

Tudományos Diákköri Dolgozat

Származtatott termékek árazása koherens kockázati mértékkel nem teljes piacok
esetén

Budapest

2014.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Alapfogalmak, jelölések	5
2.1. A diszkrét fa felépítése	5
2.2. Az eszközárzás alaptételei	6
3. A koherens kockázati mértékek és az arbitrázs	8
3.1. A martingálmérték létezése	10
4. Árazás	13
4.1. Fedezeti stratégia	13
4.2. Az árat definiáló LP feladat	13
5. Példa	16
5.1. Egyperiódusú modell	16
5.2. Többperiódusú modell	18
5.3. Valós adatok	20
6. Összefoglalás, további kutatási irányok	24
7. Függelék	25
7.1. Az opció árát meghatározó LP feladat programkódja	25
7.2. Minimum β -t meghatározó programkód	28

1. Bevezetés

Az eszközárak alaptételeinek elméleti megalapozása az Arrow-Debreu (1959) [8] modellhez, Black és Scholes (1973) [4] formulájához, valamint Cox és Ross (1976) [5] eszközárzási modelljéhez köthető. A tételek az általánosan ismert alakjukban Harrison és Kreps (1979) [13], Harrison és Pliska (1981) [14], valamint Dybvig és Ross (1987) [11] nevéhez köthetők. Az első alaptétel azt mondja ki, hogy egy piac pontosan akkor arbitrázmentes, ha létezik olyan mérték, amire nézve az alaptermék diszkontált árfolyamata martingál. A második alaptétel pedig azt állítja, hogy a modell pontosan akkor teljes, ha a martingálmérték egyértelmű. A tételeknek pontosabb és általánosabb definícióját, valamint a bizonyításokat Medvegyev Péter: „A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben” (2002) [16] című cikkében olvashatjuk. Mivel a származtatott termékek értékét úgy számoljuk, hogy a jövőbeli kifizetés diszkontáltjának a martingálmérték szerinti várható értékét vesszük, a derivátiva ára pontosan akkor lesz egyértelmű, ha a piac teljes. Egy piac nem teljességén azt értjük, hogy a gazdaságból eredő bizonytalanságok nem fedezhetők a pénzügyi eszközökkel való kereskedéssel.

Bár a pénzügyi és biztosítási termékek az elmúlt pár évtizedben nagy fejlődésen mentek keresztül, még vannak olyan kockázatok, amikre nincs fedezeti lehetőség (pl. időjárás, ugró-folyamatok, egy kereskedett termék sztochasztikus volatilitása vagy egy reáleszköz felhasználása - ezekről részletesebben például Szűcs Balázs Árpád (2012) cikkében [18] olvashatunk). A derivátiva birtokosának célja kockázatának minimalizálása, illetve hasznosságfüggvényének maximalizálása. Mind a hasznosságfüggvények, mind a kockázati mértékek az egyén kockázatelutasítási hajlamát fejezik ki. A kettő közötti kapcsolatra néhány példát láthatunk többek között Carlo Acerbi (2004) [1] és Dowd, illetve Cotter (2007) [9] cikkeiben. A 2008-as gazdasági válság után különösen hangsúlyos szerepet kapott a kockázatalapú árazás, sokan ugyanis a származtatott termékeket okolják a válságért [10].

Dolgozatomban a derivátiva árát egy lineáris programozási feladat minimum és maximum megoldásaként határozom meg. Az elméleti háttér, valamint néhány számolási példa található Gotoh, Yamamoto, Yao (2010) [12] cikkében is. A cikk leírja az alapvetőbb árazási definíciókat, majd az arbitrázst egy LP feladatként határozza meg. Nem teljes piacon az ár két korlátja ugyanannak az LP feladatnak a minimális és maximális értéke. Az általános arbitrázs definícióját használva kérdés, hogy mi legyen az elfogadási tartomány, amibe a jövőbeli kifizetés értéke eshet, hogy ne legyen arbitrázsra lehetőség. Ezt a kockázati mérték negatív tulajdonságával hozzák összefüggésbe, ekkor ugyanis pozitív nagyságú kockázati prémium vonható ki a portfólióból. Egy származtatott követelés kockázatának fedezésére definiálják a kockázati mértékhez tartozó fedezési stratégiát, ami egy olyan önffinanszírozó stratégia választása lehet, ami alapján képzett portfólió és a származtatott

követelés együttes értékének jövőbeli várható értéke nemnegatív, illetve ezen portfólió kockázata nem pozitív, ezzel fedezve a derivatíva általi kitettség mértékét.

Eladói és vevői oldalról megközelítve a portfóliót, az LP feladat egy olyan önfinanszírozó fedezeti stratégia megtalálása, amivel a kezdeti költségek értéke 0, lejáratkori várható értéke nemnegatív és ami fedezi a származtatott termékből fakadó kockázatokat. Ez a feladat a duálisának segítségével átírható arra a problémára, ha a derivatíva várható értékének minimumát vagy maximumát keressük egy martingálmérték szerint. A Gotoh, Yamamoto, Yao (2010) és további cikkek alapján részletesebben is bizonyításra kerül a tétel, miszerint ha az eredeti probléma kielégíti a Slater-féle regularitási feltételt, vagy az eredeti mértékre teljesül egy, a kockázati mérték általi feltétel és nincs arbitrázsra lehetőség, akkor létezik martingálmérték. A duális feladat konkrét adatok esetén már könnyen megoldható. A tárgyalt cikk két példát vizsgál. Az egyik egy hipotetikus feladat, ahol feltesszük, hogy ismertek három kereskedett eszköznek és egy származtatott terméknek a következő periódusbeli lehetséges állapotai. A feladat modellje nem binomiális, az árak négyfelé ágazhatnak. A számolás 3 döntési változót és 7 feltételt tartalmazott, így az Excel Solver program segítségével egyszerűen reprodukálható volt. A cikk szerzői az NTT Data nevű japán vállalat által fejlesztett Numerical Optimizer program segítségével számoltak. A programkódban az optimalizálási feladat célfüggvénye tévesen le lett osztva a lejáratkori állapotok számával, így az eredmény negyedére csökkent a tényleges opcióárhoz képest. Dolgozatomban a helyes megoldás bemutatásra kerül. A másik kidolgozott példa valós adatok alapján lett számolva. Kilenc részvény adatait vették a Nikkei 225 japán index historikus adatai alapján. A modell itt egy tízfelé ágazó fa, amit úgy generáltak, hogy a részvényeknek vették 10 historikus hozamát és ezeket használták fel a lehetséges jövőbeli árfolyamalakulás modellezésére. A 9 részvényből 4-et használtak a derivatíva fedezésére, ami egy ázsiai put opció. Így három periódusra 1000 végállapotú a kapott fa. Az optimalizálási feladatnak 999 döntési változója és 2555 feltétele van. Az Excel lineáris optimalizálás esetén maximum 200 változóval tud számolni, így a hasonló számolásokat R-ben programoztam le.

Dolgozatom további részében megvizsgáltam két esetet napjainkból is: a Google és a Magyar Telekom 2014.03.22. és 2014.03.21-én lejáratú amerikai típusú call opcióit. Az eredmények a valószínűségnek megfeleltek, a piacon megfigyelt opcióárak többnyire a számolt korlátok között voltak.

2. Alapfogalmak, jelölések

A származtatott termékek árazásának alapelve az arbitrázsmentes árazás. Az arbitrázs definíciójának bemutatásához először vezessünk be néhány jelölést a Gotoh, Yamamoto, Yao (2010) [12] cikk alapján! Diszkrét esetben az alaptermék áralakulását egy fával szemléltetjük, amihez a következő jelölések és tulajdonságok adottak:

2.1. A diszkrét fa felépítése

- T : a fa mélysége,
- N_t : a fa T lejáratkori állapotainak halmaza, ahol $t = 0, \dots, T$,
- n_t : ezen halmaz számossága,
- N : az összes lehetséges állapot halmaza, azaz $N := \bigcup_{0 \leq t \leq T} N_t$,
- $N_{-t} = N \setminus N_t$,
- $a(n)$: egy $n \in N_t$ pont őse,
- $c(n)$: annak utóda,
- p : az objektív valószínűségi eloszlás, amit az egyes végpontokhoz rendelt p_n súlyok jelentenek, ahol $\sum_{n \in N_T} p_n = 1$,
- $\tilde{p}$ pedig a középső pontokhoz tartozó valószínűségek, azaz $\tilde{p}_n = \sum_{m \in c(n)} \tilde{p}_m$, ahol $\tilde{p}_n = p_n \forall n \in N_T$ -re.

Legyen $J + 1$ darab kereskedhető értékpapírunk, $j = 0, \dots, J$ indexszel.

- $s_n = (s_n^0, s_n^1, \dots, s_n^J)^T$ az értékpapírok ára n állapotban, $s_n^0 > 0$,
- $\delta_n = \frac{1}{s_n^0}$ a diszkontráta,
- $z_n = \delta_n s_n$ a diszkontált értékfolyamat.
- Θ_n a j -dik értékpapírból tartott mennyiség n állapotban, $\Theta_n = (\Theta_n^0, \Theta_n^1, \dots, \Theta_n^J)^T$ a kereskedési stratégia (ezentúl jelöljük egyszerűen Θ -val).
- y_n a származtatott követelés értéke n állapotban,

- $c_n = \frac{y_n}{s_n^0}$ a származtatott követelés (vagy derivatíva) diszkontált értéke.

1. Definíció. Θ önfinanszírozó stratégia, ha

$$z_n^T(\Theta_n - \Theta_{a(n)}) = 0, \quad (n \in N_{-0}). \quad (1)$$

Most már egyszerűen definiálhatjuk az arbitrázst:

2. Definíció. Egy önfinanszírozó stratégiát arbitrázsnak nevezzük, ha kielégíti a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned} z_0^T \Theta_0 &= 0 \\ z_n^T(\Theta_n - \Theta_{a(n)}) &= 0, \quad (n \in N_{-0}) \\ z_n^T \Theta_n &\geq 0, \quad (n \in N_T) \\ \sum_{n \in N_T} p_n z_n^T \Theta_n &> 0 \end{aligned} \quad (2)$$

azaz

1. kezdőértéke 0,
2. önfinanszírozó,
3. minden n végállapotban nemnegatív,
4. lejáratkori várható értéke szigorúan pozitív.

2.2. Az eszközárak alapítételei

Nem teljes piacon az árazás eredményeként nem egy konkrét árat, hanem egy tartományt kapunk. Dolgozatom utolsó fejezetében ez a tartomány lesz konkrét példákra és különböző paraméterekre meghatározva. Nézzük meg, hogy hogyan is kapjuk meg ezeket a határokat!

Az eszközárak első alaptétele kimondja [13], hogy egy piac akkor és csak akkor arbitrázsmentes, ha létezik egy $\tilde{p}$ -vel ekvivalens $\tilde{q}$ martingálmérték, azaz amire

- a nullelemű halmazai megegyeznek: $\tilde{q}_n = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_n = 0 \quad \forall n \in N$ -re és
- z_t martingál, azaz teljesül rá, hogy $\tilde{q}_n z_n = \sum_{m \in c(n)} \tilde{q}_m z_m \quad \forall n \in N_{-T}$ -re.

Az eszközárzás második alaptétele alapján ha a piac teljes, akkor ez a martingálmérték egyértelmű. Mivel a nem teljes piacokat vizsgálom, ez a martingálmérték nem egyértelmű, létezik egy $\mathcal{M}$ halmaz, ami azokat a mértékeket tartalmazza, amik szerint az eszközök diszkontált értékfolyamata martingál. Így arbitrázsmentes piacon a derivatív termékek árának alsó és felső határa:

$$\frac{1}{\delta_0} \min_{\tilde{q} \in \mathcal{M}} \sum_{n \in N_T} \tilde{q}_n \delta_n y_n$$

és

$$\frac{1}{\delta_0} \max_{\tilde{q} \in \mathcal{M}} \sum_{n \in N_T} \tilde{q}_n \delta_n y_n. \quad (3)$$

Ha az ár az alsó határ alatt van, akkor a vásárló tud arbitrálni, ha a felső határ felett van, akkor az eladónak van arbitrázs lehetősége. A két határ közötti intervallumot hívjuk „no-arbitrázs intervallum”-nak.

3. A koherens kockázati mértékek és az arbitrázs

Az arbitrázsmentes tartományt a piaci szereplők kockázatelutasítási hajlama alapján határozzuk meg. A különböző kockázati mértékek a martingálmértékekre különböző megszorítást jelentenek. Nézzük meg pontosan a definíciókat és hogy hogyan kapcsolhatjuk össze őket!

3. Definíció. [12] Egy Θ stratégiát általánosított arbitrázsnek nevezzük, ha teljesülnek a 2. definíció feltételei, de a 3., a portfólió lejáratkori várható értékének pozitivitási feltétele helyett egy meghatározott A elfogadási tartományba esését követeljük meg, azaz

$$(z_n^T \Theta_n)_{n \in N_T} \in A. \quad (4)$$

Az elfogadási tartományt meghatározhatjuk egy koherens kockázati mértékkel:

$$\mathcal{A}_\rho = \{x \in \mathbb{R}^{n_T} \mid \rho(x) \leq 0\}, \quad (5)$$

ahol x egy portfólió veszteségének eloszlása (valószínűségi változó), $\rho(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ koherens kockázati mérték. A $\rho(x)$ negativitása azt jelenti, hogy $-\rho(x)$ nagyságú pénzmennyiség lehívható a pozícióból a kockázatviselésért cserébe (pozitív $\rho(x)$ esetén bizonyos szabályozások szerint pótlólagos befizetésre van szükség).

4. Definíció. Egy $\rho(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt koherens kockázati mértéknek nevezzük, ha X valószínűségi változó eloszlása a portfólió veszteségének eloszlása és $\forall x, y \in X$ esetén teljesülnek rá a következő feltételek: (Artzner (1999) [3], Csóka (2003) [6])

- 1) Szubadditív: $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$
- 2) Monoton: $\forall x \geq y : \rho(x) \geq \rho(y)$
- 3) Elsőfokú homogén: $\forall \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} : \rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$
- 4) Eltolás invariáns: $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \rho(x + \alpha) = \rho(x) + \alpha$

A szubadditivitási tulajdonság szerint az összevonás nem jár extra veszteségekkel: két portfólió egyesítése esetén kockázatdiverzifikációs hatás érvényesül. A monotonitási tulajdonság szerint, ha az x portfólión legalább annyit veszítünk, mint az y portfólión, akkor az x kockázata legalább akkora, mint y kockázata. Az elsőfokú homogenitás biztosítja a skálainvarianciát, valutafüggetlenséget, valamint a linearitást. Az eltolásinvariancia (másnéven sallangmentesség) szerint egységnyi konstanssal növelve a veszteséget egységnyivel nő a kockázat.

Csóka, Herings és Kóczy (2007) [7] cikkében teljes piacokra belátták, hogy a koherens kockázati mértékek reprezentálhatók egy egyensúlyi modellből származtatott kockázati mértékkel.

Három széles körben alkalmazott kockázati mérték a kockázatotott érték (közismertebb nevén VaR – Value at Risk), a feltételes kockázatotott érték (CVaR – conditional value at risk), illetve az Expected Shortfall. Adott $\beta \in (0, 1)$ konfidencia szint mellett a VaR értéke az a legkisebb x érték, amire annak a valószínűsége, hogy az X veszteség meghaladja x értéket legfeljebb $(1 - \beta)$. Azaz, ha $F_X(x)$ az X eloszlásfüggvénye, akkor

$$VaR_\beta(X) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \beta\}. \quad (6)$$

A CVaR ezen VaR érték és az ennél nagyobb veszteségek átlagát adja meg:

$$CVaR_\beta(X) = \mathbb{E}(X | X \geq VaR_\beta(X)). \quad (7)$$

Az Expected Shortfall-t pedig a következő képlettel definiáljuk:

$$ES_\beta(X) = -\frac{1}{\beta} \int_0^\beta VaR_b(X) db. \quad (8)$$

A VaR nem szubadditív, ezért nem koherens kockázati mérték. Az Acerbi, Tasche (2002) [2] cikk alapján viszont tudjuk, hogy az Expected Shortfall koherens, illetve hogy az eloszlásfüggvény folytonossága esetén az Expected Shortfall éppen megegyezik a CVaR-al. A CVaR is koherens kockázati mérték [17], ezért a bemutatott példákban ezt fogom alkalmazni az elfogadási tartomány meghatározására.

Az arbitrázs definíciójában az elfogadási tartományba esést tartalmazó $(\in \mathcal{A})$ feltétel helyett egyenlőtlenséggel is helyettesíthetjük. Ehhez vezessük be a következő jelölést:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\rho &= \{\pi | \pi \text{ valószínűségi mérték } \mathcal{N}_T\text{-n és} \\ &\mathbb{E}_\pi(-x) \leq \rho(x), \forall x \in \mathbb{R}^{n_T}\text{-re (ahol } \mathbb{E}_\pi(-x) = \pi^T(-x))\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ekkor

$$\rho(x) = \sup \{\mathbb{E}_\pi(-x) | \pi \in \mathcal{P}_\rho\}. \quad (10)$$

A jövőbeli kifizetés kockázatának negativitása, $\rho(-(z_n^T \Theta_n)_{n \in N_T}) \leq 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\forall \pi \in \mathcal{P}_\rho$ -ra $\sum_{n \in N_T} \pi_n z_n^T \Theta_n \geq 0$. Ekkor az általánosított arbitrázs 3. feltétele az alábbi alakba írható:

$$\sum_{n \in N_T} \pi_n z_n^T \Theta_n \geq 0, \quad (\pi \in \mathcal{P}_\rho). \quad (11)$$

Az általános arbitrázs definíciójának ezzel az egyenlettel kiegészített rendszerét nevezzük ρ -arbitrázsnek.

Az optimalizálási feladatnál szükségünk lesz az $\mathcal{A}_\rho$ halmaznak a következő tulajdonságára: ha ρ koherens kockázati mérték, akkor $\mathcal{A}_\rho$ zárt konvex kúp. (Bizonyítás Artzner cikkében[3].) $\mathcal{P}_\rho$

pedig $\mathbb{R}^{n_T}$ kompakt konvex részhalmaza, ami nem tartalmazza az origót. Ekkor ugyanis az opció árát meghatározó LP feladat a duálisának segítségével egyszerűbb alakra hozható. Az alsó, illetve felső korlát az opció lejáratkori értékének martingálmérték szerinti várható értékének minimuma, illetve maximuma. A következő fejezetben a Gotoh, Yamamoto, Yao [12] cikk alapján, a bizonyítás részletezésével megmutatom, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén létezik martingálmérték.

3.1. A martingálmérték létezése

1. Tétel. [12] *Hasonlóan az arbitrázs egyszerű definíciójához, egy piac ρ -arbitrázs mentességének szükséges feltétele, hogy létezzen egy $\tilde{q}$ martingálmérték. Ha a ρ -arbitrázsra teljesül a Slater-féle regularitási feltétel, azaz létezik olyan $\tilde{\Theta} = (\tilde{\Theta}_n)_{n \in N}$ vektor, ami kielégíti a következő egyenleteket:*

$$\begin{aligned} z_0^T \tilde{\Theta}_0 &= 0 \\ z_n^T (\tilde{\Theta}_n - \tilde{\Theta}_{a(n)}) &= 0 \quad (n \in N_{-0}) \\ \sum_{n \in N_T} \pi_n z_n^T \tilde{\Theta}_n &> 0 \quad (\pi \in \mathcal{P}_\rho), \end{aligned} \tag{12}$$

akkor a ρ -arbitrázs mentes piacon létezik olyan $\tilde{q}$ valószínűségi mérték, ami

1. a végállapotokban $\mathcal{P}_\rho$ -beli,
2. 0-nál nagyobb értékeket vesz fel, ha p_n ($n \in N_T$) is 0-nál nagyobb,
3. valamint amely mérték alatt z_t ($t \in T$) martingál.

Bizonyítás. A tétel bizonyítása a [12]-es cikk alapján történik. Ebben azonban nincsenek részletezve a primál feladatból a duálra való áttérés lépései, úgyhogy azokat King (2002) [15] cikke illetve Temesi, Varró (2007) [19] Operációkutatás című könyve segítségével vezettem le.

Tekintsük az arbitrázsmentesség modellezésére a következő optimalizálási problémát:

$$\begin{aligned} \text{Célfüggvény:} \quad & \sup \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n z_n^T \Theta_n \\ \text{Feltételek:} \quad & z_0^T \Theta_0 = 0 \\ & z_n^T (\Theta_n - \Theta_{a(n)}) = 0, \quad (n \in \mathcal{N}_{-0}) \\ & \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n z_n^T \Theta_n \geq 0, \quad (\pi \in \mathcal{P}_\rho) \end{aligned} \tag{13}$$

ahol az első feltétel jelenti, hogy kezdetben a portfólió értéke 0, azaz nem igényel tőkét induláskor, a második feltétel az önfinanszírozás feltétele. A harmadik pedig azt követeli meg, hogy

a portfólió várható értéke lejáratkor pozitív legyen minden olyan valószínűségi mértékre, ami a ρ mérték szerint elfogadható. A célfüggvény a lejáratkori várható érték, aminek optimális értéke 0, ha nem létezik arbitrázs, egyébként a célfüggvény nem korlátos. Mivel végtelen sok $\pi \in \mathcal{P}_\rho$ létezik, végtelen sok egyenlőtlenségi feltételünk van, ezért nevezik ezt az optimalizálási feladatot félig-végtelen lineáris programozásnak.

A duális meghatározásához nézzük a Lagrange-függvényt [15]:

$$\begin{aligned} L(\Theta; \lambda, \mu) = & \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n z_n^T \Theta_n - \\ & \sum_{t=1}^T \sum_{n \in \mathcal{N}_t} \lambda_n z_n^T (\Theta_n - \Theta_{a(n)}) - \\ & \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \mu_n \pi_n z_n^T \Theta_n. \end{aligned} \quad (14)$$

Θ -ra rendezve:

$$\begin{aligned} L(\Theta; \lambda, \mu) = & \sum_{n \in \mathcal{N}_T} (p_n - \lambda_n - \mu_n \pi_n) z_n^T \Theta_n - \\ & \sum_{t=1}^T \sum_{n \in \mathcal{N}_t} (\lambda_n z_n - \sum_{m \in c(n)} \lambda_m z_m)^T \Theta_n. \end{aligned} \quad (15)$$

A duális feladat a Lagrange-függvény Θ -ban való maximalizálásából jön. Azaz teljesülnie kell a következő feltételeknek:

$$\begin{aligned} (p_n - \lambda_n - \sum_i \mu_i \pi_n^{(i)}) z_n &= 0 \quad (n \in \mathcal{N}_T) \\ \lambda_n z_n - \sum_{m \in c(n)} \lambda_m z_m &= 0 \quad (n \in \mathcal{N}_{-T}). \end{aligned} \quad (16)$$

Az elsőnél valamely véges számú $\pi^{(i)} \in \mathcal{P}_\rho$ valószínűségi mértékre való teljesülést követelünk meg. Mivel a primál feladatban a döntési változók (Θ_n) előjelkötetlenek, ezért a duál feladatban a feltételek egyenlőségként teljesülnek. A primál feladat egyenlőséggel teljesülő feltételeiből következik a hozzá tartozó λ_n duál változók előjelkötetlensége, a nagyobb vagy egyenlő feltételekből pedig a hozzájuk tartozó μ_n duál változók negativitási feltétele. (Bár λ_n -re azt mondtuk, hogy előjelkötetlen, a duál feladat első feltételéből az ármérce kezdeti értékére ($z_n^0 = 1$) látjuk, hogy $\underbrace{p_n}_{\geq 0} - \lambda_n - \sum_i \underbrace{\mu_i}_{\leq 0} \underbrace{\pi_n^{(i)}}_{\geq 0} = 0$ miatt $\lambda_n \geq 0$ -nak teljesülnie kell.)

Az előzőben levezetett primál-duál feladatok közötti összefüggések összefoglalva[19]: (ha a primál feladat döntési változói x_i , feltételeinek korlátai b_j , a duál feladat döntési változói y_j , feltételeinek korlátai c_i ($i \in I, j \in J$))

	maximumfeladat		minimumfeladat	
	$\leq b_j$		$y_j \geq 0$	
feltételek	$= b_j$	$\Leftrightarrow$	előjelkötetlen	változók
	$\geq b_j$		$y_j \leq 0$	
	$x_i \geq 0$		$\geq c_i \geq 0$	
változók	előjelkötetlen	$\Leftrightarrow$	$= c_i$	feltételek
	$x_i \leq 0$		$\leq c_i$	

Mivel fennáll a Slater-féle regularitási feltétel és $\mathcal{P}_\rho$ kompakt, ezért ha nincs arbitrázsra lehetőség, azaz az első feladat optimuma 0, akkor a duálisnak is van optimuma, és az erős dualitási tétel miatt ezek éppen megegyeznek. A duális feladat célfüggvénye egyébként a primál feladat korlátainak jobb oldala miatt konstans 0-val egyezik meg, tehát egy lehetséges megoldást keresünk, mert ha az létezik, akkor létezik optimális megoldás.

Definiáljuk $\tilde{q}$ -t, mint λ_n és λ_0 hányadosát ($n \in \mathcal{N}$)!

A duális rendszer egyenletei az ármérce kezdeti értékéből ($z_n^0 = 1$):

$$\lambda_n = \sum_{m \in c(n)} \lambda_m, \quad (n \in \mathcal{N}_{-T}) \quad (17)$$

$$\lambda_n = p_n + \sum_i \mu_i \pi_n^{(i)}, \quad (n \in \mathcal{N}_T) \quad (18)$$

amiket ismételten alkalmazva:

$$\lambda_0 = \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \lambda_n = \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \left(p_n + \sum_i \mu_i \pi_n^{(i)} \right) = 1 + \sum_i \mu_i > 0 \quad (19)$$

amiből $\lambda_0 > 0$, $\lambda_n > 0$, azaz $\tilde{q} > 0$ ha $\tilde{p}_n > 0$. A második bizonyítandó állítást ($\tilde{q}$ ekvivalenciája $\tilde{p}$ -vel) ezzel beláttuk.

A duális rendszer harmadik egyenletébe λ_n -be beírva $\tilde{q}_n$ -t, egyértelműen látszik a martingáltulajdonság, ezzel a harmadik bizonyítandó állítás is belátva.

(18) és (19)-ből pedig kapjuk, hogy

$$\tilde{q}_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_0} = \frac{1}{\sum_i \mu_i} p_n + \sum_i \frac{\mu_i}{\sum_i \mu_i} \pi_n^{(i)}. \quad (20)$$

Tehát $\tilde{q}_n$ két $\mathcal{P}_\rho$ -beli konvex kombinációja (p_n és $\pi_n^{(i)}$). Mivel $\mathcal{P}_\rho$ konvex halmaz, $\tilde{q}_T$ ezen halmazba esik. Ezzel az első bizonyítandó állítást is beláttuk.

□

4. Árazás

Ebben a fejezetben a származtatott termékek körét leszűkítjük speciálisan az európai típusúakra, azaz ha a kifizetés csak lejáratkor, T -ben hívható le.

Az ár felső határát az eladók oldaláról közelítjük meg. Ez az a minimális összeg, amit az eladó a származtatott termék tartásából következő kockázatának fedezésére fordít. Az eladó célja tehát kezdeti költségeinek minimalizálása egy olyan stratégia kialakításával, ami önffinanszírozó, és ami fedezi a derivatívából származó kockázatát. Először definiáljuk a fedezeti stratégiát, azaz a ρ -hedge stratégiát!

4.1. Fedezeti stratégia

5. Definíció. [12] ρ -hedge stratégiának nevezzük a Θ stratégiát, akkor és csak akkor, ha teljesülnek a következő feltételek:

- $\sum_{n \in N_T} p_n (z_n^T \Theta_n - c_n) \geq 0$
- $\rho((z_n^T \Theta_n - c_n)_{n \in N_T}) \leq 0$

azaz

1. ha a portfólió a j -dik értékpapírból Θ_n^j darabot ($j = 0, \dots, J$), a származtatott követelésből pedig -1 darabot tartalmaz, akkor annak várható értéke nemnegatív és
2. ezen portfólió jövőbeli értéke elfogadható a ρ koherens kockázati mérték szerint.

A második egyenlet ekvivalens a következő alakkal:

$$\sum_{n \in N_T} \pi_n (z_n^T \Theta_n - c_n) \geq 0 \quad (\forall \pi \in \mathcal{P}_\rho). \quad (21)$$

Most már felírhatjuk az eladó optimális stratégiáját meghatározó lineáris programozási feladatot.

4.2. Az árat definiáló LP feladat

$$\begin{aligned} \text{Célfüggvény:} \quad & \inf z_0^T \Theta_0 \\ \text{Feltételek:} \quad & z_n^T (\Theta_n - \Theta_{a(n)}) = 0, \quad (n \in \mathcal{N}_{-0}) \\ & \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n z_n^T \Theta_n \geq \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n c_n, \quad (\pi \in \mathcal{P}_\rho) \\ & \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n z_n^T \Theta_n \geq \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n c_n. \end{aligned} \quad (22)$$

Az eladó célja kezdeti költségeinek minimalizálása úgy, hogy a portfólió önfinanszírozó maradjon és kitermelje a termék által kínált cash flow-t.

Vegyük az előző feladat duálisát! A p valószínűségi mértékre vonatkozó feltételtől eltekinthetünk, ugyanis feltesszük, hogy $p \in \mathcal{P}_\rho$. Ha a rendszer kielégíti a Slater-féle regularitási feltételt, akkor a duális rendszer (a korábbi táblázat alapján):

$$\begin{aligned}
\text{Célfüggvény:} \quad & \sup \sum_{\pi \in \mathcal{P}_\rho} \mu_\pi \left(\sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n c_n \right) \\
\text{Feltételek:} \quad & \lambda_0 := 1 \\
& \lambda_n z_n = \sum_{m \in c(n)} \lambda_m z_m, \quad (n \in \mathcal{N}_{-T}) \\
& \lambda_n z_n = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_\rho} \mu_\pi \pi_n z_n, \quad (n \in \mathcal{N}_T) \\
& \mu_\pi \geq 0, \quad (\pi \in \mathcal{P}_\rho) \\
& |\{\pi \in \mathcal{P}_\rho \mid \mu_\pi > 0\}| < \infty.
\end{aligned} \tag{23}$$

A harmadik egyenlőségéből $z_n^0 = 1$ -ből következik, hogy $\lambda_n = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_\rho} \mu_\pi \pi_n$, $\forall n \in \mathcal{N}_T$ -re. Legyen

$$\tilde{q}_n := \begin{cases} \lambda_n & \text{ha } n \in \mathcal{N}_{-T} \\ \sum_{\pi \in \mathcal{P}_\rho} \mu_\pi \pi_n & \text{ha } n \in \mathcal{N}_T \end{cases} \tag{24}$$

Ekkor a duális a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned}
\text{Célfüggvény:} \quad & \sup \tilde{q}_T^T c \\
\text{Feltételek:} \quad & \tilde{q}_0 = 1 \\
& \tilde{q}_n z_n = \sum_{m \in c(n)} \tilde{q}_m z_m, \quad (n \in \mathcal{N}_{-T}) \\
& \tilde{q}_T \in \mathcal{P}_\rho,
\end{aligned} \tag{25}$$

ami rövidebben:

$$\begin{aligned}
\text{Célfüggvény:} \quad & \sup \mathbb{E}_{\tilde{q}_T}(c) \\
\text{Feltételek:} \quad & \tilde{q}_T \in \mathcal{M}_T \cap \mathcal{P}_\rho.
\end{aligned} \tag{26}$$

A másik oldal a vásárló oldala, aki y_0 összeget fizet, cserébe y_n kifizetést vár $\forall n \in \mathcal{N}_T$ -ben. Az ő kitettsége ekkor $-y_n$. A vevő ρ -hedge stratégiát folytat, ha a portfóliójának várható értéke nem negatív, azaz $\sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n(z_n^T \Theta_n + c_n) \geq 0$ (c_n előjele itt pozitív, mert az eladóval ellentétben,

ő kapja a kifizetést), illetve ha ezen portfólió jövőbeli értéke elfogadható a ρ koherens kockázati mérték szerint, azaz $\rho((z_n^T \Theta_n + c_n)_{n \in \mathcal{N}_T}) \leq 0$

Ez a következő optimalizálási feladatra írható:

$$\begin{aligned}
\text{Célfüggvény:} \quad & \inf z_0^T \Theta_0 \\
\text{Feltételek:} \quad & z_n^T (\Theta_n - \Theta_{a(n)}) = 0, \quad (n \in \mathcal{N}_{-0}) \\
& \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n z_n^T \Theta_n \geq - \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n c_n, \quad (\pi \in \mathcal{P}_\rho) \\
& \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n z_n^T \Theta_n \geq - \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n c_n.
\end{aligned} \tag{27}$$

A Slater-féle regularitási feltétel teljesülését feltéve, ez a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned}
\text{Célfüggvény:} \quad & \sup \mathbb{E}_{\tilde{q}_T}(-c) \\
\text{Feltételek:} \quad & \tilde{q}_T \in \mathcal{M}_T \cap \mathcal{P}_\rho.
\end{aligned} \tag{28}$$

ami ekvivalens a következő alakkal:

$$\begin{aligned}
\text{Célfüggvény:} \quad & - \inf \mathbb{E}_{\tilde{q}_T}(c) \\
\text{Feltételek:} \quad & \tilde{q}_T \in \mathcal{M}_T \cap \mathcal{P}_\rho.
\end{aligned} \tag{29}$$

Ez adja meg a kezdeti $-c_0$ érték felső határát.

2. Tétel. [12] A derivatív termék árának alsó és felső határára tehát a következő értékeket kaptuk:

$$\inf \{ \mathbb{E}_{\tilde{q}_T}(c) | \tilde{q}_T \in \mathcal{M}_T \cap \mathcal{P}_\rho \}$$

és

$$\sup \{ \mathbb{E}_{\tilde{q}_T}(c) | \tilde{q}_T \in \mathcal{M}_T \cap \mathcal{P}_\rho \} \tag{30}$$

3. Tétel. Az előző tétel teljesül a Slater-féle regularitási feltétel helyett a $\mathcal{P}_\rho$ politóp feltétellel is. Ekkor no-arbitrázs esetén szintén létezik $\tilde{q}$ valószínűségi mérték, ami $\mathcal{P}_\rho$ -beli, ekvivalens p -vel $\forall \in \mathcal{N}_T$ -re és ami alatt z_T martingál.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{P}_\rho$ politóp, akkor a (13) rendszer beli végtelen sok egyenlőtlenség ekvivalens véges számú egyenlőtlenségi korláttal, amik mind a politóp egy-egy extrém pontjához tartoznak. Ekkor szintén teljesül, hogy ha a primál feladat optimális megoldása 0, akkor a duálisnak is létezik optimális megoldása. $\square$

5. Példa

Az árak alakulásának illusztrálására nézzünk néhány egyszerűbb példát!

Mint a 3. fejezetben már megemlítettem, a három széles körben alkalmazott kockázati mérték közül a CVaR-t alkalmazom az elfogadási tartomány meghatározására. A CVaR a maximális veszteség várható értékét, átlagos nagyságát adja meg a β százalékos esemény bekövetkezése esetén. Rockafellar és Uryasev [17] bizonyítása alapján a CVaR (vagy β -CVaR, $\beta \in [0, 1]$) a következő feladat optimumaként is meghatározható:

$$\rho(x) = \min\left\{\alpha + \frac{1}{1-\beta} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n[-x_n - \alpha]^+ \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}. \quad (31)$$

4. Tétel. [12] A β -CVaR-hoz tartozó $\mathcal{P}_\rho$ halmaz (azaz azon π valószínűségi mértékek halmaza $\mathcal{N}_T$ -n, amikre $\forall x \in \mathbb{R}^n$ esetén teljesül $\mathbb{E}_\pi(-x) \leq \rho(x)$):

$$\mathcal{P}_\rho = \left\{\pi \leq \frac{p}{1-\beta} \mid \pi \in \mathbb{R}^{n_T}, \pi \geq 0, e^T \pi = 1\right\} \quad (32)$$

Bizonyítás. A Gotoh, Yamamoto, Yao (2010) cikkben [12] ez a tétel bizonyítás nélkül lett megadva, itt viszont levezetem a $\mathcal{P}_\rho$ halmaz megválasztásának alkalmasságát.

$\mathbb{E}_\pi(-x) \leq \rho(x)$ teljesüléséhez kell, hogy

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n(-x_n) \leq \min\left\{\alpha + \frac{1}{1-\beta} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n[-x_n - \alpha]^+\right\}$$

A bal oldal kisebb a jobb oldal minimumánál, ha minden α -ra kisebb a jobb oldalon álló értéknél. Ezt, valamint az $\alpha = \alpha \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n$ egyenlőséget kihasználva és α -t baloldalra átírva a következő alakot kapjuk:

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n(-x_n - \alpha) \leq \frac{1}{1-\beta} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n[-x_n - \alpha]^+, \forall \alpha \in \mathbb{R}\text{-re},$$

ami pontosan akkor teljesül, ha $\pi_n \leq \frac{p_n}{1-\beta} \forall n \in \mathcal{N}_T\text{-re}$.

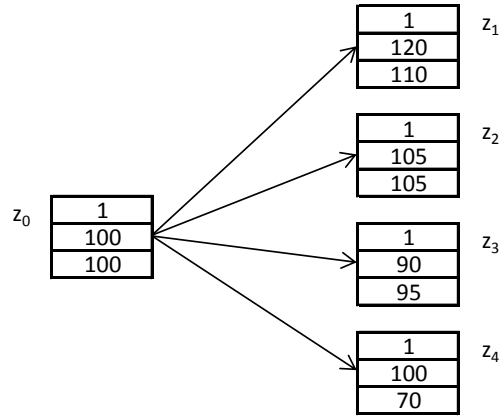
□

Mivel $\mathcal{P}_\rho$ politóp, teljesülnek rá a korábbi tételek.

5.1. Egyperiódusú modell

Az első példa legyen egy egyperiódusú modell ($T = 1$, $\mathcal{N}_T = \{1, 2, 3, 4\}$), három eszközzel (a nulladik az ármérce, aminek értéke az egyszerűség kedvéért végig 1, így a diszkontálástól most

eltekinthetünk), és egy európai call opcióval. Az eszközök értékeit a következő ábra tartalmazza [12]:



Az eredeti valószínűség: $p = [1; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$, a származtatott követelés értéke $n \in \mathcal{N}_T$ -ben: $c^T = [75; 100; 0; 0]$, a keresett valószínűség: $\tilde{q} = [q_1; q_2; q_3; q_4]$ ($q_0 = 1$).

A lineáris optimalizálási feladat célfüggvénye:

$$\tilde{q}c \rightarrow \min / \max$$

Feltételei:

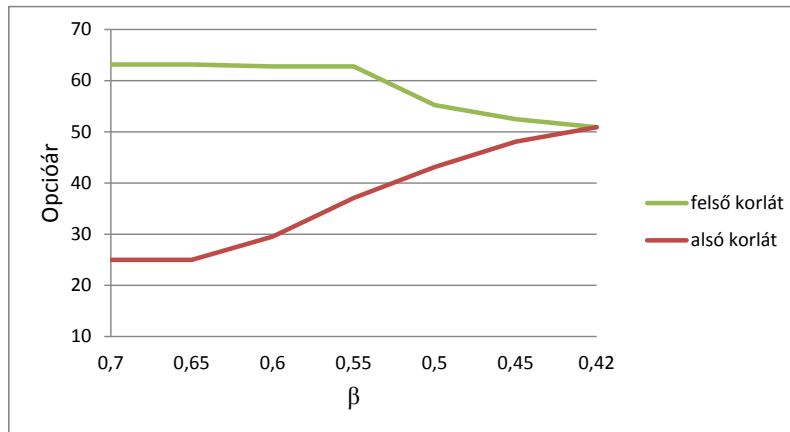
$$z_0 = \sum_{i=1}^4 q_i z_i$$

$$q_i \leq \frac{p_i}{1 - \beta} \quad i=1,2,3,4.$$

Az LP feladatnak így 3 döntési változója van: q_1, q_2, q_3 ($q_0 = 1$ feltétel, q_4 pedig adott, mert az összeg 1) és 12 feltétele (mindhárom eszközre 1-1 martingál feltétel, $\mathcal{P}_\rho$ miatt $q_i, i = 1, 2, 3, 4$ értékére felső korlát, ugyanezekre nemnegativitási feltétel, valamint $q_0 = 1$).

Gotoh, Yamamoto, Yao[12] cikkében $\beta = 0.7$ esetén az opció árára a számossággal való téves leosztás miatt a $[6.25; 15.7895]$ tartomány jött ki megoldásként. Egy $[75; 100; 0; 0]$ kifizetési függvényű opcióra ez nagyon alacsony ár lenne. A valós megoldás ennek pont négyszerese, azaz $\beta = 0.7$ esetén az ár a $[25; 63.1579]$ tartományba esik.

A megoldás β függvényében:



Az árak közti különbség $\beta = 0.4167$ -ig csökken, ennél kisebb β -ra az ár egyértelmű. Ennél kisebb értékek esete nem is informatív, mert tipikusan 90% feletti konfidenciaszintet tekintünk, ami $\beta > 0.9$ -et jelent. $\beta > 0.7$ -re az árak állandósulnak.

5.2. Többperiódusú modell

Egy másik példához vegyünk valós adatokat! 9 kockázatos eszköz árfolyamát vizsgáljuk, amiből az első 4 eszköz adata lényeges, ezeket használjuk az opció fedezésére. Az eszközök értékének alakulását tíz historikus hozam alapján határozzuk meg (minden következő lépésben a lehetséges állapotok az előző érték szorozva a hozamegyütthatóval). A nulladik eszköz legyen az ármérce, aminek értéke végig egy, tehát az egyszerűség kedvéért a diszkontálástól most is eltekintünk. Legyen a fa mélysége $T = 3$, így mivel minden állapothoz 10 következő lehetséges állapotot rendelünk, lejáratkor a lehetséges állapotok halmaza 1000 elemű. Az opció legyen egy ázsiai put az első kockázatos eszközre, azaz olyan eladási jog, aminek lejáratkori értéke megegyezik az alaptermék lejáratkori árának és az opció élettartama alatti átlagárának különbségével, feltéve, hogy ez pozitív értéket ad. Egyébként pedig nulla. Hasonlóan az európai típusú opcióhoz, az ázsiai opciót is csak lejáratkor lehet lehívni. Az ázsiai put opció kifizetés függvénye 3 periódus esetén $n \in \mathcal{N}_T$ lejáratkori állapotokban, ahol K a kötési árfolyam, z_n az adott részvény árfolyama n állapotban, $a(n)$ pedig az n állapot őse:

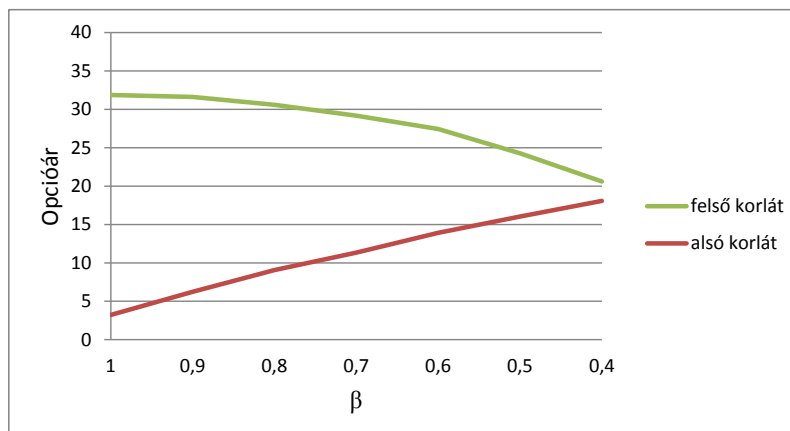
$$\left(K - \frac{z_n + z_{a(n)} + z_{a(a(n))} + z_0}{4} \right)^+ \quad (33)$$

Az eszközök kezdeti értékei: [1; 684; 223; 34000; 306; 1213; 506; 217; 2850]. Az első eszköz értéke végig 1 (mint ármérce folyamat, garantálja a diszkontálástól való eltekintés lehetőségét). Az eszközök hozamegyütthatói:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1,306	1,027	0,971	1,023	0,956	0,903	0,931	1,019
2	1	0,933	0,991	0,912	1,042	0,95	0,989	0,871	1,036
3	1	1,06	1,07	1,03	1,123	1,106	0,98	1,091	0,942
4	1	0,922	0,914	0,984	0,904	0,891	0,889	0,87	1,053
5	1	0,972	1,027	1,102	1,272	1,117	0,896	1,09	0,995
6	1	1,024	1,075	1,046	0,964	1,132	0,861	1,005	0,98
7	1	0,987	1,057	1,038	1,059	1,098	1,056	1,033	1,014
8	1	1,047	1,035	1	0,998	1,017	0,997	1,016	1,017
9	1	0,992	0,929	0,934	0,96	0,961	1,063	1,052	0,92
10	1	0,904	0,928	0,944	0,925	0,908	0,991	0,916	1,004

Ez egy 999 döntési változóból és 2555 feltételből álló LP feladathoz vezet. (Döntési változók a végállapothoz tartozó valószínűségek, egyel csökkentve az összeg = 1 feltétel miatt, a feltételek pedig: 111 martingál feltétel mind a 4 értékpapírra, a végállapothoz tartozó valószínűségekre 1000 darab felső korlát, illetve az összes valószínűségre nemnegativitási korlát).

A derivatíva árára kapott korlátok β függvényében:



A Gotoh, Yamamoto, Yao[12] cikkben $\beta = 1$ esetben az opcióár tartománya: [2.62; 31.91]. Az általam kapott tartomány pedig [3.22; 31.86], ami nagyságrendileg megegyezik a cikkben kapottal. A cikkszerzők programjában itt már nem található a korábban megfigyelhető eszközszámmal való osztás, így a számolás helyes.

A függelékben a számoláshoz használt R programkód részletesen megtalálható. Futási ideje egy-egy LP feladat megoldására 30 másodperc körüli. $\beta < 0.4167$ értékekre a solve parancs visszatérési értéke 2, ami azt jelenti, hogy nincs megfelelő megoldás.

5.3. Valós adatok

Egy az előzőhöz hasonló modellt állítottam fel a Google 2014.03.22-én lejáró, különböző kötési árfolyamú amerikai típusú call opcióira, valamint a Magyar Telekom 2014.03.21-én lejáró amerikai típusú call opcióira. Az ár alakulásához a heti effektív hozamokat vettem ($\Delta t = 1$ hét), ezért ezen a rövid időtávon a diszkontálástól én is eltekintek (azaz a nulladik, kockázatmentes eszköz értéke végig 1). Először nézzük a Google opcióit! A kockázatmentes eszköz mellett a másik három eszköz a Google, a Yahoo és az IBM részénye. Ezeket úgy választottam, hogy megvizsgáltam néhány, a Google-lel korreláló részvényt, és a Yahoo-nak a legmagasabb a pozitív korrelációja (0.925), az IBM-nek pedig a legnagyobb a negatív korrelációja (-0.67). Mivel árjegyzés csak hétköznapiokon van, így T lejáratú időt én (az amúgy sztenderdizált, minden hónap 3. szombati lejáratú napjától eltekintve most) 2014.03.21.-nek veszem, a t időpontok pedig: $t_0=2014.02.28.$, $t_1=2014.03.07.$, $t_2=2014.03.14.$ Az eszközök értéke a kezdeti időpontban(t_0): [1; 1215.65; 38.67; 185.17]. Az árfolyamok alakulását 10 hétre visszamenőleg a heti hozamokból számítottam (2014.02.28. előtti heti hozamok). Így az eszközök alakulása a következőkből számolható (a sorokban a heti hozamok, az oszlopokban a kockázatos eszközök):

	GOOGLE	YAHOO	IBM
1	0,985%	3,701%	1,302%
2	0,324%	-3,193%	0,522%
3	3,443%	6,291%	4,105%
4	-1,779%	0,639%	-0,598%
5	5,084%	-5,012%	-1,646%
6	-2,801%	-6,024%	-4,831%
7	2,299%	-1,417%	0,735%
8	2,284%	1,994%	0,399%
9	-1,115%	-1,304%	0,694%
10	3,015%	1,523%	3,719%

A részvényárfolyamokat és az opciók árát a Corvinus Pénzügyi Laboratóriumban, a Bloomberg programból töltöttem le.

Az LP feladatot szintén R program segítségével oldottam meg, a programkódban a kifizetés függvény a következő képpen módosul:

$$\max \left\{ K - \frac{z_n + z_{a(n)} + z_{a(a(n))} + z_0}{4}; 0 \right\}$$

helyett

$$\max \{ z_n - K; 0 \}$$

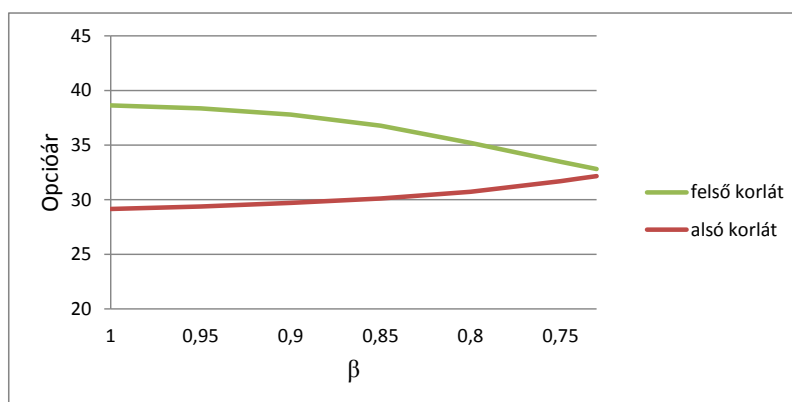
$\forall n \in \mathcal{N}_T$ állapotra.

Különböző K kötési árfolyamok mellett az európai call opcióra kapott korlátok értékei, valamint az utolsó oszlopban a vizsgált opció piaci értéke 2014.02.28-án:

K	min	max	opcióár
1185	33,413	41,82	39,1
1190	29,068	38,035	32,49
1195	25,44	35,083	29

Mivel a Google opciói amerikai típusúak, meg kell még jegyeznünk, hogy a jegyzett ár magasabb, mint az európai típusúé. Viszont még ez az ár is a várt tartományon belülre esik.

$K = 1990$ dollár mellett β függvényeként a következő korlátokat kapjuk:



Három tizedesjegyre vizsgálva a feladat $\beta = 0.722$ értékeig oldható meg. Ez még tovább pontosítható, a program futási ideje azonban egy LP feladatra 3 periódus és 10 hozam esetén fél perc, ami egy tizedesjegy pontosítással tízszeresére nő, 3 tizedesjegyre ez 15 perc körüli, ezért most további pontosítást nem vizsgáltam.

Nézzük meg a Magyar Telekom opciójára vonatkozó modellt! A kockázatos eszközök a következők: a Magyar Telekom, az OTP, illetve a MOL részvényei. Kezdeti, 2014.02.28-i értékeik: [335; 12.49; 29.4]. Hasonlóan számítva heti hozamokat, a részvények várható alakulása a következők alapján számítható:

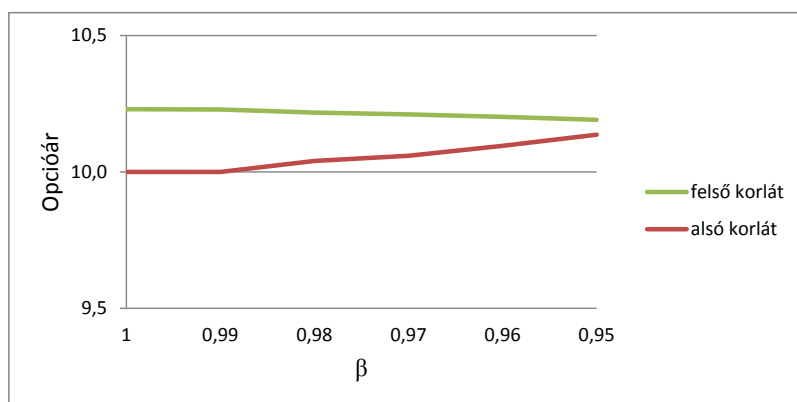
	MTELEKOM	OTP	MOL
1	1,515%	-5,697%	-1,161%
2	-0,602%	0,475%	-2,909%
3	8,852%	-1,405%	0,073%
4	-0,974%	2,398%	-1,009%
5	1,987%	-1,882%	0,362%
6	-1,307%	-4,106%	-2,261%
7	-0,971%	-0,628%	-1,668%
8	-0,962%	5,938%	0,594%
9	0,322%	3,720%	-0,383%
10	5,424%	-5,846%	-0,931%

K kötési árfolyamok mellett az $(S_T - K)^+$ kifizetésfüggvényű európai call opcióra kapott korlátok értékei, valamint az utolsó oszlopban a vizsgált opció piaci értéke 2014.02.28-án (illetve amennyiben nincs aznapra jegyzett árfolyam, akkor az előző jegyzett ár):

K	min	max	opcióár
320	15	18,16289	9,5
325	10,08489	14,6781	15,5
330	6,242556	11,65438	8,5

Ebben a magyar példában a tényleges jegyzett opció árak már nem mindegyik esetben estek a várt tartományba. Ennek oka lehet egy másik kockázati mérték használata, más időtáv vagy más historikus hozam adatok használata, illetve ha a piaci szereplők egyéb modellt alkalmaznak. Ha van az opcióra jegyzett ár, akkor a modell az árképzés szempontjából nem is annyira, mint inkább a fedezéshez lehet hasznos.

$K = 325$ forint mellett β függvényeként a következő korlátokat kapjuk az opció értékére:



Látható, hogy β -nak igen kevés értékére oldható meg az LP feladat, $\beta = 0.947$ alatt már nincs megoldás. Így a korlát is szűk tartományok között mozog, $\beta \rightarrow 1$ esetén $[10; 10.23]$ az opció árának korlátai, tehát az opció értéke jól behatárolható.

6. Összefoglalás, további kutatási irányok

Az eszközárak alaptételei alapján tudjuk, hogy nem teljes piacon arbitrázsmentesség esetén létezik martingálmérték, azonban az nem egyértelmű. Így a származtatott termékekre nem tudunk egyértelmű árat meghatározni, csupán egy tartományt, ami a minimum- és maximumértékeit adja meg. Dolgozatomban az elfogadási tartományt a piaci szereplők egyéni kockázatelutasítási hajlamát tükröző kockázati mértékekkel adtam meg. Definiáltam egy olyan fedezési stratégiát, ami a kockázati mérték segítségével meghatározható. Az arbitrázsmentességet ennek segítségével egy félig-végtelen lineáris programozási feladatként felírva, majd duálisát véve azt láttuk, hogy az ár alsó és felső korlátjaként a derivatíva kifizetésfüggvényének martingálmérték szerint számított várható értékének minimumát és maximumát kapjuk. Az LP feladat R programban való megoldásával két feltételezett modellre, illetve valós adatokra is megmutattam a tartomány alakulását különböző paraméterek mellett.

A dolgozat folytatása lehet a hozamok különböző megválasztása. Korábbi heti effektív hozamokkal vizsgálva az LP feladatnak nem minden esetben létezik megoldása, előfordul ugyanis, hogy a heti hozamok egy részvénynél mind a 10 hétre pozitívak. Ekkor a részvény árfolyamata nem lehet martingál. A trendek illetve zajok pontosabb vizsgálatával és hozamok szimulálásával megfelelőbb képet kaphatunk az árfolyamalakulásról. A heti hozamok helyett vizsgálhatunk napi hozamokat is (az opciók havi időtartama miatt hosszabb időtávút nem érdemes választani). Viszont ekkor célszerű lenne a 3 periódus helyett többet vizsgálni, aminek futási ideje már 4 periódusra is 89 perc (a döntési változók száma itt már 10^4 , a feltételeké pedig 25 555). Az árak alakulását nagyban befolyásolja a különböző kockázati mérték, illetve az ahhoz kapcsolódó β paraméter megválasztása is, ezért érdekes lehet megvizsgálni az árakat az egyes piaci szereplők erre vonatkozó preferenciái alapján.

7. Függelék

7.1. Az opció árát meghatározó LP feladat programkódja

```
library(lpSolve)
library(lpSolveAPI)

depth ← 3
subscenario ← 10
asset ← 4
beta ← 0.7
rho ← (1/(subscenario^depth))/(1-beta)
# összes állapot száma: (most 1111)
nodeset ← (subscenario^(depth+1)-1)/(subscenario-1)
# lejáratkori állapotok száma: (most 1000)
terminalnodes ← (subscenario^up(depth+1)-1)/(subscenario-1)-
                 (subscenario^(depth)-1)/(subscenario-1)

# részvények változásai
tr ← rbind(
  cbind(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1),
  cbind(# az első részvény alakulása
        1.306, 0.933, 1.06, 0.922, 0.972, 1.024, 0.987, 1.047, 0.992, 0.904),
  cbind(# a második részvény alakulása
        1.027, 0.991, 1.07, 0.914, 1.027, 1.075, 1.057, 1.035, 0.929, 0.928),
  cbind(# a harmadik részvény alakulása
        0.971, 0.912, 1.03, 0.984, 1.102, 1.046, 1.038, 1, 0.934, 0.944))
r ← t(tr)
# kötési ár
kk ← 680

# ősök meghatározása (először nullvektor, majd értékadás)
adult ← rep(0,nodeset)
for (n in 2:nodeset){
  adult[n]=((n-2)-(n-2)%subscenario)/subscenario+1 }
```

```

# z mátrix (eszközök értékei, sorokban a lehetséges állapotok, oszlopokban az eszközök)
# (először nullvektor)
z=matrix(data=NA, nrow=nodeset, ncol=asset)
for (i in 1:100){
  for (j in 1:asset){
    z[i,j]=0
  }
}
# első sora: kezdeti értékek
elsosor ← cbind(1,684,223,34000)
# (értékadás)
for (i in 1:nodeset){
  for (k in 1:asset){
    if (i==1){z[1,k] = elsosor[k]}
    else if (i%%subscenario>1) {z[i,k] = z[adult[i],k] *
                                r[i%%subscenario-1,k]}
    else {z[i,k] = z[adult[i],k] * r[i%%subscenario+9,k]}
  }
}

# c vektor (származtatott követelés értéke)
c=rep(0,nodeset)
for (i in 1:(nodeset-subscenario^depth))
  {c[i]=0}
for (i in (nodeset-subscenario^depth+1):nodeset)
  {c[i] = max(kk-(z[i,2]+z[adult[i],2]+z[adult[adult[i]],2]+z[1,2])/(depth+1),0)}

# optimalizálási feladat
lprec ← make.lp(0,nodeset)
set.objfn(lprec,c)
lp.control(lprec,sense='max')

```

```

# feltételek
# z martingál
qnzn=rep(0,nodeset)
for (j in 1:4)
  for (i in 1:(nodeset-subscenario^depth)){
    for (k in 1:nodeset) {
      if (k==i) {qnzn[k]=-z[i,j]} else if (k==10*(i-1)+2) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+3) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+4) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+5) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+6) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+7) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+8) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+9) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+10) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+11) {qnzn[k]=z[k,j]}
    else qnzn[k]=0
    }
  add.constraint(lprec, qnzn, "=", 0)}

#  $q_0 = 1$ 
add.constraint(lprec, c(1,rep(0,nodeset-1)), "=", c(1,rep(0,nodeset-1)))

# valószínűségek 0-nál nagyobbak
for (i in 1:nodeset){
  set.bounds(lprec, lower = 0, columns = i)}

# felső korlát  $\mathcal{P}_\rho$  alapján
for (i in (nodeset-subscenario^depth+1):nodeset){
  set.bounds(lprec, upper = rho, columns = i)}

solve(lprec)

```

7.2. Minimum β -t meghatározó programkód

Első tizedesjegy meghatározása

megoldas $\leftarrow$ 0

m=1

a *megoldas* változó a *solve* függvény értékét kapja, ami 0, ha az LP feladat megoldható, 2, ha nem létezik optimális megoldás

while (megoldas==0) {

 # β értéke kezdetben 1-ről indul, minden lépésben 0.1-el csökken

 beta = 1-m*0.1

 rho $\leftarrow$ (1/(subscenario^{depth}))/(1-beta)

 # ide jön az optimalizálási feladat a feltételekkel együtt

 megoldas $\leftarrow$ solve(lprec)

 m $\leftarrow$ m+1 }

a még megoldható béta értéke

beta_1 $\leftarrow$ beta+0.1

Második tizedesjegy

megoldas $\leftarrow$ 0

m=1

while (megoldas==0) {

 beta = beta_1-m*0.01

 rho $\leftarrow$ (1/(subscenario^{depth}))/(1-beta)

 # ide jön az optimalizálási feladat a feltételekkel együtt

 megoldas $\leftarrow$ solve(lprec)

 m $\leftarrow$ m+1 }

beta_2 $\leftarrow$ beta+0.01

Harmadik tizedesjegy

megoldas $\leftarrow$ 0

m=1

while (megoldas==0) {

 beta = beta_2-m*0.001

```

rho ← (1/(subscenario^depth))/(1-beta)
# ide jön az optimalizálási feladat a feltételekkel együtt
megoldas ← solve(lprec)
m←m+1}
# a három tizedesjegyű béta, amire az LP még megoldható:
beta_3 ← beta+0.001

```

Hivatkozások

- [1] C. Acerbi (2004), *Coherent representations of subjective risk aversion*, G. Szegő: Risk Measures for the 21st Century, Wiley, New York, pp. 147-207.
- [2] C. Acerbi, D. Tasche (2002), *Expected Shortfall: A natural coherent alternative to value at risk*, Economic Notes, 31: 379-388.
- [3] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath (1999), *Coherent measures of risk*, Math. Finance 9, 203-222
- [4] F. Black, M. Scholes (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy 81, 637-54.
- [5] J. Cox, S. Ross (1976), *The valuation of options for alternative stochastic processes*, Journal of Financial Economy 3, 145-66.
- [6] Csóka P. (2003), *Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció*, Közgazdasági Szemle, L. évf., 2003. október (855 - 880. o.)
- [7] Csóka P., Herings P.J.J., Kóczy L.Á. (2007), *Coherent Measures of Risk from a General Equilibrium Perspective*, Journal of Banking and Finance 31(8), 2517-2534.
- [8] G. Debreu (1959), *Theory of value*, Wiley, New York.
- [9] K. Dowd, J. Cotter (2007), *Spectral Risk Measures and the Choice of Risk Aversion Function*, University College Dublin. School of Business. Centre for Financial Markets working paper series; WP-07-20
- [10] Dömötör B. (2011), *A kockázat megjelenése a származtatott pénzügyi termékekben*, Hitelintézet Szemle 04/2011
- [11] P. H. Dybvig, S. A. Ross (1987), *Arbitrage*, J. EATWELL, M. MILLGATE, P. NEUMANN: The New Pelgrave: A Dictionary of Economics. London, Macmillan, 100106. o.
- [12] J. Gotoh, Y. Yamamoto, W. Yao (2010), *Bounding Contingent Claim Prices via Hedging Strategy with Coherent Risk Measures*, Journal of Optimization Theory and Applications 04/2012
- [13] M. Harrison, D. Kreps (1979), *Martingales and arbitrage in multiperiod security markets*, Journal of Economic Theory 20, 381-408.

- [14] M. Harrison, S. Pliska (1981), *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*, Stochastic Processes and their Applications, 11, 215-260.
- [15] A. J. King (2002), *Duality and martingales: a stochastic programming perspective on contingent claims*, Math. Program., Ser. B 91: 543562
- [16] Medvegyev P. (2002), , Közgazdasági Szemle, XLIX. évf., 2002. július-augusztus (597620. o.), Pénzügytan
- [17] T. R. Rockafellar, S. Uryasev (2002), *Conditional value-at-risk for general loss distributions*, J. Bank. Finance 26, 14431471
- [18] Szűcs B. Á. (2012), *A geometriai Brown-mozgás feltevésének elfogadhatósága a reálopciók értékelésében*, Hitelintézeti Szemle, 11 (ksz). pp. 44-49.
- [19] Temesi J., Varró Z. (2007), *Operációkutatás*, Aula Kiadó