

TDK Dolgozat

Kamatlábmodellek numerikus megoldásainak érzékenységvizsgálata

Tartalom

Köszönetnyilvánítás	Hiba! A könyvjelző nem létezik.
Bevezetés.....	3
1. Kamatlábderivatívák árazási nehézségei.....	5
2. Alapfogalmak	5
3. Kamatlábmodellek	11
4. A Hull-White és Black-Karasinski kamatlábmodellek.....	15
5. Numerikus megoldási módszerek	17
6. Kamatlábfák.....	18
11. Swaption árazása kamatlábfán	31
12. Swaption árazása zárt képlettel	35
13. Swaption árazása Monte Carlo szimulációval.....	38
a. A Hull-White trinomiális modell érzékenységvizsgálata	40
b. A Black-Karasinski trinomiális fa érzékenységvizsgálata	49
14. A Hull-White trinomiális fa általánosítása.....	50
Konklúzió	59
Hivatkozások.....	61

Bevezetés

Napjainkban a kamatlábderivatívák piaca az egyik legnagyobb pénzügyi piaci szegmens. Ezek a derivatívák olyan pénzügyi megállapodások, amelyekben a két szerződő fél kifizetései a kamatlábak jövőbeli alakulásától függenek. A termékek árazása során emiatt a kamatlábak jövőbeli dinamikáját modellezni kell, amelyhez számos széleskörűen alkalmazott kamatlábmodellt találunk a pénzügyi szakirodalomban. Természetesen a modellezés során itt is megjelenik a pénzügyi matematika egyik leggyakrabban használt fogalma, a kockázatsemleges mérték, ugyanis amikor ezeket a kamatlábmodelleket a piaci adatokhoz kalibráljuk, és ezáltal megpróbáljuk a piaci információkat felhasználni, pontosan ezt a valószínűségi mértéket keressük.

A piaci adatokhoz kalibrált modellben a kamatláb alakulása egy sztochasztikus folyamatot követ, ezt felhasználva, a kontraktusban szereplő kifizetések jelenértékeinek várható értékének kiszámításával tudjuk árazni a derivatívát. Egyes kamatlábmodellek esetén bizonyos termékeknel analitikus képlettel meg tudjuk adni a származtatott termékek értékét, azonban sokszor az ilyen formában történő kifejezésre nincs lehetőség, ezért numerikus módszereket vagyunk kénytelenek alkalmazni. Kamatlábmodellek esetén ezért gyakori megoldás, hogy az idő diszkrétizálását megjelenítő binomiális és trinomiális fákot alkalmaznak az egyébként folytonos idejű kamatláb folyamat reprezentálására.

TDK dolgozatomban azt a célt tűztem ki, hogy két gyakran használt kamatlábmodell esetén megvizsgáljam, hogy a trinomiális fa felépítése során használt paraméterek (levágási szintek, csomópontok időbeli távolsága) milyen hatással vannak a diszkrét modell árazási képességére. Természetesen ahhoz, hogy az árazási pontosság vizsgálatát el tudjuk végezni, szükségünk van egy származtatott termékre is. Dolgozatom során az egyik legelterjedtebb ilyen pénzügyi terméket választottam ki – swaption – és két olyan kamatlábmodellt – Hull-White és Black Karasinski –, amelyek közül az elsőnek erre a derivatívára vonatkozóan létezik analitikus képlete, így ezzel összehasonlítva tudtam a faépítést meghatározó paramétereknek az árazás pontosságára gyakorolt hatását meghatározni, utóbbi esetén mivel nem létezik zárt képlet, ezért Monte Carlo szimulációval helyettesítettem az analitikus árazást.

A dolgozatot a kamatlábderivatívák piacának bemutatásával kezdem, majd az alapvető fogalmak ismertetésével folytatom. A második fejezetben megadott definíciók adnak alapot a későbbiekben bemutatott árazási eljárások megértéséhez. A TDK dolgozat

nyújtotta kereteknek megfelelően nem törekedtem a teljes pénzügyi fogalmi eszköztár bemutatására, annál inkább a dolgozat szempontjából számomra lényeges fogalmak tisztázására. A következő fejezetben bemutattam a kamatlábmodellek irodalmát, valamint azt, hogy milyen modellek terjedtek el a gyakorlatban, és hogy milyen szempontokat érdemes figyelembe vennünk, amikor kiválasztjuk a modellezésünk során alkalmazott modellt. Ebben az esetben is csak az elterjedt modellek szűk körét vizsgáltam, ugyanis a téma aktualitása miatt napjainkban is újabb és újabb modellek kerülnek kifejlesztésre. A modellek ismertetése után kiválasztottam két számomra alkalmasat, majd példák illetve részletes magyarázat mellett bemutattam, hogyan lehet a piaci adatokhoz kalibrálni a modellt, illetve hogyan lehet az általam kiválasztott pénzügyi derivatívát árazni analitikus módon, trinomiális fá segítségével és Monte Carlo szimuláció segítségével. Kitérek arra is, hogy a kamatlábmodellek esetén miért érdemes trinomiális fát építeni, és hogy ezt hogyan lehet megvalósítani az adott modell keretei között. Végezetül a dolgozat utolsó felében bemutatom az általam legyártott és MATLAB-ban leprogramozott numerikus eljárások segítségével, hogy a fa felépítése során alkalmazott paraméterek változtatása milyen hatással van a swaption árazásának pontosságára, hogyan lehet a trinomiális fától eltérő kamatlábfákat építeni, illetve milyen, a gyakorlatban használható következtetések vonhatók le ebből, azaz milyen előnyei és hátrányai vannak a faépítésnek, az egyéb árazási módszerekkel szemben.

Reményeim szerint dolgozatom hasznos képet nyújt a kamatlábmodellekről és a kamatlábakra szóló pénzügyi derivatívák alapjairól, valamint ezek árazásának numerikus módszereiről, előnyeiről, hátrányairól.

1. Kamatlábderivatívák árazási nehézségei

A kamatlábakra szóló derivatív termékek olyan pénzügyi termékek, amelyek kifizetése a jövőbeli kamatlábak függvénye. Az elmúlt 30 évben rendkívül gyorsan nőtt mind a tőzsdéken, mind az OTC-piacokon ezen termékek forgalma, egyre nagyobb részt hasítottak ki a derivatív termékek világából. Ha kicsit tágabb értelemben vizsgálódunk, akkor tekinthetünk a kötvényre és a betétre is úgy, mint kamatlábra szóló származtatott termékekre, amelyeknek rendkívül fontos szerep jut az árazás folyamata során. Egy egyszerű kötvényt könnyedén tudunk árazni spot hozamgörbe segítségével, és a forward görbével a jövőben kibocsátott papírok is nehézségek nélkül árazhatóak, de mindez azt feltételezi, hogy az ügyletet a jelenben meg kell kötni. Ha valaki egy jogot vesz arra, hogy egy kötvényt vagy bármely más kamatlábra szóló derivatívát vásárolhasson a jövőben, abban az esetben a kamatláb alakulása már bizonytalan, és ezáltal csak bonyolultabb, sztochasztikus folyamattal írható le.

Ugyanakkor éppen az egyre bonyolultabb termékek elterjedése miatt egyre fontosabb, hogy megbízható árazási módszerek alakuljanak ki. Fontos megjegyezni, hogy ezeket a pénzügyi termékeket nehezebb árazni, mint akár a részvényekre vagy devizákra szóló derivatív ügyleteket, amelynek több oka is van:

1. A kamatlábak viselkedését általában egy sztochasztikus folyamattal jellemezzük, ez egyrészt bonyolultabb, mint egy-egy részvény vagy deviza esetén, másrészt, sok esetben ezekkel ellentétben, nem elég csak egy pont viselkedését modellezni, hanem az egész hozamgörbéét kell.
2. A hozamgörbe különböző pontjainak különböző a volatilitása, valamint az idő múlásával változhat az alakja is.
3. A kamatlábak a derivatíva végső kifizetésének meghatározása mellett a kifizetések diszkontálásakor is szerepet játszanak.

A fent felsorolt okok miatt a derivatívák árazásakor szükséges fontolóra venni, hogy milyen kamatlábmodellt használunk, annak milyen előnyei és hátrányai vannak. (Hull, (1999))

2. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben tisztázom a legalapvetőbb pénzügyi fogalmakat, amelyeket a dolgozat során a későbbiekben használni fogok. Nem célom az teljes pénzügyi fogalomtár bemutatása, hiszen ez hosszadalmas, és részben felesleges is lenne, így most csak azokat

a legfontosabb fogalmakat definiálok, amelyek a későbbi gondolatmenet megértéséhez feltétlenül szükségesnek talállok.

A fejezetben bemutatott fogalmakat főként Brigo és Mercurio (2006) alapján vezetem be, ez a könyv az egyik legismertebb nemzetközi szakirodalom, amely a kamatlábmodellekkel foglalkozik.

1. definíció Pillanati kamatláb: A t időpontban megvalósuló pillanati kamatláb az a kamatláb, amely a t időpontban kezdődő végtelenül rövid időperiódushoz tartozik. Jelölése r_t .

2. definíció Bankbetét: A későbbiekben $B(t)$ -vel jelölöm a bankbetét értékét a $t \geq 0$ időpontban. Emellett legyen $B(0)=1$ és a bankbetét növekedési ütemét írja le a következő differenciálegyenlet:

$$dB(t) = r_t B(t) dt, \quad (2.1)$$

ahol r_t pozitív függvénye az időnek. Ebből következik, hogy $B(t)$ értéke különböző t -k esetén a következő egyenlettel adható meg:

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \quad (2.2)$$

A fenti fogalom azt mutatja meg nekünk, hogy ha bankbetétbe fektetünk egységnyi összeget, akkor annak t időpontbeli értéke az addig megvalósult r_t pillanatnyi kamatlábak értékétől függ.

3. definíció Diszkontfaktor: Diszkontfaktornak fogom nevezni és $D(t, T)$ -vel jelölni annak a befektetésnek a t időpontbeli értékét, amely T időpontban 1 egységet fizet. Ezt a következő képlettel lehet kiszámolni:

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \quad (2.3)$$

A legtöbb árazási módszer alkalmazása során (pl.: Black-Scholes formula) – mivel r_t determinisztikus folyamatot követ – a bankbetét, és a diszkontfaktor is az idő determinisztikus függvénye. Ennek oka, hogy a részvényekre vonatkozó opciók árának változékonysága csak kicsit függ a pillanatnyi kamatlábak volatilitásától. Ezzel szemben ha kamatláb-derivatívát árazunk, akkor annak a volatilitása a kamatlábak változékonyságától függ. Emiatt a dolgozatomban a pillanati kamatlábat nem determinisztikusnak fogom feltételezni, hanem egy sztochasztikus folyamattal fogom modellezni, emiatt mind a bankbetétnek, mind a diszkontfaktornak sztochasztikus jellege lesz.

4. **definíció Zéró kupon kötvény:** A T lejáratú zéró kupon kötvény (diszkontpapír) egy olyan kontraktus, amely garantálja a tulajdonosának, hogy T időpontban egységnyi kifizetést biztosít. Ennek értékét $t < T$ időpontban $P(t, T)$ -vel fogom jelölni. Természetesen minden T esetén $P(T, T) = 1$.

A zéró-kupon kötvény értéke mutatja meg, hogy a T időpontban egy egységnyi fizető papírnak mennyi a jelenértéke a t időpontban. Természetesen felmerül a kérdés, hogy mi a kapcsolat $P(t, T)$ és $D(t, T)$ között. Ha a pillanati kamatláb determinisztikus folyamatot követ, akkor minden egyes (t, T) párra $D(t, T) = P(t, T)$. Azonban ha a pillanati kamatláb sztochasztikus, $D(t, T)$ egy random mennyiség a t időpontban, amely a t és T közötti jövőbeli r_t -k alakulásától függ. Ezzel szemben a $P(t, T)$ értéke determinisztikus a t időpontban. Ahogy majd a későbbiekben is lehet látni $P(t, T)$ a sztochasztikus $D(t, T)$ -nek a várható értéke egy bizonyos valószínűségi mérték mellett.

5. **definíció Lejáratig hátralévő idő:** Lejáratig hátralévő időként használok ezentúl a $\tau(t, T) = T - t$ mennyiséget az időnek, azaz amennyi idő a mostani pillanattól (t) hátravan a lejáratig (T).

6. **definíció Folytonosan számított spot kamatláb:** Folytonosan számított kamatlábnak fogom nevezni és $R(t, T)$ -vel jelölni, azt a konstans kamatlábat, amely biztosítja, hogy $P(t, T)$ egységnyi t időpontú befektetésből folytonos kamatozás mellett T időpontban egységnyi értékű befektetés legyen. A következő képletekkel lehet leírni:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)} \quad (2.4)$$

$$e^{R(t, T)\tau(t, T)} P(t, T) = 1 \quad (2.5)$$

Ebből következik, hogy a zéró-kupon kötvény értéke folytonos kamatozás mellett a következővel egyenlő:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)\tau(t, T)} \quad (2.6)$$

7. **definíció Nominális spot kamatláb:** Nominális kamatlábnak fogom nevezni és $L(t, T)$ -vel jelölni, azt a konstans kamatlábat, amely biztosítja, hogy $P(t, T)$ egységnyi t időpontú befektetésből egyszerű kamatozás mellett T időpontban egységnyi értékű befektetés legyen. A következő képletekkel lehet leírni:

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)} \quad (2.7)$$

$$P(t, T)(1 + L(t, T)\tau(t, T)) = 1 \quad (2.8)$$

Ebből következik, hogy a zéró-kupon kötvény értéke egyszerű kamatozás mellett a következővel egyenlő:

$$P(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T)\tau(t, T)} \quad (2.9)$$

8. definíció Évesített spot kamatláb: Évesített spot kamatlábnak fogom nevezni és $Y(t, T)$ -vel jelölni, azt a konstans kamatlábat, amely biztosítja, hogy $P(t, T)$ egységnyi t időpontú befektetésből évi egyszeri kamatozás mellett T időpontban egységnyi értékű befektetés legyen. A következő képletekkel lehet megadni:

$$Y(t, T) := \frac{1}{[P(t, T)]^{1/\tau(t, T)}} - 1 \quad (2.10)$$

$$P(t, T)(1 + Y(t, T))^{\tau(t, T)} = 1 \quad (2.11)$$

Ebből következik, hogy a zéró-kupon kötvény értéke évi egyszeres kamatozás mellett a következővel egyenlő:

$$P(t, T) = \frac{1}{(1 + Y(t, T))^{\tau(t, T)}} \quad (2.12)$$

9. definíció Zéró-kupon görbe: Zéró kupon görbének, vagy máshogy kifejezve hozamgörbének fogom nevezni a továbbiakban azt a t időpontbeli függvényt, amely a következőképpen fejezhető ki:

$$T \rightarrow \begin{cases} L(t, T), & t < T \leq t + 1 \\ Y(t, T), & T > t + 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

A zéró kupon görbét nevezhetjük a kamatlábak t időpontbeli lejárat szerkezetének is.

A hozamgörbéből nem csak a jelen és egy jövőbeli időpont közötti hozamot lehet meghatározni, hanem implicit módon adódik a jelen pillanatból megfigyelhető két jövőbeli időpont közötti befektetés hozama is. Ezeket a hozamokat nevezzük határidős, forward hozamoknak. A határidős kamat definícióját a határidős kamatláb-megállapodások fogalmán keresztül fogom bevezetni.

10. definíció Határidős kamatláb-megállapodás (FRA): Az FRA egy olyan három időponttal jellemezhető (jelenlegi időpont (t), kontraktus kezdete (T), kontraktus vége (S)) kontraktus, amelynek tulajdonosa a lejáratkor egy bizonyos t -ben megállapított K fix kamatlábat cserél ki arra a változó kamatlábra, amely a T és S közötti periódusra érvényes.

Tehát formalizálva a kontraktus végén S -ben az egyik fél $\tau(T, S)L(T, S)N$, egységnyi összeget kap, a másik fél pedig $\tau(T, S)KN$ összeget ad, ahol N jelöli a kontraktus

nominális értékét, $\tau(T, S)$ pedig a kezdete és vége között eltelt időt. Ez alapján a kontraktus értéke S időpontban:

$$N\tau(T, S)(K - L(T, S)) \quad (2.14)$$

11. definíció: Nominális forward kamatláb: Nominális forward kamatlábnak fogom nevezni, és $F(t, T, S)$ -el jelölni azt a t -ben megállapított T és S között érvényes kamatlábat, amely a következő egyenlet alapján számítható ki:

$$F(t, T, S) = \frac{1}{\tau(T, S)} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right) \quad (2.15)$$

Ez pontosan az a fix kamatláb, amely alapján a T és S közötti időintervallumra vonatkozó FRA ügylet értéke fair módon megköthető a t időpontban. Ez alapján megállapítható az FRA t időpontbeli értéke, amit a következő képlet mutat be:

$$FRA = NP(t, S)\tau(T, S)(K - F(t, T, S)) \quad (2.16)$$

Tehát ahhoz, hogy kiszámoljuk az FRA jelenértékét, meg kell határoznunk a T és S közötti nominális forward kamatlábat, ezt behelyettesíteni a (2.14) egyenletbe, majd venni ennek a jelenértékét. A forward kamatlábra $F(t, T, S)$ tekinthetünk úgy, mint a jövőbeli T és S spot kamatláb t időpontbeli becslésére, amely a t időpontbeli piaci információkat használja fel ehhez.

A kamatcsere ügylet (IRS) az FRA ügylet általánosítása, tehát a két szerződő fél több időszakon keresztül cseréli el a fix és változó kamatlábat. Változó lábnak nevezzük a változó kamatok sorozatát, és fix lábnak a fix kamatok sorozatát. Ebből adódóan két fajtáját különböztetjük meg a kamatcsere ügyletnek: a payer swapot (PFS), amelynek a tulajdonosa a fix lábat fizeti, és a változót kapja, illetve a receiver swapot (RFS), amelynek a tulajdonosa a változót fizeti, és a fixet kapja. Formalizálva az elmondottakat a PFS tulajdonosa minden T_i időpontban az IRS során $N\tau_i K$ összeget fizet és ezért cserébe $N\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$ összeget kap, ahol N jelöli az ügylet névértékét, és τ_i az egyes kifizetések közötti időszakok hosszát. A korábban bemutatottaknak megfelelően, ha $T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta}$ -val jelöljük a cserék időpontjait, akkor az időszakokra vonatkozó változó kamatlábak a $T_{\alpha}, T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta-1}$ időpontokban határozódnak meg és ezek alapján történik meg a csere az egyvel későbbi időpontokban. Általánosan jelölje ezentúl $Tau = (T_{\alpha}, \dots, T_{\beta-1})$ a forward kamatlábak meghatározásainak időpontjainak halmazát, és $\tau = (\tau_{\alpha+1}, \dots, \tau_{\beta})$ a kifizetések időpontjai közötti időintervallumok hosszát.

Az elmondottak alapján a payer swap jelenértéke a t időpontban, ahol $t < T_{\alpha}$:

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K) \quad (2.17)$$

a receiver swap jelenértéke pedig:

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K) \quad (2.18)$$

A következőkben bemutatom az egyik leggyakoribb kamatláb-derivatívát, a swaption-t. Ez a derivatíva egy swapra szóló opció, így hasonlóan az IRS-hez, ennek is két fajtája van: payer és receiver. Mivel a dolgozatomban csak európai swaption-nel fogok foglalkozni, ezért csak ezt mutatom be ebben a fejezetben. Az európai payer swaption egy opció, amely feljogosítja tulajdonosát, hogy egy bizonyos időpontban belépjen egy swap-ba, amelyben a fix kamatlábat fizeti, és a változót kapja. Az európai receiver swaption pedig arra jogosítja fel a tulajdonosát, hogy egy bizonyos időpontban belépjen egy swap-ba, amelyben a változó kamatlábat fizeti, és a fixet kapja. Leggyakrabban akkor használják a vállalatok európai swaption-t, ha biztosítani akarják maguknak, hogy a hitelük után fizetett változó kamatláb ne haladjon meg egy bizonyos értéket. Ekkor vásárolnak egy payer swaption-t, és így fix kamatlábat fizetnek, miközben megkapják a változó kamatlábat minden egyes csere időpontjukor. A swaption opció jellege miatt a vállalat védve van a kamatlábak kedvezőtlen mozgása ellen, ugyanakkor a kedvező irányú mozgásából profitálni tud.

Általában a swaption alapjául szolgáló IRS hosszát (az én jelölésemben $T_{\beta}-T_{\alpha}$) „Tenor”-nak nevezik, a kezdeti időpontot és a kifizetéseket pedig Tenor struktúrának. Ha a swaption kifizetéseinek az értékének vesszük a jelenértékét az IRS első kamat-megállapítási időpontjában (T_{α}), ami a swaption kezdeti időpontjával megegyezik, akkor a következő kifejezéssel adható meg:

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_{\alpha}, T_i) \tau_i (F(T_{\alpha}; T_{i-1}, T_i) - K) \quad (2.19)$$

A swaption opciós jellege miatt a kifizetéseknek csak a pozitív részét kell összegezni, így tehát a swaption értéke a $t < T_{\alpha}$ időpontban a következő kifejezéssel adható meg,

$$ND(t, T_{\alpha}) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_{\alpha}, T_i) \tau_i (F(T_{\alpha}; T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ \quad (2.20)$$

amelyben a $D(t, T_{\alpha})$ a t időpontra való diszkontálást jeleníti meg.

A swaption árának meghatározásakor meg kell említenünk a másik gyakran használt kamatláb-derivatívát, a kamatlábla plafon (cap-et) is. Ez egy olyan termék, amelyre tekinthetünk úgy, mint egy payer IRS-re, azonban az egyes kifizetések csak akkor következnek be, ha ezeknek az értéke pozitív.

A cap értéke a következő képlettel adható meg.

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)^+ \quad (2.21)$$

Ha ezt összehasonlítjuk a (2.18) képlettel, akkor látjuk, hogy csak abban tér el, hogy egy pozitív-rész operátor van hozzárendelve minden egyes kifizetés időpontjához a csere értékéhez. Az ok, amiért bemutattam ezt a másik derivatívát az volt, hogy rendelkezik egy olyan árazás szempontjából fontos tulajdonsággal, amivel a swaption nem. Míg a cap-et fel lehet bontani capletek összegére (kötvényopciók sorozatára, amelyet elemi kötvényekre szóló eladási opciók sorozatának is lehet tekinteni), amelynek mindegyike egy-egy forward kamatlábtól függ:

$$D(t, T_i) N \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)^+ \quad (2.22)$$

addig a swaption esetén ez algebrailag nem megoldható, mivel a pozitív-rész operátor nem az összegzésen belül, hanem kívül van. Ez a pozitív-rész operátor nem rendelkezik a disztributivitás tulajdonságával, azonban lineáris és konvex függvény, ezért habár az egyenlőség nem, viszont a következő egyenlőtlenség fennáll:

$$\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_{\alpha}, T_i) \tau_i (F(T_{\alpha}; T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ \leq \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_{\alpha}, T_i) \tau_i (F(T_{\alpha}; T_{i-1}, T_i) - K)^+ \quad (2.23)$$

A fent bemutatottak következtében a payer swaption értéke mindig kisebb az azzal megfelelő cap kontraktus értékénél.

3. Kamatlábmodellek

Az elmúlt néhány évtizedben a kamatlábmodellek nagy választéka alakult ki a pénzügyi piacokon mind a derivatívák árazása, mind kockázat-érzékenységüknek mérése szempontjából. A modelleket három nagy csoportra lehet osztani: rövid kamatlábmodellek, forward modellek, és piaci modellek, ahol a sorrend kialakulásuknak időpontját is jelzi. Mindegyik csoportnak megvannak az előnyei és hátrányai amelyeket a modellezés során figyelembe kell venni. A rövid kamatlábmodelleket könnyű megérteni és implementálni ugyanakkor nem biztosítják a teljes szabadságot a volatilitásstruktúra modellezése során. A forward (HJM) modellek előnye hogy rugalmasabbak és így

bármilyen volatilitásstruktúra modellezhető velük, ugyanakkor hátrányuk, hogy a pillanati forward kamatlábak nem megfigyelhetőek a piacon így ezeket a modelleket nehéz kalibrálni. A piaci modellek kiküszöbölik ezeket a hátrányokat ugyanakkor komplexek, és számításigényesebbek mint a rövid kamatlábmodellek. TDK dolgozatom során én a legelső csoporttal fogok foglalkozni. (Khan, (2008))

A kamatláb-derivatívok árazásához leggyakrabban valamilyen (rövid) kamatláb modellt használnak, és mivel a kamatlábmodellek és hozamgörbe lejárat szerkezete az egyik központi témája a pénzügyi irodalomnak ezért számos ilyen modell született. Ebben a fejezetben bemutatom, hogyan lehet csoportosítani őket, és hogy milyen szempontok alapján érdemes modellezni illetve egy derivatív termék árazása során választani ezek közül a modellek közül.

A kamatlábmodellek célja, hogy leírják a teljes hozmagörbe lejárat szerkezetének valószínűségi viselkedését. Mindegyik kamatlábmodell a pillanatnyi kamatláb (r_t) alakulását modellezi. Fontos azt kiemelni, hogy a kötvények és más kamatláb-derivatívák értéke nem a valós r folyamattól függ, hanem attól, hogy a pillanati kamatláb hogyan alakul a kockázatmentes világban (Hull, (1999)).

Az alábbiakban a kamatlábmodellek egy lehetséges csoportosítását mutatom be Kopányi (2009) cikke alapján. Számos szempont alapján lehet a modelleket csoportosítani:

1. az idő felfogása alapján: folytonos, és diszkrét idejű modellek;
2. a modellezés célja szerint: egyensúlyi és no-arbitrázs modellek;
3. a modellekben szereplő bizonytalansági faktorok alapján: egyfaktoros, kétfaktoros, többfaktoros modellek;
4. a modellben szereplő változók közötti függvénykapcsolat alapján: affín, kvadratikus, rezsimváltó és ugró-diffúziós modellek.

A folytonos modellek előnye, hogy nem kell törődnünk az időintervallum választás problémájával, és nagyon bő szakirodalom tárgyalja a modellek árazási módszertanát, illetve ugyan kevés, de néhány fontos esetben zárt képlettel kiszámítható az egyes derivatívák ára. Azonban azon termékeknél, amelyekre nem alkalmazható analitikus képlet, numerikus eljárásokat kell alkalmaznunk az árazás során, így mindenképp diszkrétizálnunk kell az időtávot. Ennek a modellezési eljárásnak további előnye, hogy realisztikusabb, mivel a valóság sohasem folytonos időben zajlik, hanem az árak pillanatról pillanatra változnak, másrészt ezek dinamikáját általában jóval könnyebb megérteni, ha a binomiális és trinomiális fák elméleti alapjaira gondolunk.

Az egyensúlyi modellek elsődleges célja a hozamgörbe előrejelzése. Az első kamatlábmodellek ebbe a csoportba tartoznak, ezért ezt a modellesaládot sokszor „klasszikus modellek”-ként szokták emlegetni. A modell endogén módon definiálja a hozamgörbét, azonban emiatt az így kapott eredmény és a piaci adatok között általában eltérés van. Nagy előnye ezeknek a modelleknek azonban a belső konzisztencia, valamint az is hogy a paraméterek időben viszonylag állandóak. Ezzel szemben a no-arbitrázs modellek tökéletesen illeszkednek a piaci hozamgörbére, emiatt ezeket a modelleket minden becslésnél újra kell parametrizálni, és így az idő múlásával rendkívül sokat változhatnak.

Az egyfaktoros modellek előnye, hogy ezek alkalmazásakor sokkal egyszerűbb, és nagyobb annak az esélye, hogy a termék árát meg lehet határozni analitikus képlet segítségével. Azonban ha több faktortól függ a bizonytalanság, akkor a valóságot jobban leíró modelleket kapunk, és így komplettebb és rugalmasabb szerkezettel vagyunk képesek a pillanatnyi kamatláb alakulását leírni. Ugyanakkor fontos megemlíteni, hogy általában ilyen esetekben szükséges valamilyen numerikus módszert is társítani a modellhez, mivel zárt képlettel csak a legritkább esetekben adható meg a származtatott termékek ára.

Az affin modellekben a modellváltozók között lineáris kapcsolatot feltételezünk, míg a kvadratis modellekben ezzel ellentétben, túllépve a linearitás határain a valóságot már jobban leíró nem lineáris kapcsolatot definiálunk a változók között. A legújabb modellek a hagyományos diffúziós dinamikát kiegészítik sokkhatásokkal, hogy minél realisztikusabb képet kapjunk a kamatlábak alakulásáról.

Az egyfaktoros modellekben a pillanati kamatláb alakulásának bizonytalansága egyetlen forrásból származik. A kockázatsemleges világbeli kamatlábat általában a következő Ito-folyamat jellemzi:

$$dr = m(r, t)dt + s(r, t) dW \quad (3.1)$$

ahol a drift ($m(r, t)$) és a szórás ($s(r, t)$) is az idő és a pillanati kamatláb függvénye. A bizonytalanság egyetlen forrását a dW reprezentálja ahol dW egy Wiener folyamat növekménye, amely normális eloszlású, várható értéke nulla, szórása pedig dt függvénye. Az egyfaktoros modellek közül is több változat terjedt el a szakirodalomban, amelyek többnyire abban különböznek, hogy hogyan definiálják a driftet és a szórást (Larsson, (2004)).

Az alábbi táblázatban összefoglalom a legfontosabb modelleket, hogy egy átlátható képet kapjunk arról, miben különböznek ezek egymástól.

Modell	Dinamika	$r > 0$	$r \sim$	AB	AO
V	$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t$	N	N	Y	Y
CIR	$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma\sqrt{r}dW_t$	Y	$NC\chi^2$	Y	Y
D	$dr_t = ar_t dt + \sigma r_t dW_t$	Y	LN	Y	N
EV	$dr_t = r_t[\eta - a \ln r_t]dt + \sigma r_t dW_t$	Y	LN	N	N
HW	$dr_t = k[\theta_t - r_t]dt + \sigma dW_t$	N	N	Y	Y
BK	$dr_t = r_t[\eta_t - a \ln r_t]dt + \sigma r_t dW_t$	Y	LN	N	N

1. táblázat: A főbb kamatlábmodellek jellemzői (Bringo, (2006), 57. old)

A táblázatban a következő jelöléseket alkalmazom: V=Vasicek, CIR=Cox, Ingersoll and Ross D=Dothan, EV=Exponential-Vasicek HW=Hull-White, BK=Black-Karasinski, N=nem, Y=igen, N=normális eloszlás, $NC\chi^2$ =nem centrális khi eloszlás, LN=lognormális eloszlás, AB=analitikus bond ár, AO=analitikus opció ár

Amikor kiválasztjuk a modellezés során használt modellt több szempontot kell figyelembe vennünk, hogy az megfelelő eszközt nyújtson nekünk az árazás során. Pár kérdésre adott válasz segítségével jól le tudjuk szűrni a lehetséges modellek körét, ezek közül mutatok be néhányat:

- Biztosítja-e a modell dinamikája a kamatlábak pozitivitását?
- A modell által implikált pillanati kamatláb eloszlása milyen tulajdonságokkal rendelkezik? Normális, lognormális, vagy esetleg vastagfarkú?
- Számolható-e a kötvény ára

$$P(t, T) = E_t \left\{ e^{-\int_t^T r(s) ds} \right\} \quad (3.2)$$

képlettel – és ezáltal a spot és forward kamatlábak illetve a swap ráták – zárt képlet alapján a modellből (AB Y vagy N)?

- Különböző opciós kamatlábderivatívák ára analitikus képlettel számolható-e a modell által megadott pillanati kamatláb dinamikájából (AO Y vagy N)?
- Tartalmaz-e a modell a kamatlábak alakulására jellemző mean-reversion-t?
- Mennyire érzékeny a modell a diszketizálásra, azaz a kamatlábfák által kapott ár mennyire tér el a folytonos modell alapján kapott analitikus ártól?

Ezekre a kérdésekre adott válaszok alapján már egyrészt könnyű kiválasztani az alkalmas kamatlábmodellt, másrészt rávilágítanak arra is, hogy megértsük az egyes kamatlábmodellek közötti fő különbségeket, mind elméleti, mind gyakorlati szempontból.

4. A Hull-White és Black-Karashinski kamatlábmodellek

Kamatlábderivatívák árazása esetén a két leggyakrabban alkalmazott módszer a Hull-White és a Black-Karashinski modell, ezért dolgozatomban ezeket fogom bemutatni, elemezni. Hull és White (1994) cikkében egyrészt részletesen másrészt példákkal kiegészítve bemutatta, hogyan kell felépíteni az Hull-White egyfaktoros kamatlábmodellt, így a folyamat programozása során mindig volt lehetőségem arra, hogy ellenőrizzem, hogy egyes paraméterek mellett a kapott eredmények egyeznek-e a cikkben közöltekkel. Ezenkívül azt is leírta, hogy ezt hogyan kell a fát átalakítani Black-Karashinski kamatláb-folyamat esetén. (Khan, (2008))

A Hull-White modellt a következő sztochasztikus differenciálegyenlet reprezentálja:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dW \quad (4.1)$$

ahol dW jeleníti meg a pillanati kamatláb sztochasztikus jellegét. A $\theta(t)$ függvény segítségével lehet a modellt kalibrálni az aktuális piaci hozamgörbéhez, a és σ pedig a modell két volatilitás megjelenítő paramétere, a jelöli a mean reversion értékét, σ pedig a pillanati kamatláb volatilitását. A kamatlábmodell, ha kicsit másképp tekintünk rá, nem más, mint a Ho-Lee modell kiegészítve egy a ütemű mean reversion-nel, vagy a Vasicek modell kiegészítve egy időtől függő visszatérési szinttel.

A Black-Karashinski modellt a következő sztochasztikus differenciálegyenlet reprezentálja:

$$d\ln r = [\theta(t) - a\ln r]dt + \sigma dW \quad (4.2)$$

Mindkét kamatlábmodell nagy előnye, hogy kezeli a kamatlábak azon a tulajdonságát, hogy mindig visszatérnek egyfajta hosszú távú átlagos kamatszinthez. Ezt a tulajdonságot nevezzük mean-reversion-nek, vagyis átlaghoz való visszahúzásnak. Amikor a pillanati kamatláb szintje magas, akkor az átlaghoz való visszahúzás miatt a mozgás driftjének értéke várhatóan negatív lesz, míg ha alacsony, akkor pozitív. Ennek hátterében az a közgazdasági megfontolás áll, hogy amikor magasak a kamatlábak akkor ennek hatására a gazdaság lelassul, és kisebb az új hitelek iránti igény, így végezetül általában a kamatlábak esése következik be. (Hull, (1999))

A Hull White modell előnye, ahogy az 1. táblázatban is látható, rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a swaption értéke számolható analitikus képlet alapján. Ugyanakkor az a tulajdonsága, hogy a kamatlábak növekménye normális eloszlású, így

előfordulhatnak olyan esetek is, amikor a modell által létrehozott kamatlábak negatívak lesznek, hátránynak tekinthető. Azonban ekkor azt is figyelembe kell venni, hogy összehasonlítva a Ho-Lee modell-el – amely hasonlóan normális eloszlású kamatlábnövekménnyel rendelkezik –, annak a valószínűsége, hogy a kapott kamatok negatívak, sokkal kisebb, mivel itt megjelenik az átlaghoz való visszahúzás (Larsson, (2004)).

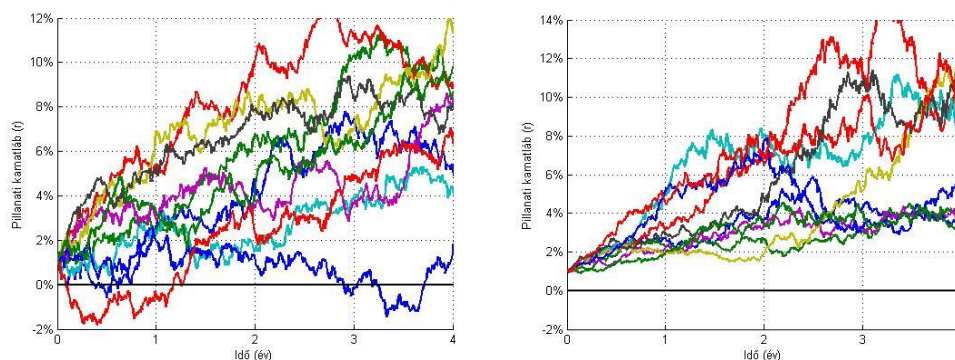
Mivel a BK modell lognormális eloszlású így megvan az előnye hogy a pillanati kamatlábak a folyamat során mindig pozitívak, ugyanakkor ugyanebből a tulajdonságból adódik hátránya is, mégpedig hogy zárt képlettel bizonyos termékeket nem tudunk árazni, Monte Carlo szimulációt kell futtatnunk a pénzügyi derivatíva pontos árának meghatározásához.

Ha ugyanahhoz a piaci hozamgörbéhez kalibráljuk a két modellt akkor at-the-money termékeket nagyjából ugyanúgy árazzák, azonban out-of-the money termékek esetén ahol a kamatlábak vastag szélének modellezése relevánsabb, ott a lognormális jellege miatt a Black-Karashinski modell alkalmazása célszerűbb. (Baldvinsdóttir, (2011))

Amikor választunk a két modell közül érdemes figyelembe vennünk a hozamgörbe alakját, szintjét. Ha alacsony hozamok jellemzőek, akkor érdemes a Black-Karashinski modellt alkalmazni, hogy elkerüljük a negatív kamatlábakat, ha magasabbak akkor a Hull-White modellt hogy el tudjuk kerülni a Monte Carlo szimuláció időigényes folyamatát.

Ebből adódik, hogy szükséges megvizsgálni a modellezés előtt, hogy egy adott piaci hozamgörbe mellett az egyes kamatlábmodellek esetén milyen valószínűséggel lesz a pillanati kamatlábak egy része negatív. Ennek a legegyszerűbb kivitelezése, ha generálunk N véletlen trajektoriát, amelyek illeszkednek a piaci hozamgörbéhez és a kerestett valószínűség megegyezik N_{ne}/N -el, ahol N_{ne} azokak a trajektoriáknak a száma, ahol a pillanati kamatlábak a folyamat során valahol negatív értékeket vesznek fel. A kamatlábmodellek tulajdonságaiból adódóan ez a valószínűség egyenesen arányos σ -val és fordítottan arányos θ és α -val. Érdemes nemcsak azok mellett a paraméterek mellett elvégezni a vizsgálatot amelyekkel pontosan illeszteni tudjuk az adott piaci hozamgörbéhez, hanem ezek egy adott környezetében is, mintegy érzékenységvizsgálatot elvégezve ezzel. (Ge, (1998))

A következő két ábra a két modell szimulációját mutatja, ezeken is jól látszik, hogy míg a Hull-White modell esetén lehetnek a pillanati kamatlábak negatívak, addig ez Black-Karashinski esetén nem fordul elő.



1-2. ábra Hull-White és Black-Karashinski modellek trajektoriai (Saját szerkesztés)

5. Numerikus megoldási módszerek

A kamatlábmodellek numerikus megoldási módszereinek három fajtája van, amelyek közül csak az első kettőt fogom dolgozatomban részletesen bemutatni és alkalmazni, azonban ebben a fejezetben kitérek mindhárom módszer előnyére és hátrányára, és arra is hogy hogyan lehet ezeket a módszereket összehasonlítani:

- fa módszer;
- Monte Carlo szimuláció;
- véges differencia módszerek;

Amikor választunk a módszerek közül érdemes bizonyos szempontokat figyelembe vennünk, és azok alapján értékelni a különböző modelleket. Ezek a szempontokat a következő három kérdés jól összefoglalja:

- Lehet-e a módszert használni az összes egyfaktoros modell esetén nagyobb módosítások nélkül?
- Könnyű-e implementálni a módszert?
- Elég gyors-e a módszer, konvergál-e a pontos elméleti árhoz?

A Monte Carlo módszert könnyű implementálni, de nagyon számításigényes és nem tud kezelni amerikai típusú opciókat. A véletlen változók számának növekedésével az eljárás előnyösebb a többihez képest. A fa módszer és a véges differencia módszerek mind amerikai, mind európai típusú derivatívák árazása esetén is alkalmazhatóak, viszont probléma lép fel, ha a kifizetések az állapotváltozó jelenbeli és múltbeli értékeiktől is

függenek. Emellett további hátrányuk, hogy a véletlen változók számának növekedésével egyre komplexebbek lesznek, így a számítási igény is jelentősen megnő.

Ezek alapján, ha egy véletlen folyamattól függő derivatívát modellezünk akkor érdemes fa vagy véges differencia módszert használnunk, míg ha több véletlen folyamattól függőt, akkor Monte Carlo szimulációt.

Ahogy írtam különböző módszerrel kapcsolatos kérdésekre kell válaszolni amikor numerikus módszert választunk, azonban ezekhez egy pénzügyi termék is kell. Dolgozatom során az egyik legelterjedtebb ilyen derivatívát választottam ki – swaption – mivel az első kamatlábmodellnek erre a derivatívára vonatkozóan létezik analitikus képlete, így ezzel összehasonlítva tudtam a faépítést meghatározó paramétereknek az árazás pontosságára gyakorolt hatását meghatározni, míg a második modell esetén meg tudom vizsgálni hogy a - mivel nincs zárt képlet - a Monte Carlo szimuláció vagy a trinomiális fa ad-e egy adott hibahatáron belül gyorsabban eredményt .

6. Kamatlábfák

A folytonos kamatlábmodellek kamatlábfákra való implikálása eléggé összetett folyamat. Ennek oka, hogy a modellek által meghatározott differenciál egyenletet diszkrétizáljuk, és a folytonos modell alapján felépítjük a kamatlábak lehetséges mozgását reprezentáló faszerkezetet. A kamatlábfá ugyanis a pillanati kamatláb sztochasztikus folyamatának diszkrét megjelenítése. Ha a lépésközt a fán Δt -nek választjuk, akkor a fán megjelenített kamatláb a Δt periódusra érvényes folytonos kamatláb, és a fa felépítésénél mindig azt feltételezzük, hogy ez ugyanazt a sztochasztikus folyamatot követi, mint a hozzá tartozó folytonos modellben a pillanati kamatláb.

A kamatlábfák részben nagyon hasonlóak a részvényárfolyam-fához, amelyek a részvény árfolyammozgását modellezzik diszkrét időben, és általában opciók árazásánál szokták használni, a Black-Scholes modell alternatívájaként. Az egyik alapvető különbség azonban az, hogy míg a részvényárfolyam-fák esetén a diszkontáláskor a kamatláb minden csomópontban ugyanaz, kamatlábfáknál ez csomópontról csomópontra változik. A másik eltérés pedig hogy mivel a kamatlábfák többnyire aritmetikai Brown mozgást jelenítenek meg, ezért a függőleges különbségek állandóak a szerkezetben. A faszerkesztési módszer előnye, hogy minden kamatlábtól függő származtatott termék beárazható, hátránya, hogy időigényes, és az elért eredmény pontossága nagyban függ a számításra szánt időtől, azaz hogy mennyire finomítjuk az időskálát.

A szakirodalomban a kamatlábfák binomiális és trinomiális megközelítésére is találunk példát, utóbbinak az a fő előnye, hogy eggyel több a szabadságfok, így a kamatláb alakulására jellemző folyamatokat, mint például a mean-reversiont, - azaz az átlaghoz való visszahúzást - könnyebb megjeleníteni. Emellett az addicionális rugalmasság biztosítani tudja, hogy nem csak az első, hanem a második momentumában is egyezzen a diszkrét modell a folytonossal. Hátránya, azonban hogy nem alkot teljes piacot, hiszen míg egy kockázati faktorunk van, addig 3 felé ágazik a fa, így nem lehet minden kifizetést replikálni. (Nelson et. al., (1990)), (Medvedyev et. al., (2010))

A trinomiális fák esetén a legismertebb, és éppen ezért általam is kiválasztott módszer a Hull és White által kidolgozott trinomiális faépítési módszer, amelyet az alábbiakban részletesen bemutatok, majd ennek módosítását Black-Karashinski folyamat esetén, illetve a későbbiekben ennek numerikus érzékenységvizsgálatát fogom elvégezni. (Hull et. al., (1994))

6.1. Hull White féle trinomiális fa

Hull és White 1994-ben publikált cikke bemutat egy kétlépcsős módszert, amellyel nemcsak az ő kamatlábmodelljüket lehet diszkrét környezetben modellezni, hanem sok más egyfaktoros kamatlábmodellt is. Ebben a fejezetben a cikk alapján bemutatom, hogyan lehet trinomiális fát építeni a Hull- White kamatlábmodell segítségével.

A Hull- White kamatláb-folyamatot az előző fejezetben bemutatott (4.1) egyenlettel lehet jellemezni. Első lépésben az $r^*=0$ körüli szimmetrikus fát kell felépíteni, amelynek kezdeti értéke nulla, és az alábbi sztochasztikus folyamatot modellezi:

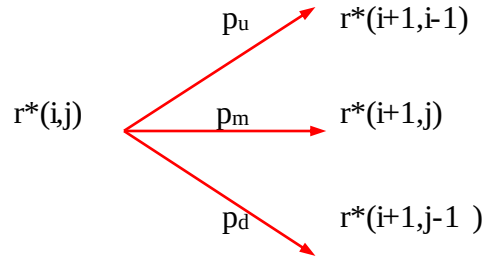
$$dr^* = -ar^*dt + \sigma dW \quad (6.1)$$

Ezt az első lépés során felépített fát sztenderd kamatlábfának fogom nevezni. Ez abban különbözik a modell által implikált hozamgörbéhez igazított kamatlábfától, hogy a fáközép mindenhol nulla. A modellezés második lépésében majd a fáközép pontjait egy adott kamatlábbal eltolva kapjuk meg a végleges kamatlábfát.

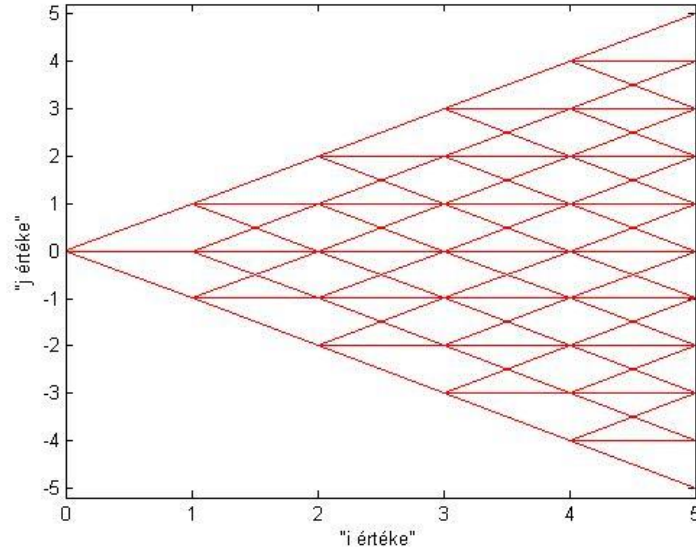
Az r^* változásának 3 lehetséges kimenete van: vagy növekszik Δr -el, vagy változatlan marad, vagy csökken Δr -el (Δr jelöli a kamatlábak közötti függőleges távolságot a fán). Ezen kimenetek valószínűségei rendre p_u , p_m és p_d . A sztenderd kamatlábfá csomópontjait jelölje a későbbiekben rendre $r^*(i, j)$, ahol i a kezdő csomópont

óta eltelt periódusok számát, j pedig a felfele mozgások nettó számát jelöli. Ez alapján az $r^*(i, j)$ megadja a $t = i\Delta t$ időponthoz, és az $j\Delta r$ kamatszínthez tartozó csomópontot.

Az említett elágazási mintát az 3. ábra mutatja, egy ez alapján felépített sztenderd fát pedig a 4. ábra.



3. ábra Az alap elágazási minta (Saját szerkesztés)



4. ábra Az alap elágazási minta alapján felépített sztenderd fa (Saját szerkesztés)

A modellezés során olyan trinomiális fát kell felépíteni, amely a lehető legpontosabban követi az 4.1. egyenlet által leírt sztochasztikus folyamatot. Ezt úgy lehet elérni, hogy a várható értéket illetve a varianciát kiszámoljuk mindkét folyamatból (diszkrét és folytonos), és ezeket egyenlővé tesszük. Az $r^*(t+\Delta t)-r^*(t)$ változó normális eloszlású, és ha elhagyjuk a Δt -nél magasabb rendű tagokat, akkor a következő várható értékkel és szórással rendelkezik:

$$E(r_{t+1} - r_t | r_t) = r_t M \quad (6.2)$$

$$V(r_{t+1} - r_t | r_t) = V \quad (6.3)$$

ahol

$$M = \pi e^{-a\Delta t} - 1 \cong -a\Delta t \quad (6.4)$$

$$V = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a\Delta t}] \cong \sigma^2 \Delta t$$

Mivel három ismeretlenünk van: $p_u, p_m, \Delta r$ (a harmadik valószínűség adódik az első kettőből: $p_d=1-p_u-p_m$), és két egyenletünk, ezért szükséges, hogy az első két momentumon kívül még egy magasabb rendűben is egyezzen a diszkrét és folytonos kamatlábmodell. Mivel mind a diszkrét, mind a folytonos modell eloszlása szimmetrikus, ezért a ferdeséget nem érdemes vizsgálni, a csúcsosságot viszont már igen. A normális eloszlás nem-centrális momentumait a 2. táblázat mutatja.

1	μ
2	$\mu^2 + \sigma^2$
3	$\mu^3 + 3\mu\sigma^2$
4	$\mu^4 + 6\mu\sigma^2 + 3\sigma^4$

2. táblázat: A normális eloszlás nem centrális momentumai (Saját szerkesztés)

A keresett harmadik egyenletet tehát úgy kapjuk meg, hogy hasonlóan az előbbiekhöz a diszkrét eloszlás negyedik momentumát is egyenlővé tesszük a folytonos eloszlásával. (Dancs, (2005))

Ez alapján a következő háromegyenletes egyenletrendszert kell megoldani a standard kamatlábfá szükséges paramétereinek megismeréséhez.

$$p_u(j)\Delta r + p_m(j) * 0 - p_d(j)\Delta r = j\Delta r M$$

$$p_u(j)(\Delta r)^2 + p_m(j) * 0 + p_d(j) (-\Delta r)^2 = V + (j\Delta r M)^2$$

$$p_u(j)(\Delta r)^4 + p_m(j) * 0 + p_d(j) (-\Delta r)^4 = 3V^2 + 6V(j\Delta r M)^2 + (j\Delta r M)^4 \quad (6.6)$$

Az egyenletrendszer megoldásának egyik módja ha megvizsgáljuk hogyan néz ki a $j=0$ helyen vagyis a faközépnél. Ekkor mivel minden páratlan momentum értéke nulla (csak olyan tagok vannak benne, amik j -től függenek) a következő egyenlőségnek teljesülnie kell.

$$p_0 = p_u(0) = p_d(0) = \frac{V}{2(\Delta r)^2} = \frac{3V^2}{2(\Delta r)^4} \quad (6.7)$$

Ebből az egyenlőségből kapjuk meg a Δr változó és p_0 értékét.

$$\Delta r = \sqrt{3V} \quad (6.8)$$

$$p_0 = \frac{V}{6V} = \frac{1}{6} \quad (6.9)$$

A negyedik momentum egyezőséget tehát azért kellett bevennünk az egyenletrendszerbe, hogy a ha a $j=0$ esetet nézzük akkor legyen még egy egyenletünk amivel definiálni tudjuk Δr -t. Később amikor rátérek majd a trinomiális fá általánosítására akkor ezeknek a páros momentumoknak még fontos szerepe lesz. Amikor j nem egyenlő nullával akkor a következő egyenletrendszer teljesül:

$$p_u(j)\Delta r + p_d(j)(-\Delta r) = j\Delta rM$$

$$p_u(j)(\Delta r)^2 + p_d(j)(-\Delta r)^2 = (j\Delta rM)^2 + \frac{1}{3}(\Delta r)^2$$

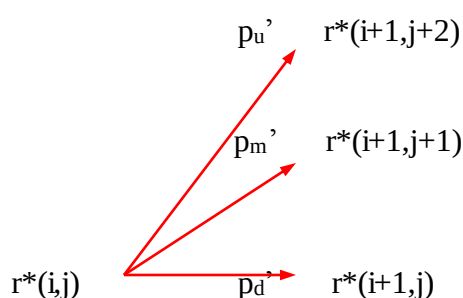
Ezt megoldva pedig megkapjuk a keresett valószínűségeket.

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 - jM}{2} \quad (6.12)$$

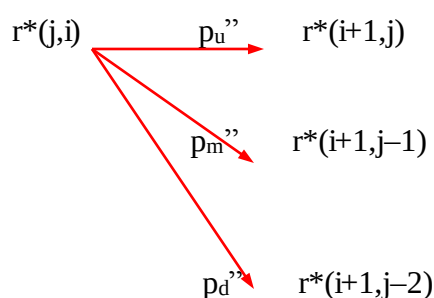
$$p_m = \frac{2}{3} - (jM)^2 \quad (6.13)$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 - jM}{2} \quad (6.14)$$

Az előző ábrán bemutatott kamatlábfá nem elhanyagolható hátránya azonban, hogy nem építi be a folytonos kamatlábmódelben megfigyelhető mean reversion-t. Ahhoz, hogy a folytonos folyamatnak ezen tulajdonságát is be tudjuk építeni a modellbe, az eddigi egyféle elágazási eljárás helyett alternatív megoldásokat kell használnunk a fa építése során. Ezt a két új lehetőséget mutatja be a 5. és 6. ábra.



5. ábra Elágazási minta – (a) alternatíva
(Saját szerkesztés)



6. ábra Elágazási minta – (b) alternatíva
(Saját szerkesztés)

A rendkívül alacsony kamatlábak elkerülésének megoldása lehet a „kettőt fel/egyed fel/előre” (a) alternatíva, és ehhez nagyon hasonló módon nyújt megoldást az „előre/egyed le/kettőt le” (b) alternatíva az irrálisan magas kamatlábak ellen.

Erre a két új elágazási mintára is igaznak kell lennie, hogy az egyes kimenetek valószínűségeinek biztosítania kell a diszkrét kamatlábfá, és a folytonos modell közötti kapcsolatot, így a korábban bemutatott módszerhez teljesen hasonló módon kapjuk meg

az egyes kimenetek valószínűségét (egyenlővé tesszük az első, második, és negyedik momentumokat). Az alábbi két egyenletrendszer adja meg az (a) és (b) alternatíva esetén a kapott átmenet-valószínűségeket.

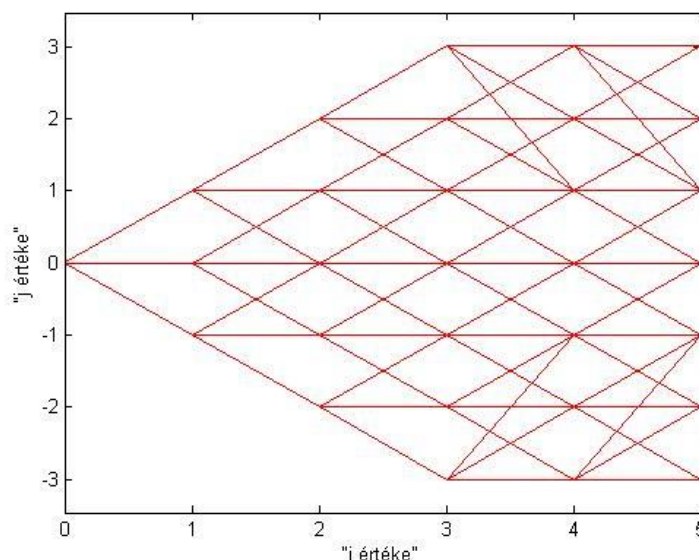
(a) alternatíva

$$\begin{cases} p_u' = \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 + jM}{2} \\ p_m' = -\frac{1}{3} - (jM)^2 - 2jM \\ p_d' = \frac{7}{6} + \frac{(jM)^2 + 3jM}{2} \end{cases} \quad (6.15)$$

(b) alternatíva

$$\begin{cases} p_u'' = \frac{7}{6} + \frac{(jM)^2 - 3jM}{2} \\ p_m'' = -\frac{1}{3} - (jM)^2 + 2jM \\ p_d'' = \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 - jM}{2} \end{cases} \quad (6.16)$$

Az elágazási alternatívák használatának egy lehetséges módját mutatja az 7. ábrán látható kamatlábfa.



7. ábra Az alternatív elágazási lehetőségekkel felépített kamatlábfa (Saját szerkesztés)

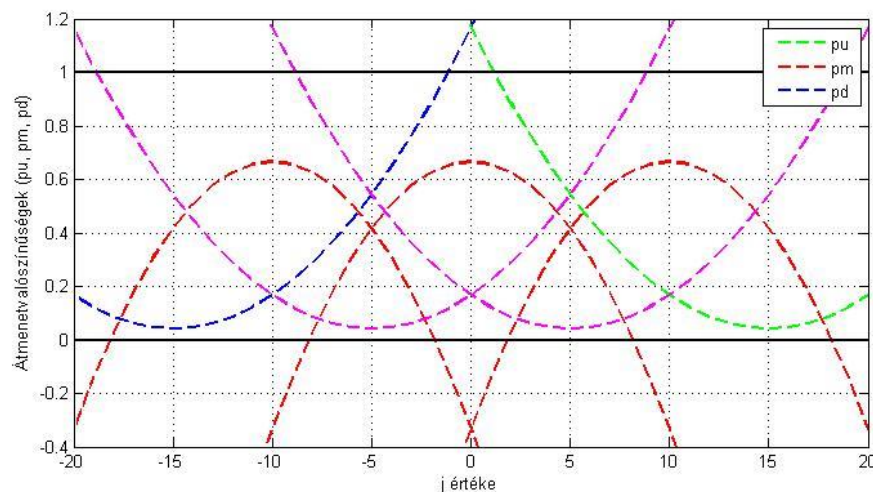
Azonban rögtön felmerülhet bennünk a kérdés, hogy van-e olyan szint ahol már mindenképp át kell térni az alternatív elágazási formákra, és ha igen, akkor ez hol van. Ennek a problémának a megoldási kulcsa, hogy mind a normál, mind az alternatív elágazási módszereknek biztosítaniuk kell, hogy mindhárom kapott valószínűség a $[0,1]$ intervallumban legyen. A legtöbb esetben az először bemutatott elágazási minta megfelel ennek a célnak. Azonban, ha a „mean reversion” paramétere nagyobb, mint nulla ($a > 0$), akkor az alap elágazási módszerről a (b) alternatívára kell áttérni, ha j elég nagy értéket vesz fel, illetve az (a) alternatívára, ha elég kicsit.

Érdemes megvizsgálni hogy az átmenet-valószínűségek milyen j értékek esetén esnek ebbe az intervallumba. Ezt a 3. táblázat adja meg.

	normál	fent	lent	
p_u	$\frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{23/12}}{M}$	$\frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{23/12}}{M}$	$\frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{23/12}}{M}$	1
p_m	$\frac{\pm \sqrt{2/3}}{M}$	$\frac{1 \pm \sqrt{2/3}}{-M}$	$\frac{-1 \pm \sqrt{2/3}}{-M}$	0
p_d	$\frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{23/12}}{M}$	$\frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{23/12}}{M}$	$\frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{23/12}}{M}$	1

3. táblázat: Az átmenet-valószínűségek egyenleteinek gyökei (Saját szerkesztés)

A táblázatból egyrészt lehet látni, hogy p_u -nak és p_d -nek nincs nullhelye, p_m pedig mindig kisebb mint 1, és csak bizonyos j intervallumok esetén lesznek az átmenet-valószínűségek 0 és 1 között. A másik fontos megállapításom, hogy ezek az intervallumok egyrészt szimmetrikusak (0-körül), másrészt mindegyik M függvénye, vagyis ha csökkentjük Δt -t, akkor ezek arányosan változnak vele együtt. Természetesen M nemcsak Δt hanem a vagyis a mean-reversion paraméter függvénye is, így ez lehet ennek az érdekes ténynek az oka. Az átmenet-valószínűségeket a 8. ábra mutatja j függvényében.

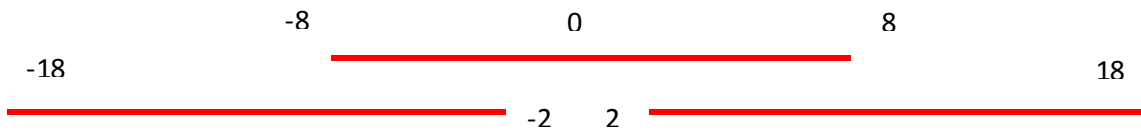


8. ábra Az átmenet-valószínűségek „ j ” függvényében (Saját szerkesztés)

A táblázatból és az ábráról is leolvasható hogy az alternatív elágazások p_u , p_m , és p_d a normál elágazás eltoltsai méghozzá $1/M$ -el és $-1/M$ -el. Ennek bizonyítását p_u esetre adja a következő levezetés.

$$\begin{aligned} \frac{7}{6} + \frac{1}{2} \left(3 \left(j - \frac{1}{M} \right) M + \left(j - \frac{1}{M} \right)^2 M^2 \right) &= \frac{7}{6} + \frac{3}{2} jM - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(j^2 + \frac{1}{M^2} - \frac{2j}{M} \right) M^2 = \frac{-2}{6} + \frac{3}{2} jM + \\ \frac{1}{2} j^2 M^2 + \frac{1}{2M^2} - \frac{j}{M} &= \frac{7}{6} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} jM + \frac{1}{2} j^2 M^2 + \frac{1}{2} - 2jM = \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2} jM + \frac{1}{2} j^2 M^2 & \end{aligned} \quad (6.17)$$

Jelölje ezentúl j_{max} azt az értéket, amely esetén már kötelező az eredeti módszerről a (b) alternatívára áttérni, és j_{min} azt, amely esetén az (a) alternatívára. A következő számegeyenest reprezentáló ábra azt mutatja meg, hogy ha j elég nagy értéket vesz fel ahhoz, hogy p_u , p_m és p_d értékek már nem 0 és 1 közé esnek ($j > 8$ esetén) akkor ha nem térnénk át az alternatív módszerre, negatív valószínűségek jönnének ki a fá építése során. Ezekre viszont nyugodtan áttérhetünk, hiszen itt megfelelnek az alternatív elágazások valószínűségei az előbb felállított kritériumnak.



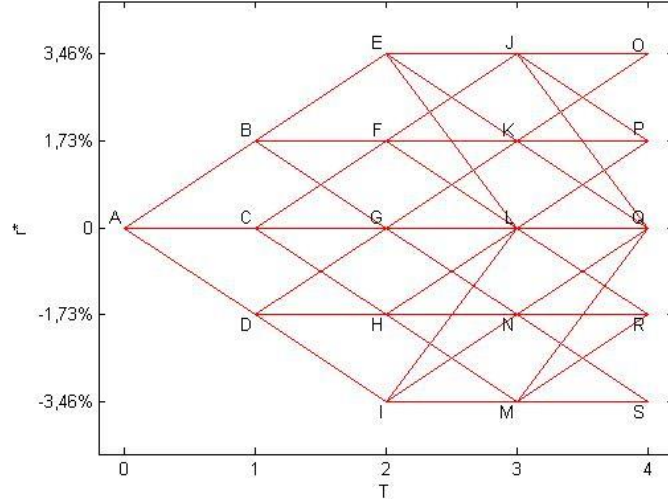
9. ábra Az átmenet-valószínűségek „j” függvényében a számegeyenesen (Saját szerkesztés)

Annak köszönhetően, hogy ezek az intervallumhatárok lineárisan függenek Δt -től minden rögzített a mellett megadhatjuk azt az időtávot amelyet maximálisan tudunk modellezni a normál elágazással, illetve az alternatív elágazások kombinációjával. Ha az $a=0.1$ esetet vizsgáljuk, akkor ez 8 illetve 18 év, hiszen hiába csökkentjük Δt , és ezáltal megnő az intervallum ahol az átmenet-valószínűségek 0 és 1 közé esnek (pl.: $\Delta t=0,5$ esetén $[-36;-4]$, $[-16;16]$, $[4;36]$) ugyanúgy $16/2=8$ és $36/2=18$ évet tudunk modellezni. Erre azért fontos figyelni mert hosszú lejáratú swaptionok esetén vagy más alternatív elágazási formákat is be kell vezetnünk, vagy akár más kamatlábmodellt.

A probléma megoldásaként azt kaptuk, hogy létezik egy olyan j szint (j_{max} , j_{min}), ami után már mindenképp át kell térni (b) illetve (a) alternatívára áttérni (8, -8), és egy olyan amely előtt nem lehet (2, -2), azonban azt nem tudjuk hogy mi ezek közül az optimális. A Hull-White cikk az alternatív levágási szintek intervallumainak nullához legközelebb eső pontját fogadja el optimális levágási szintnek, azonban a későbbiekben meg fogom vizsgálni, hogyan hat egy kamatláb-derivatív értékére, ha ettől különböző levágási szinteket alkalmazunk a trinomiális fá építése során. (Hull, (1994))

A sztenderd fá felépítésének bemutatását egy példával fejezem be. Ehhez felhasználom a kamatlábmodell paramétereire vonatkozóan a cikk által megadott adatokat ($\sigma = 0.01$; $\alpha = 0.1$; $\Delta t = 1$ év). Ebben az esetben $\Delta r = 0.01\sqrt{3} = 0.0173$, j_{max}

pedig egyenlő $\frac{0.184}{0.1}$ -nél nagyobb legkisebb egész számmal, azaz $j_{max} = 2$ és $j_{min} = -2$. Az így elkészített 4 periódusos fát a 10. ábra mutatja, az alatta lévő két táblázat pedig tartalmazza a kapott átmenet-valószínűségeket, illetve az r^* értékeit.



10. ábra Egy lehetséges kamatlábfá (Saját szerkesztés)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
r	0.00%	1.73%	0.00%	-1.73%	3.46%	1.73%	0.00%	-1.73%	-3.46%
p_u	0.167	0.122	0.167	0.222	0.887	0.122	0.167	0.222	0.087
p_d	0.666	0.656	0.666	0.656	0.026	0.656	0.666	0.656	0.026
p_m	0.167	0.222	0.167	0.122	0.087	0.222	0.167	0.122	0.877

4. táblázat A sztemerd kamatlábfá pontjainak tulajdonságai (Saját szerkesztés)

J	K	L	N	M	O	P	Q	R	S
3.46%	1.73%	0.00%	-1.73%	-3.46%	3.46%	1.73%	0.00%	-1.73%	-3.46%
0.887	0.122	0.167	0.222	0.087	0.887	0.122	0.167	0.222	0.087
0.026	0.656	0.666	0.656	0.026	0.026	0.656	0.666	0.656	0.026
0.087	0.222	0.167	0.122	0.877	0.087	0.222	0.167	0.122	0.877

5. táblázat A sztemerd kamatlábfá pontjainak tulajdonságai (Saját szerkesztés)

Az átmenet-valószínűségek kapcsán két dologra érdemes felfigyelni. Az egyik, hogy a fa szimmetriája miatt a faközép feletti pontok p_u, p_m, p_d értékei pont tükörképei a faközép alatti pontok hasonló értékeinek (azonos j magasság esetén: B és D, F és H pontok), másrészt az egyes csomópontokhoz tartozó valószínűségek nem függenek a Δt -től csak j -től (stacioner a folyamat), azaz hogy milyen messze helyezkednek el a faközéptől.

A Hull-White féle trinomiális fa felépítésének második lépése, hogy az r^* folyamatot leíró sztemerd fát átszerkesztjük az r sztochasztikus folyamat alakulását

bemutató fává. Ennek az a lépésnek a lényege, hogy a fa átkalibrálásakor nem az átmenet-valószínűségeket változtatjuk, hanem a csomópontok r^* értékeit, mégpedig úgy hogy a fa tökéletesen illeszkedjen a piacon megfigyelt hozamgörbéhez. Mivel az egyes csomópontok közötti függőleges különbség adott (Δr), ezért elegendő a faközeget reprezentáló pontokat úgy eltolni, hogy az adott $j\Delta t$ időpontokhoz tartozó kamatlábak alapján kapott hozamgörbe pontosan megegyezzen a piaci hozamgörbével. Az eltolás mértékét ezentúl jelölje α_i (az r^* és r különbségét az $i\Delta t$ csomópontban).

A cikk a kalibrálás két lehetőségét említi meg. Az első módszer lényege, hogy megadja $\alpha(t)$ értékét az időben folytonos modellben, amely segítségével a sztenderd fából megalkothatjuk a kalibrált fát. Azonban az így előállított fa nem teljesen konzisztens a hozamgörbével, mivel a folytonos modellben szereplő α -t használja fel egy diszkrét implementációban. A másik lehetséges eljárás, amelyet magam is részletesen bemutatok, hogy az α értékét minden egyes $j\Delta t$ időponthoz iteratív módon határozzuk meg, ezáltal a kapott fa tökéletesen konzisztens lesz a piaci hozamgörbével (Hull, (1999)).

Jelölje a későbbiekben $Q_{i,j}$ egy olyan értékpapír jelenértékét, amely 1 egységet fizet az (i,j) csomópontban, és minden más esetben nullát. Ezeket a $Q_{i,j}$ árakat a szakirodalom komponensáraknak, vagy Arrow-Debrau áraknak is nevezi. A definícióból egyenesen következik, hogy $Q_{0,0} = 1$. A következő részben a sztenderd fa felépítéséhez használt példát folytatom és bemutatom, hogyan kell megvalósítani a Hull-White féle faépítési eljárás második részét. Ehhez először szükséges egy hozamgörbét definiálni. A cikk a következő kifejezéssel adja meg a t éves folytonosan számított elemi kötvény hozamát: $0.08 - 0.05e^{-0.18t}$. Az α_0 értékét úgy kell megválasztani, hogy egyenlő legyen az első Δt időszakra vonatkozó kamatlábbal, ugyanis ebben az esetben árazódik jól a Δt idő múlva lejáráó elemi kötvény. Mivel a sztenderd fa felépítése során a Δt -t 1 évben határoztuk meg, ezért az $\alpha_0 = 0.08 - 0.05e^{-0.18} = 0.0382$. Ebből megkapjuk a kamatlábfa kezdőpontjának az értékét: $r = 3.82\%$. Ezután meg kell határoznunk az első év végi komponensárakat ($Q_{0,0}$, $Q_{1,0}$, $Q_{1,-1}$). Annak a valószínűsége, hogy egyet lépünk felfele 0.1667, így a $Q_{1,1}$ értéke $0.1667e^{-0.0382} = 0.1604$. Ugyanilyen módon megkapjuk, hogy $Q_{1,0} = 0.6417$ és $Q_{1,-1} = 0.1604$. A következő lépés az α_1 meghatározása. Ezt az előzőhöz hasonló módon úgy kell meghatározni, hogy a két periódus múlva lejáráó elemi kötvény a piaci adatoknak megfelelően árazódjon. Mivel az első év végén három különböző pontban lehetünk, ezért a második évre három lehetséges egyperiódusos kamatláb alakulhat ki. Ennek következtében az egyéves elemi kötvény (első és második év közötti kötvény) ára a B pontban $e^{-(\alpha_1 + 0.0173)}$, a C pontban $e^{-\alpha_1}$, és a D pontban $e^{-(\alpha_1 - 0.0173)}$. Ezeket

a B, C, D pontok komponensáraival beszorozva (így számolunk jelenértéket) megkapjuk az A pontbeli kétéves elemi kötvény árfolyamát:

$$Q_{1,1}e^{-(\alpha_1+0.0173)}+Q_{1,0}e^{-\alpha_1}+Q_{1,-1}e^{-(\alpha_1-0.0173)} \quad (6.18)$$

A piaci hozamgörbe alapján, mivel a két éves folytonosan számított elemi kötvény hozama $0.08-0.05e^{-0.18*2} = 0.04512$, a kötvény árfolyama $e^{-0.04512*2}=0.9137$ kell, hogy legyen. A következő egyenlőséget kell tehát α_1 függvényében megoldani:

$$Q_{1,1}e^{-(\alpha_1+0.0173)}+Q_{1,0}e^{-\alpha_1}+Q_{1,-1}e^{-(\alpha_1-0.0173)} = 0.9137 \quad (6.19)$$

Megoldásként α_1 -re a következőt kapjuk:

$$\alpha_1 = \ln \frac{0.1604e^{-0.0173} + 0.6417 + 0.1604e^{0.0173}}{0.9137} = 0.0520 \quad (6.20)$$

ami azt jelenti, hogy az r fán a Δt időpontbeli fáközép értéke 5,2%. Ezután az előbbi lépéshez hasonló módon történik a $Q_{2,2}, Q_{2,1}, Q_{2,0}, Q_{2,-1}$ és $Q_{2,-2}$ megadása.

Érdemes megfigyelni, hogy az öt Arrow-Debrau ár összegének ki kell adnia a két időszakra vonatkozó diszkontfaktort. Ennek oka, hogy az i -edik időpontban lejáró elemi kötvény értékét kétféleképp lehet kiszámolni. Egyrészt a komponensárak i -edik oszlopának összegeként, másrészt az $i-1$ -edik oszlop meghatározott értékeiből is, ugyanis

$$P_i = \sum_j Q_{i,j} = \sum_j \sum_k Q_{i-1,k} d_{i-1,k} p_{k,j} = \sum_k Q_{i-1,k} d_{i-1,k} \quad (6.21)$$

ahol $d(i, j)=e^{(-r^*(i, j))}$ minden egyes esetben. Az összegzés során j a fa alsó peremétől ($j_{\min}$) a fa felső pereméig fut ($j_{\max}$), k pedig végigfut az egész oszlopon, mivel azok az AD-árak amelyek irrelevánsak nullák. Mivel a

$$Q_{i,j} = \sum_k Q_{i-1,k} d_{i-1,k} p_{k,j} \quad (6.22)$$

egyenlőség mindig teljesül, ezért az (5.18) egyenlőség is mindig igaz.

A módszer általánosítása érdekében tételezzük fel, hogy ismerjük $Q_{i,j}$ -ket minden $i \leq m$ -re. Ekkor meg kell határoznunk α_m értékét úgy, hogy az $(m+1)t$ idő múlva lejáró elemi kötvény jól árazódjon. Ennek a kötvénynek az árfolyama

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-(\alpha_m + j\Delta r)\Delta t] \quad (6.23)$$

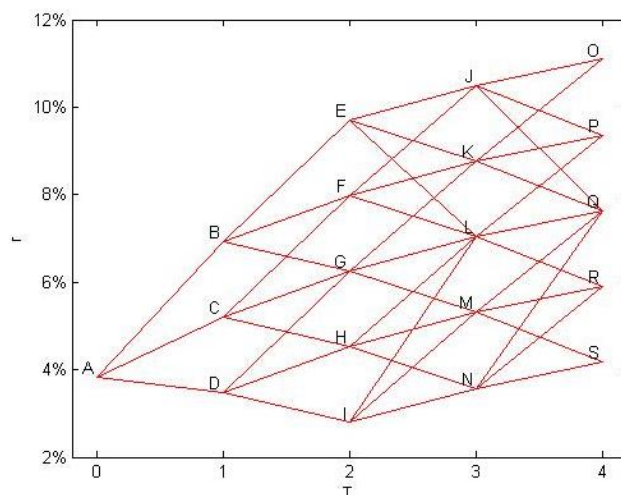
ahol n_m a fáközép két oldalán elhelyezkedő csomópontok számát jelöli az $m\Delta t$ időpontban. Ezt az egyenletet, ha α_m -re rendezzük, a következőt kapjuk:

$$\alpha_m = \frac{\ln \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-j\Delta r \Delta t} - \ln P_{m+1}}{\Delta t} \quad (6.24)$$

Az α_m ismeretében pedig megadható már az összes $Q_{i,j}$ érték az $i=m+1$ időpontra:

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} p(k,j) \exp[-(\alpha_m + k\Delta r)\Delta t] \quad (6.25)$$

ahol $p(k,j)$ azt az átmenet-valószínűséget jelöli, hogy az (m,k) pontból az $(m+1,j)$ pontba jutunk el, és minden olyan k értékre el kell végeznünk ezt az összegzést, amely nem nulla.



11. ábra Egy lehetséges kamatlábfá (Saját szerkesztés)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
r	3.82%	6.94%	5.20%	3.47%	9.72%	7.99%	6.25%	4.52%	2.79%
P_u	0.167	0.122	0.167	0.222	0.887	0.122	0.167	0.222	0.087
P_d	0.666	0.656	0.666	0.656	0.026	0.656	0.666	0.656	0.026
P_m	0.167	0.222	0.167	0.122	0.087	0.222	0.167	0.122	0.877

6. táblázat kamatlábfá pontjainak tulajdonságai (Saját szerkesztés)

J	K	L	N	M	O	P	Q	R	S
10.51%	8.77%	7.04%	5.31%	3.58%	11.09%	9.36%	7.63%	5.90%	4.17%
0.887	0.122	0.167	0.222	0.087	0.887	0.122	0.167	0.222	0.087
0.026	0.656	0.666	0.656	0.026	0.026	0.656	0.666	0.656	0.026
0.087	0.222	0.167	0.122	0.877	0.087	0.222	0.167	0.122	0.877

7. táblázat kamatlábfá pontjainak tulajdonságai (Saját szerkesztés)

A 11. ábra mutatja a piaci hozamgörbéhez illesztett Hull-White féle trinomiális kamatlábfát, amelyet érdemes összehasonlítani a sztenderd kamatlábfával. Látható, hogy a fáközép elmozdulásával igazodott a piaci hozamgörbéhez a trinomiális fa, miközben a függőleges távolságok a fán nem változtak.

6.2. Black-Karashinski féle trinomiális fa

Az előbbieken bemutatott módszer minden olyan általánosabb modellre kiterjeszthető amely felírható a

$$df(r) = [\theta(t) - af(r)]dt + \sigma dW \quad (6.26)$$

alakban, így tehát a Black-Karashinski modell esetén is.

Az első lépésben amikor a sztenderd fát építjük a módszer teljesen hasonlít az előzőhöz, de most az r^* az $\ln r$ -t reprezentálja.

$$dr^* = -ar^*dt + \sigma dW \quad (6.27)$$

$$\ln r = r^* + \alpha; \quad r = \exp(r^* + \alpha) \quad (6.28)$$

Az eltérés a Hull-White fához képest ott lép be amikor a piaci hozamgörbéhez kalibráljuk a fát, ugyanis míg korábban az egyéves elemi kötvényeket az $\exp(-(\alpha_1 + j^*dx))$ képlettel kaptuk meg, ez most a lognormális kamatlábfolymat miatt ez a következőképpen néz ki: $\exp(-\exp(\alpha_1 + j^*dx))$.

Az $(m+1)t$ idő múlva lejáró elemi kötvény árfolyamát a következő összefüggés adja meg:

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-\exp(\alpha_m + j\Delta r)\Delta t] \quad (6.29)$$

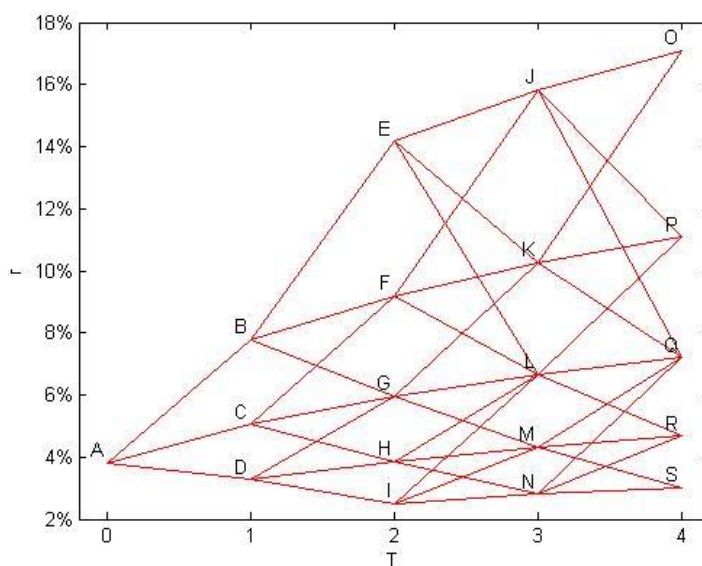
Ez az egyenlet nem lehet analitikusan megoldani, mint a korábbi esetben, csak numerikusan ennek egyik lehetősége a Newton-Raphson módszer.

Az α_m ismeretében pedig megadható már az összes $Q_{i,j}$ érték az $i=m+1$ időpontra:

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} p(k,j) \exp[-\exp(\alpha_m + k\Delta r)\Delta t] \quad (6.30)$$

ahol $p(k,j)$ azt az átmenet-valószínűséget jelöli, hogy az (m,k) pontból az $(m+1,j)$ pontba jutunk el, és minden olyan k értékre el kell végeznünk ezt az összegzést, amely nem nulla. (Hull, (1994))

A 12. ábra és 8. illetve 9. táblázat mutatja a Black-Karashinski trinomiális fa értékét $\sigma = 0.25$; $\alpha = 0.22$; $\Delta t = 0.5$ év paraméterek mellett.



12. ábra Egy lehetséges Black-Karasinski kamatlábfá (Saját szerkesztés)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
r	3.82%	7.78%	5.05%	3.27%	14.18%	9.20%	5.96%	3.87%	2.51%
P_u	0.167	0.081	0.167	0.301	0.604	0.081	0.167	0.301	0.044
P_d	0.666	0.618	0.666	0.618	0.353	0.618	0.666	0.618	0.353
P_m	0.167	0.301	0.167	0.081	0.044	0.301	0.167	0.081	0.604

8. táblázat kamatlábfá pontjainak tulajdonságai (Saját szerkesztés)

J	K	L	N	M	O	P	Q	R	S
15.84%	10.27%	6.66%	4.32%	2.80%	17.11%	11.09%	7.20%	4.67%	3.03%
0.604	0.081	0.167	0.301	0.044	0.604	0.081	0.167	0.301	0.044
0.353	0.618	0.666	0.618	0.353	0.353	0.618	0.666	0.618	0.353
0.044	0.301	0.167	0.081	0.604	0.044	0.301	0.167	0.081	0.604

9. táblázat kamatlábfá pontjainak tulajdonságai (Saját szerkesztés)

Jól látható, hogy Black-Karashinski trinomiális fa esetén már csak a valószínűségek szimmetrikusak, azonban a kamatlábfá már nem, mivel nem r -t hanem $\ln r$ -t modelleztük a folyamat során. Ebből adódik az is, hogy a fa alsó részén a függőleges különbségek kisebbek, mint a felső részén.

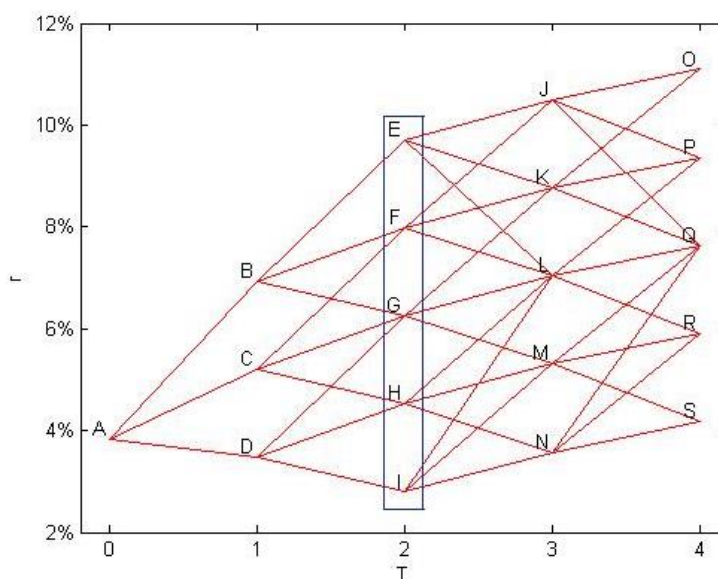
7. Swaption árazása kamatlábfán

A kamatlábfá kétlépcsős építési eljárásának bemutatása után ebben a fejezetben leírom, hogyan lehet a trinomiális fán swaption-t árazni, illetve milyen további számítások elvégzése szükséges a származtatott termék árának meghatározásához. A

továbbiakban is azt a példát használom a modellezés szemléltetéséhez, amelyet a faépítés során alkalmaztam.

A swaption három legfontosabb paramétere, hogy melyik időponttól indul, hányszor van csere a Tenor alatt (azaz hány FRA-t tartalmaz), illetve hogy mikor van a lejárat. Annak érdekében, hogy fel tudjam használni az előző példát, a swaption lejáratát öt évben definiálom, a kezdeti időpontját pedig két évben, illetve felteszem, hogy évente egyszer történik kamatfizetés, az év végén, amelynek változó kamata az előző év végi egyperiódusos kamatláb alapján határozódik meg. A swaption élettartama alatt tehát 3-szor történik a kamatlábak alakulása alapján pénzáramlás cseréje. A 8. ábrán a téglalap jelöli, hogy honnan indul a swaption.

A swaption árazása során első lépésként meg kell állapítanunk, hogy hány részfát kell majd felépítenünk. Minden egyes ilyen részfa egy-egy hároméves swap-ot jelenít meg, és az ezekre kapott árak határozzák majd meg a swaption értékét. A swaption trinomiális fával történő árazása során tehát annyi swap árat kell meghatároznunk, ahány lehetséges pont van a kamatlábfán a swaption kezdetének időpontjában.

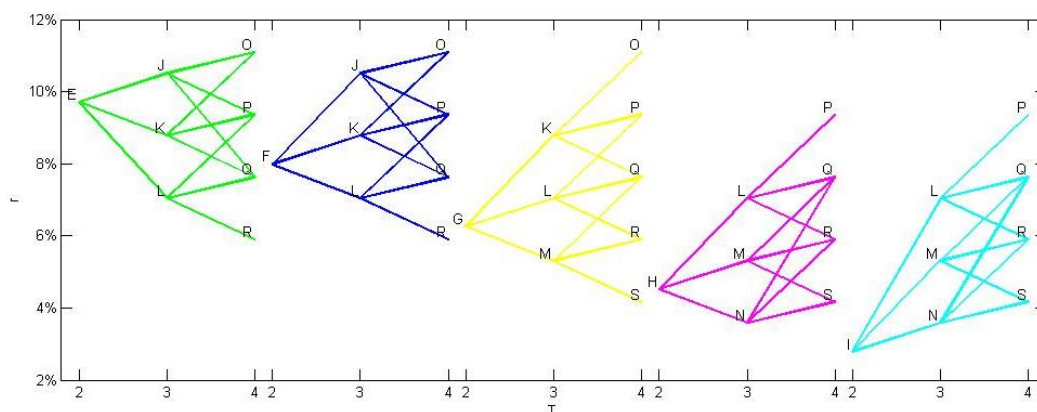


13. ábra Részfák kezdőpontjai (Saját szerkesztés)

Mindegyik részfa esetén más és más lesz a pillanati kamatlábak dinamikája, és ezáltal más-más árakat fogunk kapni a swapokra. Az egyes részfák megvalósulásának valószínűségeivel kell súlyozni a kapott árak pozitív részét (a swaption opció jellege miatt), hogy megkapjuk a derivatíva kamatlábfá által meghatározott értékét.

Esetünkben mivel a swaption a második év végén kezdődik, és a kamatlábfolyamat itt ötféle értéket vehet fel, ezért öt ilyen részfát kell kialakítanunk a

modellezés során. Ez a szám függ mind a felső, mind az alsó levágási szinttől, azonban ebben a példában ezek nem befolyásolják, ugyanis csak a későbbi időpontokban van „megmetszve” a fa. Az öt részfa különböző kamatláb-dinamikájának megvalósulásait mutatja be a 14. ábra.



14. ábra A részfákon lehetséges rövid kamatlábak szerkezetei (Saját szerkesztés)

A 14. ábrán látható, hogy minden egyes részfa a második év végétől indul, és az ötödik év végéig tart, illetve hogy a levágási szintek hogyan hatnak arra, hogy mikor kell áttérni az alternatív elágazási formákra. Az is látható, hogy ahogy haladunk az E pontból kezdődő részfától az I pontból kezdődő részfaig, úgy a pillanati kamatlábak egyre kisebb értékeket vesznek fel a modellezett időszak során.

Minden egyes részfa esetén ezek alakulásából meghatározható egy-egy hozamgörbe, valamint ez alapján a változó kamatláb kifizetéseit meghatározó forward görbe. Ezen adatokat tartalmazza az öt részfa esetén a következő két táblázat.

Diszkontfaktorok			
	${}_2D_3$	${}_2D_4$	${}_2D_5$
E pont	0,907	0,820	0,739
F pont	0,923	0,847	0,774
G pont	0,939	0,876	0,811
H pont	0,956	0,905	0,850
I pont	0,973	0,962	0,891

10. táblázat Egyes részfákon megvalósuló hozamgörbék pontjai (Saját szerkesztés)

Forward kamatok			
	${}_2F_3$	${}_2F_4$	${}_2F_5$
E pont	10,21%	10,68%	10,98%
F pont	8,31%	8,97%	9,43%
G pont	6,45%	7,29%	7,91%
H pont	4,63%	5,63%	6,41%
I pont	2,83%	3,99%	4,92%

11. táblázat Egyes részfákon megvalósuló forward kamatlábak (Saját szerkesztés)

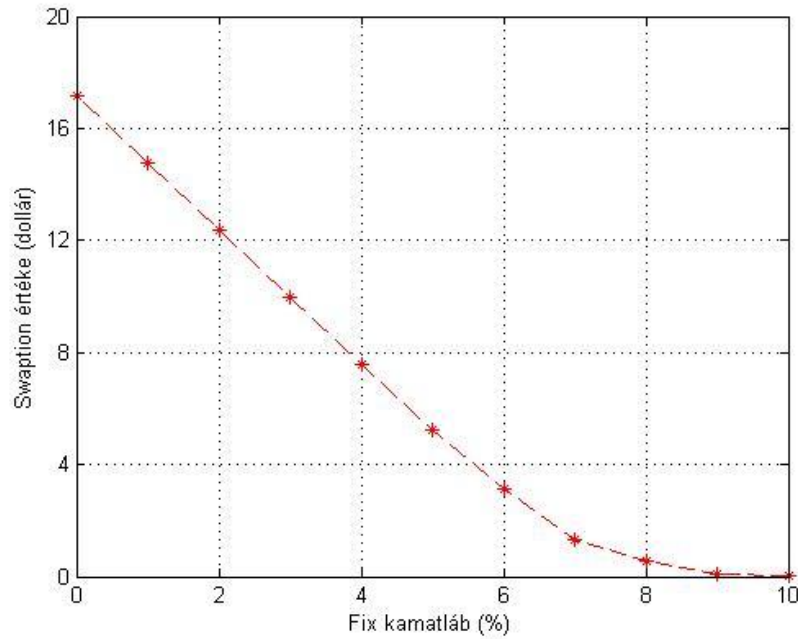
Adott fix kamatlábak mellett meghatározható ezek után mind a payer mind a receiver swapok értéke. Dolgozatom során csak payer swaption-nel foglalkozom, így példámban is ennek érzékenységet mutatom be. Természetesen minél nagyobb az a fix kamatláb, amelyet nekünk kell fizetnünk, annál kevesebbet érnek a swapok. Ezt mutatja be a 12. táblázat.

Swap értékek			
	0%	4%	8%
E pont	26,133	16,269	6,407
F pont	22,584	12,405	2,227
G pont	18,864	8,358	0
H pont	14,964	4,120	0
I pont	10,877	0	0

12. táblázat Egyes részfákon megvalósuló swapok értéke (Saját szerkesztés)

Látható, hogy ahogy növeljük a fix kamatlábat, úgy csökken minden részfa esetén a kapott swap értéke. Ha a kamatláb 4% illetve 8%, egyes pontoknál már negatív értékeket kapnánk (a forward kamatlábak második év végére visszaszkontált értékeinek összege kisebb, mint a fix kamatlábak visszaszkontált értékeinek összege), azonban a swaption opciós jellege miatt ezekben a pontokban az egyes részfák által modellezett swapok értéke nulla. Ennek az a következménye, hogy a swaption értéke egy darabig lineáris függvénye a fix kamatlábnak, azonban egy szint után már elkezd görbülni.

A modellezés utolsó lépéseként a swaption értékét úgy tudjuk meghatározni, hogy az egyes részfák esetén kapott swapok értékét súlyozzuk annak a valószínűségével, hogy mennyi esély van arra, hogy eljussunk abba a pontba, amelyből a részfa kiindul. Szerencsére ezek a valószínűségek a rendelkezésünkre állnak, ugyanis a hozamgörbéhez való igazítás során már meghatároztuk ezen pontok komponensárait. A példaként árazott swaption értéke tehát a fix kamatlábak függvényében a következőképpen alakul, ha a névérték 100 dollár (15. ábra):



15. ábra A swaption kamatlábfa által számolt értéke a fix kamatláb függvényében (Saját szerkesztés)

8. Swaption árazása zárt képlettel

Ebben a fejezetben a Hull-White kamatlábmodell esetén az analitikus érték kiszámításához szükséges fogalmakat, egyenleteket mutatom be, ez a rész a Bringo – Mercurio (2006) könyv alapján készült.

Az elemi kötvények árfolyamát a következő képlet adja meg:

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)} \quad (8.1)$$

ahol A és B értéke a következő két egyenlettől függ:

$$B(t, T) = \frac{1}{a} [1 - e^{-a(T-t)}] \quad (8.2)$$

$$A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left\{ B(t, T) f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at}) B(t, T)^2 \right\} \quad (8.3)$$

Látható, hogy az egyenletek az elemi kötvény árfolyamát a t időpontban megfigyelhető pillanati kamatláb és a mai kötvényárfolyamok függvényében adják meg. A képletben szereplő $f^M(0, t)$ parciális derivált értéke a következő becsléssel elég jó pontossággal közelíthető (ε legyen egy nagyon kicsi szám) (Hull, (1999)):

$$\frac{\ln P(0, t + \varepsilon) - \ln P(0, t - \varepsilon)}{2\varepsilon} \quad (8.4)$$

A swaption zárt képletének meghatározásához szükségünk van az elemi kötvényre szóló európai vételi opció (**ZBC**) képletére, amelyet a következő egyenlet fejez ki:

$$ZBC = P(t, S)\Phi(h) - XP(t, T)\Phi(h - \sigma_p), \quad (8.5)$$

ahol

$$\sigma_p = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(T-t)}}{2a}} B(T, S) \quad (8.6)$$

$$h = \frac{1}{\sigma_p} * \frac{\ln P(t, S)}{P(t, T)X} + \frac{\sigma_p}{2}$$

A képletben szereplő X az opció kötési árfolyamát jelöli, Φ pedig a kamatlábak dinamikájának normális eloszlására utal.

Ennek analógiájára az eladási opció (**ZBP**) értéke a következő

$$ZBP = XP(t, T)\Phi(-h + \sigma_p) - P(t, S)\Phi(-h) \quad (8.8)$$

egyenlőséggel adható meg.

A swaption zárt képletének meghatározása során úgy is tekinthetünk rá, mint egy kamatfizetéssel rendelkező kötvényre szóló opcióra. Ezekre a kamatszervényes kötvényekre szóló európai opciókra fejlesztett ki Jamshidian egy módszert, ami alapján diszkontkötvényekre szóló opciók sorozatára lehet bontani őket (Hull (1999)).

Ezt az eljárást alkalmazva kapjuk meg az analitikus árat. Nézzünk egy olyan payer swaption-t amelynek a fix kamatlába X , a névértéke N , és jogot biztosít a tulajdonosának, hogy $t_0=T$ időpontban belépjen a kamatcsere ügyletbe, amely cseréinek időpontjai $\text{Tau}=(t_1, t_2, \dots, t_n)$, ahol $t_1>T$. Jelölje τ_i az egyes cserék közötti időpontok hosszát, és c_i a kamatszervények értékét, vagyis $c_i=X\tau_i$ ha $i=1, \dots, n-1$, illetve $c_n=1+X\tau_n$.

Jamshidian eljárásának lényege, hogy átstrukturálja ezt a kamatszervényes kötvényt egy diszkontkötvénnyé, amelyet már az erre szóló eladási illetve vételi opció árazási képletével értékelni tudunk. Ehhez szükséges megkeresni azt a kamatlábat, amelyre teljesül a következő egyenlőség:

$$\sum_{i=1}^n c_i A(T, t_i) e^{-B(T, t_i)r^*} = 1 \quad (8.9)$$

Ha ez megvan, akkor ennek segítségével az elemi kötvényre szóló vételi opcióban meghatározott kötési árfolyamot a következő képlettel kapjuk meg:

$$X_i = A(T, t_i) e^{-B(T, t_i)r^*}, \quad (8.10)$$

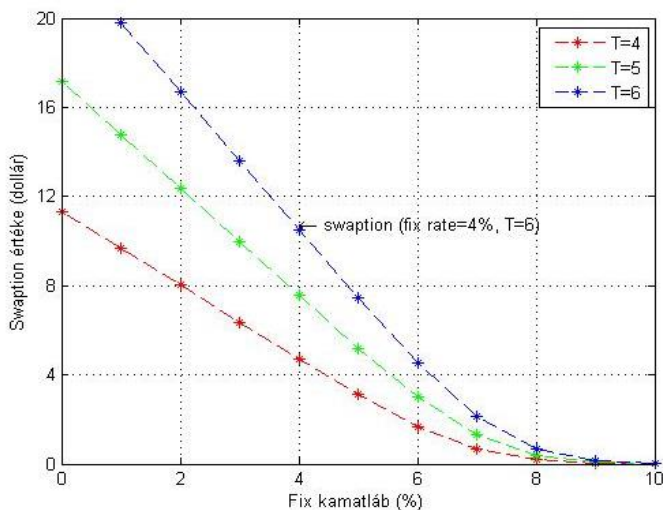
így a payer swaption ára a $t<T$ időpontban ezen elemi kötvényekre szóló opciók értékének összegéből adódik:

$$\text{PS} = N \sum_{i=1}^n c_i \text{ZBP} \quad (8.11)$$

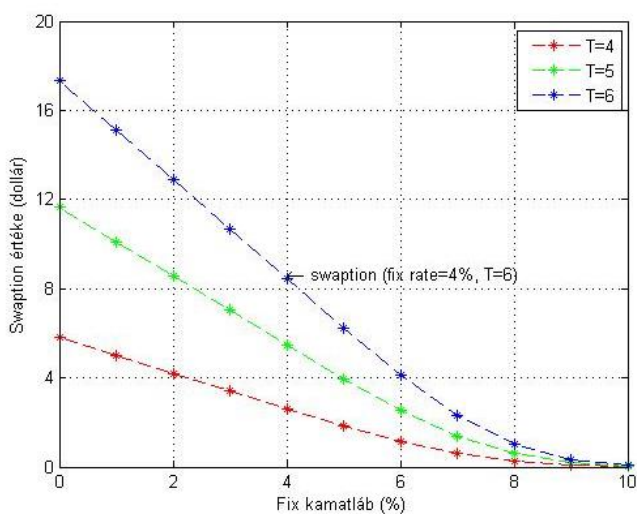
Természetesen megadható képlet a receiver swaption-ra is:

$$RS = N \sum_{i=1}^n c_i ZBC \quad (8.12)$$

Dolgozatom során csak payer swaption modellezésével foglalkoztam, amelynek néhány tulajdonságát emelném ki a fejezet végén. Ebben ez esetben, mivel a tulajdonos fizeti a fix kamatlábat, a swaption értéke ezzel fordítottan arányos. Egy adott tartományon szinte teljesen lineáris, azonban a származtatott termék opciós jellege miatt az részvényekre szóló opció árához hasonlóan egy idő után itt is megjelenik a görbület. Ahogy növeljük a Tenor hosszát, úgy nő a swaption ára is, hiszen ebben az esetben azonos cserélési frekvencia mellett többször kapjuk meg a változó kamatlábat. A következő két ábra is ezt két említett tulajdonságát szemlélteti a pénzügyi derivatívának.



16. ábra A swaption analitikus képlet által számolt értéke a fix kamatláb függvényében (Saját szerkesztés)



17. ábra A swaption analitikus képlet által számolt értéke a fix kamatláb függvényében (Saját szerkesztés)

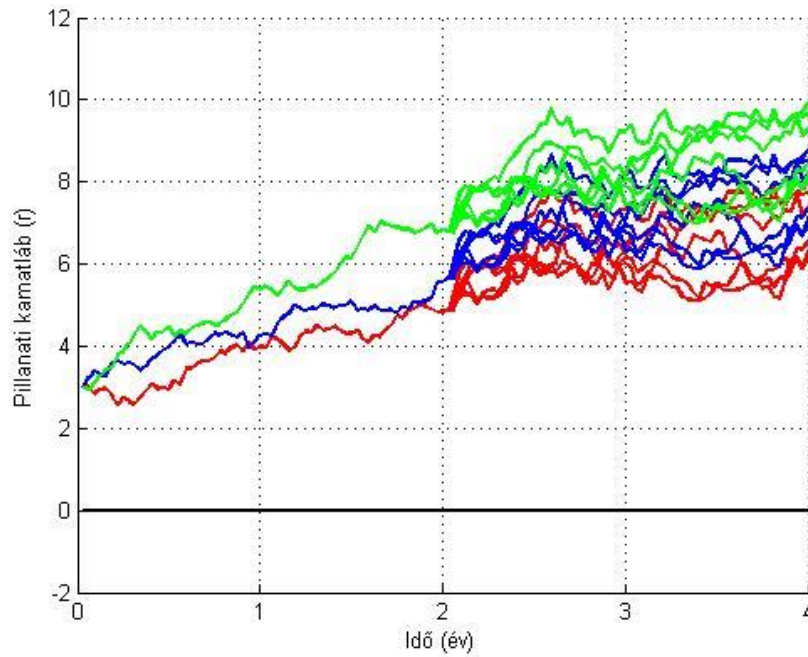
Jól látszik, hogy az első esetben a $T=4$ -ben lejárató swaption minden egyes fix kamatláb esetén nagyobb értéket vesz fel, mint a második ábrán (az első esetben a Tenor hossza 2 év, míg a másodikban 1 év).

9. Swaption árazása Monte Carlo szimulációval

Mint ahogy már korábban említettem, mivel a Black-Karashinski modell esetén nem létezik zárt képlet a swaption és egyéb bonyolultabb derivatívák árára, ezért nem tudom kikerülni, hogy Monte-Carlo módszerrel ellenőrizsem a kamatlábfá pontosságát.

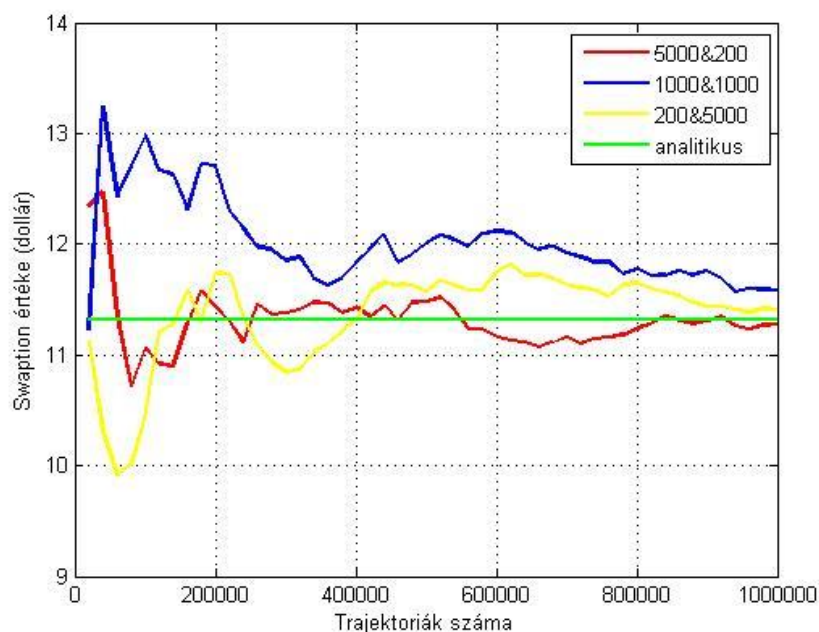
Általánosan Monte-Carlo módszer esetén a megfelelő sztochasztikus folyamat paramétereinek megkeresése után a rövid kamatlábak sorozatát szimuláljuk kockázatmentes világban akár több tízezerszer is. Minden egyes trajektória során kiszámoljuk a származtatott termék értékét a lejárat időpontjában, majd ezeknek a szimulált változónak vesszük a jelenbeli értékét (a szimulált kamatlábpályát használva ennek meghatározása során). Ha elég nagy számban elvégeztük a kísérletet, akkor kiszámolhatjuk a diszkontált kifizetések számtani átlagát, amely megadja a kapott származtatott termék árát (Hull, (1999)).

Esetünkben mivel swaption-t árazunk ezért duplán kell trajektóriákat gyártanunk, először a swaption kezdetéig (n), majd ezekből a pontokból a swaption lejáratáig (m). Természetesen itt is megjelenik a hozamgörbéhez való igazítás mint a trinomiális fa esetén, ebben az esetben a θ paraméteren keresztül, amit úgy lehet kivitelezni, hogy egy adott kezdeti θ mellett legyártjuk a trajektóriákat a kamatlábfolyamatnak, majd minden egyes diszkrét időpontban (itt is diszkretizálnunk kell valamilyen szinten a modell futtatása miatt, ezt célszerű rendkívül kicsi Δt mellett tenni) kiigazítjuk ezeket azzal a θ -val amellyel illeszkedik a trajektóriák által kummulált hozam átlaga a piaci hozamgörbéhez. Ezek után a swaption kezdeti időpontjából minden egyes trajektória esetén újabbakat indítunk és az általuk implikált forward hozamgörbe alapján állapítjuk meg a swap-ok kifizetésit, majd ezeket visszadiszkontálva a swaption kezdeti időpontjára azok árát. Ezeknek a swaption kifizetésfüggvényének segítségével vesszük a pozitív részét, átlagoljuk, és a $t=0$ időpontra diszkontálva kapjuk meg a swaption árát. Tehát ha $n*m$ darab trajektóriát gyártunk a szimuláció során akkor n darab swaptionárat kapunk és ezeket átlagolva kapjuk meg a végleges értéket. A következő ábra azt mutatja be hogy az előző fejezetben használt modell paramétereinek mellett $n=3$ és $m=6$ trajektória esetén hogy néz ki a pillanati kamatláb alakulása. Ha ezeket használnánk a szimuláció során akkor összesen 3 darab swaption ár átlagolásával kapnánk meg az elméleti árát.



18. ábra Swaption árazásához használt trajektoriak (Saját szerkesztés)

Célszerű azt megvizsgálni, hogy a kétfajta trajektóriából milyen arányban érdemes szimulálni, egyrészt konvergencia sebessége, másrészt az számítási idő szempontjából. A 19. ábrán a korábbi fejezetekben említett hozamgörbe és $T=4$ illetve $Tenor=2$ paraméterek mellett áraztam swaptiont Monte Carlo szimulációval háromféle beállítás mellett (n és m trajektóriák aránya), és megnéztem, hogy ezek hogyan konvergálnak az analitikus értékhez (Hull-White kamatlábmodellt használtam, hogy tudjam egy adott értékhez hasonlítani a szimulációkat, és döntenem arról, hogy milyen arányban érdemes a kétféle trajektóriák számát meghatározni).



19. ábra Különböző Monte-Carlo szimulációk konvergenciája (Saját szerkesztés)

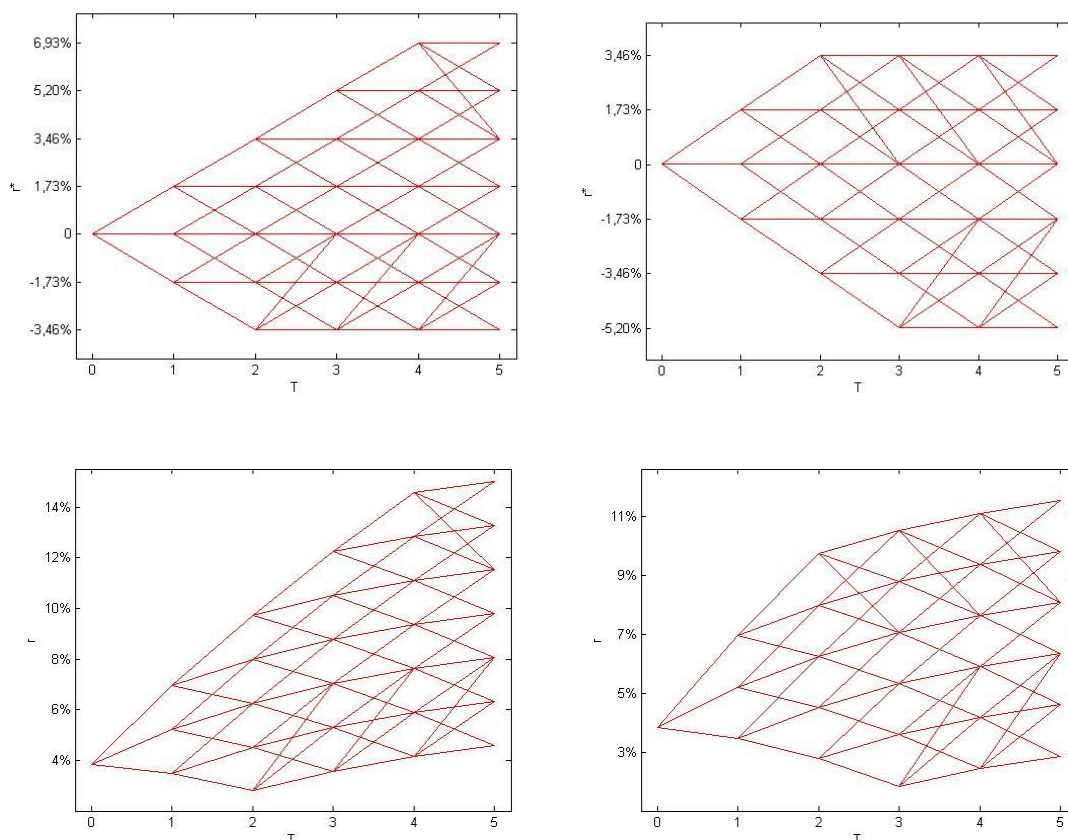
Mindhárom szimuláció során összesen egymillió trajektóriát gyártottam azonban más felosztásban. Az első esetben a swaption kezdetéig 5000-et (n) majd ezek végpontjaiból 200-at (m), a második esetben 1000-et (n), és ezekből újabb 1000-et (m), míg a harmadik esetben a swaption kezdőpontjáig 200-at (n) és a swaption Tenor részére 5000-et (m). Az ábra alapján lehet látni hogy leggyorsabban abban az esetben konvergál a szimulációnk ha arányaiban n nagyobb azaz a swaption kezdete előtti rész modellezése „finomabb”, mint a swaption ideje alatt. Ha a számítási sebességet vizsgáljuk akkor az első szimuláció tartott a legtovább (450 mp), a második (420mp) és a harmadik (400mp) ennél rövidebb volt, azonban nem jelentős mértékben (6,5%, illetve 11,7%), így a későbbiekben a modellezés során ezt a fajta szimulációt fogom használni.

10. Kamatlábmodellek numerikus érzékenységvizsgálata

TDK dolgozatomban utolsó részében bemutatnom, hogy a kamatlábmodell trinomiális fára történő diszkrétizálása során megválasztott paraméterek mennyire befolyásolják annak árazási képességét. Azt fogom vizsgálni, hogy a csomópontok távolságának, illetve a levágási szintek változtatásának milyen hatása van a trinomiális fa által adott swaption-árra, és hogy ez mennyivel tér el az analitikus képlettel kapott értéktől.

10.1.A Hull-White trinomiális modell érzékenységvizsgálata

Ahogy már a Hull-White trinomiális fa modell bemutatásakor is részleteztem van egy-egy intervallum, ahol a modellezés során alkalmazott elágazási formák átmenet-valószínűségei a $[0,1]$ tartományba esnek, azonban azt nem adja meg a cikk, hogy mi az optimális levágási szint, és hogy ezt hogyan célszerű beállítani. Természetesen ezt nehéz is, hiszen az egyes származtatott termékek esetében eltérő lehet. A továbbiakban azt fogom vizsgálni, hogy az általam választott derivatíva (swaption) árazása esetén mi történik, ha az eredeti cikk által javasolttól ettől eltérően választom meg az alsó és felső levágási szintet. A következő négy ábra bemutatja, hogyan módosul a sztenderd kamatlábfá, valamint a piaci hozamgöbéhez illesztett kamatlábfá annak függvényében, hogy mikor vágom meg a fát.

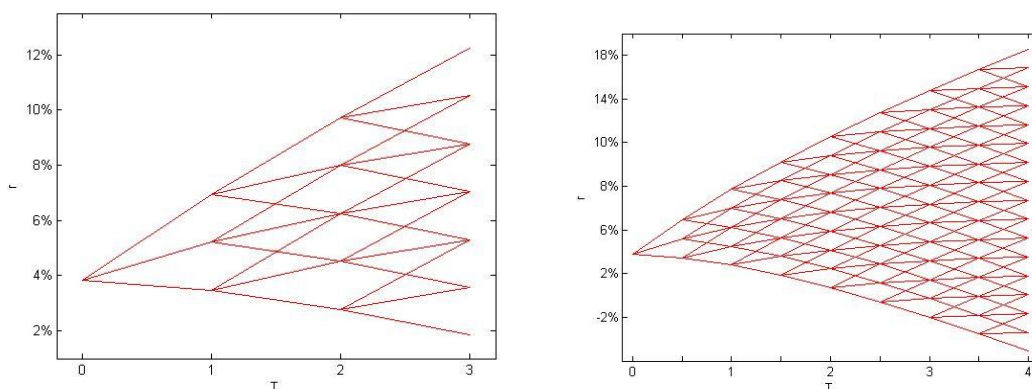


20.-23. ábra A sztenderd fa és a kamatlábfá a levágási szint függvényében (Saját szerkesztés)

Jól látható, hogy a levágási szint módosításával teljesen különböző pillanati kamatláb realizációk valósulhatnak meg a modellezett időtáv során, így ennek megválasztása hatással lehet a swaption értékére. Mindkét esetben 6 éves időtávon modelleztem a pillanati kamatlábak alakulását. Első esetben az alsó levágási szintnek a cikk által kijelöltet (2) a felső levágási szintnek egy magasabbat választottam (4), így a

kamatlábak alakulása egy tágabb intervallumban tudott megvalósulni, mintha mindkettőt az ajánlott szintnek megfelelően választottam volna. Második esetben pedig a felső levágási szint értékét adtam meg az ajánlott értéknek megfelelően, és az alsó szint értékét változtattam. Mivel látható, hogy a lehetséges megvalósuló pillanati kamatlábak eltérnek az egyes levágási szintek változtatásakor, ezért érdemes azt vizsgálni, hogy ez milyen hatással van a swaption árazására.

A másik szempont, amelyet megvizsgáltam, az az volt, hogy a csomópontok közötti időbeli távolság (Δt) milyen hatással van az árazás pontosságára. A következő ábra szemlélteti, hogy mennyire különböző kamatláb-intervallumok valósulhatnak meg, ha a Δt -t csökkentem, ezáltal sűrítve a diszkrétizálást.



24.-25. ábra A kamatlábfa a csomópontok közötti távolság függvényében (Saját szerkesztés)

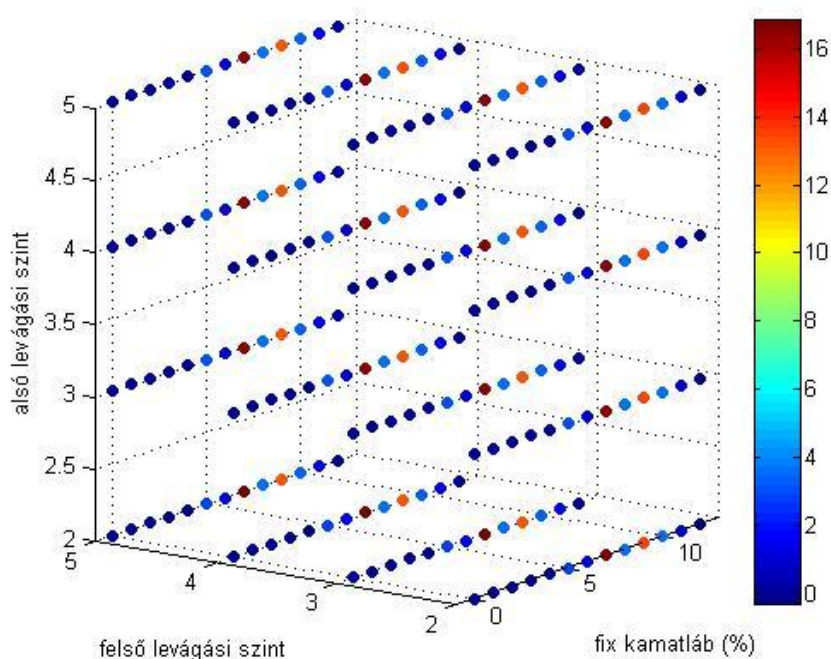
Egyik esetben sem alkalmaztam levágási szinteket, mivel azt szerettem volna vizsgálni, hogy kizárólag a csomópontok időbeli távolsága milyen hatással van a swaption értékére. Ha beállítottam volna mindkét esetben hogy az ajánlott levágási szinteken történjen meg az alternatív elágazási módszerekre történő áttérés, akkor a Δt változtatása miatt ez mindkét esetben más trinomiális fát eredményezett volna, mivel a $j_{\min}$ és $j_{\max}$ értéke függ az egyes csomópontok közötti időbeli távolságtól (Δt és a függvénye).

Látható, hogy itt is jelentősen módosul a megvalósuló kamatlábak intervalluma az egyes időpontokban, valamint az is, hogy a második esetben negatív értékeket is vettek fel. Ennek az az oka, hogy a mean reversion-t biztosító levágási szinteket kiiktattam a modellből. Fontos megemlíteni, hogy a Δt csökkentésével arányosan, mégpedig négyzetesen nő a kamatlábfa pontjainak száma -első esetben 16, második esetben 64, miközben Δt a felére csökkent, $((T/\Delta t)^2$ a pontok száma) -, így az árazás futtatása során egy adott szint után problémába ütközhetünk. A két ábra alapján azt a következtetést lehet

levonni, hogy ezt a kérdést is érdemes vizsgálni az érzékenységvizsgálat során, kitérve arra is, hogy adott paraméterek rögzítése mellett milyen ütemben nő az árazás során használt program futási ideje.

Kutatásomat azzal kezdtem, hogy a levágási szintek a korábbi intervallumokon belüli megválasztása hogyan hat a swaption árára. A modellezés során végig payer swaption-t áraztam, így most is az erre készített ábrákat és összefüggéseket mutatom be. Minden esetben a diszkrét fa kamatlábaiból adódó swaption értéket hasonlítottam össze az analitikus árral. Rögzítettem a swaption kezdetét, a végét (ezáltal a Tenor-t is), a csere alatti kifizetések számát, és a Δt -t. A következő ábra $T=5, \Delta t=1, Tenor=3$ paraméterek mellett, a fix kamatláb, valamint a levágási szintek függvényében mutatja a trinomiális fa által kapott és az analitikus ár közötti különbséget.

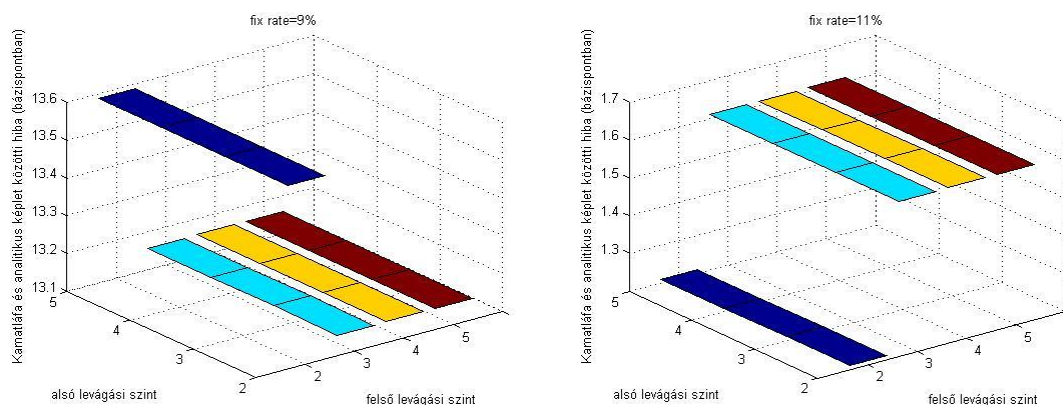
Mivel három változó függvényében számoltam ki a hiba mértékét, ezért egy olyan 3D-s ábrára volt szükségem, amely valamilyen módon meg tud jeleníteni egy negyedik dimenziót is, így választottam az alábbi ábrázolási módszert.



26 ábra A kétfajta árazási módszer közötti eltérés az alsó és felső levágási szint illetve a fix kamatláb függvényében (Saját szerkesztés)

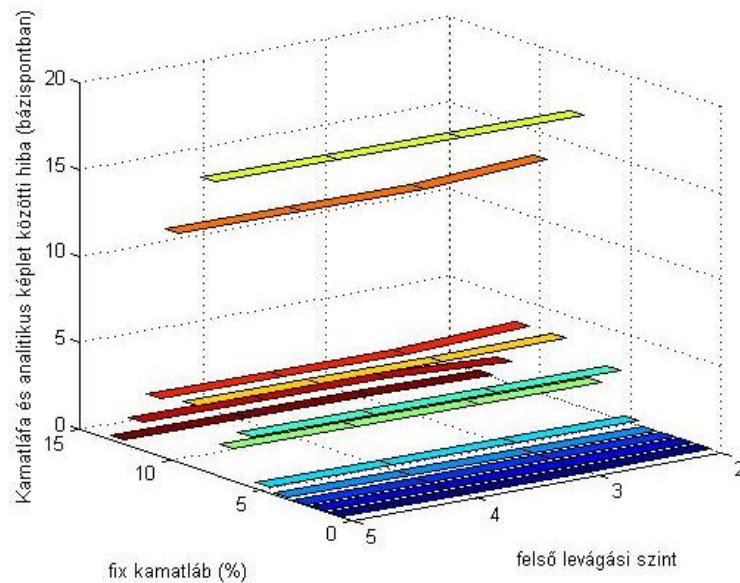
Az ábrán az X és Z tengelyek jelölik a levágási szinteket (4 lehetséges alternatíva van mindkét esetben 2, 3, 4, 5, mivel $j_{min}=2$ és $N=6$) Y tengely pedig a fix kamatlábat. Az ábra melletti színes téglalap segítségével lehet megjeleníteni a negyedik dimenziót, ugyanis az ábrán lévő pontok színe jelöli a hiba mértékét, amelyet a névértékre vonatkozó

bázispontban adtam meg. Ebben az esetben a hiba maximális mértéke 16 bázispont, míg a minimális értéke 0. Ha alaposabban megnézzük az ábrát, láthatjuk, hogy ha a fix kamatláb 0-4% között van, akkor szinte nulla bázispont a hiba, és 12% körül is nagyjából ennyi. Az első annak köszönhető, hogy ha a fix kamatlábat nullának választjuk, akkor igaz az, hogy bármilyen Δt és levágási szint választása mellett a trinomiális fából kapott swaption-árnak és a zárt képletből kapott árnak meg kell egyeznie. Ennek elméleti oka, hogy ilyen esetben minden csere alkalmával megkapjuk a forward kamatlábat, miközben nem kell érte semmit sem adnunk, így a folyamat diszkretizálása semmit nem ront az árazáson. A Matlabban történő programozásom során volt ez az egyik legegyszerűbb módja, hogy ellenőrizsem az árazási programom pontosságát. A közepes (4-9% közötti) fix kamatlábak melletti érzékenységet érdemes jobban szemügyre venni, ezért elkészítettem két fix kamatláb (7%, 9%) mellett a 26. ábra egy-egy szeletét.



27-28. ábra A kétfajta árazási módszer közötti eltérés az alsó és felső levágási szint függvényében (Saját szerkesztés)

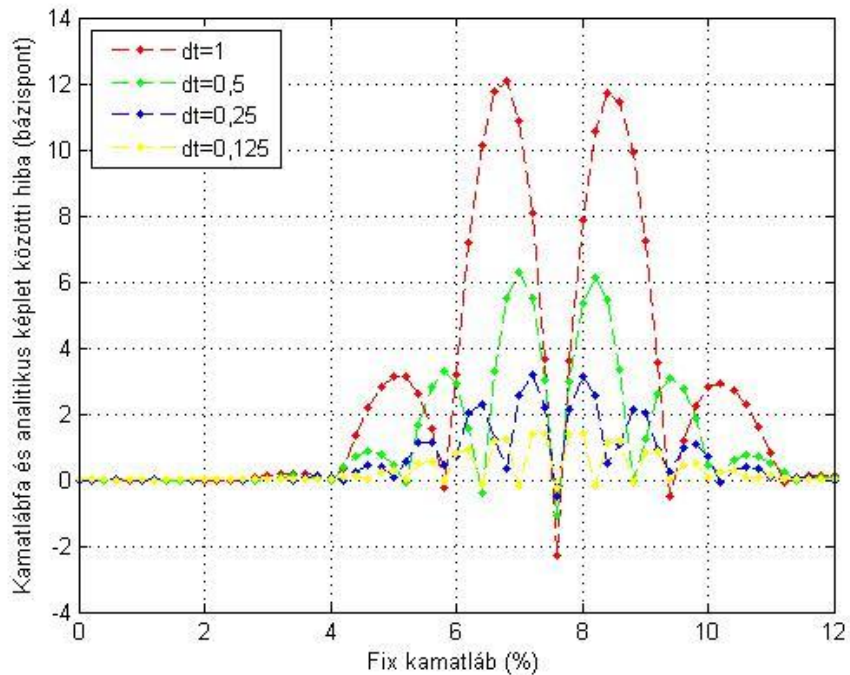
A két ábra tanulsága, hogy az alsó levágási szint megválasztásától nem függ a swaption értéke, tehát mindegy ebben az esetben, hogy alul $j=2, 3, 4, 5$ -nél vágom le a fát, ugyanazt az értéket kapom meg a származtatott termékre. Ennek oka a swaption opciós jellegében keresendő, ugyanis szinte minden esetben – ahogy már korábban a 12. táblázatban is láttuk – az alacsony kamatlábakhoz tartozó részfák esetén a swap értéke nulla lesz. Így mindegy, hogy alul hol vágom le a fát, ugyanis csak ezeket a nulla értékeket veszítem el a részfák swapárainak összegzése során. Természetesen a receiver swaption esetén ez az állítás a felső levágási szintekre ugyanígy igaz a szimmetria miatt. Érdemesebb tehát azt vizsgálni, hogy a fix kamatláb és a felső levágási szint függvényében hogyan változik az árazási hiba mértéke. Ezt jeleníti meg a 29. ábra.



29. ábra A kétfajta árazási módszer közötti eltérés az felső levágási szint illetve a fix kamatláb függvényében (Saját szerkesztés)

Két dolgot érdemes észrevenni az ábrán. Egyrészt egyes fix kamatlábak mellett (7%, 9%) a vonal vége meghajlik, másrészt a hiba mértéke nem lineáris függvénye a fix kamatlábnak, az alacsonyabb és a magas értékek esetén nulla, a köztes értékeknél pedig látszólag „össze-vissza” mozog. Az első észrevételt már az előző két ábrán is fel lehetett fedezni, ugyanis ha a felső levágási szintet változtatjuk, egyes esetekben azonos (3, 4, 5), máskor különböző mértékű hibát kapunk (2), miközben a fix kamatláb értéke rögzített (7% vagy 9%, 27-28. ábra). Ennek oka, hogy nem mindegy hogy a swaption kezdete előtt vagy után vágjuk meg a fát. Esetünkben a swaption a második évtől indul el, ezért nem különbözik a hiba mértéke az azután történő levágások esetén (a levágás szintje nem befolyásolja az árazás pontosságát), viszont ha a kezdeti időpontban vagy előtte vágjuk meg a fát akkor ettől eltérő értéket kapunk. A második észrevétel oka a diszkrétizálás tényében keresendő, a trinomiális kamatlábfa struktúrája okozza ezt a „össze-vissza” ugrálást a hiba mértékében, erre később kitérek majd hogy pontosan miért.

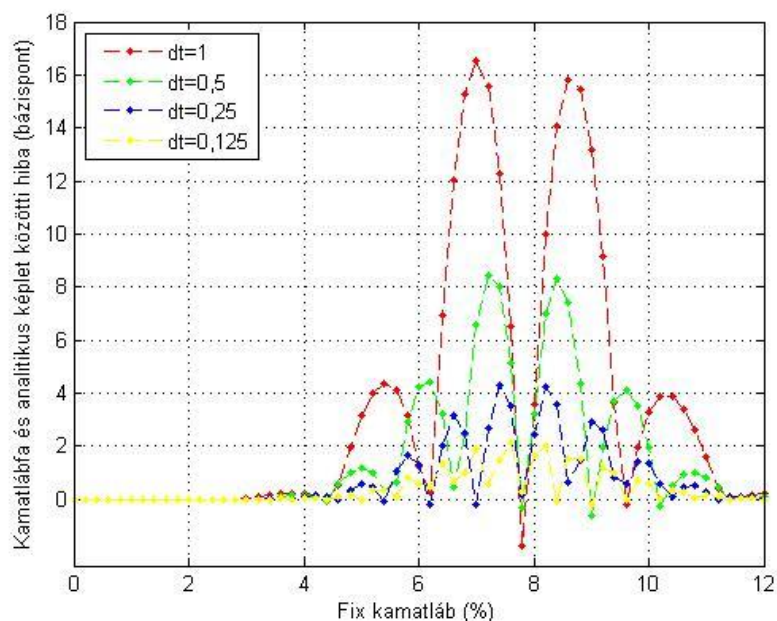
Meg szerettem volna azt is vizsgálni, hogy a Δt változása hogyan hat az árazási hiba nagyságára, ezért rögzítettem a swaption kezdetét, lejárátát, a csere alatti kifizetések számát és a levágási szinteket is (sehol nem vágtam meg a fát), és különböző Δt -k mellett vizsgáltam a két árazási módszer közötti eltérést. A következő ábra $T=5$, $Tenor=2$ paraméterek mellett, levágási szint alkalmazása nélkül a fix kamatláb és Δt függvényében mutatja a trinomiális fa által kapott, valamint az analitikus ár közötti különbséget.



30. ábra A kétfajta árazási módszer közötti eltérés a Δt függvényében (Saját szerkesztés)

Az ábra alapján három következtetést érdemes levonni. Egyrészt, itt is látható, hogy a fix kamatláb függvényében a hiba mértéke nem lineáris, hanem nagyon változékony, másrészt egy adott kamatlábra nézve annak közelében elég nagy míg távolodva tőle csökken, illetve szimmetrikus erre a pontra, harmadrészt ez a pont független a diszkretizálás mértékétől. Ezenkívül érdemes azt is megjegyezni, hogy ahogyan sűrítjük a kamatlábfán a pontok számát, úgy javul diszkrét árazás pontossága. Az ábra alapján érdemes megvizsgálni, hogy mi a kitüntetett fix kamatláb oka, különböző swaption-ok esetén ez hol helyezkedik el, illetve hogy miért nagyobbak a pozitív tartományban lévő hibák a negatív tartományban lévőknél, és hogy miért különböznek a fordulópontok (fent konkáv, lent csúcsos).

Ehhez elkészítettem egy ábrát (31. ábra), ami csak abban tér el az előzőtől, hogy $T=6$, így a $Tenor=3$. Jól lehet látni egyrészt hogy teljesen hasonlóan néz ki az ábra az előzőhöz, illetve hogy ugyanarra a fix kamatlábra szimmetrikus a fa diszkretizálásából adódó hiba.



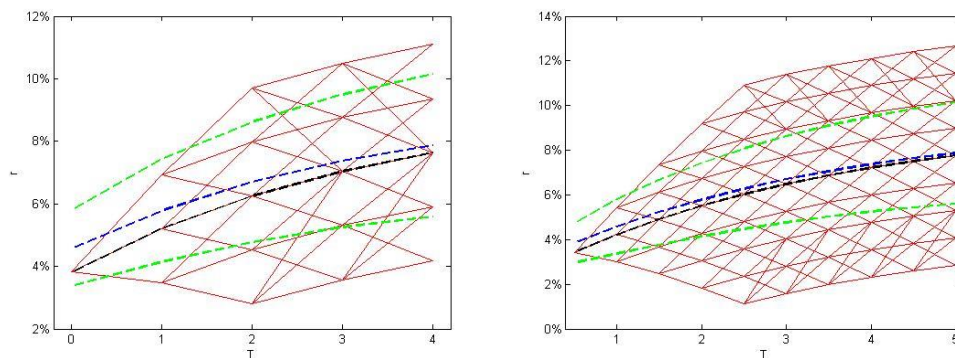
31. ábra A kétfajta árazási módszer közötti eltérés a Δt függvényében (Saját szerkesztés)

Mivel a két ábra abban egyezik meg hogy a swaption kezdete $T=3$, ezért az indok ebben keresendő. Véleményem szerint ez a kitüntetett pont az adott T időpontban (swaption kezdete) a folytonos kamatlábfolyamat várható értékével van összefüggésben. Érdeemes tehát megnézni, hogy ebben az időpontban mi az eltérés a folytonos folyamat és a diszkrét folyamat várható értéke és szórása között, ezt jeleníti meg a 13. táblázat.

dt	Átlag	Szórás	Átlag	Szórás
1	0,0578	0,0128	0,0625	0,0135
0,5	0,0578	0,0128	0,0603	0,0131
0,25	0,0578	0,0128	0,0591	0,013
0,125	0,0578	0,0128	0,0585	0,0129
0,0625	0,0578	0,0128	0,0582	0,0129

13. táblázat: Konvergencia sebessége a Δt függvényében (Saját szerkesztés)

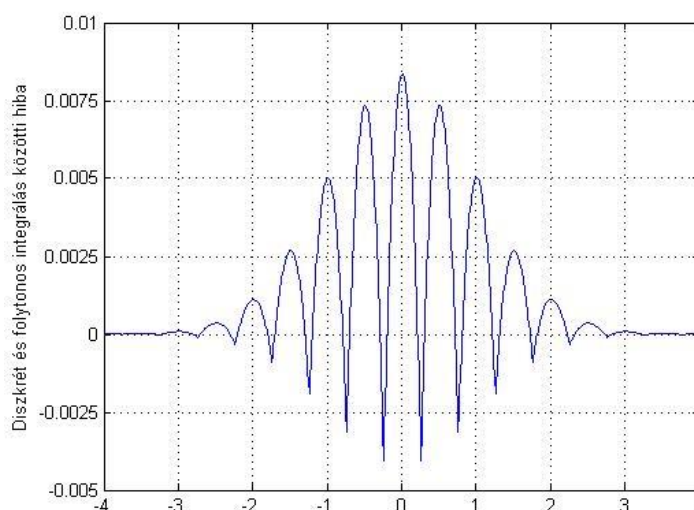
A táblázat alapján látható, hogy ahogy csökkentjük Δt -t úgy konvergál egyre jobban a diszkrét folyamat várható értéke a folytonoshoz, ami megmagyarázza hogy miért csökken az eltérés ahogy egyre kisebbek a diszkrét időközök a fán. Megvizsgáltam azt is, hogy ez a konvergencia hogy változik az időben ezért építettem két $T=5$ éves ($\Delta t=1$ és $\Delta t=0,5$ mellett) kamatlábfát, és megvizsgáltam hogy ahogyan időben haladunk előre hogyan közelít a diszkrét fa pontjaiból kapott várható érték a folytonos modell várható értékéhez (32-33. ábra).



32-33. ábra A kétfajta árazási módszer közötti eltérés a Δt függvényében (Saját szerkesztés)

A két ábra alapján egyrészt ki lehet jelenteni hogy ahogy megyünk előre az időben úgy konvergál a diszkrét folyamat várható értéke a folytonoséhoz, illetve azt is hogy ez alacsonyabb Δt mellett gyorsabb. Mindkettő oka, hogy egyre több pontban történik meg a diszkretizálás, így egyre jobban hasonlít a fá a folytonos folyamathoz. Jól látható, hogy a diszkrét folyamat várható értéke pontosan a faközépnél van, ez a már korábban említett szimmetrikus átmenet-valószínűségek következménye.

Ugyanakkor azt is meg kell magyarázni még hogy miért „össze-vissza” változik a hiba mértéke a fix kamatláb függvényében. Mint ahogy korábban említettem ez a folytonos folyamat diszkretizálásából adódik, és egy példával szemléltetném. A 34. ábra azt mutatja be hogy különböző k -k esetén mi az eltérés aközött ha kiintegráljuk a $\max(0, x-k)$ -t függvényt úgy hogy x standard normális eloszlású, és összehasonlítjuk egy olyan közelítéssel, ahol a standard normális eloszlást diszkretizáljuk először majd ezen diszkrét eloszlás szerint számítjuk ki az integrált. Az ok tehát a diszkretizálás, illetve a derivatíva opciós jellege.



34. ábra A diszkrét és folytonos integrálás közötti eltérés (Saját szerkesztés)

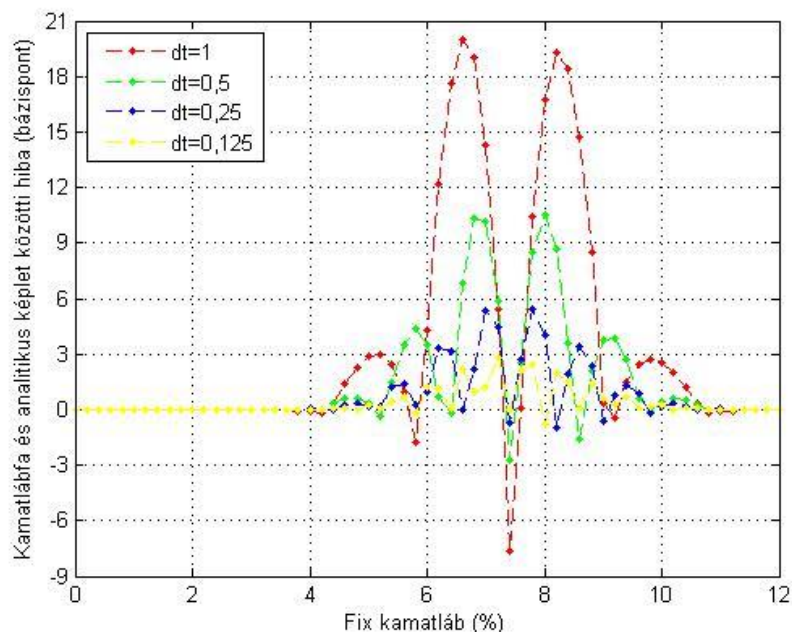
Teljesen hasonló ábrákat kapnánk akkor is ha egy európai részvényopciót értékelnénk trinomiális fával és azt vetnénk össze annak analitikus (Black-Scholes) értékével. A korábban említett érdekesség, miszerint egy adott fix kamatláb környékén nagyobbak az eltérések a két módszer között, míg attól távolodva csökkennek annak köszönhető, hogy az integrálási hibát milyen ráták mellett követjük el. Ha az a fán az alsó kettő vagy felső kettő pont körül van a fix kamatláb akkor a kifizetési függvény jelentős részén nem hibázunk, míg ha a fa közepén van a fix kamatláb akkor „kiegyensúlyozottabb” a hibázás mértéke. Vagyis $\max(0, x-k)$ kiintegrálása esetén kis fix kamatlábak esetén arányaiban a swaption értékéhez képest kis hibát kapunk, míg nagy fix ráták esetén nagyot, ugyanakkor ezek súlya kicsi lesz, ezért kicsi a hiba mértéke a fent bemutatott ábrákon ezeken a részeken, ugyanakkor a várható érték körüli rate-ek környékén magas.

Még egy dolgot érdemes észrevenni a 30. és 31. ábra különbségéből, mégpedig hogy azonos Δt esetén utóbbinál nagyobb az eltérés mértéke. Ennek oka pedig az hogy az eltérés mértéke arányos a swaption futamidejének (Tenor) hosszával, és ez az első ábra esetén 2 év a másodikon pedig 3 év.

Mivel a Black-Karashanski modell feépítése csak a második lépésben tér el a Hull-White trinomiális fától, ezért érdemes megnézni, hogy ezek a megállapított tények ott is teljesülnek-e.

10.2. A Black-Karashanski trinomiális fa érzékenységvizsgálata

A következő ábra az ismételtén az mutatja, hogy a diszkrét fából adódó swaption ár mennyire tér el a Monte Carlo szimulációval kapott ártól.



35. ábra A Monte Carlo szimuláció és a fa közötti eltérés a Δt függvényében (Saját szerkesztés)

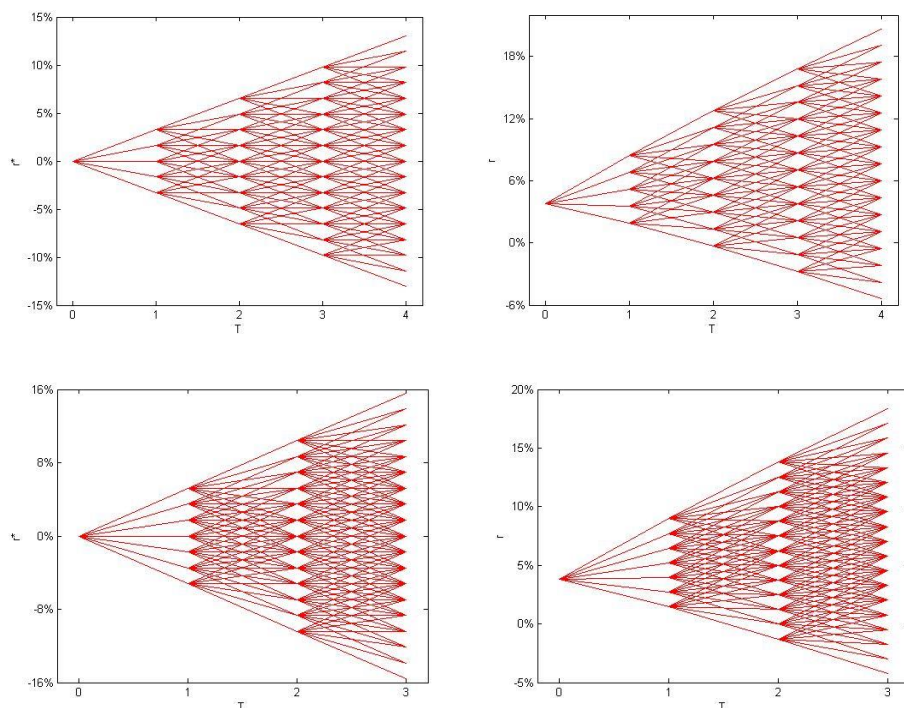
Ugyanazok a jellegzetességek figyelhetők meg itt is, ami annak a következménye, hogy a két fa építése csak a piaci hozamgörbéhez való igazítás lépésében különbözik. Mivel láttuk az ábrákon mindkét modell esetén hogy ahogy csökkentjük Δt -t egyre több diszkrét pont jön létre a fán a swaption kezdetének időpontjában, és így egyre kisebb a hiba az analitikus (Monte Carlo szimulációval kapott) illetve a fa által kapott swaption érték között, ezért felmerül a kérdés hogy Δt csökkentésén kívül hogyan lehet még javítani a modell pontosságát, amire a következő fejezetben egy megoldási módszert mutatok.

11. A Hull-White trinomiális fa általánosítása

Mivel az árazás szempontjából a fán swaption kezdeti időpontjában lévő diszkrét pontok száma játsza a legfontosabb szerepet, ezért ebben a fejezetben megvizsgálom hogy ennek növekedését Δt csökkentésén kívül hogyan lehet még elérni. Az általam vizsgált módszer erre a problémára hogy trinomiális fa helyett 5 illetve 7 felé ágazó fákat szerkesztek, és ezekkel modellezem a diszkrét eloszlást. Ezek szimmetriája, és a trinomiális fához való hasonlósága miatt később az modell általánosíthatóságát 2^n-1 elágazásra is meg lehet majd vizsgálni.

A faépítés a trinomiális esethez hasonlóan itt is kétlépcsős, és r^* változásának 5 felé ágazó fa esetén 5 lehetséges kimenete van: vagy növekszik $2\Delta r$ -el, illetve Δr -el, vagy változatlan marad, vagy csökken Δr -el, illetve $2\Delta r$ -el. Ezen kimenetek valószínűségei

rendre p_{uu}, p_u, p_m, p_d és p_{dd} . Hét felé ágazó fa esetén még ehhez adódik 2 további kimenet amikor $3\Delta r$ -el nő, illetve csökken ugyanennyivel az r^* , ezek valószínűsége p_{uuu} és p_{ddd} . Az említett elágazási mintákat alapján felépített sztenderd fákat a 36. és 37. ábra, a hozamgörbéhez igazított kamatlábfát pedig a 38. és 39. ábra mutatja.



36-39. ábra Kamatlábfák 5 és 7 felé elágazás esetén (Saját szerkesztés)

Természetesen itt is be kell majd vezetnünk alternatív elágazásokat 5-ös fa esetén ebből 4, 7-es fa esetén 6 darab van. Az átmenet-valószínűségeket a trinomiális fához hasonlóan itt is úgy kapjuk meg hogy a diszkrét és folytonos folyamat momentumait egyeztővé tesszük. Mivel itt mivel több változó van (5 esetén plusz 2 7 esetén plusz 4) ezért magasabb rendű momentumokat is figyelembe kell vennünk. A 14. táblázat ezeket mutatja.

1	μ
2	$\mu^2 + \sigma^2$
3	$\mu^3 + 3\mu\sigma^2$
4	$\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$
5	$\mu^5 + 10\mu^3\sigma^2 + 15\mu\sigma^4$
6	$\mu^6 + 15\mu^4\sigma^2 + 45\mu^2\sigma^4 + 15\sigma^6$

14. táblázat: A normális eloszlás magasabb fokú nem centrális momentumai (Saját szerkesztés)

A következő pár bekezdésben csak az 5 felé ágazó fa esetén vezetem le az átmenet-valószínűségek egyenleteit, de ezt 7-re teljesen hasonló módon lehet megoldani. A megoldandó egyenletrendszer 5 fele ágazó fa normális elágazása esetén így néz ki:

$$p_{uu}(j)2\Delta r + p_u(j)\Delta r + 0 + p_d(j)(-\Delta r) + p_{dd}(j)(-2\Delta r) = j\Delta rM$$

$$\begin{aligned}
p_{uu}(j)(2\Delta r)^2 + p_u(j)(\Delta r)^2 + 0 + p_d(j)(-\Delta r)^2 + p_{dd}(j)(-2\Delta r)^2 &= V + (j\Delta r M)^2 \\
p_{uu}(j)(2\Delta r)^3 + p_u(j)(\Delta r)^3 + 0 + p_d(j)(-\Delta r)^3 + p_{dd}(j)(-2\Delta r)^3 &= 3(j\Delta r M)V + (j\Delta r M)^3 \\
p_{uu}(j)(2\Delta r)^4 + p_u(j)(\Delta r)^4 + 0 + p_d(j)(-\Delta r)^4 + p_{dd}(j)(-2\Delta r)^4 &= 3V^2 + 6(j\Delta r M)^2V + (j\Delta r M)^4 \\
p_{uu}(j)(2\Delta r)^5 + p_u(j)(\Delta r)^5 + 0 + p_d(j)(-\Delta r)^5 + p_{dd}(j)(-2\Delta r)^5 &= 15(j\Delta r M)V^2 + 10(j\Delta r M)^3V + (j\Delta r M)^5
\end{aligned}$$

A trinomiális esethez képest plusz 2 egyenletet kellett felírunk annak következtében hogy 2 új változónk van (p_{uu} , és p_{dd}), azonban a megoldási módszer teljesen hasonló. A első és a harmadik egyenletből adódik, hogy:

$$2p_{uu}(0) + p_u(0) = p_d(0) + 2p_{dd}(0)$$

$$8p_{uu}(0) + p_u(0) = p_d(0) + 8p_{dd}(0)$$

Ezekből azonban csak arra tudunk következtetni, hogy

$$p_{uu} = p_{dd}$$

$$p_u = p_d$$

a kettő arányról az egyenletek alapján nem tudunk pontosat mondani, ezért ezt egy vmi változóval definiálok:

$$p_{uu} = vmi * p_u$$

Ezek alapján a második és a negyedik egyenlőségéből adódik dr, azonban ez nem egy pontos szám lesz, hanem egy vmi-től függő érték.

$$4p_u * vmi + p_u + p_u + 4p_u * vmi = V / \Delta r^2$$

$$16p_u * vmi + p_u + p_u + 16p_u * vmi = 3V^2 / \Delta r^4$$

$$\Delta r = \sqrt{\frac{24 vmi + 6}{32 vmi + 2}}$$

Tehát ha több felé ágaztatjuk a fát (5 vagy akár 7 felé), akkor nem tudunk egy pontos Δr értéket meghatározni, hanem csak olyat ami p_u és p_{uu} arányától függ. Ezt ki lehetne küszöbölni azzal, hogy bevonunk még egy magasabb rendű momentumot és azt is egyenlővé tesszük a diszkrét és folytonos folyamat esetén ezáltal egzaktul megoldhatóvá téve az egyenletrendszer azonban ekkor az 5 féle ágazó fa esetén olyan egyenlőségnek kellene teljesülni-e vmi-re (2.-ik és 4.ik, illetve 4.-ik és 6.-ik momentumok egyezőségéből), amelynek gyöke negatív.

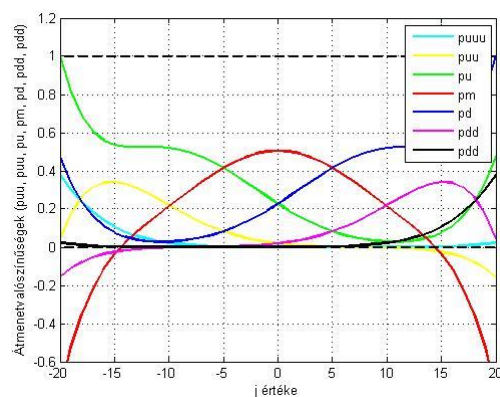
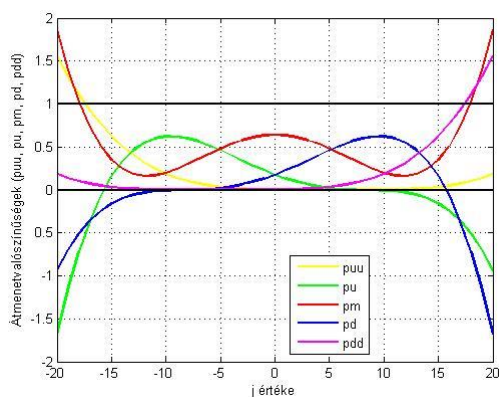
$$\frac{3(8 vmi + 2)}{32 vmi + 2} = \frac{5}{3} * \frac{(32 vmi + 2)}{(128 vmi + 2)}$$

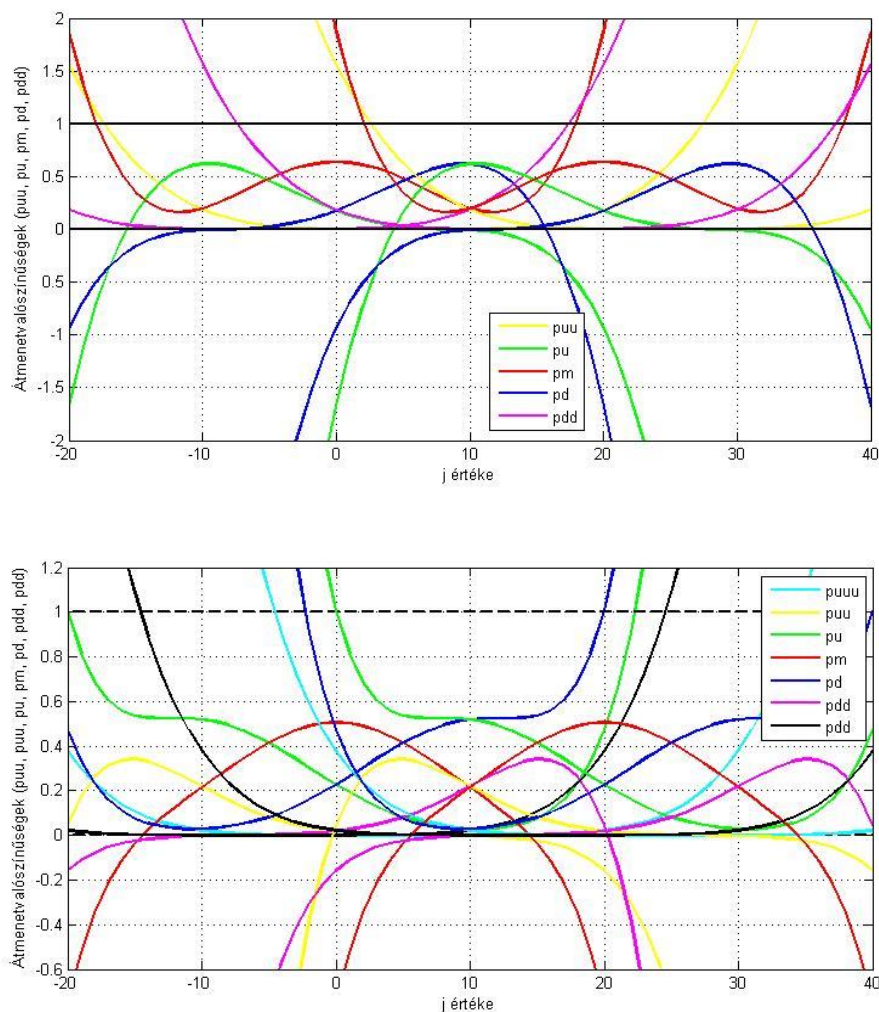
Ez azt jelentené, hogy p_u és p_{uu} ellentétes előjelű lenne, vagyis ezek közül egyik negatív. Természetesen ez nem használható átmenet-valószínűségként a modellünkben, ezért kijelenthetjük, hogy 5 féle ágazó fa esetén nem tudjuk egyeztővé tenni a folytonos és a diszkrét eloszlás 6-ik momentumát, és ezáltal nem tudunk pontos Δr -t meghatározni a modellben. Később kitérek majd még arra, hogy ez a rugalmassága a modellnek előnyként vagy hátrányként értelmezhető.

Az normál elágazás átmenet-valószínűségeit a következő mátrixegyenlet megoldásával tudjuk megkapni:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 1 & -8 \\ 16 & 1 & 1 & 16 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_{uu} \\ p_u \\ p_d \\ p_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jM \\ j^2 M^2 + V/\Delta r^2 \\ j^3 M^3 + 3jM V/\Delta r^2 \\ j^4 M^4 + 6j^2 M^2 V/\Delta r^2 + 3V^2/\Delta r^4 \end{bmatrix}$$

Érdekes most is megvizsgálni, hogy milyen j -től intervallumokon belül lesznek a kapott valószínűségek $[0,1]$ között, illetve, hogy az alternatív elágazási módszerek valószínűségei most is a normál elágazás eltoltjai-e. A 40-43-as ábrák ezeket mutatják 5-fele és 7-fele való elágazás esetén.



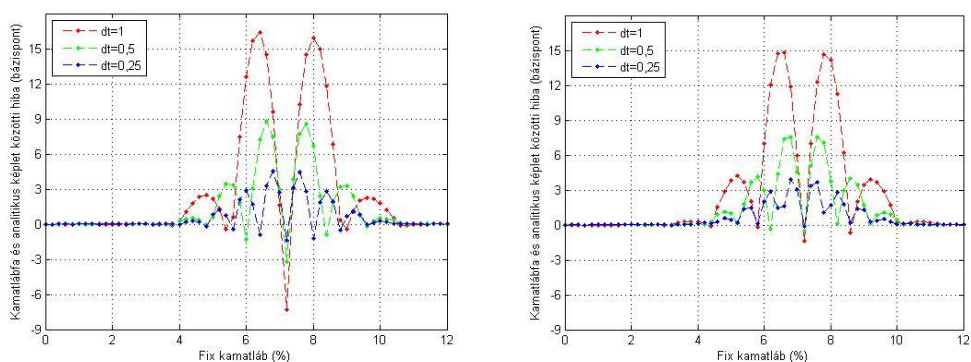


40-43. ábra Az átmenet-valószínűségek „j” függvényében (Saját szerkesztés)

Az ábrákról lehet látni, hogy a valószínűségek itt is szimmetrikusak (mindegyik valószínűségnek megvan a párja amivel a 0-ra nézve szimmetrikus), illetve az eltolás is megjelenik. Ha az 5 felé ágazó fát vizsgáljuk akkor az első alternatív elágazás (1 Δr -et lépünk fel, 1,2,3 Δr -et le) $1/M$ -el van eltolva, míg a második alternatív elágazás (0 Δr -et lépünk fel, 1,2,3,4 Δr -et le) pedig $1/M$ -el. Természetesen az hogy pontosan mik az intervallumok végpontjai (pl.: trinomiális fa esetén -8 és 8) az Δr függvénye. Mivel ha optimalizáljuk a normális elágazás intervallumát hosszúság szerint (amire az 5 átmenet-valószínűség 0 és 1 közé esik) akkor azzal a többi elágazás is optimalizálva lesz (megegyezik az intervallumok hossza, mivel egymás eltoljtjai), ezért megkerestem a Δr -ek azon tartományát amely alapján 0-körül a legnagyobb szimmetrikus intervallumra jó eredményeket kapunk az átmenet-valószínűségekre. Ez alapján egy korlátozott intervallumot tudok definiálni mind 5 mind 7-felé ágazó fa esetén is, és amikor az árazás során felhasználom a modelleket, akkor már csak ezen intervallumon belül kell döntenem

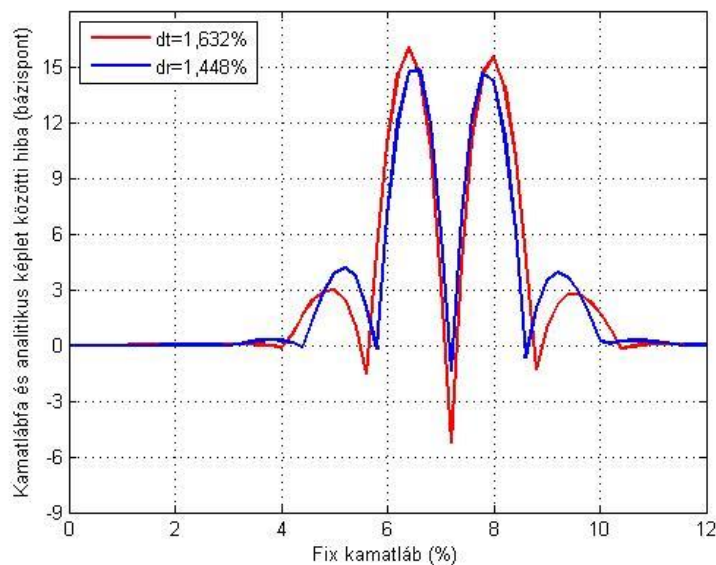
Δr -ről. 5 felé elágazó fa esetén ez az intervallum [1,448%, 1,632%] 7 felé ágazó fa esetén pedig [1,256%, 1,275%]. Ekkor 5-felé ágazó fa esetén a valószínűségek a következő intervallumokban lesznek 0 és 1 között $\Delta t=1$ esetén (p_{uu} : [-28; -12], p_u : [-18; -2], p_m : [-8; 8], p_d : [2; 18], p_{dd} : [12; 28]), míg a 7 felé ágazó fa esetén (p_{uuu} : [-38; -22], p_{uu} : [-28; -12], p_u : [-18; -2], p_m : [-8; 8], p_d : [2; 18], p_{dd} : [12; 28], p_{ddd} : [22; 38]). Tehát 5 felé ágazó fa esetén 5 évet tudunk csak a normál elágazási módszerrel modellezni míg 7 felé ágazó fa esetén maximum 3-at (előbbi esetben 2-öt lép felfele a fa évente, utóbbiban 3-at).

A fent említett intervallum két szélső értékét választva Δr -nek felépítettem a kamatlábfákat, és megvizsgáltam, hogy az ezekkel kapott swaption árak hogyan viszonyulnak a zárt képlettel kapott árhoz.



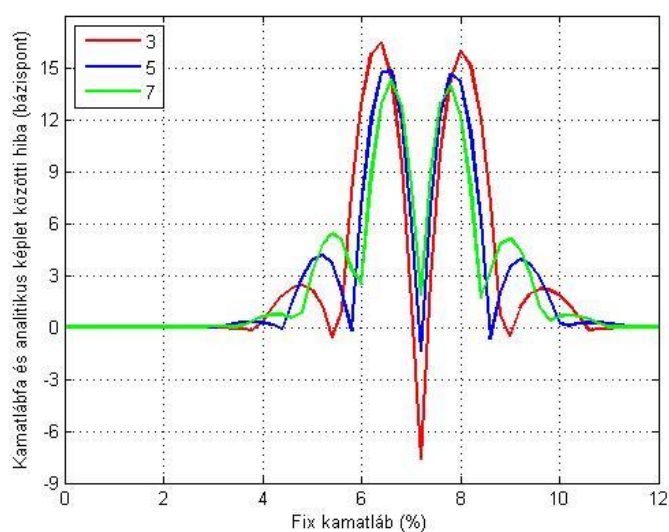
44-45. ábra Az ötfelé ágazó fa és a zárt képlet által kapott ár közötti eltérés közötti eltérés a Δt függvényében (Saját szerkesztés)

A korábbiakhoz nagyon hasonló ábrákat kaptunk azonban érdemes arra felfigyelnünk, hogy a két ábrán vannak olyan fix kamatlábak ahol az egyik Δr esetén kisebb a hiba mértéke. Ezeket ábrázolja $\Delta t=1$ mellett a 46. ábra.



46. ábra Az ötfele ágazó fa és a zárt képlet által kapott ár közötti eltérés a Δr függvényében
(Saját szerkesztés)

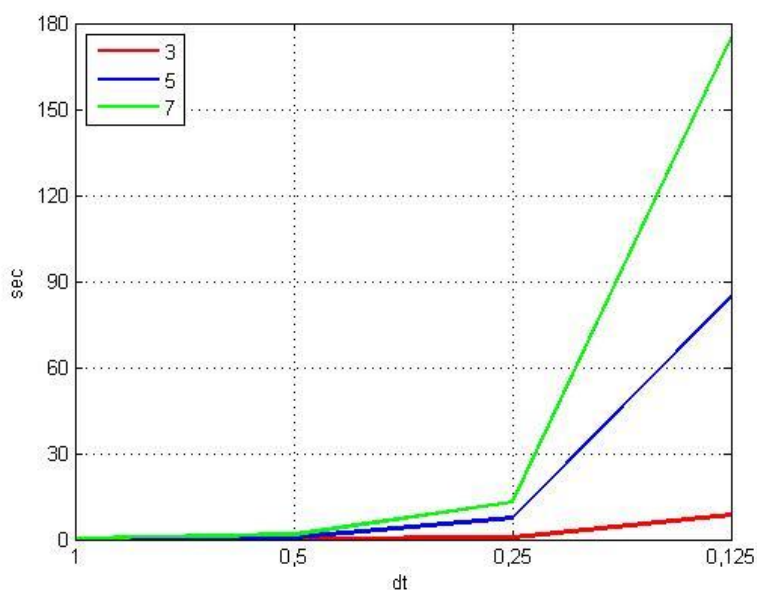
Ugyan meg lehetne azt vizsgálni, hogy az adott intervallumon belül lévő Δr -ek közül melyik esetén illeszkedik a legpontosabban a diszkrét eloszlás a folytonoshoz (Kolmogorov-Szmirnov próbával), és az alapján dönteni az optimális Δr -ról, azonban véleményem szerint az a rugalmasság, hogy megválaszthatjuk Δr -t a modellt sokkal kezelhetőbbé teszi, hiszen láttuk a képek alapján minden egyes fix kamatlábhoz tudunk választani olyat amely minimalizálja a hibát. Megvizsgáltam azt is, hogy a különböző fák esetén rögzített Δt ($\Delta t=1$) mellett hogyan néz ki a hiba a fix kamatlábak függvényében. Ezt mutatja meg a 47. ábra:



47. ábra A különböző fák és a zárt képlet által kapott ár közötti eltérés a fix kamatláb függvényében (Saját szerkesztés)

Az ábra alapján az a következtetés vonható le, hogy különböző fix kamatlábak mellett nemcsak azt érdemes megvizsgálni, hogy milyen Δt esetén lesz az eltérés mérték minimális, hanem azt is hogyan milyen fát érdemes használni. Van amikor a trinomiális a legpontosabb ugyanakkor van amikor az 5 felé ágazó fa. Természetesen figyelembe kell venni a számítási költségeket is a modellezés során, hiszen például Black-Karashinski esetén ahol nem kapunk meg nagyon gyorsan egy-egy analitikus árat, döntő tényező lehet az a modellezés során, hogy a megfelelő számú Monte Carlo szimuláció fut-e le, vagy a trinomiális (több-elágazásos) fa.

A futtatások idejének összehasonlíthatósága végett megvizsgáltam, hogy egy swaption ($T=5$, Tenor=3) árazása során átlagosan mennyi időbe telik a trinomiális és többfelé ágazó fákon meghatározni az értékét különböző Δt -k függvényében.



48. ábra A különböző fák árazási ideje Δt függvényében (Saját szerkesztés)

Látható, hogy ha csökkentjük Δt -t akkor nem lineárisan nő vele a számítási igény, így elég kicsi Δt esetén már meglehetősen hosszú ideig tart kiszámolni egy-egy swaption árat. Ennek oka, hogy a diszkrét pontok száma trinomiális esetben N^2 , 5 felé elágazás esetén $2N^2 - N$, 3 felé elágazás esetén pedig $3N^2 - 2N$ tehát nem lineáris függvénye N -nek (periódusszám). Emiatt egy trade-off jelenik meg az árazás során a futási idő, illetve a kapott ár pontossága között, vagyis komplex feladat dönteni a modellek sorrendjéről.

Ebben a kutatásomat bemutató fejezetben bevezetem két új fászerkesztési eljárást és az árazási képességüket figyelembe véve összehasonlítottam a trinomiális fával. Ugyan

az árazás pontosságát jelentősen lehet növelni velük (lehet választani minden egyes fix kamatlábhoz egy-egy adott Δr -t ami csökkenti a hibát), azonban futási idejük hosszabb, így nem lehet egyértelmű sorrendet mondani.

A további kutatás során érdemes lenne megvizsgálni egyrészt hogy más termékek esetén mennyire tér el a trinomiális fából, illetve a zárt képletből kapott érték, illetve hogy milyen más paramétereket lehet változtatni a fán (pl.: nem egyenlő Δt a fa felépítése során), és azoknak milyen hatása lenne a két ár különbségére. Ezenkívül lehetne általánosítani a modellt még többféle elágazásra, illetve elemezni, hogy hogyan lehet optimalizálni Δr megválasztását egyes fix kamatlábak esetén. Végül azt is fontos lenne még megvizsgálni, hogy az integrálást hogyan lehet másféleképpen megoldani a fán, ezáltal is csökkentve a hiba mértékét.

Konklúzió

Dolgozatom célja a kamatlábmodellek, azon belül is a Hull-White és a Black-Karashinski modell bemutatása, és numerikus érzékenységvizsgálata volt. Mivel kamatláb-derivatívákat két teljesen eltérő módszer alapján lehet árazni - folytonos időben és diszkretizálás útján faépítés segítségével -, ezért ezeket a módszereket mind elméleti, mind gyakorlati oldalukról bemutattam és elemeztem. A különböző eljárások elméleti bemutatása után az egyik leggyakoribb kamatláb-derivátíva - swaption - árazásán keresztül megtapasztaltam ezek előnyeit és hátrányait, melyeket próbáltam a részletesen kifejezni. A modellezéshez megírt Matlab programjaim segítségével a trinomiális fa építését nagyban befolyásoló 3 paraméter (csomópontok közötti idő távolsága, alsó és felső levágási szint) érzékenységvizsgálatát végeztem el. Azt vizsgáltam, hogy ezen paraméterek változtatása mennyiben befolyásolja az analitikus képlet által meghatározott pontos ár, és a trinomiális fából kapott ár közötti különbséget. Ezután megvizsgáltam mi történik, ha nem három, hanem 5 vagy akár 7 felé ágazik el a fa.

Kutatásom során több következtetést is levontam. Egyrészt az alsó levágási szint módosítása a többi paraméter változatlansága mellett a swaption opció jellege miatt nem változtatja annak árát (payer swaption esetén), másrészt ahogy csökkentem a csomópontok közötti időintervallum hosszát úgy kapok egyre pontosabb értéket a trinomiális fa során, azonban ezzel együtt jelentősen nő az árazáshoz használt program futási ideje is. Emellett az is megfigyeltem, hogy a diszkretizálás miatt az árazás pontossága a payer swaption tulajdonosa által fizetett fix kamatláb függvényében nem egyenletes. A folytonos folyamat várható értéke körüli fix kamatlábra szimmetrikus és a környékén jóval nagyobb mint attól távolodva. Ezenkívül azt is megállapítottam, hogy 5 és 7 felé ágazó fa esetén nem lehet pontos Δr -t megadni a modellben, viszont ezt nem hátránynak tekintettem, hanem a modell rugalmasságának, mivel így különböző fix kamatlábakhoz különböző Δr -t megadva csökkenteni tudom a hiba mértékét. Végül azt a következtetést is levontam hogy nem tudunk általánosan dönteni hogy melyik a legjobb fa modell az általam megvizsgált 3 közül, mivel különböző fix kamatlábak esetén eltérő lehet az optimális, illetve a többfelé elágazó fák jóval számításigényesebbek mint a trinomiális fa.

Kutatásom végére érve elmondhatom, hogy a dolgozatom alatt mélyrehatóan megismertem a Hull-White és Black-Karashinski kamatlábmodelleket mind folytonos mind diszkrét szemszögből, és sikerült az egyik leggyakoribb kamatlábra vonatkozó származtatott termék áralakulásának érzékenységvizsgálatát az általam írt programokkal elvégezni. Úgy gondolom, hogy munkám eredménye és esetleges további hasonló kísérletek elvégzése a

gyakorlatban is hasznosítható. Érdekes lehet használni a kapott eredményeket olyan esetekben, amikor nem létezik a derivatívára analitikus képlet és a hosszadalmas Monte Carlo módszer illetve a trinomiális fa között kell döntenünk, vagy ha fát építünk akkor hányféle elágazásos módszert alkalmazzunk.

Összességében úgy érzem, hogy egy értékes alkotást tettem le az olvasó asztalára, amely jó támpontot nyújthat későbbi kutatások elvégzéséhez is.

Hivatkozások

Baldvinsdóttir, E. – Palmborg, L. (2011): On Constructing a Market Consistent Economic Scenario Generator.

Brigo, D. – Mercurio, F. (2006): Interest Rate Models-Theory and Practice With Smile Infaltion and Credit. Springer Finance

Dancs Ágnes (2005): A folytonos kamatláb-modellek módszertani aspektusai. TDK dolgozat

Ge, Z. (1998): A Numerical Study of One-Factor Interest Rate Models

Hull, J. – White, A. (1994): Numerical Procedures For Implementing Term Structure models I: Single-Factor Models. Journal of Derivatives, No. 1, 7-16

Hull, J. (1999): Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek. Panem-Prentice Hall.

Khan, A. – Guan, E. – Poon,S. (2008): Short rate Models: Hull-White or Black-Karasinski? Impelemntation Note and Model Comparison for ALM. Manchester Business School Working Paper, No. 562

Kopányi Szabolcs (2009): A dinamikus hozamgörbe-modellezés alapjai. Közgazdasági szemle No. 4, 349-361.

Larsson, L. (2004): Pricing Bermudan Style Swaptions Using the Calibrated Hull White modell. Thesis

Medvegyev Péter – Száz János (2010): A meglepétesek jellege a pénzügyi piacokon. Bankárképző, Budapest

Nelson, D. – Ramaswamy, K. (1990): Simple Binomial Process of Diffusion Approximations in Financial Models. The Review of Finanacial Studies, No. 3, 393-430.