgalmazott CDS-ek kuponjaiból számítottam ki:

$$k_i(t) := \Phi^{-1}(p_i(t)),$$

ahol $\Phi^{-1}(x)$ az standard normális eloszlás inverz eloszlásfüggvénye, és $p_i(t)$ pedig az eddig is használatos jelölése a t -it bekövetkező csőd valószínűségének. A korlát természetesen függ az időtől, és monoton nő, így τ_i -t definiálhatjuk úgy, mint az első időpontot, mikor az állapotváltozó kisebb, mint a korlát:

$$\tau = \inf\{t \geq 0 | X_i \leq k_i(t)\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ezzel τ_i a kívánt eloszlású, hiszen:

$$\mathbb{P}(\tau_i \leq t) = \mathbb{P}(X_i \leq \Phi^{-1}(p_i(t))) = \mathbb{P}(\Phi(X_i) \leq p_i(t)) = p_i(t)$$

ráadásul $\tau \stackrel{d}{=} \Phi^{-1}(\Phi(X_i))$, ezért a τ -k függőségi struktúrája megegyezik az X_i -k függőségi struktúrájával.

Ahhoz, hogy levezessük az együttes csődeloszlást, tehát meghatározzuk, hogy az egyes periódusokban hány vállalat, milyen valószínűséggel megy csődbe, vezessük be az M -re feltételes eloszlásokat:

$$\mathbb{P}(\tau_i \leq t | M) = \mathbb{P}(X_i \leq k_i(t) | M) = \Phi\left(\frac{k_i(t) - \sqrt{\rho}M}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

Ezek a feltételes valószínűségek már függetlenek, így az együttes feltételes eloszlást megkaphatjuk szorzat alakban. Azt, hogy egy n elemű CDS portfólióból pontosan k csőd következik be t -ig, megkaphatjuk multinomiális eloszlásként. Ezután a feltételes eloszlásból numerikus integrálással kapunk feltétel nélküli eloszlást. A teljes valószínűség

Veszteségeloszlás ($\rho = 0,05$)



1. ábra. Veszteségeloszlás

tétele alapján:

$$\mathbb{P}_d(k, t) = \mathbb{E}(\mathbb{P}_d(k, t|M)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}_d(k, t|M) dF_M(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}_d(k, t|m) f(m) dm,$$

ahol $\mathbb{P}_d(k, t)$ a feltétel nélküli, és $\mathbb{P}_d(k, t|M)$ a feltételes valószínűsége annak, hogy k csőd következik be t -ig. $\mathbb{P}_d(k, t|M)$ az egyedi feltételes eloszlásokból rekurzív függvény segítségével számolható.

Legyen $p(n, k)$ annak a (feltételes) valószínűsége, hogy n vállalatból k csőd következik be az adott időszakban, és legyen p_k a k . vállalat csődjének valószínűsége. Ekkor:

$$\begin{aligned} p(0, 0) &:= 1 \\ p(n, 0) &= p(n-1, 0)(1-p_n), \\ p(n, k) &= p(n-1, k-1)p_n + p(n-1, k)(1-p_n), \end{aligned}$$

hiszen a rekurzióban kétféleképpen fordulhat elő, hogy n vállalat közül k csőd következik be: vagy már $n-1$ vállalat közül megtörtént a k csőd, és az n . vállalat túlél, vagy az $n-1$ vállalat közül $k-1$ ment csődbe, és az n . is csődbe megy. A teljes valószínűség tétele alapján a formula egyértelműen következik, hiszen a feltételes valószínűségek már függetlenek, így az események metszetének valószínűségét a valószínűségek szorzatával kapjuk. Az, hogy n vállalatból 0 megy csődbe csak egyféleképpen kapható meg, mégpedig úgy, hogy az $n-1$ túlélő vállalat mellett az n . sem megy csődbe.

A számolás végén egy diszkrét eloszlást kapunk, amely megmondja, hogy mi a valószínűsége, hogy egy adott dátumig $0, 1, \dots, n$ csőd következik be. Az 1. ábrán egy ilyen eloszlást láthatunk. Az x tengelyen a fizetési napok szerepelnek, 7 évig. Az y tengelyen a bedőlt vállalatok száma, 0-tól 50-ig, mivel 50 után bedőlés valószínűsége közel 0. A z tengelyen a valószínűségek láthatók.

Mivel a feltételezésünk szerint a CDS portfólióban szereplő CDS-ek névértéke és megtérülési rátája megegyezik, innen már egyszerűen számolhatunk várható névértéket és várható veszteséget az adott tranche-ra (amelynek a az attachment és b a detachment pontja) a befektetés százalékában kifejezve:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_t) &= 1 - \left(\mathbb{E}(L_t) + \sum_{k=0}^n k_i p(k, t) m_k \right), \\ m_k &= (\min(\max(Rk/n, 1-b), 1-a) - (1-b)) / (b-a), \\ \mathbb{E}(L_t) &= \sum_{k=0}^n k_i p(k, t) l_k, \\ l_k &= (\min(\max((1-R)k/n, a), b) - a) / (b-a), \\ &\text{és} \\ L_{t_i}(a, b) &= \min\left(\max\left(L_{t_i}^{pf}, a\right), b\right) - a \\ N_{t_i}(a, b) &= (b-a) - L_{t_i}(a, b) - \min\left(\max\left(R_{t_i}^{pf}, 1-b\right), 1-a\right) - (1-b) \\ &\text{ahol:} \\ R_{t_i}^{pf} &- \text{ a } t_i\text{-ig csődbement CDS-ek összes megtérülési értéke} \end{aligned}$$

A konstans névérték és megtérülési ráta feltételének feloldása nagyban megnehezítené a számolásainkat, hiszen akkor nem lenne elég azt tudnunk, hogy mi a valószínűsége k vállalat csődjének, hanem azt is fontos lenne tudni, hogy melyik k vállalat ment csődbe. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy a fent bemutatott rekurzív függvényben nem azonos eseményt eredményez, ha $n-1$ -ből $k-1$ vállalat megy csődbe, és az n . vállalat is csődbe megy, illetve hogy az $n-1$ vállalatból már k csőd következett be, és az n . túlél, és így $(n+1)$ végső állapot helyett 2^n végső állapot valószínűségét kell kiszámolni.

3.2.5. Gauss-Hermite kvadratura

A tranche árazásnak a veszteségeloszlás számolása a legszámításigényesebb része, és még az alap, egyparaméteres és egyfaktoros Gauss kopulával is hosszú másodperceket vesz igénybe egy számolás, amit a kalibrációnál a változók számával arányosan, de mindenképpen többszáz-as nagyságrendű alkalommal kell elvégezni az optimum megtalálásáig, ami

órákat vehet igénybe. A számolás legidőigényesebb része a feltételesen független valószínűségekből a veszteségeloszlás előállítás, amelyet a numerikus integrálásnál sok ponton meghív a Matlab *integral* függvény. Némileg gyorsítja a számolást, ha nem az egész szám-egyenest integrálunk, csak ott, ahol szignifikáns a függvény értéke (például a $(-8, 8)$ -as tartományon), illetve néha segít az is, ha ezt az intervallumot is két részre osztjuk. Az időnyereség sajnos még így sem kielégítő.

Nagyban javítja a hatékonyságot, ha valamilyen kvadratúra szabály alkalmazásával közelítjük a numerikus integrált. Én erre legalkalmasabbnak a Gauss-Hermite szabályt tartom, ezért ezt alkalmaztam a kalibrálásnál a folyamat felgyorsítására.

A Gauss-Hermite szabály kiválóan alkalmas a normális valószínűségi változók függvényeinek várható értékének kiszámításához, hiszen a következő alakú integrált közelíti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2} dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + R_n,$$

ahol n a mintapontok száma, amit a közelítés használ, x_i az n -ed fokú Hermite-polinom, $H_n(x)$ i . gyöke ($i = 1, \dots, n$), és az ehhez tartozó súlyok:

$$w_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 (H_{n-1}(x_i))^2}$$

A hiba:

$$R_n = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad -\infty \leq \xi \leq \infty$$

A Gauss-Hermite kvadratúra szabályról Abramowitz – Stegun [2012] ír bővebben. A Hermite-polinomok olyan ortogonális polinomok, amelyeknek a matematikai felhasználhatósága rendkívül sokrétű. Az n . Hermite-polinom definíciója:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} = \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n \cdot \underline{1}$$

Szerencsére a gyakorlatban egyszerűbb módja is van a Hermite-polinomok meghatározásának, hiszen rekurzív módon képezhetők:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1 \\
H_1(x) &= 2x \\
&\vdots \\
H_n(x) &= 2xH_{n-1}(x) - 2nH_{n-2}(x)
\end{aligned}$$

A Hermite polinomok előállítását tehát egyszerű feladat, a nehezebb a magasabb fokszámú gyökeinek a meghatározása. A jó közelítéshez viszonylag magas (150) fokszámra van szükség, amely polinomok zéróhelyeinek meghatározása már nem egyszerű naív módszerekkel. A függvény kiértékelésének pontjait (x_i -k) és a súlyokat (w_i) a Matlab fájl-megosztó honlapján található *GaussHermite_2.m*¹ függvénnyel határoztam meg, amely Frobenius társ mátrix segítségével számolja a gyököket.

A konkrét problémára való alkalmazhatósághoz némileg módosítani kell a függvényformán. μ várható értékű és σ szórású normális eloszlás függvényének várható értékére:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(y)) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{2}\sigma x + \mu) e^{-x^2} dx \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n w_i f(\sqrt{2}\sigma x_i + \mu)
\end{aligned}$$

A mi esetünkben a σ 1-nek, a μ pedig 0-nak felel meg. Sajnos a mi függvényünk Hermite-polinomokkal viszonylag nehezen közelíthető, ezért elég nagy fokszámra van szükség a pontos közelítéshez. A közelítés pontossága függ a korreláció nagyságától. A legkevésbé jól a középső tranche-okat közelíti módszer, 150-fokú polinom (vagyis 150 hely és hozzá tartozó súlyok) és 0,4-es korrelációs paraméter esetén a leginkább a negyedik tranche ára tér el, a hiba: $0,16e - 04$. Ugyanezzel a korrelációval, 500-ad rendű közelítéssel a hiba a tizedik tizedes jegy alatt marad. Mivel általában is a hatodik tizedes jegy pontosságra törekedtem, ezt a hibát elfogadtam, hiszen ezzel egy-két nagyságrendet javult a futásidő. Nagyobb korreláció esetén, például 0,8-as paraméterrel számolva a hiba megnő, 500 csomópont esetén a negyedik, 150 csomópont esetén pedig már a harmadik tizedes jegy különbözik a negyedik tranche-ra. Általában a pontos számolást alkalmaz-

¹Letölthető: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/26737-legendre-laguerre-and-hermite-gauss-quadrature/content/GaussHermite.m>

tam, csak a kalibrációknál használtam a közelítést. Ahol magas korrelációk jöttek ki, ott a kalibrációt újrafuttattam a numerikus integrálást használó árazással, a Gauss-Hermite polinomot használó kalibráció eredményét megadva kezdőértéknek.

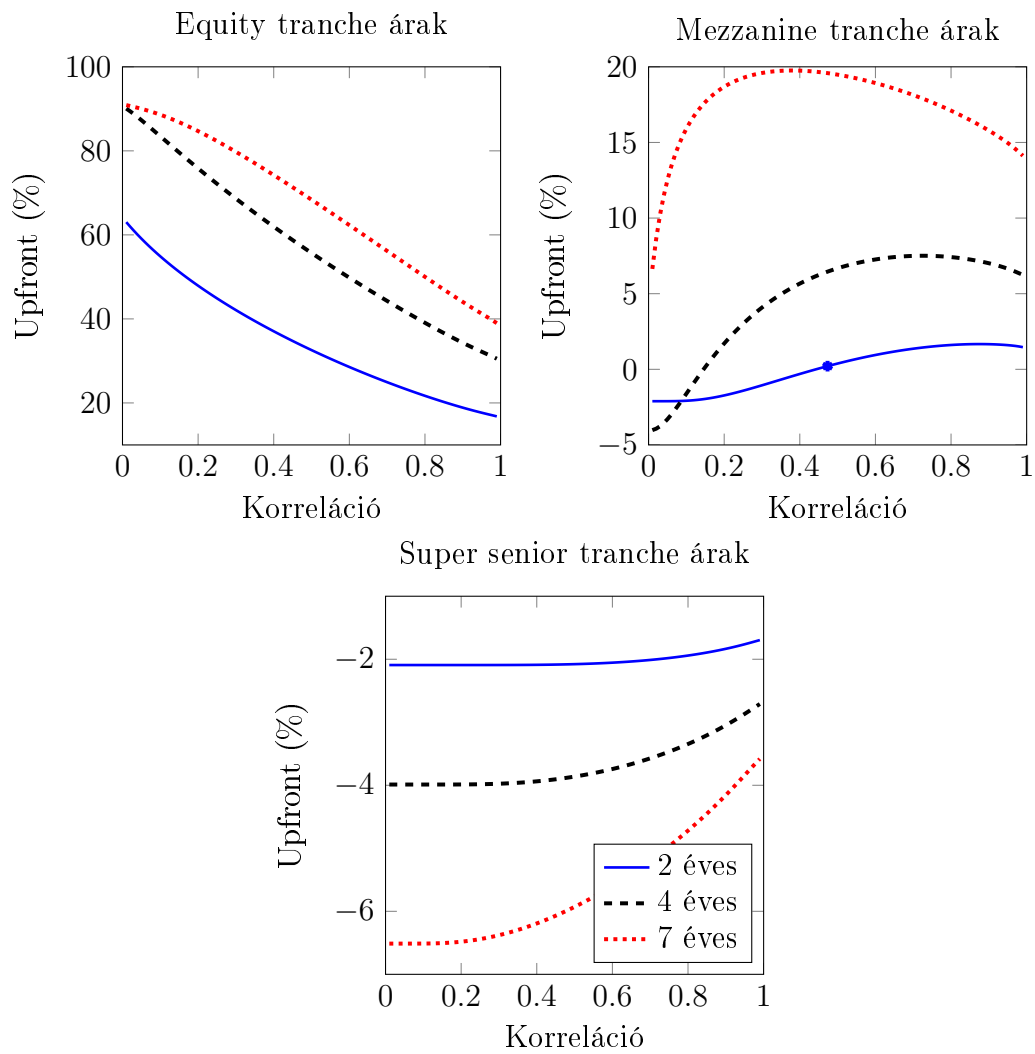
4. A korrelációs struktúra vizsgálata

4.1. A korreláció hatása

A korrelációs struktúra vizsgálatához először meg kell értenünk, hogy hogyan hat a korreláció a tranche árakra. Ha nő a korreláció, akkor a nagyobb veszteséggel járó együttes bedőlések valószínűsége megnő a kevés bedőléshez képest (míg a valószínűségek összege 1, és az egész portfólióra szóló várható veszteség változatlan marad), így az equity tranche-ra jutó várható veszteség csökken, és az ára (upfrontban vagy running spreadben számolva) csökken. Ez azt is jelenti, hogy a super senior tranche ára nő a korrelációval. A két szélső tranche-on kívül viszont nem monoton a korreláció hatása.

A 2. ábrákon az egyfaktoros kopula modell által generált upfront árak láthatók, a korrelációs paraméter függvényében. A kétéves CDS index spread a referencia portfólióra 87 bázispont, tehát a piac a két év alatt a portfólióban körülbelül 1,7% veszteséget vár. 0 korreláció esetén ez úgy következik be, hogy függetlenül egymástól összesen 1,7% veszteség következik be, nyilvánvalóan valamekkora szórással. Ez a veszteség az equity tranche-on belül marad, a szórással számolva lehet, hogy ki is meríti, és belép a junior tranche-ba. Arra mindenesetre igen kicsi az esély, hogy a magasabb szenioritású tranche-okat, például a super senior tranche-ot is elérje. A szélsőséges 1 korreláció esetén vagy az összes vállalat csődbe megy, (0,4 megtérülési rátával számolva) körülbelül 2,8%-os valószínűséggel, vagy egyik sem. A két szélsőséges eset végeredménye nincsen egymástól messze, ezzel magyarázható a képen látható 2 éves mezzanine és senior tranche-ok viszonylagos érzéketlensége a korrelációra. 0 korreláció esetén a super senior tranche-nál például szinte csak a 100 bázispontos running spread upfonttra cserélése történik. Az 1 korrelációhoz közeledve nagyon lassan emelkedik az ár, de mivel a 2,8%-os valószínűséggel is csak a super senior tranche névértékének 26,44%-át fizeti ki (a várható érték 0,7%), az upfront díj mindvégig negatív marad, tehát a 100 bázispontos running spread többet ér, mint a várható kifizetés. 1 korreláció esetén a -1,3% körüli upfrontnál valamivel kisebb értéket kapunk, a megtérülési rátával a csődök miatt folyamatosan apadó névértékre fizetett csökkenő spread miatt.

A monotonitás hiánya (a mezzanine tranche-oknál) sajnos egyben azt is jelenti,



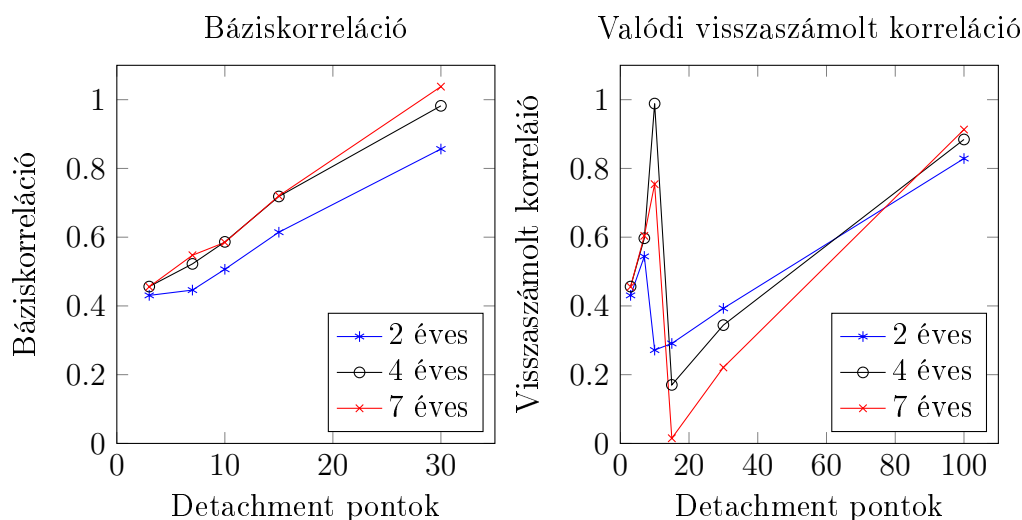
2. ábra. Tranche árák upfrontban, a running spread rendre: 500, 100, 100 (bps)

hogy a mezzanine tranche-okra visszaszámolt korreláció nem egyértelmű az equity és a super senior tranche-okkal szemben. Ennek a problémának a kikerülésére gyakran nem a valódi visszaszámított korrelációt használják, hanem az úgynevezett *báziskorrelációt*. A báziskorreláció egy olyan mesterséges korreláció, amelyet bootstrap módszerrel számolnak a következőképpen:

1. Az equity tranche báziskorrelációja a valódi visszaszámolt korreláció, vagyis az a korreláció, amelyet az egyfaktoros Gauss kopula modellbe helyettesítve a megfelelő running spread és diszkontfaktorok használatával a piacon megfigyelhető árat kapjuk az equity tranche-ra.
2. A k . tranche báziskorrelációja az a korreláció, amellyel a k . tranche detachment pontjával meghatározott equity tranche értékéből kivonva a $(k - 1)$. tranche detachment pontjával meghatározott equity tranche értékét, a piacon megfigyelhető árat kapjuk.
3. A super senior tranche-ra nem létezik báziskorreláció, hiszen a detachment pontjához tartozó equity tranche az egész portfólió, amelynek a várható vesztesége nem függ a korrelációtól.

A báziskorreláció kihasználja, hogy a tranche-ok előállíthatók két equity tranche különbségeként. A báziskorreláció számításánál gondolnunk kell a tranche-ok különböző névértékeire és running spreadjeire, tehát vagy különös gondossággal végezzük a számításainkat, vagy közvetlenül a teljes névérték százalékában kifejezett veszteségek különbségét vesszük, és ezzel számolunk. A báziskorreláció általában létezik, és egyértelmű, hiszen az equity tranche-ok ára folytonos, szigorúan monoton függvénye a korrelációnak. A magasabb tranche-oknál, főleg hosszabb lejáratú CDO-k esetében előfordul, hogy nem létezik olyan korreláció, amelyet az egyfaktoros Gauss kopula modellbe helyettesítve megkapnánk a piaci árat, vagy például extrapolációval 1-nél nagyobb értéket kapunk. Ez a jelenség ugyanúgy előfordulhat a valódi visszaszámolt korrelációnál (amely ráadásul gyakran nem is egyértelmű), és az egyfaktoros kopula modellspecifikáció helytelenségét mutatja, de ettől még a báziskorrelációk használhatóak, és használják is őket a piacon megfigyelhető árak jellemzésére. (A báziskorreláció használatának hátrányaira, vagy legalábbis korlátaira a fejezet további részében még kitérek.)

Ahogy a valódi visszaszámolt korreláció, a báziskorreláció is modellfüggő lenne általánosságba, de a gyakorlatban visszaszámolt korreláció és báziskorreláció alatt a legegyszerűbb egyfaktoros Gauss kopula modellel számolt korrelációs paramétert értjük. Fontosnak tartom hangsúlyozni, hogy a báziskorreláció csupán egy eszköz, amelynek segítségével egyszerűen és egyértelműen beszélhetünk a visszaszámolt korrelációs struktúráról és a piacon



3. ábra. Bázis és valódi korreláció

jegyzett árakról, mint ahogyan a Black-Scholes modellben a visszaszámolt volatilitásról. A báziskorreláció egy mesterséges szám, semmilyen valódi jelentéssel nem bír.

Ha az alap egyfaktoros Gauss kopula modell feltevései a valóságban teljesülnének, akkor a piacon jegyzett tranche árakból visszaszámított korrelációnak, és a báziskorrelációnak is konstansnak kell lennie a trancheok és lejáratok között. Ez sajnos nem teljesül, a piacon visszaszámított korrelációs mosolyt, ferdeséget vagy grimaszt figyelhetünk meg, ami időben sem változatlan.

A 3. ábrán látható a 2, 4 és 7 éves CDO tranche-ok valódi visszaszámolt és báziskorrelációja. (A valódi visszaszámolt korreláció számolását az előző tranche már kiszámolt korrelációjáról indítottam.) A tranche árakat, a visszaszámolt és báziskorrelációk értékét az ábrákon mindig az adott tranche detachment pontjához rendelem. Nem meglepő módon a kétféleképpen számolt korrelációk nem egyeznek meg egymással, és a legkevésbé sem konstans egyik sem, ráadásul a 7 éves CDO senior tranche-ának báziskorrelációja extrapolálva nagyobbra jön ki, mint 1. A már régóta megállapított tényről magunk is meggyőződöttünk, a valós piaci árakat generáló folyamatok nem a teljesen alap Gauss kopula modell feltételei szerint alakulnak, tehát a sok feltétel között legalább egy nem teljesül. Dolgozatom célja megvizsgálni, hogy az egyfaktoros korrelációs struktúra lazításával, a többi feltevés (konstans megtérülési ráta, Gauss kopula) feloldása nélkül mennyivel javulhat a modell illeszkedése. Ehhez először nézzük meg, hogy mennyire rossz a modell, vagyis mennyire ad az eredetiektől eltérő árakat, ha annak ellenére, hogy tisztában vagyunk vele, hogy a korreláció nem konstans, mégis ráerőltetjük az egyfaktoros Gauss kopulát a piaci árakra. Az eredmény maga nem igazán meglepő, hisz már a visszaszámított korrelációkból is sejthető, hogy a legközelebbi árak is igen távol esnek a piacon megfigyelhetőktől. A továbbiakban viszont ehhez az eltéréshez tudjuk viszonyítani az il-

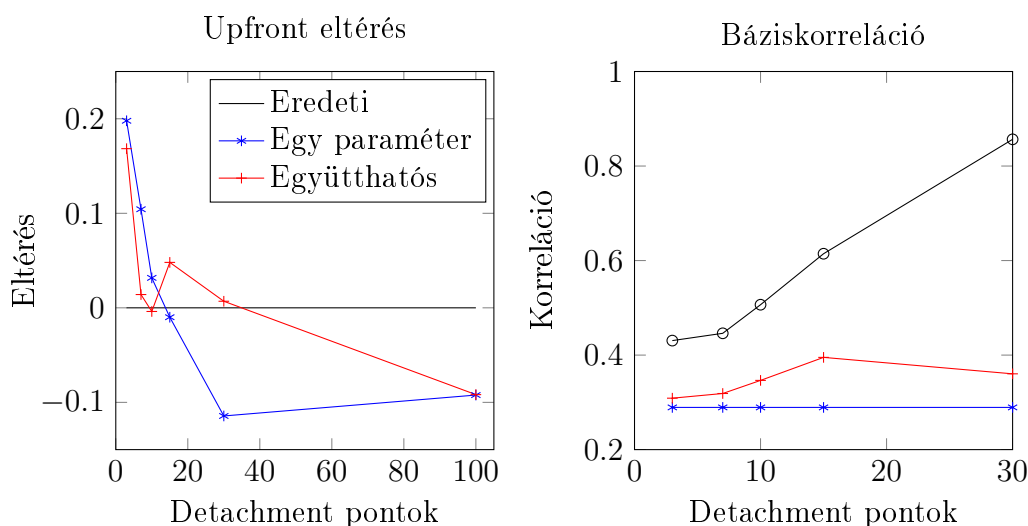
leszkesedés javulását a feltételek feloldásának eredményeként, ráadásul a vizsgálat közben egy érdekes következtetést vonhatunk le a báziskorreláció és az árak viszonyáról.

A fejezet további részében a különböző kalibrációkat a 2 éves CDO árakra végzem el, a kalibráció magas számításigénye miatt.

Egyetlen korrelációs együtthatóval kalibrálva, az upfrontoktól vett relatív négyzetes hibát minimalizálva, a Gauss kopula korrelációs paraméterére 0,2893-at kaptunk, a relatív eltérés négyzetösszege, vagyis a hiba 0,0727. Ami meglepő, hogy az illesztett modell báziskorrelációja egyáltalán nem illeszkedik az eredeti adatokból számolt báziskorrelációra. Jobbat nem várhatunk el tőle, mivel konstans, csak azt, hogy valamilyenfajta átlagát képezze az eredeti báziskorrelációnak, vagyis legalább metssze egy helyen a görbét. Ez nem történik meg, mélyen alatta van, pedig a fönti érvelés alapján egy-egyértelmű a kapcsolat a tranche árak és a báziskorreláció között, tehát ha jól közelítjük az árakat, a báziskorrelációt is jól közelítjük, amiből arra következtetnénk, hogy (a hiba eltérő súlyozása okozta különbséget leszámítva) mindegy, hogy az árakra, vagy a báziskorrelációra kalibrálunk.

Hogy jobban átlássuk a helyzetet, nézzük meg, hogy milyen eredményt kapunk, ha a báziskorrelációra illesztünk. Ezt a báziskorreláció számítás időigénye miatt, kihasználva a báziskorreláció és az equity árak biztosan egy-egyértelmű kapcsolatát, a piacon megfigyelhető upfrontokból a bootstrap eljárás inverzét végrehajtva, equity upfrontok számolásával helyettesítettem, és a modell által meghatározott equity upfrontok relatív hibáinak négyzetét minimalizáltam. Ennek az eljárásnak a számításigény csökkenésén kívül még egy előnye van a báziskorreláció közvetlen kalibrálásához képest, így ugyanis a super senior tranche árát is számításba vesszük. A báziskorreláció számítását a super senior ára nem befolyásolja, gyakorlatilag bármi lehet, akár teljesen inkonzisztens értéket is fölvehet. Az általam alkalmazott módszerrel viszont a super senior tranche befolyásolja a kialakult hibaminimalizáló korreláció értékét, ha nem is a detachment pontjához tartozó equity tranche áron keresztül, hiszen az konstans, de legalábbis az attachment pontja által meghatározott equity tranche árán (a várható veszteségen) keresztül. (Az egy másik kérdés, hogy néha a gyakorlatban is találkozhatunk olyan példákkal, hogy a super senior tranche ára nem konzisztens a piac által meghatározott senior tranche és ugyanarra a portfólióra vonatkozó CDS index swap árával. Ennek az anomáliának a vizsgálata meghaladja a kutatásom kereteit.)

A báziskorrelációval végzett kalibráció 0,4734-et ad a korrelációs paraméterre, 0,03 hibával. A két hiba persze nem összehasonlítható, de látszik, hogy a második módszerrel teljesülnek a kívánalmaink a paraméterről (ami ebben a speciális esetben megegyezik a bázis és a valódi korrelációval, hiszen konstans).



4. ábra. A korrelációs paraméter kalibrációjának eredményei

A 4. bal oldali ábráján az eredeti áraktól való relatív eltérések, a jobb oldali ábráján pedig a visszaszámolt báziskorreláció értékei szerepelnek. Látható, hogy a második kalibráció valóban közelebb hozta a báziskorreláció értékeit, a valódi tranche áraktól viszont nagyobb eltérést okozott, tehát az előbbi kalibrálás még lehet jó a maga nemében. A két eredmény között egyértelmű a különbség, és nagyobb, mint amit vártunk volna az eltérő súlyozás miatt. Két eset lehetséges:

1. A kettő közül valamelyik algoritmus eredményei rosszak (például mert valamiért nem futott végig, lokális minimumot talált stb.). A programkód böngészése helyett ezt a kapott értékek konzisztenciájának ellenőrzésével zárhatjuk ki.
2. Ha gyakorlatilag mindkét kalibráció eredménye helyesnek bizonyul, akkor a két eljárás közül valamelyiket elméletileg helytelen használni. Ebben az esetben el kell döntenünk, hogy melyik a jó módszer, amit a továbbiakban követhetünk (és ezzel együtt illene meghatároznunk, hogy a másik miért rossz).

Könnyű látni, hogy az első módszerrel közelebb kerültünk az árakhoz. Látható, hogy bár a modellel számolt árak nem illeszkednek jól a piacon megfigyelhető árakra, az algoritmus végigfutott, a rugalmatlan modell lehetőségein belül igyekezett a megtalálta a modell által elérhető minimumot, a megtalált értékek hol nagyobbak, hol kisebbek a megcélzottaknál. Ugyanez elmondható a báziskorrelációval való kalibrálás eredményére, és a báziskorrelációra. Az első tranche értékeire egyszerűen ellenőrizhetjük a konzisztenciát, hiszen az equity tranche báziskorrelációja a valódi korreláció, amelynek negatív függvénye az ár. A két ábrát összehasonlítva ez teljesül, mert amelyik görbe az eredetinél nagyobb equity upfront díjat mutat (az upfronttal kalibrált) annak a báziskorrelációja kisebb,

és fordítva. A korrelációra történő kalibrálásnál észrevehető, hogy a negyedik tranche eltérése a legnagyobb, többszöröse az upfronttal kalibrált maximális eltérésnek. Ezt a hatalmas négyzetes eltérést eltéríti a minimumtól problémát. A 2. ábrán a szóban forgó értéket egy pöttyel kiemelttem. A függvény enyhe pozitív lejtéséből látszik, hogyha ezt a hibát a kalibráció ki akarja küszöbölni, akkor ennél a pontnál jóval kisebb korrelációt kell választani. Ez meg is történt az upfrontra történő illesztésnél. A relatív négyzetes hiba a legkevésbé érzékeny, de rossz helyen levő tranche-okra minimalizál, a saját korrelációjuk felé húzással.

Bár az elemzés nem teljes, a jelek szerint az algoritmusok jól futottak le, tehát a megoldások gyakorlatilag jók, már csak el kell döntenünk, hogy elméletileg mi a baj az egyikkel, és melyiket helyes használnunk. A második kérdésre könnyebb a válasz. Mivel a piacon az árakat running spreadekben és upfront díjakban jegyzik, nem pedig báziskorrelációban, minden modellel ezeket az árakat törekszünk előállítani, tehát ezekkel értelmes a kalibrációt elvégezni, következésképpen báziskorrelációval nem érdemes.

Az egyetlen paraméter kalibrálása a modell rugalmatlansága miatt elég extrém esetenek tűnik, de a jelenséget hűen tükrözi. Hasonló végeredményt kaptam a dolgozatomban vizsgált másik modelleknél is, az upfront díjjal kalibrált modellek báziskorrelációjának struktúrája nem illeszkedik az eredeti árak báziskorrelációjára. Ennek oka az lehet, hogy egy tranche báziskorrelációja az előző tranche-ok árára épít, valamint az utána következő tranche-ok rá építenek. Ezt azt jelenti, hogy ha a modellünk nem tudja jól megközelíteni az árakat, nem kerül nagyon közel hozzájuk, a rugalmatlan korrelációérzékenységű tranche-ok miatt a báziskorreláció nem feltétlenül illeszkedik. Emiatt a báziskorreláció nem alkalmas a modell kalibrálására, hiszen eredménye gyakorlatilag értelmetlen mindaddig, amíg nem kerülünk megfelelő közelségbe a kalibrált tranche árakkal az eredeti árakhoz. Sajnos nincsen más lehetőségünk, minthogy felkészülünk rá, hogy a kalibrált modellből számított báziskorreláció struktúrája kevés hasonlóságot fog mutatni az eredetivel. Ettől még ugyanúgy igaz, hogy a kapcsolat a báziskorreláció és a tranche árak között egy-egy értelmű, így következtethetünk egyikből a másikra, csak minél távolabbi tranche árakkal (minél rosszabb illeszkedéssel) állunk szemben, annál nehezebb az összefüggéseket meglátnunk az árak és a korrelációk kapcsolatai között.

4.2. A konstans együttható feloldása

A legegyszerűbb egyfaktoros Gauss kopula modell feltevése, hogy az összes CDS együtthatója megegyezik a közös faktorra, vagyis a korrelációs mátrix a következő alakú:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Még az egyfaktoros modellen belül lehetőségünk van a korrelációs mátrix általánosítására, még hozzá ha megengedjük, hogy a CDS-eknek különböző együtthatói legyenek a közös faktorra. Ekkor a fenti modell a következő egyenletében módosul:

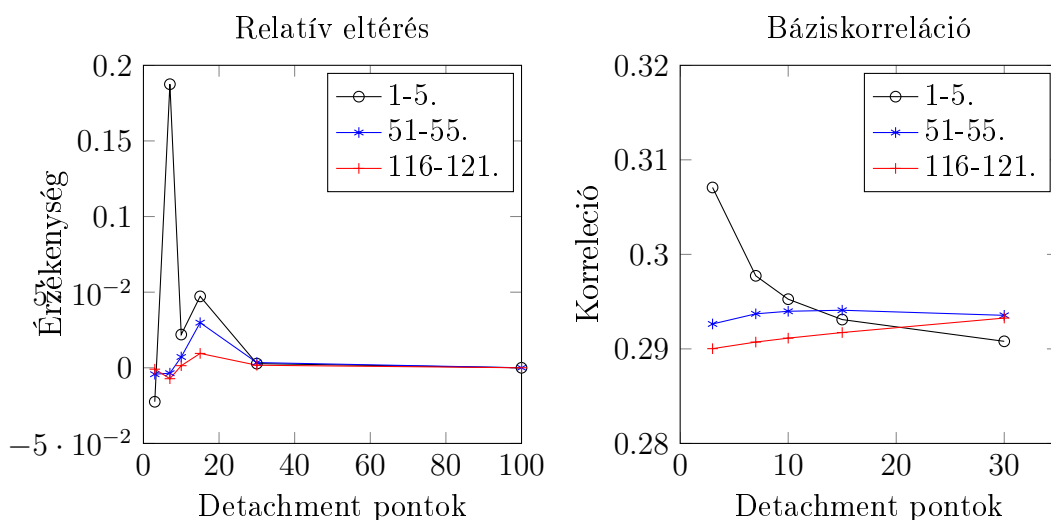
$$X_i := \sqrt{\rho_i}M + \sqrt{1 - \rho_i}Z_i, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ezzel a változtatással a már kiszámolt küszöbök nem változnak, csak a feltételes valószínűségeken kell az eddig állandó együtthatót kicserélni a CDS-enként különbözőre. A modell számításigénye nem nő számottevően, de máris színesebb korrelációs struktúrát érhetünk el vele, egészen pontosan az együtthatók diadikus szorzatához a korrelációs mátrix átlójához az egyedi faktorok varianciáját hozzáadva (az átlót egyre kiegészítve, és gyököt vonva, de az egy marad):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\rho_2\rho_1} & \cdots & \sqrt{\rho_n\rho_1} \\ \sqrt{\rho_1\rho_2} & 1 & \cdots & \sqrt{\rho_n\rho_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\rho_1\rho_n} & \sqrt{\rho_2\rho_n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

A modellnek az egyfaktoros alapmodell egyetlen paraméteréhez képest drasztikusan megnőtt a paraméterszáma, még hozzá a szintetikus CDO-t alkotó CDS-ek számára. Jelen esetben ez 121 változót jelent, és 6 tranche árat, amit a kalibrálásnál használhatunk, vagyis a modellünk szabadságfoga teljesen elveszett. Értelemszerűen nem kezdhetünk neki a kalibrációnak 121 változóval, hiszen nincs olyan algoritmus, amely belátható időn belül eredményre vezetne ebben a kötött problémában. Ha mégis valamiféle eredményre szeretnénk jutni, amivel összehasonlíthatjuk az egyparaméteres modell illeszkedését, le kell egyszerűsíteni a problémát. Természetesen ehhez megkötésekre van szükség, ami a modell rugalmasságát csökkenti, de reménykedhetünk benne, hogy még így is szignifikáns javulást tapasztalunk.

Mivel egyetlen adat van a kezemből a CDS-ekről, még hozzá az egyedi spreadek, ezekkel az adatokkal kell dolgoznom, hogy meghatározzam az egyedi korrelációkat ($\sqrt{\rho_i}$)



5. ábra. Érzékenységvizsgálat

a közös faktorról. A helyzet nem teljesen reménytelen, hiszen a CDS spreadekből bedőlési valószínűségeket lehet számolni a csődintenzitás meghatározásán keresztül. A bedőlési valószínűségeknek pedig sok közül van a CDO tranche-ok értékeléséhez. Az elsőként bedőlő CDS nagy valószínűséggel a nagy csődintenzitású, vagyis a nagy spreadet fizető CDS-ek közül kerül ki, tehát ezeknek a CDS-eknek van a legnagyobb hatása az equity tranche-ra. Ha például a magas spreadet fizető CDS-eknek nagy a korrelációs együtthatója, az azt jelenti, hogy egymással korrelálnak, nagy valószínűséggel dőlnek be együtt, vagy nem dőlnek be. Amíg a legtöbb CDS korrelációs együtthatója eléggé kicsi, addig például a super senior tranche-ot kevésbé érinti, hogy a veszélyes CDS-eknek mekkora a korrelációs együtthatója, hiszen ha valami kedvezőtlen hatás miatt bedől néhány kockázatos CDS, és még egy pár kevésbé kockázatos, a super senior tranche-ba még mindig nagy valószínűséggel nem lép be a veszteség.

Ahhoz, hogy elképzeléseinket igazoljuk, vizsgáljuk meg, hogy lehet-e az együtthatókon keresztül (többé-kevésbé) célzottan hatnunk egy-egy tranche árára, vagy a báziskorrelációs görbe egy-egy pontjára. Ha érzékenységet vizsgálunk, akkor érdemes a báziskorreláción keresztül (is) elemeznünk a kérdést, hiszen elég kicsi eltérésekről beszélünk ahhoz, hogy a báziskorreláció „ne romoljon el”, ráadásul az upfrontokból nem látszik szemléletesen a változtatás hatása (bár a super senior tranche-ról szokásosan le kell mondanunk, ha csak a báziskorrelációt vizsgáljuk). Az az előfeltevésünk, hogyha a kockázatos CDS-ek együtthatóját változtatjuk, annak nagyobb (a változtatással ellenkező irányú) hatása lesz az equity tranche árára, mint a super-senior tranche-ra, és esetleg fordítva is. Emellett számíthat a korreláció átlagos értéke is, ami a báziskorreláció görbe szintjét adja.

A korrelációs együtthatók változtatásának hatását úgy vizsgáltam, hogy a korrelációs együtthatónak alapértékként a kalibrált 28,93%-os korrelációt adtam, majd a 2 éves

spread szerint csökkenő sorrendbe állított CDS-ek közül először az első öt, másodikként az 51-55., harmadikként pedig az utolsó öt CDS korrelációs együtthatóját cseréltem ki 38,93%-ra (minden próba után visszaállítottam az összes CDS együtthatóját az alapértékre). Ezzel a módszerrel két csoportot alakítottam ki a CDS-ek között. A megváltoztatott értékű csoporton belül a CDS-ek korrelációja 38,93%, az változatlan értékű csoporton belül a korreláció 28,93%, és a két csoport bármely két tagja között a korreláció 33,56% (a két csoport korrelációjának mértani átlaga).

Az 5. ábra jobb oldalán az így kapott tranche upfrontokból számított báziskorreláció van illusztrálva, az ábra bal oldalán pedig a 28,93%-os paraméterrel számolt áráktól való relatív eltérés.

A relatív eltéréseket tartalmazó ábrán látszik, hogy az van a legnagyobb hatással az összes tranche árra, ha a kockázatos CDS-ek együtthatóját változtatom, és meglepő módon nem az első tranche-ra van a legnagyobb hatással, hanem a másodikra, bár az első tranche-on legalább a változás iránya megfelel a várakozásainknak. Ha a közepesen kockázatos CDS-ek árát növelem, az első három tranche-ra alig van hatással, csak a negyedik tranche-ra egy kicsivel. Úgy tűnik, hogy az utolsó két tranche árra nincsen szignifikáns hatással semelyik változtatás sem. Ennek az az oka, hogy ezek a tranche-ok amúgy sem érzékenyek a korrelációra. A legkisebb hatással a tranche árakra a biztonságos CDS-ek korrelációjának növelése volt.

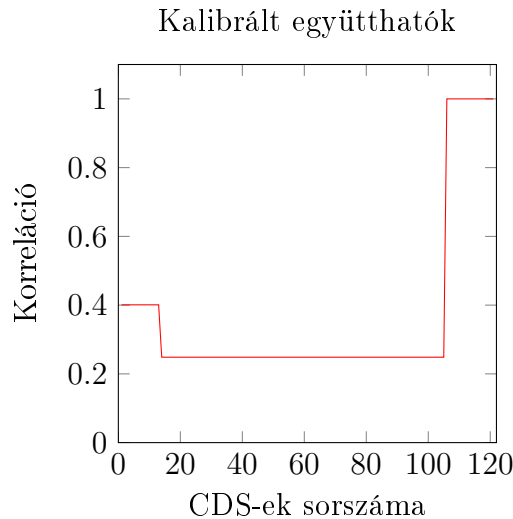
A jobboldali ábrán láthatjuk az árákból visszaszámolt báziskorrelációt. Az első kísérletnél itt is nagy hatás látszik. A tranche árakon nem látszott igazán beteljesülni az a várakozás, hogy a kockázatos cégek korrelációjának növelése az első tranche-ra lesz a legnagyobb hatással, a báziskorreláción annál inkább, valóban megnövekedett az első tranche-ok báziskorrelációja, az utolsó báziskorreláció felé egyre csökkenő mértékkel. Az utolsó báziskorreláció (a senior tranche árából számolva) alig emelkedett. A második kísérlet említésre méltó eredménye, hogy valóban a görbe közepét tolta fel leginkább a változtatás. Az ábrán nem látszik tisztán, de az utolsó báziskorreláció kicsit alacsonyabban van, mint az utolsó előtti. A harmadik kísérletben az az érdekes, hogy a másodikkal szinte egybeesik a görbe vége (sőt, a harmadiké egy kicsit lejjebb van), csak a harmadik görbe meredekebben emelkedik, mindenhol alacsonyabb az értéke. Gondolhatnánk azt, hogy ennek az lehet a magyarázata, hogy a nagyon biztonságos CDS-ek együtthatóját változtattuk meg, tehát a görbe legvégét várjuk legmagasabbra, de sajnos ezt nem láthatjuk, mert az utolsó tranche-ra nincsen báziskorreláció. A szomorú hír viszont az, hogy még ha ki tudnánk is számolni a super senior tranche-ra a báziskorrelációt (ami elég értelmetlen gondolat), akkor is ugyanaz lenne a görbe jobb oldali vége. Hiszen ha egy tranche-ra kiszámolt báziskorreláció megegyezik egy másik kalibráció ugyanerre a tranche-ra számított báziskorrelációjával, és a többi következő tranche ár is egyezik (gyakorlatilag erről van

szó), akkor a további báziskorreláció értékei is meg fognak egyezni, tehát ha két görbe összeér (ha a további árak ugyanazok), többé már nem ágaznak szét újra.

Meglepő, hogy bár mind a három kísérletben ugyanakkora változtatást eszközöltem, csak másik CDS-en, az upfront áron és a báziskorreláción viszont nemcsak a hatás helye volt a különbség, hanem az ereje is az egész struktúrára nézve. Ez azt a feltevést igazolja, hogy van értelme a CDS spreadek függvényében megválasztani a korrelációs együttthatókat. Sőt, az is kiderült a jobb oldali ábrából, hogy ha emelkedő báziskorrelációt szeretnénk előállítani, akkor valóban a spread csökkenő függvényének kell lennie az együttthatóknak, ha csökkenőt, akkor pedig fordítva, ha pedig egy darabig növekvő, majd csökkenő görbét, akkor a spreadek mediánjától valamennyivel balra kell magas együttthatókat adnunk a CDS-eknek. Az előállított modell alakjáról (konvex, konkáv) ezen túlmenően elég nehéz általános következtetéseket levonni, mert ehhez a vizsgálat nem volt elég széleskörű, azt viszont semmiképpen ne gondoljuk, hogy a spread – együtttható függvény pontjainak valamiképpen megfeleltethetőek a báziskorreláció pontjai, ennél sokkal bonyolultabb az összefüggés köztük.

4.2.1. Kalibráció

Mint ahogyan már említettem, sajnos nem reális lehetőség 121 változót kalibrálni a 6 upfront árra. Dolgozatomban a korrelációs együttthatókat a spreadek szakaszonként konstans (lépcsős) függvényeként kalibráltam. Ezen a kereten belül is még nagy az eldöntendő (eldönthető) változók száma: a lépcsők száma és a lépcsőfokok helye nem egyértelműen adódó paraméterei a kalibrációnak. Nyilvánvalóan annál pontosabb lesz a kalibráció, minél több változót hagyunk meghatározhatónak az algoritmus alapján, de annál lassabb lesz az algoritmus, mert annál több függvényhívásra van szüksége minden iterációhoz. A kalibrációt elvégeztem kettő, három, négy és öt szakasszal is. Ha meg szeretnénk határozni a töréspontokat, elég gyenge lábakra támaszkodhatunk csak, és mondjuk ott húzhatjuk meg a határokat, ahol a tranche-ok határai vannak olyan értelemben, hogy mennyi CDS bedőlése szükséges egy-egy tranche kimerítéséhez. Ez elég erőltetett ötlet, ezért inkább azt választottam, hogy az algoritmus határozhassa meg a lépcsők magasságán kívül a helyzetüket is. Ezzel az öt szakasz kalibrálásához 9, a négy szakasz kalibrálásához 7 (stb.) változó volt szükséges, amik nagyobb számok, mint ahány tranche-árra kalibrálunk. A kalibrációt a Matlab *lsqnonlin* függvényével végeztem négyzetes relatív hibát minimalizálva. Mivel a változók száma eggyel nagyobb, mint a megadott árak száma, a Levenberg-Marquardt algoritmust választottam. Ez az algoritmus nem tud korlátokat kezelni, márpedig a korreláció és a szakaszhatárok is határok között mozognak, ezért a változókat a $\log(1/x - 1)$ függvénnyel transzformáltam, így az algoritmus az egész szám-



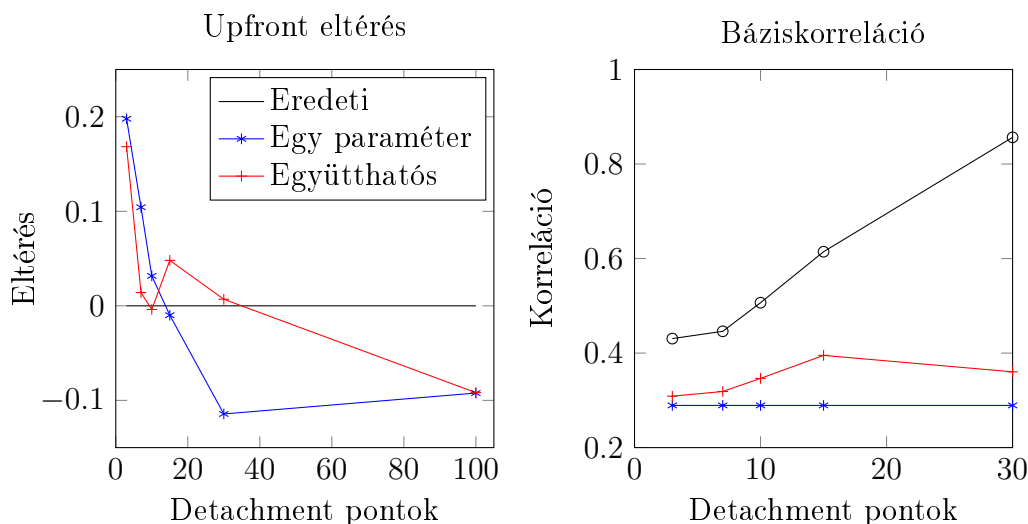
6. ábra. Korrelációs együttható, a CDS spreadjétől függően

egyenesen keresi a megoldást, de a korrelációk a $(0, 1)$ intervallumba esnek. A kalibrációt először a 3.2.5. alfejezet alapján 150 pontos Gauss-Hermite kvadratúrát használó árazó függvénnyel végeztem, majd még egy kalibrációt futtattam a kapott eredményt kezdőpontként használva.

A negyedik szakasztól kezdődően az algoritmus összevont szakaszokat, és már nem javult az illeszkedés, ezért a három szakaszból álló függvény eredményét tartom a relevánsnak, és azt mutatom be. A végeredmény hibája 0,03935, ami több, mint fele az egy paraméterrel elértnek (0,0727). Látszik, hogy az illeszkedés javult, de nem nagyságrendekkel. A 6. ábrán a CDS-ek kalibrált együtthatói láthatók, a 2 éves CDS spreadjük csökkenő sorrendbe rendezett helyzetéhez képest. A töréspontok a 14. és a 105. CDS-nél vannak, a felvett értékek rendre: 40,08%, 24,85% és 100%. Egyrészt megállapíthatjuk, hogy a töréspontok nem aszerint lettek optimálisak, ahogy az egyetlen tippünk szólt, és a biztonságos CDS-ek együtthatóját gyakorlatilag 1-nek határozta meg az algoritmust.

A kalibrált korrelációs együtthatók a 6. ábrán láthatók, amíg a kalibrált árak relatív eltérései az eredeti ártól, valamint a különböző modellek által meghatározott árakból számolt báziskorreláció értékei a 7. ábrán.

A jobb illeszkedés látszik az ábrákon, de nem kielégítő. Az utolsó tranche árát most sem sikerült eltalálni, de a harmadik tranche ára szinte teljesen ugyanaz, és a másodiké is közel van. Érdekes módon nem monoton a kalibrált függvény, hanem a közepén alacsonyabb az együttható, mint a két szélén. Ez azt jelenti, hogy a kockázatos és a biztonságos CDS-ek korrelálnak jól egymással. Ennek lehet az a magyarázata, hogy a kockázatos CDS-ek természetes módon korrelálnak egymással, és a Gauss kopulához képest magas extrém bedőlések miatt a biztonságos CDO-knak is magas korrelációs együtthatót kell



7. ábra. Kalibrált eltérések az upfronttól és báziskorrelációk

adni. Előfordulhat, hogy ez csak egy kényszerű megoldás, amit az algoritmus elért, és emögött a struktúra mögött két faktor húzódik, amelyek külön felelősek a kockázatos és a biztonságos CDS-ek korrelációjáért.

Bár nem tudtuk kihasználni a modell szabadságfokait, az eddigi eredményeken is nyilvánvalóan látszik, hogy még ez a modell sem éri el a kívánt illeszkedést az árakra, ezért tovább kell keresnünk a megfelelő piaci modellt. Andersen – Sidenius [2004] szerint bár a különböző együtthatókat használó modell képes meredek korrelációs mosolyt reprodukálni, számos hátránya van. Először is az empirikus tapasztalatok nem támasztják alá a feltevést, hogy a kockázatos vállalatok kevésbé korrelálnak a piaci faktorról, mint a biztonságos vállalatok. Másodszor pedig, a cikk empirikus vizsgálata alapján a legjobb illeszkedést biztosító CDS spread - korrelációs együttható függvény elég extrém alakot ölt, amely függvény olyan korrelációs mátrixot generál, amelynek elemei irreálisan közel vannak a 0-hoz vagy az egyhez. Utóbbi esetet a mi példánkban is tapasztalhattuk. További kritika, hogy ha a spread árakat naponta frissítik, akkor a korrelációk is naponta változnak. Utolsóként pedig az illeszkedéshez szükséges extrém korrelációkkal számolt fedezési stratégiák merően különbözőek az egyéb modellek által javasoltaktól.

4.3. További korrelációs modellek a Gauss kopulán belül

4.3.1. Többfaktoros Gauss kopula

Az előző alfejezethez képest hasonló vonalon haladva bevezethetünk több faktort. A d faktoros Gauss kopula modell:

$$\begin{aligned}
X_i &:= \sqrt{\rho_{i1}}M_1 + \sqrt{\rho_{i2}}M_2 + \cdots + \sqrt{\rho_{id}}M_d + \sqrt{1 - \rho_{i1} - \rho_{i2} - \cdots - \rho_{id}}Z_i \\
0 &\leq \rho_{ik} \leq 1, \quad i = 1 \dots n, \quad k = 1 \dots d, \\
0 &\leq \rho_{i1} + \rho_{i2} + \cdots + \rho_{id} \leq 1, \quad i = 1 \dots n.
\end{aligned}$$

Ahol $M_1, \dots, M_d, Z_1, \dots, Z_n$ függetlenek és standard normális eloszlásúak. Ekkor két CDS közötti korreláció:

$$\Sigma_{ij} = \sqrt{\rho_{i1}\rho_{j1}} + \sqrt{\rho_{i2}\rho_{j2}} + \cdots + \sqrt{\rho_{id}\rho_{jd}}$$

Ez a megközelítés képezi a kutatásom további irányát. Az árazási modell több faktor esetében sem változik lényegesen, csak az összes faktorra vett feltételes valószínűségek lesznek függetlenek egymástól, amikből ugyanúgy rekurzióval kapjuk a feltételes valószínűségeket, melyeket több faktor szerint kell numerikusan integrálni a feltétel nélküli valószínűségek számolásánál. A számításigény gyorsan növekszik, ezért elengedhetetlen a numerikus integrálközelítő technikák, mint például a Gauss-Hermite kvadrátúra használata, ha a modellünket kalibrálni is szeretnénk a piaci árakhoz.

Bár Szabó [2013] vizsgálta a két és háromfaktoros modellek illeszkedését, információ hiányában azonos faktoregyütthatókat feltételezett a különböző CDS-ekre, aminek következtében a CDS-ek közötti korreláció konstans maradt minden CDS párra. Mivel egy Gauss kopulát meghatározza a várható érték vektora (amelyet zeróvektornak feltételezünk az egyfaktoros Gauss kopula modellben) és a korrelációs mátrixa, ez az eset nem különbözik érdemben az alap egyfaktoros kopula modelltől, így nem meglepő, hogy az illeszkedés nem javult, sőt elmaradt a sztochasztikus korrelációs modell teljesítménye mögött.

Kutatásom következő fázisában az általános együtthatójú egyfaktoros modellhez hasonlóan a CDS spreadek alapján csoportokat alkotok a CDS-ek között, amelyekhez csoporton belül ugyanolyan, csoportonként viszont eltérő együtthatókat fogok rendelni, és az ilyen módon meghatározott modellnek az illeszkedését vizsgálni.

4.3.2. Egyéb modellek

A Gauss kopula és a visszaszámolt korreláció problémájának a párhuzamát a Black-Scholes modellel és a visszaszámolt volatilitással tovább erősíti, hogy az első megoldási javaslatok között voltak a sztochasztikus és lokális változókat javasló modellek. Burtschell et al.

[2007] sztochasztikus korrelációról beszél, ha a faktoroktól függetlenek a véletlen együtt-hatók, és lokális korrelációról, ha a faktoroktól függők. Ez a szóhasználat megfelel a részvényekre épülő modellek szóhasználatának. Az általános felépítése a sztochasztikus korrelációs modellnek a következő:

$$X_i := \sqrt{\tilde{\rho}_i} M + \sqrt{1 - \tilde{\rho}_i} Z_i, 0 \leq \tilde{\rho}_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

Ahol minden eddig használatos jelölés ugyanazt jelenti, $\tilde{\rho}_i$ pedig véletlen együtt-ható, amely független M és V_i értékétől. A modell előnye, hogy ezzel a változtatással a határel-oszlások, V_i értékei még normálisak maradnak. A feltételes csődvalószínűségek számítása nem válik kezelhetetlenül bonyolulttá, és a feltételes valószínűségek kiszámítása után az árazás az eddigiek szerint történik. A modell előnye, hogy a konstans korrelációt feloldja, de a véletlenszerű korreláció realitása vitatható.

Turc et al. [2005] (idézi: Burtschell et al. [2007]) lokális korreláció modellje:

$$X_i := m_i(M) + \sqrt{1 - m_i(M)^2} Z_i, \quad 0 \leq m_i(M) \leq 1 \quad i = 1, \dots, n,$$

Bár a megközelítés ígéretesnek tűnik, mivel az interpretációja könnyebb, mint a sztochasztikus korreláció modellnek, ebben a modellben a határel-oszlások már nem feltétlenül normálisak, ezért az árazás és a kalibrálás elveszti egyszerűségét, ráadásul nem mindig vezet arbitrázsmentes CDO tranche árakhoz.

Burtschell et al. arra az eredményre jutott, hogy a sztochasztikus korrelációs modell jól illeszkedik a piaci árakra (egy lejáratra), ráadásul az implementálása is egyszerű marad a modellnek, és a paramétereknek intuitív interpretáció adható. Két- és háromállapotú modell kalibrálásával Szabó [2013] is azt tapasztalta, hogy a sztochasztikus korrelációs modell az egyparaméteres, egyfaktoros Gauss kopulánál egy nagyságrenddel kisebb eltérést ad a piaci adatoktól. A lokális korrelációs modell használatának ezzel szemben számos hátráltatója van, például az eredmény létezésének és egyértelműségének a problémái miatt. A korreláció időfüggő tulajdonságát egyik modellnek sem sikerül konzisztensen megfognia.

4.4. Gauss kopula hiányosságai, alternatívák

A bemutatott modellek mind konstans, determinisztikus megtérülési rátát feltételeznek. Ennek még a Gauss kopula modellen belül lehet feloldása, azonban sajnos még ez sem

elegendő, hiszen ugyanúgy nem generál szélsőséges veszteségeket, így alulértékeli a super senior tranche értékét, ahogy azt az előző fejezetekben tapasztalhattuk is. A normális eloszlás mindig is nagy népszerűségnek örvendett a kedvező tulajdonságai miatt, de sajnos be kell ismernünk, hogy az életben a normális eloszlásnál sokkal bonyolultabb struktúrák és összefüggések vannak, amelyeket a Gauss kopula semmilyen változata nem tud megfogni.

Frey et al. [2001] szerint a normalitás feltevése az empirikus tapasztalatok szerint nem megalapozott. Ellenben a látens változó eloszlása érzékenyen befolyásolja a csődvalószínűségek alakulását. Ha a csődvalószínűségek és az eszközök korrelációi adottak, egészen más tulajdonságú csődeloszlásokat kapunk a Gauss kopula, és más kopulák alkalmazása esetén. Például a t-kopula használatával sokkal gyakoribb extrém értékeket kaphatunk, amik a t-kopulára jellemző kilógó értékek függőségi szerkezetének köszönhető.

Tops [2010] részletesen vizsgálja a Gauss kopula modell megalapozottságát, és a nem teljesülő feltételek hatását a kopula használatára nézve. A cikk megerősíti a gyakran emlegetett hiányosságát a Gauss kopulának, hogy nem generál elég szélsőséges értékeket. A t-kopula például ebből a szempontból jobban teljesít, gyakoribban fordulnak benne elő tömeges bedőlések, míg a bedőlések száma átlagban kisebb. Ennek az a következménye az árazásra nézve, hogy az alacsonyabb tranche-okra magasabb, a magasabb tranche-okra alacsonyabb árat határoz meg a Gauss kopula, mint a t-kopula, és mint a piac. A normalitás feltevésének irrealitásán kívül bírálják, hogy a határeloszlások transzformációja miatt a valódi korreláció sokkal kisebb, mint a Li-féle Gauss kopulába használatos eszközkorreláció, ami a valóságban nem mindig igaz, hiszen a csődöknek más mozgatói is vannak, mint az eszközkorreláció (például a már említett kitéttiség harmadik fél felé), így a valódi korreláció nem csak akkor változik, ha az eszközkorreláció is. A dolgot a kopula használatát is bírálja, mert bármilyen paraméteres eloszlás túl egyszerű ahhoz, hogy számításba vegye az összes kockázati faktort a csődök modellezésénél. Az utolsó hátulütőjét a Gauss kopula modell (vagy akár más hasonló modellek) használatának a határeloszlások meghatározásában látja, ugyanis a CDS-ek egyrészt nem minden esetben likvid termékek, így magas likviditási prémiumot tartalmazhat a spreadjük, másrészt spekulatív termékek is lehetnek, minek következtében a piacon megfigyelhető ár nem mindig tükrözi hűen a csődvalószínűségeket.

Burtschell et al. [2009] mélyreható analízisében a Gauss kopulával összehasonlította a Student-t, a Clayton és a Marshall-Olkin kopulákat, a piacon megfigyelhető árakra való illeszkedés tekintetében. Azt találta, hogy a Student-t és a Clayton kopula a Gauss kopulához közeli árakat ad, míg a vastag farokeloszlású Marshall-Olkin kopula különböző eredményeket ad, a szimultán bedőlések aránylag magas valószínűsége miatt, és a sztochasztikus korrelációs modell is képes a korrelációs mosoly előállítására.

5. Összefoglalás, kitekintés

Dolgozatom első részében bemutattam a CDO tranche-ok értékeléséhez szükséges elméleti modelleket, és gyakorlati számításokat. Az árazás lényege a kockázatsemleges mérték létezésének feltétele. A piacon megfigyelhető (elképzelt, hogy likviditási és spekulációs torzításoktól nem mentes) CDS árakból meghatároztam a csődintenzitást, amit lépcsős függvénynek feltételeztem. A kockázati függvény felhasználásával előállítottam a megfelelő peremeloszlásokat, amelyeket a Gauss kopulán keresztül kapcsoltam össze. A csődeloszlás meghatározása egy rekurzív algoritmuson keresztül történik, hiszen az egyfaktoros Gauss kopulában a valószínűsések a közös faktorra feltételesen függetlenek, és a független valószínűségekből könnyen állíthatjuk elő a feltételes eloszlást. A feltételes eloszlás integrálásával a közös faktorra megkapjuk a feltétel nélküli eloszlást, amiből már egyszerűen számolhatunk veszteségeloszlást az egyes tranche-okra. Az arbitrázsmentes ár az az upfront díj, amellyel a védelem és a prémium láb értéke egyenlő. A rekurzió magas számításigénye miatt a kalibrációnál Gauss-Hermite közelítést használtam a numerikus integrál értékének meghatározására.

Az egyfaktoros Gauss kopula egyetlen paramétere (a peremeloszlásokon kívül) a korreláció. A korrelációtól függenek a tranche-ok árai. Az equity tranche ára a korreláció monoton csökkenő, a super senior tranche ára a korreláció (2 év esetén nagyon lassan) növekvő függvénye. A köztes tranche-okra nem egyértelmű a korreláció hatása. A monotonitás hiánya miatt a középső tranche-ok visszaszámított korrelációja nem egyértelmű, ezért a piacon bevett szokás a báziskorreláció használata, ami már egyértelmű, mert a tranche-ok detachment pontjával meghatározott equity tranche-ból, bootstrap módszerrel visszaszámított korreláció. A báziskorrelációnak két nagy hátránya van (azzal az előnnyel szemben, hogy egyértelmű). Az egyik nagy hátránya, hogy nem veszi figyelembe a super senior tranche értékét. A másik nagy hátránya, hogyha valahol a báziskorreláció egy kicsit eltér, például egy félreárazás miatt, összes többi következő tranche báziskorrelációjának értéke sokkal jobban el fog térni. Emiatt a tulajdonsága miatt a báziskorreláció nem alkalmas kalibrálásra, csak ha már mindenhol nagyon közel vannak az árak az elérni kívánthoz.

Az egy paraméteres, egyfaktoros Gauss kopula kalibrált korrelációja kisebb lett, mint bármelyik báziskorreláció. A kalibrálás 0,07 relatív eltérés négyzetösszeggel zárult. A korrelációs struktúra első általánosításaként azt vizsgáltam, hogy mennyivel javul a modell illeszkedése, ha nem azonos korrelációs együtthatói vannak a CDS-eknek, hanem a CDS spreadtől függő. Mivel hirtelen 121-re nőtt a kalibrálandó paraméterek száma, amelyet semelyik algoritmus nem tudna kezelni, a CDS spread szerint csökkenő sorba rendezett CDS-ekre lépcsős függvényt kalibráltam az együtthatók meghatározására. A

kalibráció három lépcső esetén lett a legjobb, négy és 5 lépcsőnél összevonta a fokokat, és a hiba nem javult. A relatív négyzetes eltérés 0,039 lett, ami több, mint a fele az paraméteres kalibrációnak. Természetes módon a változók számának növekedésével javult az illeszkedés, de nem a várt mértékig. A különböző, spreadtől függő korrelációs együttthatót feltételező modellnek számos hátránya van. Többek között a piaci tapasztalatok nem támasztják alá, hogy a kockázatos CDS-ek kevésbé mozogjanak együtt a piaccal, mint a biztonságosak, pedig az árak és báziskorrelációs struktúra kalibrálása erre vezet, ráadásul az illeszkedéshez szükséges korrelációs mátrix túl sok extrém, 0 vagy 1-es értéket tartalmaz. Nem realisztikus az sem, hogy a naponta frissülő CDS adatokkal együtt változik a korreláció.

A Gauss kopula kijavítására különböző irányokból érkeznek próbálkozások, például a többfaktoros és a különböző sztochasztikus korrelációs modellek. További kutatási terület lehet a többfaktoros Gauss kopula illeszkedésének a vizsgálata, de a saját eredményeimből kiindulva nem várok szignifikáns javulást a több faktor bevezetésétől, ráadásul még az egyik legnagyobb előnyét, a kis számításigényűségét is elveszti a modell. Az illeszkedés a korrelációs struktúra lazításával javul, de nem éri el az elfogadható szintet.

Összességében megállapítható, hogy a Gauss kopula nem alkalmas a piaci árak reprodukálására. A jobb illeszkedés eléréséhez a Gauss kopula helyett olyan modellek felé kell néznünk, amelyek gyakoribb extrém értékeket generálnak. A Gauss kopulánál vastagabb farokeloszlással rendelkezik a Student-t kopula, aminek köszönhetően a senior tranche-okra a piachoz közelebbi árat ad, de még így is közel van az eredmény a Gauss kopulájához. Az igazán extrém esetek eléréséhez a szakirodalom a vastag farokeloszlású Marskall-Olkin kopulát javasolja. A Gauss kopula töretlen népszerűségének titka csupán a megszokás, a könnyű implementálhatóság, kis számításigény, és az univerzálisan jobb alternatíva hiánya. De mit sem érnek az egyszerű számítások, ha nincsen mögötte valós elméleti alap.

Hivatkozások

- Abramowitz, M. – Stegun, I. A. [2012], *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, Courier Dover Publications.
- Advanced Credit Portfolio Modeling and CDO Pricing* [2008], in H.-J. Krebs – W. Jäger, eds, ‘Mathematics – Key Technology for the Future’.
URL: <http://www.stochastik.uni-freiburg.de/homepages/eberlein/papers/bmbf1.pdf>
- Andersen, L. – Sidenius, J. [2004], ‘Extensions to the Gaussian copula: Random recovery and random factor loadings’, *Journal of Credit Risk Volume* **1**(1), 05.
- Baranovski, A. – von Lieres, C. – Wilch, A. [2009], New recipes for estimating default intensities’, *SFB 649 Discussion Paper 2009-004* .
URL: www.econstor.eu/bitstream/10419/25320/1/590230492.PDF
- Burtschell, X. – Gregory, J. – Laurent, J.-P. [2007], ‘Beyond the Gaussian copula: stochastic and local correlation’, *Journal of Credit Risk* **3**(1), 31–62.
- Burtschell, X. – Gregory, J. – Laurent, J.-P. [2009], ‘A comparative analysis of CDO pricing models’, *The Journal of Derivatives* **16**(4), 9–37.
- Embrechts, P. – McNeil, A. – Straumann, D. [2002], Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls’, *Risk management: value at risk and beyond* pp. 176–223.
URL: <ftp://magellan-01.math.ethz.ch/pub/risklab/papers/CorrelationPitfalls.pdf>
- Frey, R. – McNeil, A. J. – Nyfeler, M. A. [2001], Copulas and credit models’, *Risk* **10**, 111–114.
- Li, D. X. [2000], ‘On default correlation: a copula function approach’, *The Journal of Fixed Income* **9**(4), 43–54.
- Medvegyev, P. – Gyarmati, Á. [2011], ‘Válság és hitelderivatívák. A szintetikus fedezett adóssághkötelezettségek (CDO-k) árazása és kockázataik (Crisis and loan derivatives. The pricing and risks of synthetic collateralized debt obligations)’, *Közgazdasági Szemle* **58**(11), 949–969.
- Merton, R. C. [1974], ‘On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates’, *The Journal of Finance* **29**(2), 449–470.
- Nelsen, R. B. [1999], *An introduction to copulas*, Springer.
- Sklar, A. [1973], ‘Random variables, joint distribution functions, and copulas’, *Kybernetika* **9**(6), 449–460.
- Szabó, T. [2013], CDO-k árazása: a Gauss kopula és a korrelációs struktúra általánosításai, MSc thesis, Eötvös Lóránd University.
URL: http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/msc_actfinmat/2013/szabo_beata_tunde.pdf

Tops, R. [2010], Copulas and correlation in credit risk, MSc thesis, University of Amsterdam, KdV Institute for mathematics.

URL: <http://www.science.uva.nl/onderwijs/thesis/centraal/files/f1791155980.pdf>

Turc, J. – Very, P. – Benhamou, D. [2005], ‘Pricing CDOs with smile’, *SG Credit Research*