

OTDK-DOLGOZAT

Szendrey Orsolya
MSc

2014

Rendszerkockázat mérés és szétosztás játékelméleti
módszerekkel

Measurement and Allocation of Systemic Risk
A Game Theoretic Approach

Szendrey Orsolya

Kézirat lezárva: 2014. március 26.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. <i>TU</i>-játékok	4
2.1. Megoldáskonceptiók és tulajdonságaik	6
2.1.1. A Shapley-érték	6
2.1.2. A mag	8
2.1.3. A prenukleolusz	10
3. Likviditási elvárással kiegészített kockázatelosztási játékok	13
3.1. Koherens kockázati mértékek	13
3.2. A likviditási kockázat	15
3.3. Kockázatelosztási játékok	17
3.4. Likviditási elvárással kiegészített kockázatelosztási játékok	18
4. Kockázatelosztási módszerek	24
4.1. Kockázatelosztási módszerek	26
4.2. Analitikus és szimulációs eredmények	28
5. Alkalmazás	29
5.1. A bázeli szabályozások	31
5.2. A modell alkalmazása	35
5.2.1. Feltételezések és felhasznált adatok	35
5.2.2. A játék	36
6. A tőkefüggvény	43
7. Összefoglalás	47
A. Jelölésrendszer	49
B. Ábrák	51

Ábrák jegyzéke

6.1. Különböző veszteségráták esete	44
6.2. Különböző kitettségek esete	44
6.3. Különböző veszteségráták és kitettségek	45
6.4. Két bank esete	46
B.1. $LGD_1=10\%$, $EAD_1=100$, $LGD_2=60\%$, $EAD_2=100$	51
B.2. $LGD_1=10\%$, $EAD_1=100$, $LGD_2=30\%$, $EAD_2=500$	52
B.3. $LGD_1=10\%$, $EAD_1=100$, $LGD_2=60\%$, $EAD_2=500$	52

1. fejezet

Bevezetés

A 2008-ban kirobbant gazdasági világválság bebizonyította, hogy az aktuális bázeli szabályozás által meghatározott kockázati súlyokon alapuló tőkekövetelményi előírás nem elégséges a pénzügyi rendszer stabilitásának megteremtéséhez és fenntartásához. Ahogyan az a válságban megfigyelhető volt, a rövidtávú finanszírozási lehetőségek beszűkülésével a bankok nem tudtak kötelezettségeinek eleget tenni, így szembesülniük kellett likviditási problémáikkal. A Bazel II. szabályozás hiányosságaiból kiindulva, azokra megoldást javasolva megszületett a Bazel III. szabályozási keretrendszer.

A dolgozatban a Bazel III. szabályozás elveivel összhangban, céljainak megvalósításához egy lehetséges eszközt adva likviditás probléma hatására fellépő rendszerkockázattal és annak játékelméleti módszerekkel való szétosztásával foglalkozunk, egy bankrendszert és ingatlannal fedezett lakossági jelzáloghiteleit vizsgálva. Az általunk kialakított elemzési keret azon az intuíción alapul, hogy amikor a bankok a hitelek fedezetére tőketartalékot képeznek, akkor nem számolnak a rendszer egészének kockázatával, ami a mi esetünkben a szereplők együttmozgásából ered. Együttmozgás alatt azt értjük, hogy valamilyen kedvezőtlen esemény hatására a bankoknak egyszerre kell értékesíteniük az ingatlanfedezeteiket. Abból adódóan, hogy az ingatlanok piaca illikvid piac, a bankok ingatlanállományának egyszerre történő értékesítése, az egyéni értékesítésekhez képest, jelentősen elmozdítja a piaci árakat, így a bankrendszer szereplőinek olyan kockázattal kell szembesülniük, amivel az egyéni tőkeképzésük során nem kalkuláltak. Célunk tehát elsősorban az, hogy felhívjuk a figyelmet arra, hogy a piaci szereplők együttmozgásából eredő kockázat releváns kérdés lehet a bankrendszer szereplőinek kockázatkezelési gyakorlatában. Azt gondoljuk, hogy az általunk felépített gondolatmenet és bemutatott modell kiindulópont lehet a szabályozás számára egy olyan módszertan kidolgozásában, amely már az együttmozgásból következő kockázatot is integráltan kezeli és megfelelően osztja szét a bankrendszer

szereplői között.

A dolgozat bemutatjuk az átruházható hasznosságú kooperatív játékokat, azaz *TU*-játékokat. Bevezetjük a *TU*-játékok vizsgálatához szükséges legfontosabb alapfogalmakat és tulajdonságokat, amelyekre minden esetben példát is adunk. Ismertetünk továbbá három lehetséges megoldáskonceptiót, a Shapley (1953) által bevezetett Shapley-megoldás, a Gillies (1959) által definiált magot, majd végül a Schmeidler (1969) nevéhez fűződő nukeloluszt. Artzner et al (1999) alapján áttekintjük, a dolgozat elméleti részében a kockázatmérés eszközeként használt koherens kockázati mértékeket, valamint meghatározzuk a likviditás és a likviditási kockázat fogalmát. Bemutatjuk a Denault (2001) által bevezetett kockázatelosztási játékokat és részben módosítva Csóka és Herings (2012) gondolatmenetét, a likviditási elvárással kiegészített kockázatelosztási játékokat tárgyaljuk. A könnyebb megértés végett általunk definiált játékokat részletesen, példákon keresztül mutatjuk be, rávilágítva legfontosabb tulajdonságaikra.

Továbbblépve az alkalmazás irányába, Balog et al (2011) cikke alapján hét ismert kockázatelosztási módszert és tulajdonságaikat vizsgáljuk. Az alkalmazásra áttérve egy bankrendszer esetében vizsgáljuk a bankok együttmozgásából eredő kockázatot. Az alkalmazás bemutatása mellett, a probléma könnyebb megértése végett, áttekintjük a bázeli szabályozás mérőföldköveit és az általunk vizsgált probléma szempontjából legfontosabb elemeit. A dolgozat példájában kizárólag a bankok ingatlannal fedezett lakossági jelzáloghiteleit tekintjük, és azt feltételezzük, hogy a bankoknak valamilyen sokk hatására értékesíteni kell az ingatlanfedezeteket. A bankok, amikor meghatározzák, hogy az ingatlanok mekkora hányadát értékesítsék, akkor kizárólag az általuk értékesíteni kívánt mennyiség árcsökkenő hatásával kalkulálnak. Így ebben az esetben kockázat abból adódik, hogy egyszerre több bank is értékesíteni szeretné a fedezetül szolgáló ingatlanokat. Mivel az ingatlanok piaca illikvid piac, így azáltal, hogy sokkal több ingatlant értékesítenek, a piacon megfigyelhető árak jelentősen el fognak mozdulni, így a bankrendszer szereplői alacsonyabb átlagos várható bevételre számíthatnak, mint amekkorával előzetesen kalkuláltak. Azáltal, hogy a nyilvános elérhető adatok alapján az ingatlankínálati függvény becslésére nem megfelelő eredmény adódott, annak meghatározásához, hogy a bankok ingatlanértékesítése a piacon mekkora áresést generál, szakértő véleményét kértük. Megjegyezzük, hogy kellően részletes adatbázis esetén az ingatlankínálati függvény becslése az instrumentális változók módszerével elvégezhető és a különböző mértékű ingatlanértékesítések esetén az árcsökkenés meghatározható. Következő lépésben a bankok együttes értékesítéséből származó kockázatot az áresés mértékén keresztül beépítjük a bankok tőkekövetelmény számításába és azt az eredményt kapjuk, hogy az egyé-

nileg képzett tőkekövetelmények nem minden esetben bizonyulnak elégségesnek az együttmozgás miatt fellépő rendszerkockázat fedezésére. Megvizsgáljuk továbbá azt is, hogy az általunk adott példában hogyan függ a játék értéke az induló paraméterek megválasztásától.

A dolgozat felépítése a következő: a második röviden bemutatjuk az átruházható hasznosságú játékokat, majd áttérünk a koherens kockázati mértékek és kockázatelosztási játékok vizsgálatára. A negyedik fejezetben áttekintjük a kockázatelosztási módszereket, majd továbblépünk a dolgozat ötödik fejezetében a modell alkalmazási lehetőségére. Az alkalmazás tárgyalását követően röviden megvizsgáljuk a bázeli tőkefüggvényt, majd a dolgozatot az eredmények összefoglalásával zárjuk.

Ezúton szeretném megköszönni Holló Dánielnek, hogy észrevételeivel és tanácsaival segítette munkámat.

2. fejezet

TU -játékok

A kooperatív játékelmélet olyan szituációkkal foglalkozik, amelyekben a játékosok koalícióba léphetnek egymással és a kifizetéseket illetően kikényszeríthető megállapodásokat köthetnek. A kooperatív játékelméleten belül megkülönböztetünk átruházható hasznosságú és nem átruházható hasznosságú játékokat, valamint olyan játékokat, amelyek az előbb felsorolt két típus között, mint átmenet helyezkednek el. A dolgozatban az átruházható hasznosságú, azaz TU -játékokkal foglalkozunk, azon belül is a kockázatelosztási játékokkal likviditási elvárás mellett.

Mielőtt azonban rátérnénk a kockázatelosztási játékok részletes vizsgálatára, a második fejezetében röviden bemutatjuk a TU -játékokat, kiemelni a dolgozatban felhasznált legfontosabb tulajdonságaikat és a hozzájuk kapcsolódó alapfogalmakat.

Jelölje $R_+ = [0, \infty)$ és $R_{++} = (0, \infty)$ valamint $\mathcal{P}(N)$ az N összes részhalmazainak osztályát.

Jelölje N a játékosok véges, nemüres halmazát. A játékosok tetszőleges $T \subseteq N$ részhalmazát koalíciónak nevezzük. $T = N$ esetén nagykoalícióról, $T = \emptyset$ esetén üres koalícióról beszélünk.

2.1. definíció. *Legyen N a játékosok véges, nemüres halmaza. Legyen $\mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre $v(\emptyset) = 0$. Ekkor v -t átruházható hasznosságú, azaz TU -játéknak (transferable utility game) nevezzük. Jelölje továbbá $\mathcal{G}^N$ az N játékosalmazon értelmezett TU -játékok osztályát.*

Az átruházható hasznosságú játékokat leggyakrabban úgy reprezentálják, hogy a koalíciók emberek csoportját jelentik, a kifizetések pedig pénzben (vagy tetszőlegesen másként mérve, például hasznossággal) mérhetők, amelyeket a koalícióba lépő játékosok tetszőleges módon oszthatnak szét egymás között. A 2.1. definícióban szereplő v függvény a különböző koalícióihoz rendeli az általuk közösen elérhető kifizetést.

2.2. definíció. Azt mondjuk, hogy a $v \in \mathcal{G}^N$ játék 0-normaizált, ha $v(\{i\}) = 0$ minden $i \in N$ -re.

2.3. definíció. Azt mondjuk, hogy a $v \in \mathcal{G}^N$ játék monoton, ha minden $S, T \subseteq N$ koalícióra, hogy $S \subseteq T$ teljesül, hogy $v(S) \leq v(T)$.

2.4. *példa.* Legyen a játékosok halmaza $N = \{1, 2, 3\}$ és a v játék a következő módon adott: $v(\{1\}) = 0$, $v(\{2\}) = 0$, $v(\{3\}) = 0$, $v(\{1, 2\}) = 0$, $v(\{1, 3\}) = 5$, $v(\{2, 3\}) = 3$ és $v(\{1, 2, 3\}) = 5$. Könnyen beláthatjuk, hogy az ily módon adott játék 0-normalizált és monoton, ugyanis az egyszemélyes koalíciók értéke nem nagyobb sem a nagykoalíció, sem a kétszemélyes koalíciók értékénél, valamint a kétfős koalíciók kifizetése is legfeljebb akkora, mint a nagykoalíció kifizetése.

2.5. definíció. Azt mondjuk, hogy a $v \in \mathcal{G}^N$ játék szuperadditív, ha tetszőleges $S, T \subseteq N$ koalícióra, amelyre $S \cap T = \emptyset$, teljesül, hogy $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$.

2.6. *példa.* Legyen a játékosok halmaza $N = \{1, 2, 3\}$ és a v játék a következő módon adott: $v(\{1\}) = 0$, $v(\{2\}) = 0$, $v(\{3\}) = 0$, $v(\{1, 2\}) = 0$, $v(\{1, 3\}) = 3$, $v(\{2, 3\}) = 4$ és $v(\{1, 2, 3\}) = 4$. Az $S \cap T = \emptyset$ feltételből adódik, hogy elegendő $\{1\} - \{2, 3\}$, $\{2\} - \{1, 3\}$, $\{3\} - \{1, 2\}$, $\{1\} - \{2\}$, $\{1\} - \{3\}$ és $\{2\} - \{3\}$ koalíciópárokat vizsgálni (az üres koalícióra nyilvánvalóan mindig teljesül a feltétel). Az első három esetben a koalíciók uniója a nagykoalíciót adja, amelynek kifizetése minden esetben legalább akkora, mint a megfelelő egy- illetve kétfős koalíciók kifizetéseinek összege. A második három esetben unióként éppen a kétszemélyes koalíciók adódnak, amelyek mindegyikére teljesül, hogy értéke legalább akkora, mint a megfelelő egyszemélyes koalíciók értékeinek összege.

2.7. definíció. Azt mondjuk, hogy a $v \in \mathcal{G}^N$ játék szubadditív, ha tetszőleges $S, T \subseteq N$ koalícióra, amelyre $S \cap T = \emptyset$, teljesül, hogy $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$.

2.8. definíció. Azt mondjuk, hogy a $v \in \mathcal{G}^N$ játék additív, ha tetszőleges $S, T \subseteq N$ koalícióra, amelyre $S \cap T = \emptyset$, teljesül, hogy $v(S) + v(T) = v(S \cup T)$.

2.9. definíció. Azt mondjuk, hogy a $v \in \mathcal{G}^N$ játék lényeges, ha $v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

2.10. definíció. Azt mondjuk, hogy a $v \in \mathcal{G}^N$ játék konvex, ha minden $S, T \subseteq N$ koalícióra teljesül, hogy $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$.

2.11. *példa.* Tekintsünk a 2.6. példában adott játékot. Ha az egyfős koalíciókat tekintjük a két-, illetve háromszemélyes koalíciókkal, akkor azokra vagy $S \cap T = \{i\}$, $i = 1, 2, 3$, vagy az $S \cap T = \emptyset$ miatt $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ teljesül. Ha a kétfős koalíciók metszetét vesszük, akkor azok mindig egyelemű koalíciót adnak, amelyekre

$v(\{i\}) = 0, i = 1, 2, 3$, így $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ teljesül az előző esethez hasonlóan. Végül, ha az egyik kétfős, a másik pedig a nagykoalíció, akkor azok metszete mindig az adott kétfős koalíció, így a 2.10. definícióban szereplő egyenlőtlenség mindig egyenlőség formájában teljesül. Tehát a v játék konvex.

2.12. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$. Ekkor $v^T \in \mathcal{G}^T$ a v játék részjátéka, ahol $\emptyset \neq T \subseteq N$ és $v^T(S) = v(S)$ minden $S \subseteq T$ esetén.

2.13. definíció. A $\psi: A \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ függvényt, amelyre $A \subseteq \mathcal{G}^N$, az A játékosztályon értelmezett megoldásnak nevezzük.

2.14. megjegyzés. A 2.13. definícióban a $\rightrightarrows$ halmazértékű leképezést jelöl.

2.15. definíció. Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék költségjáték, ha nemnegatív, monoton és szubaditív.

A költségjátékok esetén a játékosok emberek egy csoportját jelölik, akik valmilyen szolgáltatást szeretnének igénybe venni. Ekkor a v függvény az egyes koalíciókhoz azt az értéket rendeli, amit a koalíciónak fizetnie kell azért, hogy adott szolgáltatás igénybe vehesse.

2.16. megjegyzés. Jelölje $\mathcal{G}_c^N$ az N játékosalmazon értelmezett költségjátékok osztályát.

Az általunk vizsgált problémakörben a TU -játékokat úgy reprezentálhatjuk, hogy a koalíciók a bankrendszer szereplőinek egy-egy csoportját jelenítik meg, akik kockázataikat minimalizálják, a kifizetések pedig tőkekövetelménnyel (vagy veszteséggel) mérhetők, amelyeket a koalícióba lépő bankok tetszőleges módon oszthatnak szét egymás között.

2.17. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$. Ekkor a v játék szétoztásainak halmaza

$$I^*(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \right\}.$$

2.18. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$. Ekkor a v játék elosztásainak halmaza

$$I(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \text{ és } v(\{i\}) \geq x_i, i \in N \right\}.$$

2.1. Megoldáskonceptiók és tulajdonságaik

2.1.1. A Shapley-érték

A megoldáskonceptiók közül először vizsgáljuk meg a Shapley-megoldást (Shapley, 1953). Shapley (1953) egy olyan megoldást dolgozott ki, amely méri egy játékos

szerepének az értékét a játékban. Ez a megoldás a következő módon határozható meg.

2.19. *megjegyzés.* Jelölje $v'_i(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$ az i játékos marginális hozzájárulását az S koalícióhoz.

2.20. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ játék, ekkor az i játékos Shapley-értéke (Shapley, 1953) a v játékban a következőképpen adható meg

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N \setminus S| - 1)!}{|N|!} v'_i(S).$$

Jelölje továbbá $\varphi = (\varphi(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ a v játék Shapley-megoldását.

2.21. definíció. Tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játék esetén az $i, j \in N$ játékosok ekvivalensek, $(i \sim^v j)$, ha minden $S \subseteq N$ koalíció esetén, amelyre $i, j \notin S$ teljesül, igaz, hogy $v'_i(S) = v'_j(S)$.

2.22. definíció. Legyen ψ az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztályon értelmezett megoldás. A ψ megoldás

- *Pareto optimális (PO)*, ha minden $v \in A$ játék esetén teljesül, hogy $\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$,
- *egyenlően kezelő (ETP)*, ha minden $v \in A$ játék és $i, j \in N$ játékosok esetén teljesül, hogy, ha $i \sim^v j$ akkor $\psi_i(v) = \psi_j(v)$,
- *marginális (M)*, ha minden $v, w \in A$ játék és $i \in N$ játékos esetén teljesül, hogy, ha $v'_i = w'_i$, akkor $\psi_i(v) = \psi_i(w)$.

A 2.22. definíció alapján a ψ megoldás *PO*, ha minden játékban teljesül, hogy a megoldás által az egyes játékosokhoz rendelt kifizetések összege a nagykoalíció értékével egyezik meg. A ψ megoldás *ETP*, ha minden játékban az ekvivalens játékosokhoz azonos értékű kifizetést rendel. Végül, a ψ megoldás *M*, ha minden olyan játékosra, akinek a hozzájárulása két játékban megegyezik, ahhoz azonos kifizetést rendel a két játékban.

2.23. tétel ((Young, 1985)). Legyen ψ egy, a teljes játékosztályon értelmezett megoldás. Ekkor a ψ megoldás pontosan akkor Pareto optimális, egyenlően kezelő és marginális, ha $\psi = \phi$, azaz ψ a Shapley-megoldás.

2.24. *példa.* Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ a játékosok halmaza, a v játék pedig a következőképpen adott: $v(\{1\}) = 0$, $v(\{2\}) = 0$, $v(\{3\}) = 0$, $v(\{1, 2\}) = 8$, $v(\{1, 3\}) = 9$, $v(\{2, 3\}) = 7$ és $v(\{1, 2, 3\}) = 12$.

Az így megadott játékban számítsuk ki a játékosok Shapley-értékeit. Az 1-es játékos Shapley-értékét ekkor következő módon számolhatjuk ki:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(v) &= \sum_{S \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{1\}} \frac{|S|!(|\{1,2,3\} \setminus S| - 1)!}{|\{1,2,3\}|!} [v(S \cup \{1\}) - v(S)] \\
&= \frac{|\emptyset|!(|\{1,2,3\} \setminus \emptyset| - 1)!}{|\{1,2,3\}|!} [v(\emptyset \cup \{1\}) - v(\emptyset)] \\
&\quad + \frac{|\{2\}|!(|\{1,2,3\} \setminus \{2\}| - 1)!}{|\{1,2,3\}|!} [v(\{2\} \cup \{1\}) - v(\{2\})] \\
&\quad + \frac{|\{3\}|!(|\{1,2,3\} \setminus \{3\}| - 1)!}{|\{1,2,3\}|!} [v(\{3\} \cup \{1\}) - v(\{3\})] \\
&\quad + \frac{|\{2,3\}|!(|\{1,2,3\} \setminus \{2,3\}| - 1)!}{|\{1,2,3\}|!} [v(\{2,3\} \cup \{1\}) - v(\{2,3\})] \\
&= \frac{0!(3-1)!}{3!} [0 - 0] + \frac{1!(2-1)!}{3!} [8 - 0] + \frac{1!(2-1)!}{3!} [9 - 0] + \frac{2!(1-1)!}{3!} [12 - 7] = 4,5
\end{aligned}$$

A többi játékos Shapley-értéke hasonlóan számolható és végül a játékosok Shapley-értékeire valamint a játék Shapley-megoldásra a következő adódik:

$$\varphi(v) = \begin{bmatrix} \varphi_1(v) \\ \varphi_2(v) \\ \varphi_3(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 3,5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2.1.2. A mag

A játékelméletben az egyik legismertebb megoldáskonceptciónak a Shapley-érték (Shapley, 1953) és a nukleolusz (Schmeidler, 1969) mellett a Gillies (1959) által bevezetett mag tekinthető. A magbeli elosztás a játékosokhoz olyan kifizetéseket rendel, amelyet minden koalíció elfogad, azaz magbeli elosztásból egyetlen játékosnak sem érdemes sem egyénileg, sem más játékosokkal összefogva elmozdulni.

2.25. definíció (Mag, Gillies (1959)). *Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$. Ekkor a v játék magja a következőképpen adható meg:*

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ és } \sum_{i \in S} x_i \leq v(S), \quad S \subseteq N \right\}.$$

2.26. *példa.* Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ a játékosok halmaza és v költségjáték a következő módon adott: $v(\{1\}) = 4$, $v(\{2\}) = 4$, $v(\{3\}) = 6$, $v(\{1, 2\}) = 8$, $v(\{1, 3\}) = 10$, $v(\{2, 3\}) = 8$ és $v(\{1, 2, 3\}) = 12$. Egy $x \in \mathbb{R}^N$ vektor a v magjában van, ha eleget

tesz a következő feltételeknek:

$$\begin{aligned} 4 - x_1 &\geq 0 & 8 - (x_1 + x_2) &\geq 0 \\ 4 - x_2 &\geq 0 & 10 - (x_1 + x_3) &\geq 0 \\ 6 - x_3 &\geq 0 & 8 - (x_2 + x_3) &\geq 0 \\ 12 - (x_1 + x_2 + x_3) &= 0 \end{aligned}$$

Átrendezéssel a következő feltételrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 & x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 4 & x_1 + x_3 &\leq 10 \\ x_3 &\leq 6 & x_2 + x_3 &\leq 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$$

Tekintsük a $x_2 + x_3 \leq 8$ és $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ feltételeket. Ezeket összevetve azt kapjuk, hogy $x_1 \geq 4$, ugyanakkor az első egyenlőtlenség alapján $x_1 \leq 4$ is fennáll, így azonnal adódik, hogy $x_1 = 4$. Az így kapott eredményt felhasználva könnyen észrevehető, hogy x_2 és x_3 már csak a következő három feltételnek kell, hogy eleget tegyen:

$$x_2 \leq 4, \quad x_3 \leq 6, \quad x_2 + x_3 = 8$$

Minden olyan x_2 és x_3 -ra, amely eleget tesz az előző feltételeknek, teljesül az is, hogy $x_2, x_3 \geq 0$ és $x_2 = 8 - x_3$. A v játék magját tehát mindazon $x = (x_1, x_2, x_3)$ elosztások alkotják, amelyek kielégítik a $x_1 = 4, x_2 = 8 - x_3$ és $x_2, x_3 \geq 0$ feltételeket.

2.27. definíció. A $v \in \mathcal{G}^N$ játék kiegyensúlyozott, ha

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{P}(N)}, \sum_{C \in \mathcal{P}(N)} \lambda_C \chi_C = \chi_N} \sum_{C \in \mathcal{P}(N)} \lambda_C v(C) \leq v(N).$$

Véges sok játékos esetén Bondareva (1963) és Shapley (1967) megmutatták, hogy a TU -játékok kiegyensúlyozottsága szükséges és elégséges feltétel a mag nem üreségéhez. Ezt mondja ki a következő tétel.

2.28. tétel (Bondareva (1963) and Shapley (1967)). A $v \in \mathcal{G}^N$ játék magja nem üres, akkor és csak akkor, ha v kiegyensúlyozott.

2.29. példa. Tekintsük a 2.26. példában adott játékot. Az ily módon adott játék kiegyensúlyozott, hiszen a magja nem üres.

2.30. definíció. A $v \in \mathcal{G}^N$ játék teljesen kiegyensúlyozott, ha v minden részjátéka kiegyensúlyozott.

2.31. definíció. A $v \in \mathcal{G}^N$ játék egzakt, ha minden $C \in \mathcal{P}(N)$ koalíció esetén létezik x magbeli elosztás, amelyre $x(C) = v(C)$ teljesül.

2.32. definíció. A $v \in \mathcal{G}^N$ játék teljesen egzakt, ha v minden részjátéka egzakt.

2.1.3. A prenukleolusz

Ahogy azt már korábban is említettük, a TU -játékok esetében a koalícióba lépő játékosok a kifizetéseket tetszőleges módon oszthatják szét egymás között. A játék Schmeidler (1969) által bevezetett nukleolusza egy olyan elosztás koncepció, amely lexicografikusan minimalizálja a játékosok legnagyobb elégedetlenségét, azaz olyan módon rendel kifizetést a játékosok koalícióihoz, hogy általa a legrosszabbul járó koalíció is a lehető legjobb helyzetbe kerülhessen. A nukleolusz meghatározásához szükségünk lesz az alábbi fogalmakra:

2.33. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$. Ekkor az $x \in \mathbb{R}^N$ elosztás hatékony, ha $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

2.34. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$. Ekkor az $x \in \mathbb{R}^N$ elosztás egyénileg racionális, ha $x_i \leq v(\{i\})$ teljesül $\forall i \in N$ -re.

2.35. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ játék. Ekkor az $e(\cdot, \cdot) : \mathcal{G}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{2^N}$ többlet-függvény tetszőleges S koalícióhoz és x elosztáshoz az alábbi módon adható meg:

$$(e(v, x))_S = v(S) - \sum_{i \in S} x_i.$$

A S koalícióhoz és az x kifizetésvektorhoz tartozó többlet tehát azt mutatja meg, hogy az S koalíció mennyit nyerhet, ha elfogadja a nagykoalícióban való részvételt és ezzel az x kifizetést.

2.36. *megjegyzés* (Mag). Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$. Ekkor a játék magja a következőképpen adható meg:

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ és } (e(v, x))_S \geq 0, S \subseteq N \right\}.$$

2.37. definíció. Legyen $\varrho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ a következő módon adott, tetszőleges $x \in \mathbb{R}^d$ -re és $1 \leq i \leq d$ -re

$$(\varrho(x))_i = \min_{T \subseteq \{1, 2, \dots, d\}, |T|=i} \max_{j \in T} x_j.$$

2.38. *példa.* Tekintsük az $x = (3, 2, 1, 4)$ vektort és alkalmazzuk rá a ϱ rendezést. A $(\varrho(x))$ első elemét, $(\varrho(x))_1$ -et, úgy kaphatjuk meg, hogy vesszük az x vektor koordinátáinak az összes egyelemű részhalmazát, majd ezen elemek közül kiválasztjuk a legkisebbet. Így adódik, hogy $(\varrho(x))_1 = 1$. Ezt követően, $(\varrho(x))$ második elemét, $(\varrho(x))_2$ -öt úgy határozhatjuk meg, hogy az x koordinátáinak minden kételemű részhalmazából kiválasztjuk a legnagyobbat, majd ezek közül a legkisebb elemet. A példánkban adott vektor esetén a kételemű részhalmazok a következők:

$\{3, 2\}, \{3, 1\}, \{3, 4\}, \{2, 1\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}$. Ezek mindegyikének kiválasztjuk a legnagyobb elemét, majd azok közül a legkisebbet, így kapjuk, hogy $(\varrho(x))_2 = 2$. Ezt az eljárást folytatva, $(\varrho(x))_3$ a háromelemű részhalmazok legnagyobb elemei közül a legkisebbel lesz egyenlő, azaz $(\varrho(x))_3 = 3$. Végül $(\varrho(x))$ -re a következő adódik: $\varrho(x) = (1, 2, 3, 4)$. Vegyük észre, hogy a ϱ rendezés valójában az x vektor koordinátáit nemcsökkenő sorrendbe rendezi.

2.39. *példa*. Legyen $N = \{1, 2\}$ a játékosok halmaza, a koalíciók értéke $v(\{1\}) = 2, v(\{2\}) = 4$, és $v(\{1, 2\}) = 5$ valamint a kifizetés vektor $x = (3, 2)$. Az ilyen módon megadott játékban a megfelelő koalíciók többletére a következő értékeket kapjuk: $(e(v, x))_{\{1\}} = 2 - 3 = -1$, $(e(v, x))_{\{2\}} = 4 - 2 = 2$ valamint $(e(v, x))_{\{1, 2\}} = 5 - (3 + 2) = 0$. Ekkor, ha alkalmazzuk ϱ rendezést a többletek vektorára, akkor a következő eredmény adódik:

$$\varrho \circ e(v, x) = \begin{bmatrix} (e(v, x))_{\{1\}} \\ (e(v, x))_{\{1, 2\}} \\ (e(v, x))_{\{2\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2.40. definíció (Prenukleolusz, Sobolev (1975)). Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$. Ekkor a v játék prenukleolusza a következő módon határozható meg:

$$\mathcal{PN}(v) = \{x \in I^*(v) : \varrho \circ e(v, x) \geq_{lex} \varrho \circ e(v, z), z \in I^*(v)\},$$

ahol $\geq_{lex}$ a lexicografikus relációt jelöli.

2.41. definíció (Nukleolusz, Schmeidler (1969)). Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$. Ekkor a v játék nukleolusza a következő módon határozható meg:

$$\mathcal{N}(v) = \{x \in I(v) : \varrho \circ e(v, x) \geq_{lex} \varrho \circ e(v, z), z \in I(v)\}.$$

2.42. *megjegyzés*. Ha a játék magja nemüres, akkor a nukleolusz és a prenukleolusz megegyezik.

2.43. *példa* (Solymosi (2007)). Legyen $N = \{1, 2\}$ a játékosok halmaza és $v \in \mathcal{G}_c^N$ lényeges játék. Ekkor a v játék imputációinak halmaza a következőképpen adható meg:

$$I(v) = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = v(\{1, 2\}), x_1 \geq v(\{1\}), x_2 \geq v(\{2\})\}.$$

Ezen feltételek mellett keressük azt az $x = (x_1, x_2)$ vektort, amely a legkisebb többletet maximalizálja. Formálisan, mivel csak az egyszemélyes koalíciók többletei változhatnak, olyan x vektort keresünk, amelyre $\min\{v(\{1\}) - x_1, v(\{2\}) - x_2\}$ kifejezés

maximális lesz. Megmutatható, hogy a $\min\{v(\{1\}) - x_1, v(\{2\}) - x_2\}$ akkor lesz maximális, ha a többletek egyenlők és ekkor azt kapjuk, hogy

$$x_i = \frac{v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})}{2} + v(\{i\}) \quad \text{for } i = 1, 2,$$

amely ebben a játékban megmutatható, hogy a Shapley-értékkel egyezik meg.

2.44. *megjegyzés.* Kétszemélyes lényeges játékok estén a nukleolusz és a Shapley-érték megegyezik.

3. fejezet

Likviditási elvárással kiegészített kockázatelosztási játékok

A kockázatkezelés során felmerül a kérdés, hogy hogyan válasszunk meg megfelelő mértéket, amely segítségével a kockázatokat mérni tudjuk. A kockázat sok esetben a bizonytalan működési környezetből adódik, így arra keressük a választ, hogy miként mérhető a pozíciók környezetből eredő bizonytalansága. A dolgozat 3. fejezetében Artzner et al (1999) alapján áttekintjük az elméleti részben a kockázatmérés eszközeként használt koherens kockázati mértékeket, bemutatjuk a Denault (2001) által bevezetett kockázatelosztási játékokat, végül részben módosítva Csóka és Herings (2012) gondolatmenetét, bevezetjük a likviditási elvárással kiegészített kockázatelosztási játékokat.

3.1. Koherens kockázati mértékek

Tekintsünk egy pénzügyi rendszert N alegységgel és gyűjtsük össze az alegységek portfólióinak értékét leíró valószínűségi vektorváltozókat az $X = [X_1, \dots, X_N]$ mátrixba. Az ilyen módon bevezetett jelölések mellett nevezzük az X mátrix i oszlopát az i alegységhez tartozó realizációs vektornak és jelölje $\mathbb{R}^S$ a realizációs vektorok vektorterét, ahol S a lehetséges világállapotok véges, nem üres halmaza. Minden $s \in S$ -re az s állapot bekövetkezési valószínűsége legyen $\pi_s > 0$ és $\sum_{s=1}^S \pi_s = 1$ és jelölje δ a diszkontfaktort. A jelölések áttekintése után térjünk át a kockázati mértékek vizsgálatára.

3.1. definíció. A $\rho : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt kockázati mértéknek nevezzük.

A kockázati mértéket a dolgozatban úgy interpretáljuk, mint azt a valós számot, amely adott alegység esetén megmutatja, hogy az alegységnek mekkora mennyiségű

referenciaeszközre lesz szüksége, ahhoz hogy a kockázatait fedezni tudja. Referenciaeszközön olyan eszközt értünk, amely minden lehetséges világállapotban azonosan 1 kifizetést biztosít. Mielőtt továbblépnénk, tekintsünk két példát kockázati mértékre.

3.2. definíció. Az *expected shortfall-t* (*ES*) $\delta = 1$ esetén a következőképpen definiáljuk

$$ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \overleftarrow{F}(p) \, dp, \quad (3.1)$$

3.3. megjegyzés. A 3.2. definícióban $\overleftarrow{F}(p) = \inf\{x | F(x) \geq p\}$ jelöli.

3.4. definíció. A kockázatotott értéket (*Value at Risk*, *VaR*) a következőképpen definiáljuk

$$VaR_\alpha = -\inf\{x : P(X \leq x) > \alpha\}. \quad (3.2)$$

3.5. definíció (Koherens kockázati mérték, Artzner et al (1999)). A $\rho : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény koherens kockázati mérték, ha eleget tesz a következő axiómáknak

- *monotonitás:* minden $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^S$ esetén, ha $X_2 \geq X_1$ akkor $\rho(X_2) \leq \rho(X_1)$,
- *szubadditivitás:* minden $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^S$ esetén $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$,
- *pozitív homogenitás:* minden $X \in \mathbb{R}^S$ és $h \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, $\rho(hX) = h\rho(X)$,
- *transzláció invariancia:* minden $X \in \mathbb{R}^S$ és $a \in \mathbb{R}$ esetén, $\rho(X + a1^S) = \rho(X) - \delta a$,

ahol $\delta \geq 0$ jelöli a diszkontfaktort.

A monotonitás követelménye szerint, ha egy portfólió értéke minden világállapotban legalább akkora, mint egy másik portfólióé, akkor elvárható, hogy a nagyobb értékű portfólió kockázata kisebb legyen.

A szubadditivitás esetén két portfólió egyesítése nem eredményezhet nagyobb kockázatot, mint a portfóliók egyedi kockázatainak összege. Amennyiben a szubadditivitás axiómája sérülne, előfordulhatna olyan helyzet, amelyben érdemes lenne a portfóliót feldarabolni és így a részportfóliók egyedi kockázatainak összegére kisebb érték adódna, mint a teljes portfólió kockázatára. Vegyük észre, hogy a szubadditivitás nemteljesülése a diverzifikációs hatásnak mondana ellent.

A pozitív homogenitás axiómája alapján azt követeljük meg, hogy a portfólió értéke egyenes arányban befolyásolja a portfólió kockázatát.

A transzláció invariancia axiómája azt írja elő, hogy a portfólióhoz a mennyiségű referenciaeszközt hozzáadva, a portfólió kockázata csökkenjen δa -val.

Ezen a ponton érdemes megjegyezni, hogy az ES koherens kockázati mérték, míg a kockázatotott érték nem teljesíti a szubadditivitás axiómáját.

3.2. A likviditási kockázat

A likviditás fogalmának nincsen általánosan elfogadott, egységes definíciója. Az általunk használt problémakörben egy eszközt akkor tekintünk likvidnek, ha rövid időn belül tetszőlegesen nagy mennyiségben kereskedhetünk vele a piaci árak befolyásolása nélkül. A likviditási kockázat tehát abból fakad, hogy az illikvid eszközöket nem lehet azonnal pénzzé tenni és nem lehet velük tetszőlegesen nagy mennyiségben kereskedni a piaci árak elmozdítása nélkül. Így a likviditási kockázat akkor jelentkezik, ha egy adott piaci szituációban egy adott piaci szereplő nem tud eleget tenni a fizetési kötelezettségének, így illikvid eszközökből álló portfóliójának egy részét vagy egészét fel kell, hogy számolja.

A likviditási kockázatot a dolgozat második részében, a modell alkalmazásánál, egy olyan esetben vizsgáljuk, amikor egy bankrendszer szereplői valamilyen kedvezőtlen esemény hatására rövid időn belül értékesíteni szeretnék a jelzáloghitelek mögött álló ingatlanfedezeteket, jelentősen elmozdítva a piaci árakat.

A likviditás és likviditási kockázat fogalmának bevezetése után tekintsük át a későbbiekben használt fogalmakat és jelöléseket. Tekintsünk egy pénzügyi rendszert N alegységgel. Jelölje J az illikvid eszközök halmazát és $\theta^i = (\theta_0^i, \theta_J^i)$ az i alegység portfólióját, amelyben θ_0^i az alegység rendelkezésére álló készpénzt vagy referenciaeszközt, θ_J^i az alegység illikvid eszközeit jelöli. Legyen továbbá $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^J$ az alegységek portfólióinak tere, valamint $p' \oplus a$ a p portfólióhoz adott készpénz vagy referenciaeszköz. Tetszőleges $p' \in P$, portfólió esetén $p \oplus a$ mennyiség tehát a következőt jelenti: $p'_0 = p_0 + a$ és $p'_j = p_j$, $j \in J$.

3.6. definíció. A $j \in J$ eszköz marginális keresleti-kínálati függvénye (*marginal supply-demand curve, MSDC*) az $s \in S$ állapotban az $m_j^s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés által adott, amely kielégíti a következő feltételeket

- $m_j^s(x) \geq m_j^s(x')$, ha $x < x'$;
- m_j^s cadlag, ha $x < 0$ és ladcag, ha $x > 0$.

3.7. megjegyzés. A 3.6. definícióban a cadlag (a francia kifejezésből continue à droite, limite à gauche) azt jelenti, hogy a leképezés jobbról folytonos és van baloldali határértéke, hasonlóan a ladcag (limite à droite, continue à gauche) leképezés balról folytonos és van jobboldali határértéke.

3.8. megjegyzés. A marginális keresleti-kínálati függvény esetén az $m(0^-)$ és $m(0^+)$ határértéket legjobb vételi és legjobb eladási árnak nevezzük.

3.9. megjegyzés. A θ_0 -al jelölt készpénz marginális keresleti-kínálati függvénye a konstans 1 függvény.

3.10. definíció. A $p \in P$ portfólió likvidációs mark-to-market értékét az $s \in S$ állapotban a következőképpen definiáljuk

$$l^s(p) = p_0 + \sum_{j \in J} \int_0^{p_j} m_j^s(x) \, dx. \quad (3.3)$$

Az előző definíció alapján l jelöli azt a jövedelmet, amelyet a pénzügyi alegység a teljes portfóliójának azonnali felszámolásával realizálhatna.

3.11. definíció. A $p \in P$ portfólió uppermost mark-to-market értékét az $s \in S$ állapotban a következőképpen definiáljuk

$$u^s(p) = p_0 + \sum_{j \in J^+(p)} m_j^s(0^+) p_j + \sum_{j \in J^-(p)} m_j^s(0^-) p_j. \quad (3.4)$$

A p portfólió uppermost értékét úgy interpretálhatjuk, mint a portfólió hosszú távú értéke. Ebben az esetben a portfóliót a legjobb vételi és legjobb eladási árakon értékeljük.

3.12. definíció. A $p \in P$ portfólió likvidációs költségét az $s \in S$ állapotban a következőképpen definiáljuk

$$c^s(p) = u^s(p) - l^s(p). \quad (3.5)$$

3.13. példa. Tekintsünk egy portfóliót, amely készpénzből és egy kockázatos eszközből áll: $x = (3, 4)$. Legyen az MSDC a következőképpen adott

$$m(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x \leq 0 \\ 2, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

Az így megadott paraméterek mellett a portfólió likvidációs mart-to-market értéke

$$l(x) = 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 8,$$

uppermost értéke

$$u(x) = 3 + 2 \cdot 4 = 15,$$

likvidációs költsége

$$c(x) = 15 - 8 = 7.$$

Egy adott piaci helyzetben a pénzügyi alegység az általa birtokolt portfólió egy részének vagy egészének felszámolásával még nem alakíthat ki tetszőleges másik portfóliót. Másképpen megfogalmazva, az alegység kiindulási portfóliója meghatározza a portfóliók halmazának azon részhalmazát, amely elérhető az alegység számára. Formálisan ezt mondja a következő definíció.

3.14. definíció. *Portfóliók adott A halmaza elérhető a $p \in P$ portfólióból, ha p -nek egy részének vagy egészének felszámolásával el tudunk jutni A -ba, azaz*

$$A^s(p) = \{q \in P : q_0 = l^s(p_0, p_J - q_J)\}. \quad (3.6)$$

3.15. definíció. *Az $\mathcal{L}^s \subseteq P$ halmazt likviditási elvárásnak (liquidity policy) nevezzük, ha minden $s \in S$ állapot esetén a következők teljesülnek*

- $\mathcal{L}^s$ konvex és zárt,
- minden $p \in \mathcal{L}^s$ minden $a > 0$ esetén $p \oplus a \in \mathcal{L}^s$ teljesül,
- minden $p \in \mathcal{L}^s$ esetén $(p_0, 0) \in \mathcal{L}^s$ teljesül,
- $A^s(\theta(N)) \cap \mathcal{L}^s \neq \emptyset$.

A 3.15. definíció második pontja azt mondja, hogy tetszőleges mennyiségű készpénzt hozzáadva a portfólióhoz, illetve a harmadik pont szerint az tetszőleges mennyiségű illikvid eszközt felszámolva a portfólió továbbra is meg fog felelni a likviditási elvárásnak.

Összességében a likviditási elvárásra úgy gondolhatunk, mint a szabályozó által meghatározott előírása, amelynek a pénzügyi rendszer egészének és az alegységeknek is meg kell felelni.

3.3. Kockázatelosztási játékok

A játékelméletből ismert kockázatelosztási játékok Denault (2001) nevéhez fűződnek. A kockázatelosztási játékok a Denault (2001) által bevezetett kontextusban, költségelosztási problémaként jelennek meg, így a játékot definiáló v (költség) függvényről feltetethető a monotonitás és a szubadditivitás.

A korábbi jelölések mellett a kockázatelosztási játékok a következő formában írhatók fel minden $C \subseteq N$ koalícióra

$$X_s(C) = \sum_{i \in C} X_{s,i},$$

ahol $C \in \mathcal{P}(N)$.

3.16. definíció. *Az $(N, S, \pi, X, \theta, m, \rho)$ listát kockázatelosztási helyzetnek nevezzük, ahol N az alegységek száma, S a lehetséges világállapotok tere, θ az alegységek portfólióinak mátrixa, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_S)$ valószínűségi mérték, X a portfóliók realizációs vektoraiból képzett mátrix, ρ koherens kockázati mérték és m az egyes eszközök különböző világállapotokhoz tartozó marginális keresleti-kínálati függvényeinek mátrixa.*

3.17. definíció. A $(N, S, \pi, X, \theta, m, \rho)$ kockázatelosztási helyzetben a $v \in \mathcal{G}_c^N$ kockázatelosztási játékot a következőképpen határozzuk meg

$$v(C) = \rho(X(C)),$$

minden $C \in \mathcal{P}(N)$ esetén.

A Denault (2001) által bevezetett kockázatelosztási játékok a kiegyensúlyozott játékok osztályához tartoznak. Sőt, Denault (2001) azt is megmutatta, hogy minden kockázatelosztási játéknak minden részjátéka is kockázatelosztási játék, így ezek a játékok a teljesen kiegyensúlyozott játékok osztályához tartoznak.

3.4. Likviditási elvárással kiegészített kockázatelosztási játékok

A Denault (2001) által bevezetett kockázatelosztási játékokban még nem tettünk semmilyen kikötést, arra vonatkozóan, hogy a pénzügyi alegységek portfólióinak milyen, a szabályozó által előírt követelményeknek kell megfelelniük. A kockázatelosztási játékokat likviditási elvárásokkal Csóka és Herings (2012) vezette be. A fejezet további részében az általuk bevezetett kockázatelosztási játékok módosításával vezetjük be az általunk alkalmazott kockázatelosztási módszert.

3.18. definíció. Az $(N, S, \pi, X, \theta, m, \mathcal{L}, \rho)$ listát likviditási elvárással kiegészített kockázatelosztási helyzetnek nevezzük, ahol N az alegységek száma, S a lehetséges világállapotok tere, θ az alegységek portfólióinak mátrixa, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_S)$ valószínűségi mérték, X a portfóliók realizációs vektoraiból képzett mátrix, $\mathcal{L}$ az egyes világállapotokhoz tartozó likviditási elvárások vektora és m az egyes eszközök különböző világállapotokhoz tartozó marginális keresleti-kínálati függvényeinek mátrixa.

3.19. definíció. Legyen $(N, S, \pi, X, \theta, m, \mathcal{L}, \rho)$ likviditási elvárással kiegészített kockázatelosztási helyzet és $C \subset N$ a pénzügyi rendszer alegységeinek egy koalíciója. Ekkor a C koalíció realizációs vektorát a következőképpen határozzuk meg

$$X^s(C) = u^s(q(C)) \rightarrow \sup \tag{3.7}$$

$$s.t. \quad q(C) \in A^s(\theta(C)) \cap \mathcal{L}^s, \quad s \in S$$

3.20. megjegyzés. A 3.19. definícióval meghatározott realizációs vektor eltér a Csóka és Herings (2012) modelljében alkalmazott realizációs vektortól.

A nagykoalícióra a 3.19. definíció hasonlóképpen alkalmazható és ekkor a realizációs vektor a következő definícióban meghatározott alakban írható fel.

3.21. definíció. A pénzügyi rendszer $X(N) \in \mathbb{R}^S$ realizációs vektorát a következőképpen határozzuk meg

$$X^s(N) = u^s(q(N)) \rightarrow \sup \quad (3.8)$$

$$s.t. \quad q(N) \in A^s(\theta(N)) \cap \mathcal{L}^s, \quad s \in S$$

Ha minden $C \subseteq N$ koalícióra ez a szuprénum felvétetik, azaz maximumra cserélhető, akkor jelölje $q^s(C)$ a (3.8). egy optimális megoldását az $s \in S$ állapotban, amelyre

$$X^s(C) = u^s(q^s(C)) \quad (3.9)$$

Legyen továbbá $t^s(C)$ a C koalícióhoz tartozó kereskedési vektor $s \in S$ állapotban, amelyre

$$q^s(C) = \theta(C) + t^s(C). \quad (3.10)$$

Az előzőek alapján a C koalícióhoz tartozó kereskedési vektor megmutatja, hogy hogyan kell a C koalíciónak módosítani a portfólióján, úgy hogy minimális költségen olyan portfóliót alakíthasson ki, amely megfelel a szabályozó által előírt likviditási elvárásnak.

Tekintsünk néhány példát az általunk meghatározott likviditási elvárással kiegészített kockázatelosztási játékokra.

3.22. *példa.* Tekintsünk egy olyan kockázatelosztási helyzetet, amelyben egyetlen lehetséges világállapot van és $\mathcal{L} = \mathbb{R}$ reperzentálja a likviditási elvárást. Legyen továbbá a realizációs vektorokból álló mátrix a következőképpen adott:

Világállapot/ $X(C)$	$X(\{1\})$	$X(\{2\})$	$X(\{1, 2\})$
s_1	-100	-50	-150
$\rho(X)$	100	50	150
$v(C)$	100	50	150

3.1. táblázat. Additív játék

A táblázat alapján azonnal megállapítható, hogy az ilyen módon megadott játék additív.

3.23. *példa.* Tekintsünk egy olyan kockázatelosztási helyzetet, amelyben két lehetséges világállapot van $S = \{s_1, s_2\}$ és $\mathcal{L} = \mathbb{R}$ reperzentálja a likviditási elvárást. Legyen továbbá a realizációs vektorokból álló mátrix a következőképpen adott:

A táblázatból azonnal látható, hogy $v(X(\{1\})) + v(X(\{2\})) > v(X(\{1, 2\}))$ fennáll, így az ily módon adott játék szubadditív.

Világállapot/ $X(C)$	$X(\{1\})$	$X(\{2\})$	$X(\{1, 2\})$
s_1	-100	-20	-120
s_2	-5	-80	-85
$\rho(X)$	100	80	120
$v(C)$	100	80	120

3.2. táblázat. Szubadditív játék

3.24. *példa.* Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a piacon egy pénzügyi rendszert tekintünk két alegységgel, amelyek mindegyike a $J = 1$ kockázatos eszközbe és készpénzbe fektetett. Jelölje az alegységek portfólióját rendre $\theta^1 = (20, -11)$ és $\theta^2 = (26, -7)$, amelyből azonnal látszik, hogy mindkét egység rendelkezik short pozícióval a kockázatos eszközből. Jelölje $S = \{s_1, s_2\}$ a lehetséges világállapotok terét és tegyük fel, hogy minden világállapot azonos valószínűséggel következik be. A kockázatos eszköz marginális keresleti-kínálati függvénye az egyes állapotokban legyen a következőképpen adott:

$$m_1^1(x) = \begin{cases} 5, & \text{ha } x \leq 0 \\ 4, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

$$m_1^2(x) = \begin{cases} 10, & \text{ha } x < -2 \\ 9, & \text{ha } -2 \leq x < -1 \\ 8, & \text{ha } -1 \leq x < 0 \\ 7, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 6, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

Jelölje $\mathcal{L}^{s_1} = \mathcal{L}^{s_2} = \{p \in P : p_1 \geq -10\}$ a likviditás elvárását az egyes állapotokban. Jelen esetben a szabályozó azt írja elő, hogy az alegység egyéni szinten és együttesen (rendszer szinten) sem rendelkezhetnek több, mint 10 short pozícióval a kockázatos eszközből. Legyen az általunk alkalmazott kockázati mérték a maximális veszteség.

Az ilyen módon adott kockázatelosztási helyzetben azonnal látható, hogy az 1-es alegység és a pénzügyi rendszer nem felel meg a szabályozói előírásnak, hiszen az 1-es alegység 11, míg a rendszer 18 short pozícióval rendelkezik a kockázatos eszközből.

Az s_1 világállapotban az alegységek 5 áron vehetnek és 4 áron adhatnak el kockázatos eszközt. Mivel a likviditási elvárás nem engedi meg, hogy az alegységek és a rendszer 10 egységnél több kockázatos eszközzel rendelkezzen, így az 1-es alegységnek 1 egységnyi kockázatos eszközt, míg a rendszernek 8 egységnyi kockázatos eszközt kell vásárolnia. Így, az 1-es alegységre az s_1 állapotban a $t_1(\{1\}) = (-5, 1)$ az optimális kereskedési vektort és a $q(\{1\}) = (15, -10)$ portfóliót kapjuk. A $q(\{1\})$

portfólió uppermost értéke $u^s(q(\{1\})) = 15 - 10 \cdot 5 = -35$, így $X(\{1\}) = -35$ adódik. Ellenőrizhető, hogy azonos eredményt adódik, ha az 1-es alegység 1 és 11 egység között vásárol kockázatos eszközt. 11 egységnél több kockázatos eszköz vásárlása viszonyt már veszteséget eredményez az alegység számára, hiszen a long pozíciókat az MSDC szerint 4-en értékeljük. Mivel a 2-es alegység megfelel a likviditási elvárásnak, a hozzá tartozó kereskedési vektor $t_1(\{2\}) = (0, 0)$, a portfóliójának uppermost értéke $u^s(q(\{2\})) = 26 - 7 \cdot 5 = -9$ és így $X(\{2\}) = -9$. A rendszer egészét tekintve a következő eredményeket kapjuk: $t_1(\{1, 2\}) = (-40, 8)$, $q(\{1, 2\}) = (6, -10)$, $u^s(q(\{1, 2\})) = 6 - 10 \cdot 5 = -44$.

Az s_2 világállapotban az 1-es alegységnek ismét 1 egységnyi, míg a rendszer egészének 8 egységnyi kockázatos eszközt kell vásárolni az előző esethez hasonlóan. Így az 1-es alegység kereskedési vektorára $t_2(\{1\}) = (-8, 1)$ és a portfóliójára $q(\{1\}) = (12, -10)$ adódik. Az 1-es alegység portfóliójának uppermost értéke $u^s(q(\{1\})) = 12 - 8 \cdot 10 = -68$ és így $X(\{1\}) = -68$. Mivel a 2-es alegység ebben az állapotban is megfelel a likviditási követelménynek (hiszen a likviditási elvárás azonos a két állapotban), így $t_2(\{2\}) = (0, 0)$, $q(\{2\}) = (26, -7)$, $u^s(q(\{2\})) = 26 - 8 \cdot 7 = -30$ valamint $X(\{2\}) = -30$. A s_2 világállapotban a rendszer egészére a következők számolhatók: $t_2(\{1, 2\}) = (-77, 8)$, $q(\{1, 2\}) = (-31, -10)$, $u^s(q(\{1, 2\})) = -31 - 8 \cdot 10 = -111$, valamint $X(\{1, 2\}) = -111$. Ebben az állapotban növekvő árak miatt az 1-es alegység és a rendszer optimálisan 1 illetve 8 egység kockázatos eszközt vásárolhat. A kapott eredményeket a következő táblázatban foglaljuk össze:

Világállapot/ $X(C)$	$X(\{1\})$	$X(\{2\})$	$X(\{1, 2\})$
s_1	-35	-9	-44
s_2	-68	-30	-111
$\rho(X)$	68	30	111
$v(C)$	68	30	111

3.3. táblázat. Szuperadditív játék

Ez a példa illusztráció arra, hogy az általunk definiált likviditási elvárással kiegészített kockázatosztási játékok magja lehet üres, ugyanis, ha a magbeliség feltételeit tekintjük a következőket kapjuk

$$\begin{aligned} 68 - x_1 &\geq 0 \\ 30 - x_2 &\geq 0 \\ 111 - (x_1 + x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Ha a feltételeket átrendezzük $68 \geq x_1$, $30 \geq x_2$ és $111 = x_1 + x_2$ korlátok adódnak és megmutatható, hogy nincsen olyan x vektor, amely egyszerre mindháromnak eleget tenne, így a játék magja üres. A 2.28. tétel alapján, mivel a mag üres, a játék nem kiegyensúlyozott.

3.25. *megjegyzés.* Az általunk megadott játékosztály esetén az X_1, X_2 realizációs vektorokra $\rho(X(\{1\}) + X(\{2\})) = \rho(X(\{1, 2\}))$ nem minden esetben teljesül. Például a 3.24. példa esetén a következőt kapjuk

Világállapot/ $X(C)$	$X(\{1\})$	$X(\{2\})$	$X(\{1, 2\})$	$X(\{1\}) + X(\{2\})$
s_1	-35	-9	-44	-44
s_2	-68	-30	-111	-98
$\rho(X)$	68	30	111	98
$v(C)$	68	30	111	-

3.4. táblázat. Szuperadditív játék megjegyzés

A táblázat alapján látható, hogy a maximális vestességgel definiált kockázati mérték szubadditív, viszont maga a játék szuperadditív. Ez abból adódik, hogy a koalíciók portfóliójának értékét nem egyszerűen a portfóliók egyesítésével kaptuk.

3.26. *példa.* Tekintsük a 3.24. példában adott játékot, azonban az alegységek portfóliói legyenek a következőképpen adottak: $\theta_1 = (20, -1)$, $\theta_2 = (1, -8)$. Ekkor a játékokra a következő eredményt kapjuk:

Világállapot/ $X(C)$	$X(\{1\})$	$X(\{2\})$	$X(\{1, 2\})$
s_1	15	-39	-24
s_2	12	-63	-51
$\rho(X)$	-12	63	51
$v(X)$	-12	63	51

3.5. táblázat. Monotonitás

A táblázat alapján látható, hogy ez a játék nem monoton.

A bemutatott példák alapján látható, hogy az általunk bevezetett likviditási elvárással kiegészített kockázatosztási játékok egy nagyon tág játékosztályt határoznak meg. Példát mutattunk additív, szubadditív és szuperadditív játékokra is. A bemutatott példák között a szuperadditív játékok értelmezése nem magától értetődő. A szuperadditív játék esetére úgy gondolhatunk, mint egyfajta piaci kudarcra, ami azért fordulhat elő, mert az alegységnek a kockázataik meghatározása során csak az egyedi kockázataikkal kalkulálnak. Ha a 3.24. példára gondolunk, ott az

alegységek a kockázatok meghatározása során csak azt vizsgálták, hogy egyénileg megfelelnek-e a szabályozói előírásnak és nem vizsgálták meg, hogy vajon a rendszer egésze teljesíti-e a likviditási követelményt.

4. fejezet

Kockázatelosztási módszerek

A kockázatkezelés és a kockázatelosztás elengedhetetlen egy pénzügyi rendszer szereplői számára, így továbblépve a gyakorlati alkalmazás felé, áttekintjük és összehasonlítjuk a legismertebb és legfontosabb kockázatelosztási módszereket. Ebben a fejezetben Balog et al (2011) cikkére támaszkodunk és az általuk alkalmazott gondolatmenetet követve ismertetünk hét allokációs módszert, valamint a szerzők szimulációs eredményeit. A hét vizsgált kockázatelosztási módszer a következőket foglalja magában: egyéni kockázattal arányos módszer (Activity based method, Hamlen et al (1977)), béta-módszer (Beta method, lásd például Homburg és Scherpereel (2008)), növekményi módszer (Incremental method, lásd például Jorion (2007)), költséggrés-módszer (Cost gap method, Driessen és Tijs (1986)), Euler-módszer (Tasche, 2008), Shapley-módszer (Shapley method, Shapley (1953)) és a nucleolus módszer (Nucleolus method, Schmeidler (1969)).

4.1. definíció. Jelölje X_N^p az előző fejezetben a 3.16. definícióban meghatározott kockázatelosztási helyzetet, valamint $RCAS_N$ az N alegységgel rendelkező kockázatelosztási helyzetek osztályát.

4.2. definíció. A $\Psi : RCAS_N \rightarrow \mathbb{R}^N$ függvényt kockázatelosztási módszernek nevezzük.

A kockázatelosztási módszerek segítségével meghatározható, hogy a rendszer alegységeinek az egyes kockázatelosztási helyzetekben mennyi tőkét szükséges tartálékolniuk. Mielőtt a fent említett kockázatelosztási módszereket részletesen bemutatnánk, tekintsük át három lehetséges, a későbbiekben az összehasonlítás alapját képező tulajdonságukat.

4.3. definíció. A Ψ kockázatelosztási módszer egyenlően kezelő (Equal Treatment Property, ETP), ha minden $X_N^p \in RCAS_N$ kockázatelosztási helyzetre és tetszőleges

$i, j \in N$ alegységek esetén, ha minden $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ alegységcsoportra $\rho(X_{S \cup \{i\}}) - \rho(X_S) = \rho(X_{S \cup \{j\}}) - \rho(X_S)$ teljesül, akkor $\Psi_i(X_N^\rho) = \Psi_j(X_N^\rho)$.

Az egyenlően kezelő tulajdonság biztosítja, hogy ha két alegység azonos kockázati paraméterekkel rendelkezik, azaz tetszőleges olyan koalícióhoz, amely őket nem tartalmazza, ahhoz mindkét alegység ugyanannyival járul hozzá, akkor számukra a kockázatelosztási módszer azonos tőketartalékot írjon elő.

4.4. definíció. A Ψ kockázatelosztási módszer ösztönző (*Strong Monotonicity, SM*), ha minden $X_N^\rho, Y_N^\eta \in RCAS_N$ kockázatelosztási helyzetre $i \in N$, alegységre és $S \subseteq N$ alegységcsoportra, ha $\rho(X_{S \cup \{i\}}) - \rho(X_S) \geq \eta(Y_{S \cup \{i\}}) - \eta(Y_S)$ teljesül, akkor $\Psi_i(X_N^\rho) \geq \Psi_i(Y_N^\eta)$.

A kockázatelosztási módszerek ösztönző tulajdonsága azt mondja, hogy a módszernek olyannak kell lennie, hogy, ha egy tetszőleges alegységet két különböző helyzetben vizsgálva az elsőben kockázatosabbnak bizonyul, mint a másodikban, akkor első szituációban legalább akkora tőkét kelljen tartalékolnia, mint a kevésbé kockázatos második esetben. Ha egy módszer rendelkezik az ösztönző tulajdonsággal, akkor egyik alegységnek vagy alegységcsoportnak sem érdemes magát a valósánál kockázatosabbnak mutatni, annak reményében, hogy ilyen módon a módszer kevesebb tőkekövetelményt ír majd elő a számára.

4.5. definíció. A Ψ kockázatelosztási módszer stabil (*Core Compatibility, CC*), ha minden $X_N^\rho \in RCAS_N$ kockázatelosztási helyzetre $\rho(X_N) = \sum_{i \in N} \Psi_i(X_N^\rho)$ és minden $S \subset N$ alegységcsoportra $\rho(X_S) \geq \sum_{i \in N} \Psi_i(X_N^\rho)$.

A stabilitás szerint a pénzügyi rendszer teljes tőketartalékát szét kell osztani az alegységek között, olyan módon, hogy minden alegység számára legfeljebb akkora tőketartalékot írjunk elő, mint amekkora az saját kockázatához tartozó tartalékolandó tőke mennyisége. Stabil allokációval olyan szétosztás állítható elő, amelyet minden alegységcsoport elfogad, azaz amelyből az alegységeknek sem együtt, sem külön külön nem érdemes elmozulni. A stabil kockázatelosztás a játékelméleti bevezetőben a 2.25. definícióban ismertetett mag elosztásnak felel meg.

Csóka és Pintér (2010) megmutatták, hogy általános koherens kockázati mérték használata esetén nem lehet olyan kockázatelosztási módszert találni, amely egyszerre lenne ETP, SM, és CC. Ezt mondja ki a következő tétel.

4.6. tétel (Csóka és Pintér (2010)). *Általános koherens kockázati mérték használata esetén nincsen olyan kockázatelosztási módszer, amely egyszerre egyenlően kezelő, ösztönző és stabil.*

4.1. Kockázatelosztási módszerek

Egyéni kockázattal arányos módszer

Az egyéni kockázattal arányos módszer a pénzügyi rendszer kockázatát az alegységek egyedi, a többi alegység kockázatától független kockázatának arányában osztja szét a szereplők között. Tetszőleges $X_N^\rho \in \text{RCAS}_N$ kockázatelosztási helyzetben és $i \in N$ alegység esetén az egyéni kockázattal arányos módszer által meghatározott kockázat a következőképpen határozható meg:

$$\Psi_i(X_N^\rho) = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j \in N} \rho(X_j)} \rho(X_N).$$

4.7. *megjegyzés.* Az egyéni kockázattal arányos módszer legfőbb hátrányának az tekinthető, hogy figyelmen kívül hagyja az alegységek függőségi struktúráját, így nem rendel kisebb kockázatot azokhoz az alegységekhez, akik negatívan korrelálnak a többi alegységgel.

Béta-módszer

Tekintjük az $X_N^\rho \in \text{RCAS}_N$ kockázatelosztási helyzetet. Legyen $\text{Cov}(X_i, X_N)$ az $i \in N$ alegység és a pénzügyi rendszer realizációs vektorainak kovarianciája. Ekkor az $i \in N$ alegységre β_i a következőképpen számolható:

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(X_i, X_N)}{\text{Cov}(X_N, X_N)}.$$

A béta-módszer a rendszer kockázatát az alegységek bétáinak arányában osztja szét az alegységek között. Így tetszőleges $X_N^\rho \in \text{RCAS}_N$ kockázatelosztási helyzetben és $i \in N$ alegység esetén a béta-módszer által meghatározott kockázat a következő:

$$\Psi_i(X_N^\rho) = \frac{\beta_i}{\sum_{j \in N} \beta_j} \rho(X_N).$$

4.8. *megjegyzés.* A béta-módszer nem alkalmazható minden esetben, ha minden $i \in N$ esetén $\beta_i = 0$, akkor a módszer nem működik.

Növekményi módszer

A növekményi módszer a pénzügyi rendszer kockázatát az egyes alegységek a rendszer teljes kockázatához való egyéni hozzájárulásának arányában osztja szét az alegységek között. Tetszőleges $X_N^\rho \in \text{RCAS}_N$ kockázatelosztási helyzetben és $i \in N$ alegység esetén a növekményi módszer által meghatározott kockázat a következő:

$$\Psi_i(X_N^\rho) = \frac{\rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{i\}})}{\sum_{j \in N} \rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{j\}})} \rho(X_N).$$

4.9. *megjegyzés.* A béta-módszerhez hasonlóan a növekményi módszer sem számolható minden esetben, ha minden $i \in N$, alegységre $\rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{i\}}) = 0$, akkor a módszer nem működik.

Költségrésmódszer

A költségrés módszer meghatározásához definiáljuk az $i \in N$ alegységre vonatkozó minimális költségrést a következőképpen:

$$\gamma_i = \min_{\emptyset \neq S \subseteq N, i \in S} \left| \rho(X_S) - \sum_{j \in S} \rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{j\}}) \right|.$$

Ekkor tetszőleges $X_N^\rho \in \text{RCAS}_N$ kockázatelosztási helyzetben és $i \in N$ alegység esetén a költségrésmódszer által meghatározott kockázat a következő:

ha $\sum_{j \in N} \gamma_j = 0$, akkor

$$\Psi_i(X_N^\rho) = \rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{i\}}),$$

különben

$$\Psi_i(X_N^\rho) = \rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{i\}}) + \frac{\gamma_i}{\sum_{j \in N} \gamma_j} \left(\rho(X_N) - \sum_{j \in N} (\rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{j\}})) \right).$$

Euler-módszer

Tetszőleges $X_N^\rho \in \text{RCAS}_N$ kockázatelosztási helyzetben és $i \in N$ alegység esetén az Euler-módszer által meghatározott kockázat a következő:

$$\Psi_i(X_N^\rho) = \rho'(X_N, X_i),$$

ahol $\rho'(X_N, X_i)$ a $\rho(X_N)$ X_i szerinti iránymenti deriváltja.

Shapley-módszer

Tetszőleges $X_N^\rho \in \text{RCAS}_N$ kockázatelosztási helyzetben és $i \in N$ alegység esetén az Shapley-módszer (Shapley, 1953) által meghatározott kockázat a következő:

$$\Psi_i(X_N^\rho) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N \setminus S| - 1)!}{|N|!} [\rho(X_{S \cup \{i\}}) - \rho(X_S)].$$

Nukleolusz módszer

Tetszőleges $X_N^\rho \in \text{RCAS}_N$ kockázatelosztási helyzetben és $i \in N$ alegység esetén a nukleolusz (Schmeidler, 1969) által meghatározott kockázat a következőképpen határozható meg:

$$\mathcal{N}_i(X_N^\rho) = \{x \in I(X_N^\rho) : \varrho \circ e(v, x) \geq_{lex} \varrho \circ e(v, z), z \in I(X_N^\rho)\},$$

ahol I az imputációk halmazát, $e(\cdot, \cdot) : \mathcal{G}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{2^N}$ a többletfüggvényt, $\geq_{lex}$ a lexikografikus rendezést és ϱ a nemcsökkenő rendezést jelöli.

4.2. Analitikus és szimulációs eredmények

A kockázatelosztási módszerek ismeretében, foglaljuk össze Balog et al (2011) analitikus és szimulációs eredményeit. A cikk szerzői azt vizsgálták, hogy a bemutatott hét módszer a teljesíti-e az egyenlően kezelő, ösztönző és stabil tulajdonságokat. Azt az eredményt kapták, hogy a hét módszer közül csak kettő, a játékelméletből ismert Shapley-módszer és a nukleolusz elégíti ki a három tulajdonságból kettőt. A vizsgálatuk ugyanakkor alátámasztja Csóka és Pintér (2010) eredményét, hogy nem található olyan kockázatelosztási módszer, amely egyszerre tenne eleget mindhárom méltányossági követelménynek.

Módszer/Tulajdonság	Szimmetrikus	Ösztönző	Stabil
Egyéni kockázattal arányos	✓	—	—
Béta	✓	—	—
Növekményi	✓	—	—
Költség	✓	—	—
Euler	—	—	—
Shapley	✓	✓	—
Nukleolusz	✓	—	✓

4.1. táblázat. Az elosztási módszerek tulajdonságai, (Balog et al, 2011)

A szerzők szimuláció segítségével azt is vizsgálták, hogy a kockázatelosztási módszerek az esetek hány százalékában teljesítik a stabilitás tulajdonságát három és négy játékos esetén. Megfigyelték, hogy a Shapley-érték teljesítménye három játékos esetén 60% körüli, míg a játékosok számának növelésével a stabil allokációk száma csökkent, a teljesítmény már csak 45% körül mozgott.

5. fejezet

Alkalmazás

Az elméleti modell felépítését követően, a dolgozat következő részében bemutatunk egy alkalmazási lehetőséget a rendszerkockázat mérésére és szétosztására egy bankrendszer szereplőit vizsgálva. A dolgozatban rendszerkockázatnak tekintjük az olyan kockázatokat, amik az egyének szintjén nem jelentkeznék, de egész rendszert vizsgálva már igen. Az általunk kialakított elemzési keret azon az intuíción alapul, hogy ha egy rendszert tekintünk, a mi esetünk a bankrendszert, akkor a rendszer kockázata abból ered, hogy amikor a rendszer szereplői meghatározzák a saját kockázataikat és az azok fedezéséhez szükséges tőke mennyiségét, akkor nem számolnak a szereplők együttmozgásából eredő kockázattal.

Az intuíció alaposabb megértése végett, tekintsünk egy példát, amelyet a későbbiek során az elemzésben is használni fogunk. Korlátozzuk a vizsgálatunkat a bankrendszer szereplőinek ingatlannal fedezett lakossági jelzáloghiteleire. Tegyük fel, hogy a bankrendszernek N szereplője van, akiknek valamilyen kedvezőtlen esemény hatására kényszerértékesíteniük kell a hitelek fedezetét képező ingatlanok adott hányadát. Tegyük fel továbbá, hogy a bankrendszer minden szereplője átlagos jellemzőkkel leírható ingatlanokkal rendelkezik és jelölje y_i az i bank által értékesíteni kívánt ingatlanmennyiséget. Az ingatlanok marginális keresleti-kínálati függvénye alapján jelölje a legjobb eladási árat m_1 , a második legjobbat m_2 és így tovább, oly módon, hogy $k < l$ esetén $m_k > m_l$ teljesüljön. Minden bank nyilvánvalóan a legjobb eladási áron szeretné az ingatlanjait értékesíteni, így tehát a piacon először az ingatlanok eladása a megfigyelhető legjobb eladási árakon valósul meg.

Abban az esetben, ha a legjobb eladási áron eladható mennyiség kevesebb, mint amennyi ingatlant a bankok kínálnak, akkor a második legjobb eladási árak következnek és így tovább. Az i bank tehát, amikor meghatározza, hogy várhatóan mekkora bevételre tehet szert y_i mennyiségű ingatlan értékesítésével, akkor azzal kalkulál, hogy egy y_i méretű tranzakció várhatóan milyen m_k árakon fog teljesülni. Formális

jelölésekkel az i bank által elérhető bevétel y_i mennyiségű ingatlan értékesítésével ceteris paribus

$$\Pi_i = \int_0^{y_i} m(x) \, dx.$$

A probléma azonban akkor jelentkezik, amikor egyszerre több bank is értékesíteni szeretné a fedezetül szolgáló ingatlanokat. Mivel az ingatlanok piaca illikvid piac, így azáltal, hogy sokkal több ajánlat ékezik be, azok teljesülése esetén a piacon megfigyelhető árak jelentősen el fognak mozulni, így a bankrendszer szereplői alacsonyabb átlagos várható bevételre számíthatnak, mint amekkorával előzetesen kalkuláltak.

Összefoglalva, az a következtetés vonható le, hogy amikor a bankrendszer szereplői egyszerre értékesítik (együttmozgás) az ingatlanokat, akkor az árak jelentős mértékben lefelé mozdulhatnak és így rendszer szereplői nem jutnak akkora bevételhez, mint amekkora az esetlegesen felmerült kockázataik fedezéséhez szükséges. Ezen példa alapján látható, hogy a bankok ingatlannal fedezett jelzáloghiteleinek esetében, a fedezésére a Bázeli II szabályozás alapján egyénileg képzett tőke nem minden esetben elegendő, így az együttes értékesítésből származó rendszer szintű kockázatra pótlólagos tőke tartalékolása szükséges. Az általunk vizsgált rendszer kockázat problémája a Bázeli III. szabályozási rendszer irányába mutat.

Az elméleti modellben alkalmazott konvex optimalizáció ebben a problémakörben is megjelenik, méghozzá azon a ponton, amikor a bankoknak valamilyen kedvezőtlen esemény hatására dönteniük kell arról, hogy az ingatlanok mekkora hányadát értékesítsék. Ekkor az optimális értékesítendő mennyiséget határozzuk meg a konvex optimalizáció segítségével.

Összességében azt mondhatjuk, hogy a dolgozatban az elemzés célja nem az, hogy a bankrendszer kockázatát pontos adatok alapján számszerűsíteni tudjuk, hanem elsősorban az, hogy megmutassuk, hogy az előbb felvázolt probléma, azaz a piaci szereplők együttmozgásából eredő kockázat releváns kérdés lehet a bankrendszer szereplőinek kockázatkezelési gyakorlatában. A dolgozat megírásakor az a gondolat vezérelt, hogy az általunk felépített modell a szabályozás számára kiindulópont lehet egy olyan módszer kidolgozásában, amelybe a bankok rendszerszintű kockázatai is beépíthetők, olyan módon, hogy a rendszer számára meghatározott tőkekövetelményt a szereplők között a rendszer kockázatához való hozzájárulásuk mértékében tudja szétosztani.

Előrebocsátjuk, hogy a probléma részletes, adatokon történő bemutatásakor számos feltételezéssel és egyszerűsítéssel élünk, részben rendelkezésre álló adatok hiányában, részben azért, mert az intuíciónak szerettük volna a hangsúlyt helyezni és nem pedig részletes számolások levezetésére. A bemutatott példa csak illusztráció arra, hogy hogyan lehet a kockázatkezelésbe az együttmozgásból eredő kockáza-

tot beépíteni. Nyilvánvaló, hogy ez a kockázat más kockázatkezelési modellekben az általunk alkalmazott lehetőségtől eltérően jeleníthető meg.

A fejezet további részeiben ismertetjük a bázeli szabályozásoknak azon részeit, amelyeket a későbbiekben alkalmazni fogunk, bemutatjuk a felhasznált adatokat és áttekintjük a modell alkalmazási lehetőségét egy konkrét számpéldán keresztül.

5.1. A bázeli szabályozások

A Bázeli Tőkeegyezmény 1988-ban jött létre, azzal a céllal, hogy összehangolja a nemzetközileg aktív bankok szabályozói és tőkemegfelelési sztenderdjeit.

Bázel I.

Az első bázeli egyezményben foglaltak egyik legfontosabb eleme a tőke egységes fogalmának meghatározása, valamint a szavatoló és számviteli tőke fogalmának szétválasztása. Az ajánlások a tőkemegfelelésre vonatkozó szabályozást is tartalmazták, miszerint a szavatoló tőke és a kockázattal súlyozott eszközérték arányának minimumát 8%-ban rögzítették, amely tőkekövetelmény legalább 50%-át alapvető tőkeelemek formájában kellett tartalékolni. A tőkekövetelmény számítás során alkalmazott kockázati súlyokat ad hoc jelleggel határozták, miszerint a különböző szegmenseket kategóriákba sorolták, amelyekhez 0%, 20%, 50% vagy 100% kockázati súlyt rendeltek.

Az egyezményt számos kritika érte, ezért 1996-ban az ajánlások továbbfejlesztésére és bővítésére került sor. Az 1988-as ajánlások a piaci kockázat kezeléséről még rendelkeztek, így bővítés során ezen kockázatot is a integrálták szabályozási keretrendszerbe.

Bázel II

A Bázel I. szabályozás alkalmazása során nyilvánvalóvá vált, hogy a szabályozó által előírt és a közgazdaságilag szükséges tőkekövetelmény a kockázatok fedezésére eltér egymástól. Ez abból adódott, hogy ad hoc kockázati súlyokat alkalmaztak, amelyek nem függtek az adott bank kockázatkezelésétől és portfólió minőségétől. Azt mondhatjuk, hogy a Bázel I. szabályozásban fontosabb kérdésnek bizonyult, hogy mi a tőke, mint azt, hogy mekkora legyen a kockázatok fedezésére képzett tőke.

A Bázel I. szabályozás felülvizsgálatát követően a Bázeli Bizottság közzétette a Bázel II.-ként ismert ajánlását, amely egy három pilléren nyugvó szabályozási keretrendszer. A szabályozás célja a pénzügyi rendszer stabilitásának növelése, a szabá-

lyozó által előírt és közgazdaságilag szükséges tőkekövetelmény közelítése, valamint egységes szabályozás kialakítása. A Bázeli II. továbbá a piaci- és hitelkockázat mellett a működési kockázat is integrálta a szabályozásba.

Első pillér

A Bázeli II. szabályozás első pillérét az új tőkeszabályok alkotják a piaci, hitel- és működési kockázatok fedezésére.

Az új szabályozás a *hitelkockázatok* tőkekövetelményének meghatározásában jelentős újításokat hozott, az ügyfél típusa mellett az ügyfél kockázatosságát is beépítette a kockázatkezelési gyakorlatba. Az új szabályozás szerint a bankok választhatnak, hogy három lehetséges módszer közül melyiket alkalmazzák a hitelkockázataik fedezéséhez szükséges tőke meghatározásában. A három lehetséges módszer a sztenderd módszer, az alap belső minősítésen alapuló módszer (Internal Rating Based Approach, IRB) és a fejlett IRB módszer (advanced IRB).

A sztenderd módszer azon intézmények számára ajánlott, akik még nem felelnek meg a belső minősítésen alapuló módszer alkalmazási követelményeinek. Sztenderd módszer alkalmazása esetén a bank ügyfeleihez rendelt kockázati súlyok meghatározása erre specializált cégek által történik és a tőkekövetelmény az ezen kockázati súlyokkal súlyozott eszközérték 8%-aként adódik.

A fejlettebb kockázatkezelési gyakorlattal rendelkező bankok számára a szabályozás lehetővé tette, hogy saját maguk határozzák meg a hitelportfóliójuk kockázatosságát és a kockázataik ellensúlyozásához szükséges tartalékolandó tőke mennyiségét. Az alap belső minősítésen alapuló rendszerek esetén a kockázati súlyfüggvényt, a nemteljesítéskori veszteségrátát (loss given default, LGD), a nemteljesítés esetén meglévő kitettségek (exposure at default, EAD) értékét és a lejáratot (maturity, M) a szabályozó határozza meg, ugyanakkor a nemteljesítési valószínűség meghatározását a bank maga végzi el. A fejlett belső minősítésen alapuló módszert alkalmazó bankok a nemteljesítési valószínűségen túli kockázati tényezőket is maguk határozhatják meg. Minél több paraméter becslésére vállalkozik a bank maga, annál pontosabban, annál inkább hitelportfóliójának megfelelően tudja kockázatait meghatározni, így a kockázatomérés hatékonysága messze meghaladhatja a korábbi szabályozói becsléseket.

Az IRB módszer által meghatározott kockázati súlyfüggvény kiindulópontja egy egyfaktoros Gaussi kopula modell, amelyben az a default ráta, amit 99,9%-os valószínűséggel nem fogunk meghaladni (worst case default rate (WCDR)) a következő:

$$WCDR = \Phi \left[\frac{1}{\sqrt{1-R}} \cdot \Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} \cdot \Phi^{-1}(0,999) \right],$$

amelyben Φ a normális eloszlás eloszlásfüggvényét, R az eszközök korrelációját jelöli. Ez alapján a kockázattal súlyozott eszközérték a következőképpen kapható

$$RWA = 1,06 \cdot 12,5 \cdot EAD \cdot LGD \cdot (WCDR - PD) \cdot MA,$$

ahol MA jelöli a lejáratí tényezőt (maturity adjustment), amelynek értéke vállalati és lakossági kitettségek esetén eltérő. Az előzőek alapján tehát az IRB által meghatározott tőkekövetelmény a következő

$$C = 0,08 \cdot RWA.$$

A bankok számára *működési kockázatok* kezelésére a Bázeli II. szabályozás három lehetséges módszert kínál. Az első módszer az alapmutató módszer (Basic Indicator Approach, BIA), amely szerint a tőkekövetelmény a bank előző három évi átlagos éves bruttó jövedelmének fix százalékaként határozható meg. A második lehetséges módszer a sztenderd módszer (Standardised Approach, SA) vagy alternatív sztenderd módszer (Alternative Standardised Approach, ASA). Sztenderd módszer esetén a számítás az alapmutató módszerhez hasonlóan történik, a különbséget az jelenti, hogy a tőkekövetelmény számítását először üzleti területenként végzik el, minden területhez külön rendelve kockázati súlyt. Ezt követően a teljes tőkekövetelmény a működési kockázatok fedezésére az üzleti területenként képzett tőkekövetelmények összegeként adódik. Az alternatív sztenderd módszer annyiban különbözik a sztenderd módszertől, hogy a lakossági és kereskedelmi banki üzletág esetén figyelembe veszi, hogy már a hitelkockázatokra is képeztek tőkekövetelményt, így elkerüli ezen területek kettős számbavételét. Végül, a fejlett módszer (Advanced Measurement Approach, AMA) alkalmazásánál belső modellek segítségével térképezik fel az egyes kockázatokot. A fejlett módszer alkalmazásához a banknak szigorú minőségi és mennyiségi elvárásoknak kell megfelelnie.

A *piaci kockázatok* estében a Bázeli II. szabályozás nem hozott lényeges változásokat, megmaradt a VaR alapú modell és a mark-to-market értékelés.

Második pillér

A Bázeli II. szabályozás második pillére az ellenőrzésre vonatkozó szabályokat rögzíti. Annak ellenőrzése, hogy a bankok rendelkeznek-e megfelelő kockázatmérő és kockázatkezelési rendszerrel két módon történik, a tőkemegfelelés belső értékelési eljárása (Internal Capital Adequacy Process, ICAAP) szerint és a felügyeleti felülvizsgálat és

értékelés (Supervisory Review and Evaluation, SREP) alapján. Ezeket az eljárásokat a dolgozatban nem vizsgáljuk részletesen.

Harmadik pillér

A harmadik pillére bankok nyilvánosságra hozatali követelményeit rögzíti, miszerint a bankok kötelesek a kockázatvállalási magatartásukról és tőkeszerkezetükről információkat nyilvánosságra hozni. Ez irányadó lehet az ügyfelek számára a pénzüintézet választásban, ugyanakkor a bankok is bizonyíthatják biztonságos működésüket.

Bázel III.

A Bázel III. szabályozás egyfajta válasznak tekinthető a 2008-ben kirobbant pénzügyi világválságra. Az új szabályozás jelentős mértékben támaszkodik mind tartalmában, mind pedig pszichológiájában az előző bázeli szabályozásokra. A Bázel III. szabályozás legfontosabb intézkedési a következők:

- a tőkehelyzet megerősítése
- kockázati fedezettség megerősítése
- tőkeáttételi mutató bevezetése
- a pro-ciklikusság kezelése
- a rendszerkockázat kezelése
- globális likviditási standardok bevezetése

A felsorolt új intézkedésekből csak kettőt, a dolgozat szempontjából leginkább relevánsnak tekinthető javaslatokat vizsgáljuk részletesen. A bázeli szabályozásban a *likviditási szabályrendszer* új elemként jelenik meg. Ahogyan az a 2008-as gazdasági világválságban megfigyelhető volt, azáltal, hogy a bankok rövidtávú finanszírozási lehetőségei szűkültek, elkerülhetetlenné vált, hogy igényben vegyék a központi bankok hitelezési létesítményeit. A pénzügyi intézmények likviditási helyzetének javítása érdekében a Bázel III. szabályozás két likviditási mutatót vezet be. A likviditási fedezeti ráta (Liquidity Coverage Ratio (LCR)) biztosítja, hogy a bankok mindig rendelkezzenek legalább annyi jó minőségű likvid és 30 napon belül költségmentesen vagy kis költséggel pénzre tehető eszközzel, mint a következő harminc nap várható nettó cash flow-ja. A nettó stabil forrásállomány (Net Stable Funding Ratio (NSFR)) a közép és hosszú távú finanszírozás biztosítását támogatja. Az NSFR mutató

szerint a bankok rendelkezésre álló stabil forrásainak értéke meg kell, hogy haladja a hosszú távú, súlyozott eszközökértéket.

Az általunk vizsgált másik jelentős újítás a *rendszerkockázat* szabályozásba való integrálása. A pénzügyi intézmények magasabb tőkekövetelménye javítja ugyan a pénzügyi rendszer biztonságát, ugyanakkor a nagy intézmények túlzott összekapcsolódása növeli annak kockázatát. A Basel III. szabályozás a rendszerszinten jelentős intézményekre (Systemically Important Financial Institution, SIFI) megemelt tőkemegfelelési elvárást, likviditási felárat, szigorúbb nagy kitettségekre vonatkozó korlátozást, kötelező szanálási és helyreállítási tervet javasol.

5.2. A modell alkalmazása

5.2.1. Feltételezések és felhasznált adatok

A bankok jellemzőinek meghatározása során a magyar bankrendszer hét nagybankjának nyilvánosan elérhető adataival dolgoztunk. A vizsgálat során a bankok lakossági jelzáloghitel állományának nagyságát és bankok közötti eloszlását a Magyar Nemzeti Bank által publikált Jelentés a pénzügyi stabilitásról (MNB (2013a), MNB (2013b)) című kiadványokra és Marsi (2013) cikkére támaszkodva határoztuk meg. Abból az okból kifolyólag, hogy a hitelállomány nagyságára és a hitelek számára vonatkozóan csak a teljes bankrendszerre vonatkozó aggregált adatok álltak rendelkezésünkre, az aggregált mennyiségeket a hét nagybank piaci részesedése arányában osztottuk szét a bankrendszer szereplői között. A bankok ingatlanfedezet állományának nagyságát az új folyósítású jelzáloghitelek száma alapján adtuk meg, azt feltételezve, hogy minden jelzáloghitel szerződés mögött egyetlen ingatlanfedezet áll. Feltételeztük, hogy a hitelek lejáratát egységesen 10 év.

A példánkhoz a hét nagybank közül kiválasztottunk négyet (jelöljük őket rendre $B1, B2, B3, B4$ -gyel), amelyeket teljesen anonimként kezeltük, ismételten hangsúlyozva azt, hogy célunk nem számadatok közzétevése, hanem a módszer alkalmazhatóságának bemutatása.

A bankok tőkekövetelményeik meghatározása során alkalmazott módszertanról, a veszteségrátákról és nemteljesítési valószínűségekről nem álltak rendelkezésünkre adatok, így azt feltételeztük, hogy a bankok a kockázatkezelésük során azonos módszertant alkalmaznak, valamint LGD és PD értékek nagyságrendjét BIS (2006) cikk alapján adtuk meg. A bankok így kapott jellemzőit az 5.1. táblázatban foglaltuk össze.

A vizsgálat során annak a meghatározásához, hogy átlagos jellemzőkkel leírható

Jellemzők/Szereplők	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
EAD (Mrd Ft)	361	357	821	261
PD	0,040	0,040	0,050	0,010
LGD	0,100	0,165	0,165	0,100
Ingatlanállomány	104030	103000	236900	75190

5.1. táblázat. A bankok lakossági jelzáloghitel portfóliójának jellemzői

ingatlanok esetében adott mértékű növekedés az ingatlankínálatban mekkora árcsökkenést okoz, szakértő véleményét kértük. A probléma összetett jellegéből adódóan a szakértők sem tudtak teljesen megalapozott választ adni a kérdésre, azonban a dolgot az általuk javasolt közelítésre hagyatkoztunk. Így abból indultunk ki, hogy Magyarországon körülbelül 90-100 ezer ingatlanra tehető az éves forgalom, a piacon lévő ingatlanok száma pedig körülbelül 200 ezer lehet. Azt tettük fel, hogy normál esetben, ha a piacon megduplázódik az ingatlanok kínálata, akkor ez a növekedés 10%-kal csökkenti az árakat. Legyen tehát a kínálatnövekedés következtében bekövetkező árcsökkenés mértéke ezzel arányos, azaz, ha 20 ezer ingatlannal megnő a kínálat, az okozzon 1%-os árcsökkenést.

Ezzel szemben, a bankok esetében az ingatlanok kényszerértékesítésekor az ingatlanokat gyorsan és ennek következtében olcsóbban kell eladni, ami kiszorítja a piacról a többi eladót. Ekkor, ha az ingatlankínálat megduplázódik, az árcsökkenés mértéke akár 20% is lehet. Ebben az esetben, ha az ingatlanok kínálata 20 ezerrel megnő, az okozzon 2%-os árcsökkenést.

Az 5.2. táblázatban összefoglaltuk, hogy az általunk választott bankok és koalícióik mekkora ingatlanállománnyal rendelkeznek, illetve az általuk okozott árcsökkenés mértékét, abban az esetben, ha a teljes ingatlanállományuk értékesítését feltételezzük.

5.2.2. A játék

Az adatok és feltételezések áttekintését követően, az intuíción alapján felírhatjuk a játékot. A bankrendszer szereplői jelöljék a játékosokat és a v játék rendelje a bankok koalícióihoz a kockázataik fedezéséhez szükséges tőketartalékot. A példában a koalíciók lakossági jelzáloghitelei fedezetéhez szükséges tőkekövetelményt a bázeli tőkefüggvény alapján határoztuk meg.

Az intuíción alapján azt vizsgáltuk meg, hogy hogyan változna a bankok koalícióinak tőkekövetelménye, ha valamilyen kedvezőtlen esemény hatására, a bankoknak értékesíteniük kellene az ingatlanfedezeteiket. A példánkban a bankok minden koa-

Bank	Ingatlanállomány	Áresés
<i>B1</i>	104030	10,40%
<i>B2</i>	103000	10,30%
<i>B3</i>	236900	23,69%
<i>B4</i>	75190	7,52%
<i>B1 B2</i>	207030	20,70%
<i>B1 B3</i>	340930	34,09%
<i>B1 B4</i>	179220	17,92%
<i>B2 B3</i>	339900	33,99%
<i>B2 B4</i>	178190	17,82%
<i>B3 B4</i>	312090	31,21%
<i>B1 B2 B3</i>	443930	44,39%
<i>B1 B2 B4</i>	282220	28,22%
<i>B1 B3 B4</i>	416120	41,61%
<i>B2 B3 B4</i>	415090	41,51%
<i>B1 B2 B3 B4</i>	519120	51,91%

5.2. táblázat. Az áresés mérték a bankok ingatlanértékesítése mellett

lícijára kiszámoltuk, annak az áresésnek a mértékét, ami akkor következne be, ha a koalíció tagjai egyszerre értékesítenék az ingatlanokat. Mivel a kockázatot a példában a bázeli tőkefüggvény által meghatározott tőkekövetelménnyel mértük, ezért az áresés okozta plusz kockázatot a függvény paramétereibe építettük be. Ezáltal az koalíciókhoz tartozó LGD és PD értékeket a koalíció által okozott áresés mértékével arányosan megnöveltük és az új paraméterekkel kiszámoltuk, hogy értékesítés esetén mekkora tőketartalékra lenne szüksége a bankrendszer szereplőinek. Hangsúlyozzuk, hogy a bankok együttmozgásából adódó kockázat áresésen keresztüli megjelenítése csak egy lehetséges megoldás. A bankok kockázatkezelési gyakorlatában alkalmazott módszertanokba másképp, más paramétereken keresztül is beépíthető az intuíció. A példával arra szeretnénk volna felhívni a figyelmet, hogy a bankok piaci együttmozgásából adódik olyan kockázat, amivel a kockázatkezelés során érdemes számolni.

Az első lépésben úgy írtuk fel a játékot, amit a későbbiekben viszonyítási pontként használtunk, hogy még nem feltételeztük kedvezőtlen esemény bekövetkeztét, így azt, hogy a bankok értékesíteni kívánják a hitelek mögött álló ingatlanfedezeteket. A bankok koalícióira a veszteségrátákat a koalíciók tagjainak kitettségekkel súlyozott veszteségrátáinak összegeként kaptuk. A koalíciók nemteljesítési valószínűségét a veszteségrátákhoz hasonlóan, a nemteljesítési valószínűségek kitettségekkel súlyozott összegeként számoltuk. A játékokra az első lépésben kapott eredményeket

az 5.3. táblázatban tüntettük fel.

Megjegyezzük, a félreértések elkerülése végett, hogy nem számoltunk diverzifikációs hatással, így kizárólag a csődvalószínűség, a veszteségráta és a kitettség értékéből határoztuk meg a bankok koalícióihoz tartozó paramétereket. A példában annak a kockázatnak a mérésére koncentráltunk, amely elsősorban a bankrendszer szereplőinek együttmozgásából adódik.

Bank	LGD	PD	EAD	Tőke	$v(C)$	Shapley-érték
			(Mrd Ft)	(Mrd Ft)		
<i>B1</i>	0,100	0,040	543	13,5	13,5	13,5
<i>B2</i>	0,165	0,040	538	22,0	22,0	21,9
<i>B3</i>	0,165	0,050	1237	57,0	57,0	56,6
<i>B4</i>	0,100	0,010	393	4,2	4,2	4,1
<i>B1 B2</i>	0,132	0,040	1081	35,5	35,5	
<i>B1 B3</i>	0,145	0,047	1780	69,8	69,8	
<i>B1 B4</i>	0,100	0,027	936	18,7	18,7	
<i>B2 B3</i>	0,165	0,047	1774	79,2	79,2	
<i>B2 B4</i>	0,138	0,027	930	25,6	25,6	
<i>B3 B4</i>	0,149	0,040	1629	60,7	60,7	
<i>B1 B2 B3</i>	0,150	0,045	2317	92,1	92,1	
<i>B1 B2 B4</i>	0,124	0,032	1473	39,9	39,9	
<i>B1 B3 B4</i>	0,137	0,040	2172	74,1	74,1	
<i>B2 B3 B4</i>	0,153	0,040	2167	82,7	82,7	
<i>B1 B2 B3 B4</i>	0,143	0,040	2710	96,1	96,1	

5.3. táblázat. A bankok jellemzői és a játék értéke ingatlanértékesítés feltelezése nélkül

Az általunk bemutatott példában a rendszer tőkekövetelményét a tőkeallokációs módszerek közül a Shapley-megoldás szerint osztottuk szét a bankrendszer szereplői között. A Shapley-megoldás egyenlően kezelő tulajdonságából következik, hogy az azonos paraméterekkel rendelkező bankok a rendszer tőkekövetelményéből azonos mértékben részesülnek, továbbá a hatékonyság alapján a rendszer teljes tőkekövetelményét szétosztjuk a bankrendszer szereplői között.

A kapott eredmények alapján azt mondhatjuk, hogy azoknak a bankoknak, amelyeknek az egyénileg meghatározott tőketartaléka legalább akkora, mint amekkorát a Shapley-megoldás hozzájuk rendel, nincsen pótlólagos tőketartási szükséglete a kockázatok fedezésére. Minden más esetben, a bankoknak annyi pótlólagos tőkét szükséges tartaniuk, mint amennyivel a Shapley-megoldás által meghatározott tő-

kekövetelmény meghaladja az egyénileg képzett értéket.

5.1. *megjegyzés.* Azáltal, hogy a játék magja üresnek adódott, így a másik "jól teljesítő" módszer, a nukleolusz, nem alkalmazható.

Érdemes ezen a ponton megjegyezni, hogy már a kiinduló helyzetben, amikor még nem feltételezzük ingatlanértékesítést, előforulhat, hogy a koalíciók tőkekövetelményére nagyobb érték adódik, mint a koalíció tagjai által meghatározott egyéni tőkekövetelmények összege, azaz szuperadditív játékot kapunk. Lévé, hogy a példában a kockázatmérés eszközül a bázeli tőkefüggvényt választottuk, a jelenségre az a magyarázat adható, hogy a függvény a nemteljesítési valószínűségben nem lineáris, így már a bankok "egyesítése" esetén is jelentkezik rendszerszintű kockázat. Annak ellenére, hogy a gyakorlatban számos más lehetőség van a bankok együttmozgásából adódó kockázatok modellekbe való beépítésére, érdemes megvizsgálni, hogy jelen esetben a tőkekövetelmény a bankok koalíciójára hogyan függ az induló paraméterek megválasztásától. A kérdésre a következő fejezetben visszatérünk.

Második lépésben azt vizsgáltuk, hogy a bankoknak és a bankrendszernek mekkora tőketartalékra lenne szüksége, ha azt feltételeznénk, hogy valamilyen kedvezőtlen esemény hatására értékesíteniük kellene az ingatlanfedezeteik meghatározott hányadát. Azáltal, hogy nem álltak rendelkezésünk kellően részletes adatok az egyes bankok portfóliójáról és kockázatkezelési gyakorlatáról, az optimalizációtól eltekintettünk és feltételeztük, hogy a bankok minden koalíciója először az ingatlan fedezeteinek 25%-át kívánja értékesíteni. Így minden koalícióhoz újraszámoltuk a tőkekövetelményt, olyan módon, hogy a veszteségrátákat és a nemteljesítési valószínűségeket a bankok koalícióihoz tartozó abszolút áresések mértékével arányosan megnöveltük. Az egyszerűbb megértés végett nézzük meg ezt a számolást a $B1$ és $B2$ bank koalíciójára. 25%-os értékesítést feltételezve, ha csak a $B1$ bank értékesíti az ingatlanokat, akkor az ceteris paribus 2,6%-os árcsökkenést okoz. Ekkor, ha a $B1$ bank LGD és PD értékeit ezzel az árcsökkenés mértékével arányosan megnöveljük, akkor azt kapjuk, hogy a bázeli tőkefüggvény alapján a banknak 14 milliárd Ft tőketartalékot írunk elő. Hasonlóan, ha a $B2$ bank értékesíti az ingatlanfedezeteit az ceteris paribus 2,58%-os áresést okoz, így a $B2$ bankra 22,9 milliárd Ft tőkekövetelmény adódik. Ha a $B1$ és $B2$ bank koalíciója értékesíti a fedezeteket, akkor mivel az ingatlanok piaca illikvid piac, az ceteris paribus 5,18 %-os árcsökkenést generál, ami a egyénileg okozott árcsökkenések összege, hiszen azt feltételeztük, hogy az árcsökkenés mértéke egyenesen arányos az ingatlankínálat növekedésével. A koalíció tőkekövetelményére azonban, a várakozásoknak megfelelően, nem az egyéni tőkekövetelmények összege adódik, hanem annál nagyobb érték, 38,4 milliárd Ft.

Azt az eredményt kapjuk tehát, hogy abban az esetben, hogy ha a két bank

egyszerre értékesítené az ingatlanfedezeteit, akkor az egyénileg tartalékolat tőke nem nyújtana számukra kellő fedezetet az együttmozgásukból adódó kockázatok fedezésére. A számolás során kapott eredményeket részletesen az 5.4. táblázatban foglaltuk össze.

Bank	LGD	PD	EAD (Mrd Ft)	Tőke (Mrd Ft)	$v(C)$	Shapley-érték
<i>B1</i>	0,103	0,041	543	14,0	14,0	16,9
<i>B2</i>	0,169	0,041	538	22,9	22,9	26,2
<i>B3</i>	0,175	0,053	1237	62,2	62,2	66,8
<i>B4</i>	0,102	0,010	393	4,3	4,3	6,1
<i>B1 B2</i>	0,139	0,042	1081	38,4	38,4	
<i>B1 B3</i>	0,158	0,051	1780	79,1	79,1	
<i>B1 B4</i>	0,104	0,029	936	20,1	20,1	
<i>B2 B3</i>	0,179	0,051	1774	89,6	89,6	
<i>B2 B4</i>	0,144	0,029	930	27,4	27,4	
<i>B3 B4</i>	0,161	0,044	1629	68,1	68,1	
<i>B1 B2 B3</i>	0,166	0,050	2317	108,1	108,1	
<i>B1 B2 B4</i>	0,132	0,034	1473	44,4	44,4	
<i>B1 B3 B4</i>	0,151	0,044	2172	86,3	86,3	
<i>B2 B3 B4</i>	0,169	0,044	2167	96,2	96,2	
<i>B1 B2 B3 B4</i>	0,161	0,045	2710	116,0	116,0	

5.4. táblázat. A bankok jellemzői és a játék értéke az ingatlanok 25%-ának értékesítését feltételezve

Harmadik lépésben, az előző esethez hasonlóan, megvizsgáltuk, hogy hogyan alakulna a bankok tőkeszükséglete, ha azzal a feltételezéssel élnénk, hogy a bankoknak az optimalizálás után az ingatlanok 50%-át kellene értékesíteni. Az eredményeket az 5.5. táblázatban foglaltuk össze.

Végül, negyedik lépésben összehasonlítás végett, megvizsgáltuk azt szélsőségesnek tekinthető esetet, amikor olyan extrém esemény következik be, aminek hatására a bankok az optimalizálásuk során azt kapják optimális megoldásnak, hogy nincs más lehetőségük, fel kell számolniuk a teljes ingatlanfedezet állományukat. Ilyen feltételezésekkel élve, a játékokra az 5.6. táblázatban található eredményeket kaptuk.

Az előzőekben bemutatott három eset alapján megfigyelhető, hogy az ingatlanértékesítések hatására hogyan változik a bankok és a rendszer számára szükséges tartalékolandó tőke mennyisége. A tőkekövetelmény az értékesítések feltételezése mellett megnő, mind egyéni szinten, mind a bankok koalíciójának szintjén. Látható, hogy ha

Bank	LGD	PD	EAD (Mrd Ft)	Tőke (Mrd Ft)	$v(C)$	Shapley-érték
<i>B1</i>	0,105	0,042	543	14,6	14,6	20,5
<i>B2</i>	0,173	0,042	538	23,8	23,8	30,6
<i>B3</i>	0,185	0,056	1237	67,5	67,5	77,5
<i>B4</i>	0,104	0,010	393	4,4	4,4	8,2
<i>B1 B2</i>	0,146	0,044	1081	41,3	41,3	
<i>B1 B3</i>	0,170	0,055	1780	88,6	88,6	
<i>B1 B4</i>	0,109	0,030	936	21,5	21,5	
<i>B2 B3</i>	0,193	0,055	1774	100,4	100,4	
<i>B2 B4</i>	0,150	0,030	930	29,3	29,3	
<i>B3 B4</i>	0,173	0,047	1629	75,8	75,8	
<i>B1 B2 B3</i>	0,183	0,055	2317	124,8	124,8	
<i>B1 B2 B4</i>	0,141	0,037	1473	49,1	49,1	
<i>B1 B3 B4</i>	0,166	0,049	2172	99,0	99,0	
<i>B2 B3 B4</i>	0,185	0,049	2167	110,4	110,4	
<i>B1 B2 B3 B4</i>	0,180	0,051	2710	136,8	136,8	

5.5. táblázat. A bankok jellemzői és a játék értéke az ingatlanok 50%-ának értékesítését feltételezve

a bankokat rendszerként kezeljük, és azt feltételezzük, hogy *ceteris paribus* egyszerre értékesítik az ingatlanokat, akkor az egyénileg képzett tőkekövetelményeik nem nyújtanak kellő fedezetet az együttmozgásukból adódó kockázatok kiküszöbölésére. Ez abból adódik, hogy amikor a bankok meghatározzák a szükséges tőketartalék mértékét, akkor kizárólag a saját értékesítésükkel számolnak, és nem veszik figyelembe annak a lehetőségét, hogy milyen hatással lenne az ingatlanok piaci árára az, ha a bankrendszer többi szereplője is a piacra öntené az hitelek fedezetét képező ingatlanokat.

A példában a rendszer tőkekövetelményét a Shapley-megoldás szerint osztottuk szét a bankrendszer szereplői között. Ha a bankok Shapley-értékei összevetjük az általuk egyénileg képzett tőketartalékkal, akkor meghatározhatjuk, hogy mekkora az egyes bankok pótlólagos tőkeszükséglete. Ezzel a megoldással megmutattuk, hogy a modellünk keretein belül a bankok együttmozgásából adódó rendszerszintű kockázat hogyan osztható szét méltányosan a bankrendszer szereplői között.

Bank	LGD	PD	EAD (Mrd Ft)	Tőke (Mrd Ft)	$v(C)$	Shapley-érték
<i>B1</i>	0,110	0,044	543	15,7	15,7	28,2
<i>B2</i>	0,182	0,044	538	25,6	25,6	40,2
<i>B3</i>	0,204	0,062	1237	78,5	78,5	100,2
<i>B4</i>	0,108	0,011	393	4,7	4,7	12,8
<i>B1 B2</i>	0,160	0,048	1081	47,4	47,4	
<i>B1 B3</i>	0,195	0,063	1780	108,6	108,6	
<i>B1 B4</i>	0,118	0,032	936	24,3	24,3	
<i>B2 B3</i>	0,221	0,063	1774	123,0	123,0	
<i>B2 B4</i>	0,162	0,032	930	33,1	33,1	
<i>B3 B4</i>	0,196	0,053	1629	91,8	91,8	
<i>B1 B2 B3</i>	0,216	0,065	2317	160,1	160,1	
<i>B1 B2 B4</i>	0,159	0,041	1473	58,8	58,8	
<i>B1 B3 B4</i>	0,194	0,057	2172	125,9	125,9	
<i>B2 B3 B4</i>	0,217	0,057	2167	140,3	140,3	
<i>B1 B2 B3 B4</i>	0,217	0,061	2710	181,3	181,3	

5.6. táblázat. A bankok jellemzői és a játék értéke az ingatlanok 100%-ának értékesítését feltételezve

6. fejezet

A tőkefüggvény

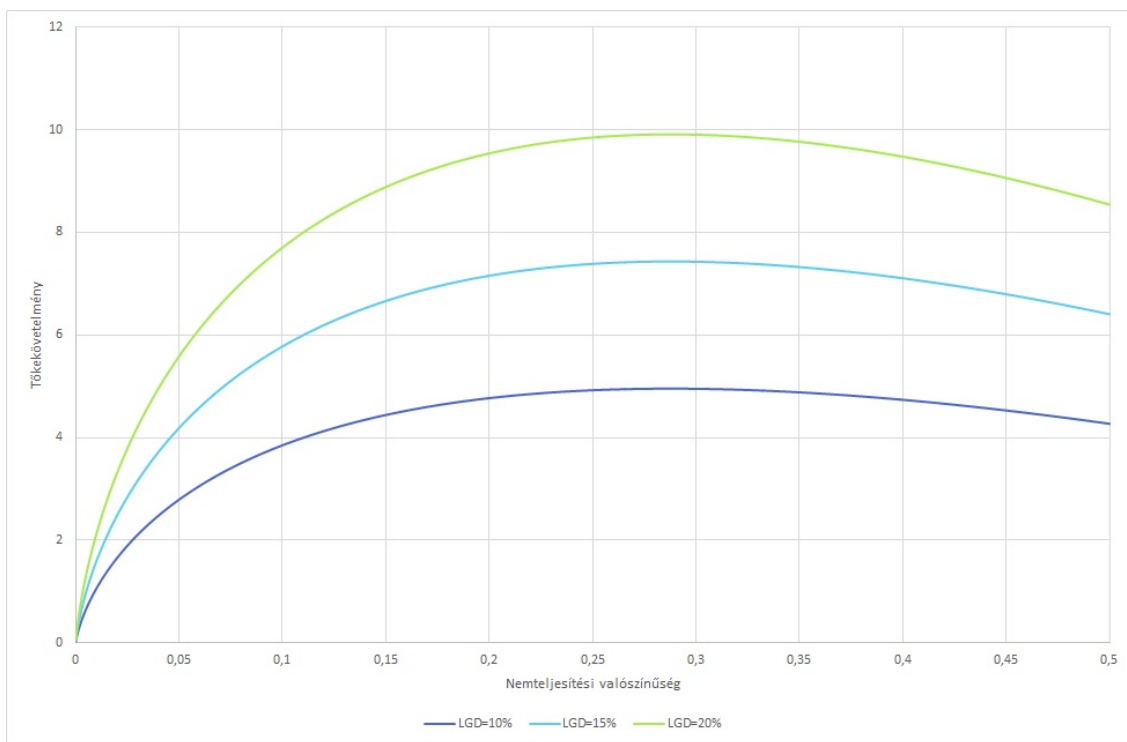
A tőkefüggvény vizsgálata nagyon összetett probléma, amelyről kevés újszerű irodalom áll rendelkezésre, így annak elemzéséhez egy mélyrehatóbb kutatásra lenne szükség. Ebből az okból kifolyólag a dolgozatban a tőkefüggvényt csak vázlatosan vizsgáljuk. Ahogyan az előző fejezet példájában észrevettük, már a bankok egyesítésekor, értékesítés feltételezése nélkül is szuperadditív játékot kaphatunk. Vizsgáljuk meg következő lépésként, hogy az induló paraméterek megválasztásától hogyan függ, hogy a játék szuper-, szub- vagy additív lesz-e, ami azért fontos, mert a szuperadditív esetben az egyéni tartalékok nem elégségesek a rendszerkockázat fedezésére.

Az első három ábra azt mutatja, hogy ha egyetlen bankra számolunk tőkekövetelményt, akkor hogyan változik annak értéke a nemteljesítési valószínűség függvényében. Az ábrákat azért érdemes megvizsgálni, mert az általunk bemutatott példában, amikor az áresés értékét a modellbe beépítettük, akkor a koalíciók veszteségrátáit és nemteljesítési valószínűségeit növeltük meg. Abban az esetben, amikor a bankokat egyesítettük, akkor pedig a kitettségek értékét növeltük meg, változtatva mellette a veszteségráták és a nemteljesítési valószínűségek értékét is.

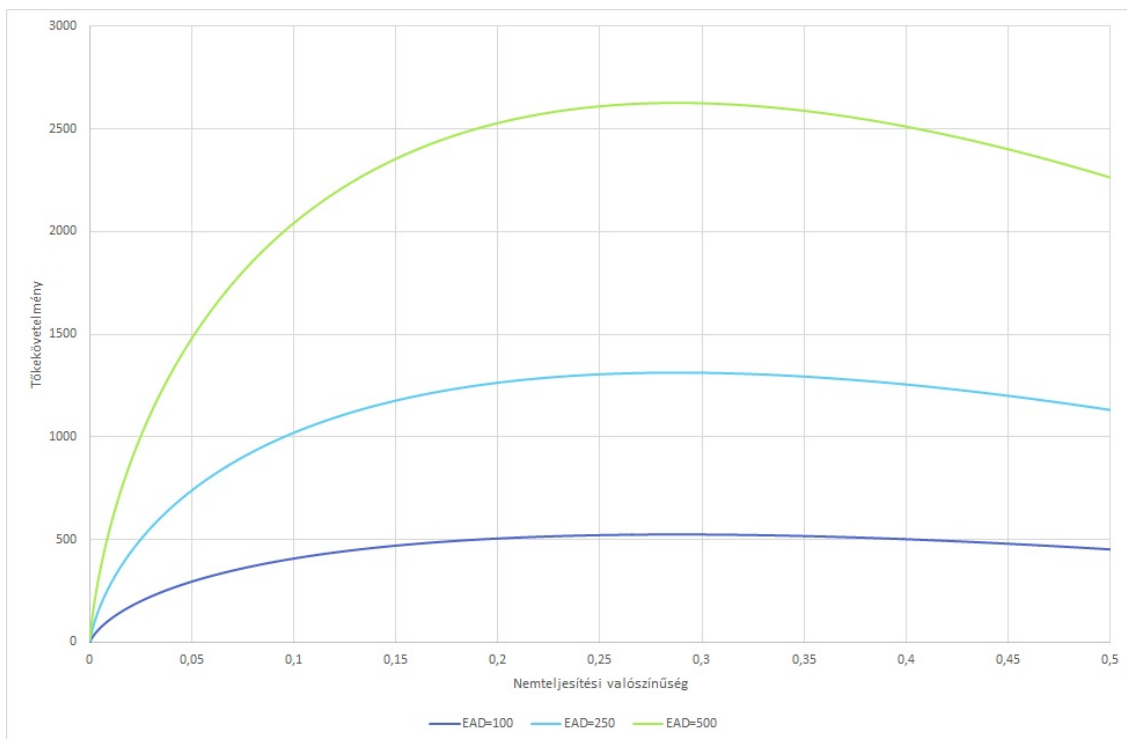
A 6.1. ábrán az látható, hogy hogyan változik a tőkekövetelmény értéke a nemteljesítési valószínűség függvényében különböző veszteségráták mellett. Ebben feltételeztük, hogy a bank lakossági jelzáloghitel kitettségeinek értéke 100 egység. Az ábrán látható, hogy a tőkefüggvénynek lokális maximuma van mindhárom ábrázolt esetben.

A 6.2. ábrán azt ábrázoltuk, hogy hogyan változik a tőkekövetelmény értéke a nemteljesítési valószínűség függvényében különböző értékű kitettségek mellett. Ebben az esetben a bank veszteségrátáját 10%-nak feltételeztük.

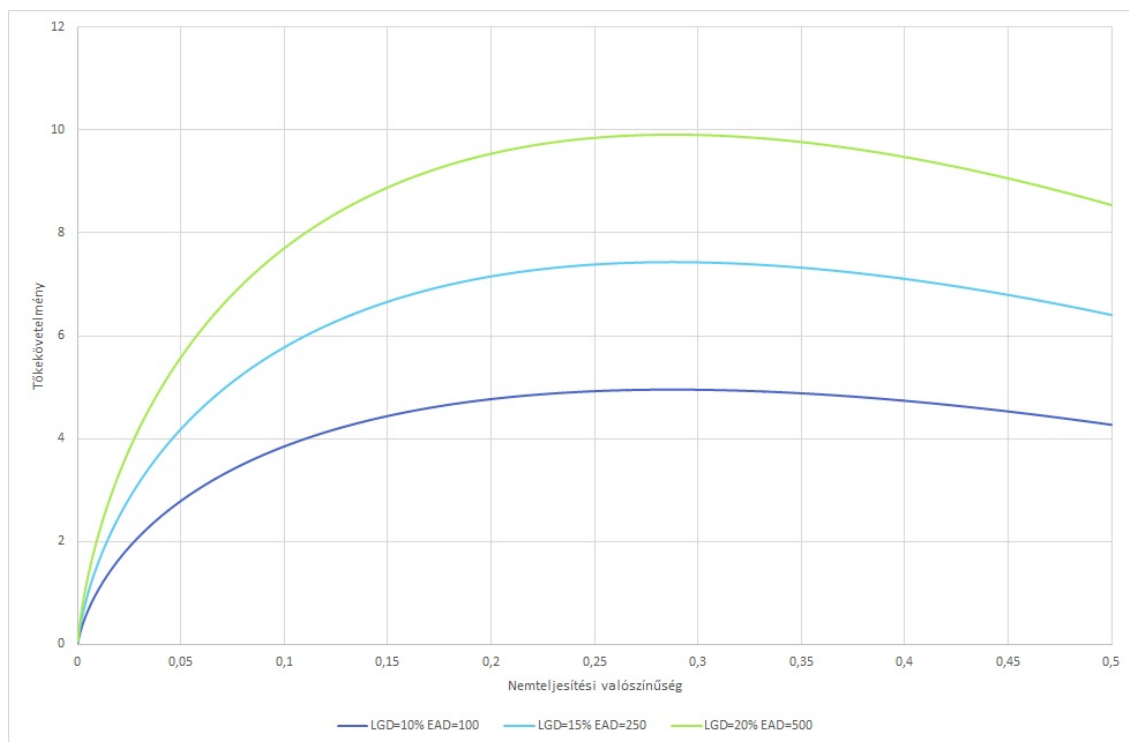
A 6.3. ábra azt mutatja, hogy hogyan változik a tőkekövetelmény értéke a nemteljesítési valószínűség függvényében különböző veszteségráták és kitettségek mellett.



6.1. ábra. Különböző veszteségráták esete



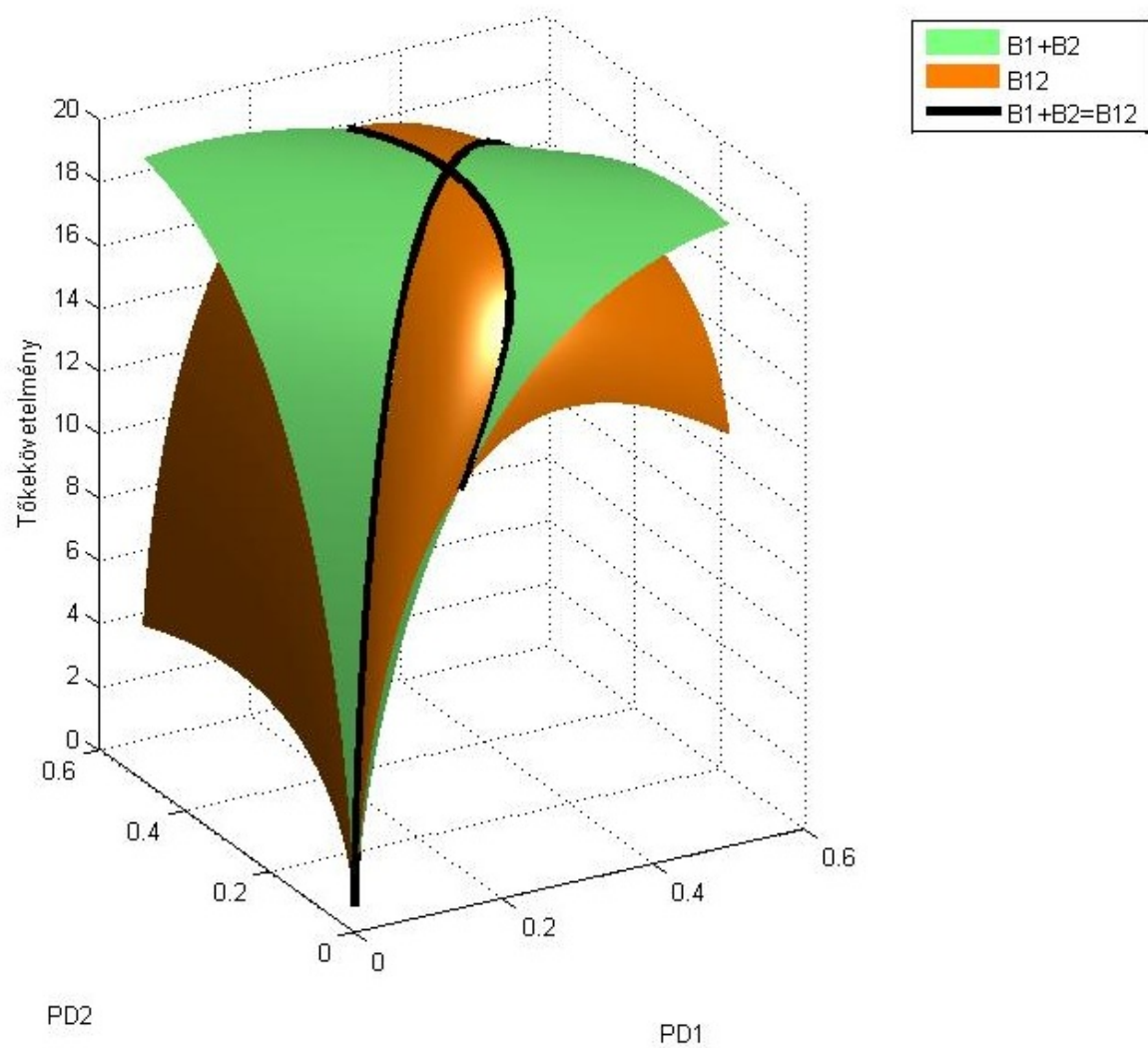
6.2. ábra. Különböző kitettségek esete



6.3. ábra. Különböző veszteségráták és kitettségek

Következő lépésben tekintsünk két bankot, jelölje őket rendre $B1$ és $B2$. Tegyük fel, hogy mindkét bank lakossági jelzáloghitel állománya 100 egység, továbbá a $B1$ bank 10%-os, a $B2$ bank 30%-os veszteségrátával jellemezhető. Vizsgáljuk meg, hogy az ilyen módon megadott paraméterek mellett a nemteljesítési valószínűség függvényében mikor lesz az általunk bemutatott induló játék additív, szubadditív és superadditív.

A 6.4. ábrán a barna felület jelöli azt az esetet, amikor a két bank koalícióját tekintettük és a koalícióra számoltunk tőkekövetelményt. A zöld felületet a bankok egyedi tőkekövetelményeinek összegeként kaptuk. Látható, hogy a két felület két görbe mentén is metszi egymás, ahol a játék additív, míg abban az esetben, amikor a koalíció tőkekövetelménye meghaladja az egyedi tőkekövetelmények összegét, superadditív játékot kapunk. Megvizsgáltuk különböző induló paraméterek mellett a tőkekövetelmények alakulását és a kapott eredményeket a B. függelék tartalmazza.



6.4. ábra. Két bank esete

7. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban az új Bázeli III. szabályozási rendszer szemléletében a rendszerkockázat mérésével és szétosztásával foglalkoztunk egy bankrendszer szereplőit vizsgálva. Arra kerestük a választ, hogy a rendszer szereplőinek együttmozgásából adódó kockázat, amivel a szereplők egyéni szinten nem számolnak, hogyan osztható szét a bankok között. Az elméleti modell felépítését követően példát mutattunk a modell egy alkalmazási lehetőségére is.

A dolgozatban a bankok ingatlannal fedezett lakossági jelzáloghitelei esetében vizsgáltuk, hogy mi történne, ha valamilyen kedvezőtlen esemény hatására a bankrendszer szereplői egyszerre szeretnék értékesíteni az ingatlanfedezeteket. Megfigyeltük, hogy az együttes értékesítés hatására, mivel az ingatlanok piaca illikvid, az árak jelentősen el fognak mozdulni, így a bankoknak pótlólagos tőketartalékra van szükségük a kockázataik fedezésére. A rendszer kockázatát a játékelméletből jól ismert Shapley-érték szerint osztottuk szét a bankrendszer szereplői között.

A bemutatott példa, ahogyan azt a dolgozatban végig hangsúlyoztuk, csak illusztrációként szolgál, az általunk megfogalmazott intuíció, azaz a szereplők együttmozgásából eredő kockázat, érvényben marad tetszőleges illikvid eszközt tekintve a banki portfólióban. Természetesen a szereplők együttmozgásából származó kockázat nem csak a bázeli tőkefüggvényen keresztül, a veszteségráták és nemteljesítési valószínűségek megnövelésével, integrálható a modellekbe. A különböző kockázatkezelési gyakorlatokban alkalmazott modellekben ez a kockázat más-más paramétereken és becsléseken keresztül jeleníthető meg.

A dolgozat megírásakor törekedtünk arra, hogy felhívjuk a figyelmet egy olyan kockázati formára, amellyel a bankok a kockázatkezelésük során nem számolnak, ez az együttmozgásból származó kockázat. Azt gondoljuk, hogy egy egységesített kockázatkezelési gyakorlatba a szabályozó ezt a kockázattípust integrálni tudja. Egységesített kockázatkezelési gyakorlaton itt azt értjük, hogy ha a szabályozónak módjá-

ban áll azonos módszertant alkalmazva tőkekövetelményt számolni a bankrendszer szereplőinek, akkor a rendszerkockázatból adódó tőkekövetelményt szét lehet osztani a bankok között. Ezáltal a rendszer szereplői az egyénileg, saját módszertan alapján képzett tőkekövetelményeiket korrigálni tudják a rendszer kockázatának megfelelően. Érdeemes azt megjegyezni, hogy azáltal, hogy az együttmozgásból adódó kockázat integrálható a bankok tőkekövetelmény számításába, az ingatlanok esetében meghatározott kényszerértékesítési kvóta alkalmazása is elkerülhető.

Összefoglalva, azt gondoljuk, hogy az általunk bemutatott probléma rendkívül összetett és releváns. Az intuíció kérdésének pontos adatokon és becsléseken való vizsgálata nem bizonyul könnyű feladatnak, ugyanakkor jelentős eredményeket hozhat a kockázatkezelés számára, így alapját jelentheti egy újabb kutatásnak a témában.

A. függelék

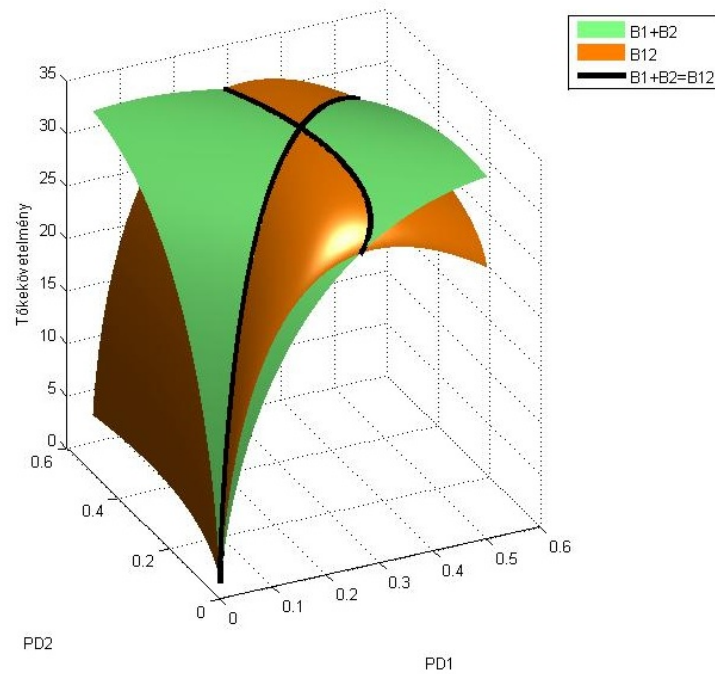
Jelölésrendszer

$A(p)$	a p portfólióból elérhető portfóliók halmaza
$C(v)$	a v játék magja
$c^s(p)$	a p portfólió likvidációs költsége az s állapotban
$\varphi_i(v)$	az i játékos Shapley-értéke a v játékban
$\varphi(v)$	a Shapley-megoldás a v játékban
$\Psi : \text{RCAS}_N \rightarrow \mathbb{R}^N$	kockázatelosztási módszer
$\mathcal{G}^N$	az N játékoshalmazzal rendelkező TU -játkok osztálya
$\mathcal{G}_c^N$	az N játékoshalmazzal rendelkező költségjátékok osztálya
$I(v)$	a v játék elosztásainak halmaza
$I^*(v)$	a v játék szétoztásainak halmaza
J	illikvid eszközök halmaza
$(N, S, \pi, \theta, m, \mathcal{L}, \rho)$	kockázatelosztási helyzet
$\mathcal{N}(v)$	a v játék nukleolusza
$\mathcal{L}$	a likviditási elvárások halmaza
$l^s(p)$	a p portfólió mark-to market értéke az s állapotban
m	MSDC
P	a portfóliók halmaza
$\mathcal{P}(N)$	N részhalmazainak osztálya
$\mathcal{PN}(v)$	a v játék prenukleolusza
π_i	az i állapot bekövetkezési valószínűsége
ϱ	nemcsökkenő rendezés

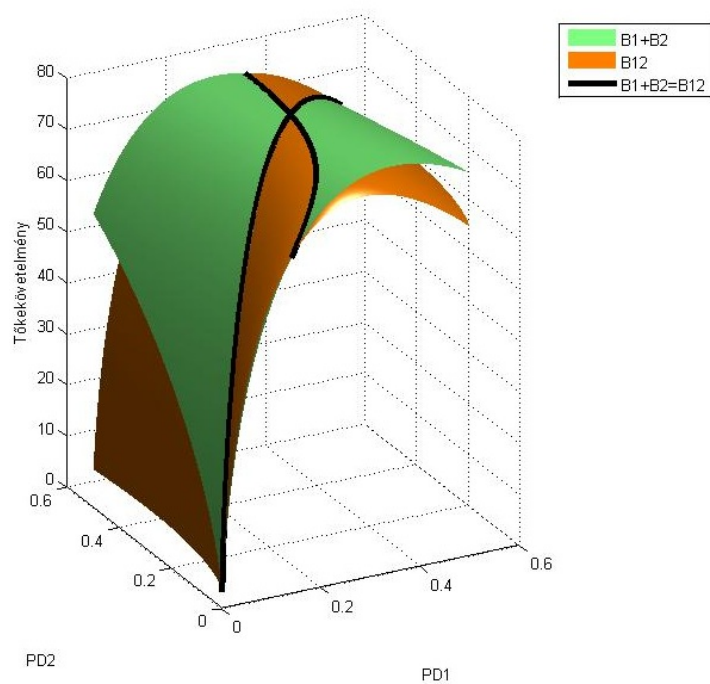
ρ	koherens kockázati mérték
S	világállapotok halmaza
$t(C)$	a C koalícióhoz tartozó kereskedési vektor
θ_i	az i alegység portfóliója
$u^s(p)$	a p portfólió uppermost mark-to market értéke az s állapotban
v	egy játék
v^T	a v játékban a T koalícióhoz tartozó részjáték
X	realizációs vektorok mátrixa
X_N^ρ	kockázatelosztási helyzet rövidített jelölése

B. függelék

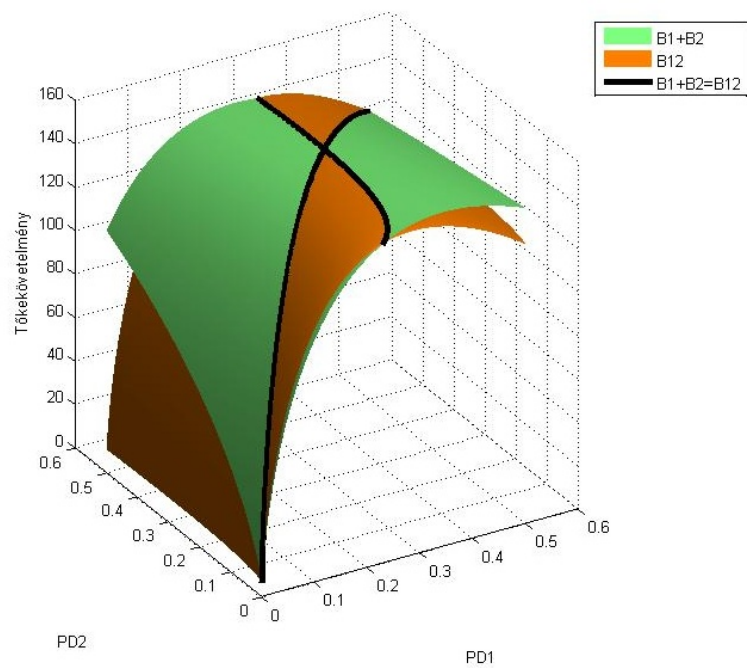
Ábrák



B.1. ábra. $LGD_1=10\%$, $EAD_1=100$, $LGD_2=60\%$, $EAD_2=100$



B.2. ábra. $LGD_1=10\%$, $EAD_1=100$, $LGD_2=30\%$, $EAD_2=500$



B.3. ábra. $LGD_1=10\%$, $EAD_1=100$, $LGD_2=60\%$, $EAD_2=500$

Irodalomjegyzék

- Acerbi C, Finger C (2010) The value of liquidity. RBC DEXIA Investor Services
- Acerbi C, Scandolo G (2008) Liquidity risk theory and coherent risk measures. Quantitative Finance 8-7
- Artzner PF, Delbaen F, Eber JM, Heath D (1999) Coherent Measures of Risk. Mathematical Finance 9:203-228
- Balog D, Bátyi TL, Csóka P, Pintér M (2011) Tőkeallokációs módszerek és tulajdonságaik a gyakorlatban. Közgazdasági Szemle LVIII:619-632
- BIS (2001) The Internal Ratings-Based Approach. URL <http://www.bis.org/publ/bcbsca05.pdf>, consultative Document, letöltve: 2014.03.15.
- BIS (2005) An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions. URL <http://www.bis.org/bcbs/irbriskweight.pdf>, letöltve: 2014.03.15
- BIS (2006) Results of the fifth quantitative impact study (QIS 5). URL <https://www.bis.org/bcbs/qis/qis5results.pdf>, consultative Document, letöltve: 2013.03.15.
- BIS (2011) Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems - revised version June 2011. URL <http://www.bis.org/publ/bcbs189.pdf>, letöltve: 2014.03.15
- Bondareva ON (1963) Some Applications of Linear Programming Methods to the Theory of Cooperative Games (in Russian). Problemy Kybernetiki 10:119-139
- Brooks C (2008) Introductory Econometrics For Finance. Cambridge University Press
- Csóka P, Herings PJJ (2012) Risk allocation under liquidity considerations
- Csóka P, Pintér M (2010) On the impossibility of fair risk allocation. Munich RePEc Personal Archive, ID: 26515

- Denault M (2001) Coherent Allocation of Risk Capital. *Journal of Risk* 4(1):1-34
- Driessen TSH, Tijs S (1986) Game theory and cost allocation problems. *Management Science* 32 (8):1015–1028
- Gillies DB (1959) Solutions to general non-zero-sum games, *Contributions to the Theory of Games*, vol IV. Princeton University Press
- Hamlen SS, Hamlen WA, Tschirhart JT (1977) The Use of Core Theory in Evaluating Joint Cost Allocation Games. *The Accounting Review* 52:616-627
- Homburg C, Scherpereel P (2008) How Should the Joint Capital be Allocated for Performance Measurement? *European Journal of Operational Research* 187(1):208-217
- Hull JC (2012) *Risk Management and Financial Institutions*. Wiley, New York
- Jorion P (2007) *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw - Hill
- Marsi E (2013) Óriásó törés a magyar bankszerkörban. URL http://www.portfolio.hu/vallalatok/penzugy/oriasi_tores_a_magyar_bankszektorban.190023.html, letöltve:2014.03.15
- Mérő, I (2002) A hitelkockázatok mérésének belső minősítésre támaszkodó meghatározása. *Hitelintézeti szemle* 2
- MNB (2013a) Jelentés a pénzügyi stabilitásról, május. URL http://www.mnb.hu/Root/Dokumentumtar/MNB/Kiadvanyok/mnbhu_stabil/mnbhu_stab_jel_201305/jelentes_penzugyi_stabilitas_201305_hu.pdf, letöltve: 2014.03.15
- MNB (2013b) Jelentés a pénzügyi stabilitásról, november. URL http://www.mnb.hu/Root/Dokumentumtar/MNB/Kiadvanyok/mnbhu_stabil/mnbhu_stab_jel_201311/Jelent%C3%A9s%20a%20p%C3%A9nz%C3%BCgyi%20stabilit%C3%A1sr%C3%B3l%202013.%20november.pdf, letöltve: 2014.03.15
- Pintér M (2009) A Shapley-érték axiomatizálásai. *Alkalmazott matematikai lapok* 26:289–315
- Schmeidler D (1969) The Nucleolus of a Characteristic Function Game. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 17:1163-1170

- Shapley LS (1953) A value for n -person games. In: Kuhn HW, Tucker AW (eds) Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies, vol 28, Princeton University Press, Princeton, p 307-317
- Shapley LS (1967) On Balanced Sets and Cores. Naval Research Logistics Quarterly 14:453-460
- Sobolev A (1975) A characterization of optimality principles in cooperative games by functional equations. Mathematical Methods in the Social Sciences, 6:94-151
- Solymosi T (2007) Kooperatív játékelmélet (elektronikus jegyzet), URL http://web.uni-corvinus.hu/~pmiklos/Works/PDF/solymosi_jatekelmelet.pdf
- Tasche D (2008) Capital Allocation To Business Units and Sub-Portfolios: The Euler Principle. URL http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0708/0708.2542v3.pdf, letöltve: 2014.03.15
- Young HP (1985) Monotonic Solutions of Cooperative Games. International Journal of Game Theory 14:65-72
- Zsámboki B (2007) Basel II and financial stability: An investigation of sensitivity and cyclicalities of capital requirements based on QIS 5. Occasional Paper