

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar



Származtatott termékek árazása koherens kockázati
mértékkel nem teljes piacok esetén

Készítette: Ludvig Dóra
Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak
Kvantitatív pénzügyek szakirány
2014

Szakszemináriumvezető: Dr. Csóka Péter

Köszönetnyilvánítás

Dolgozatom elkészítéséhez nyújtott segítségéért köszönettel tartozom Dr. Csóka Péter témavezetőmnek a hasznos ötletekért, szakmai tanácsokért és hogy folyamatosan figyelemmel kísérte munkámat.

Köszönöm Dr. Ágoston Kolosnak a lineáris programozási feladatokban való segítségét, illetve Dr. Jun-ya Gotoh-nak a felmerült problémákban való gyors és részletes magyarázatait.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. Alapfogalmak, jelölések	8
2.1. A diszkrét fa felépítése	8
2.2. Az eszközárak alaptételei	10
3. A koherens kockázati mértékek és az arbitrázs	11
3.1. A martingálmérték létezése	14
4. Árazás	18
4.1. Fedezeti stratégia	18
4.2. Az árat definiáló LP feladat	19
5. Példa	22
5.1. Egyperiódusú modell	23
5.2. Többperiódusú modell	25
5.3. Valós adatok	27
6. Folytonos eset	32
6.1. Áralakulás nem teljes piacon	32
6.2. Az árat meghatározó modell	34
6.3. Paraméterválasztás	43
6.4. Példa	46
7. Összefoglalás, további kutatási irányok	48
8. Függelék	50
8.1. Az opció árát meghatározó LP feladat programkódja	50
8.2. Minimum β -t meghatározó programkód	53

1. Bevezetés

Az eszközárak alaptételeinek elméleti megalapozása az Arrow-Debreu (1959) [11] modellhez, Black és Scholes (1973) [4] formulájához, valamint Cox és Ross (1976) [8] eszközárzási modelljéhez köthető. A tételek az általánosan ismert alakjukban Harrison és Kreps (1979) [20], Harrison és Pliska (1981) [21], valamint Dybvig és Ross (1987) [14] nevéhez köthetők. Az első alaptétel azt mondja ki, hogy egy piac pontosan akkor arbitrázsmentes, ha létezik olyan mérték, amire nézve az alaptermék diszkontált árfolyamata martingál. A második alaptétel pedig azt állítja, hogy a modell pontosan akkor teljes, ha a martingálmérték egyértelmű. A tételeknek pontosabb és általánosabb definícióját, valamint a bizonyításokat Medvegyev Péter: „A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben” (2002) [26] című cikkében olvashatjuk. Mivel a származtatott termékek értékét úgy számoljuk, hogy a jövőbeli kifizetés diszkontáltjának a martingálmérték szerinti várható értékét vesszük, a derivatíva ára pontosan akkor lesz egyértelmű, ha a piac teljes. Egy piac nem teljességén azt értjük, hogy a gazdaságból eredő bizonytalanságok nem fedezhetők a pénzügyi eszközökkel való kereskedéssel.

Bár a pénzügyi és biztosítási termékek az elmúlt pár évtizedben nagy fejlődésen mentek keresztül, még vannak olyan kockázatok, amikre nincs fedezeti lehetőség (pl. időjárás, ugró-folyamatok, egy kereskedett termék sztochasztikus volatilitása vagy egy reáleszköz felhasználása - ezekről részletesebben például Szűcs Balázs Árpád (2012) cikkében[31] olvashatunk). A derivatíva birtokosának célja kockázatának minimalizálása, illetve hasznosságfüggvényének maximalizálása. Mind a hasznosságfüggvények, mind a kockázati mértékek az egyén kockázatelutasítási hajlamát fejezik ki. A kettő közötti kapcsolatra néhány példát láthatunk többek között Carlo Acerbi (2004) [1] és Dowd, illetve Cotter (2007) [12] cikkeiben. A 2008-as gazdasági válság után különösen hangsúlyos szerepet kapott a kockázatalapú árazás, sokan ugyanis

a származtatott termékeket okolják a válságért [13].

Dolgozatomban a derivatíva árának alakulását vizsgáltam diszkrét és folytonos esetben. Diszkrét esetben egy lineáris programozási feladat minimum és maximum megoldásaként határozom meg. Az elméleti háttér, valamint néhány számolási példa található Gotoh, Yamamoto, Yao (2010) [18] cikkében is. A cikk leírja az alapvetőbb árazási definíciókat, majd az arbitrázst egy LP feladatként határozza meg. Nem teljes piacon az ár két korlátja ugyanannak az LP feladatnak a minimális és maximális értéke. Az általános arbitrázs definícióját használva kérdés, hogy mi legyen az elfogadási tartomány, amibe a jövőbeli kifizetés értéke eshet, hogy ne legyen arbitrázsra lehetőség. Ezt a kockázati mérték negatív tulajdonságával hozzák összefüggésbe, ekkor ugyanis pozitív nagyságú kockázati prémium vonható ki a portfólióból. Egy származtatott követelés kockázatának fedezésére definiálják a kockázati mértékhez tartozó fedezési stratégiát, ami egy olyan önfinanszírozó stratégia választása lehet, ami alapján képzett portfólió és a származtatott követelés együttes értékének jövőbeli várható értéke nemnegatív, illetve ezen portfólió kockázata nem pozitív, ezzel fedezve a derivatíva általi kitettség mértékét.

Eladói és vevői oldalról megközelítve a portfóliót, az LP feladat egy olyan önfinanszírozó fedezeti stratégia megtalálása, amivel a kezdeti költségek értéke 0, lejáratkori várható értéke nemnegatív és ami fedezi a származtatott termékből fakadó kockázatokat. Ez a feladat a duálisának segítségével átírható arra a problémára, ha a derivatíva várható értékének minimumát vagy maximumát keressük egy martingálmérték szerint. A Gotoh, Yamamoto, Yao (2010) és további cikkek alapján részletesebben is bizonyításra kerül a tétel, miszerint ha az eredeti probléma kielégíti a Slater-féle regularitási feltételt, vagy az eredeti mértékre teljesül egy, a kockázati mérték általi feltétel és nincs arbitrázsra lehetőség, akkor létezik martingálmérték. A duális feladat konkrét adatok esetén már könnyen megoldható. A tárgyalt cikk két példát vizsgál. Az egyik egy hipotetikus feladat, ahol feltesszük, hogy ismer-

tek három kereskedett eszköznek és egy származtatott terméknek a következő periódusbeli lehetséges állapotai. A feladat modellje nem binomiális, az árak négyfelé ágazhatnak. A számolás 3 döntési változót és 7 feltételt tartalmazott, így az Excel Solver program segítségével egyszerűen reprodukálható volt. A cikk szerzői az NTT Data nevű japán vállalat által fejlesztett Numerical Optimizer program segítségével számoltak. A programkódban az optimalizálási feladat célfüggvénye tévesen le lett osztva a lejáratkori állapotok számával, így az eredmény negyedére csökkent a tényleges opcióárhoz képest. Dolgozatomban a helyes megoldás bemutatásra kerül. A másik kidolgozott példa valós adatok alapján lett számolva. Kilenc részvény adatait vették a Nikkei 225 japán index historikus adatai alapján. A modell itt egy tízfelé ágazó fa, amit úgy generáltak, hogy a részvényeknek vették 10 historikus hozamát és ezeket használták fel a lehetséges jövőbeli árfolyamalakulás modellezésére. A 9 részvényből 4-et használtak a derivatíva fedezésére, ami egy ázsiai put opció. Így három periódusra 1000 végállapotú a kapott fa. Az optimalizálási feladatnak 999 döntési változója és 2555 feltétele van. Az Excel lineáris optimalizálás esetén maximum 200 változóval tud számolni, így a hasonló számolásokat R-ben programoztam le.

Dolgozatom további részében megvizsgáltam két esetet napjainkból is: a Google és a Magyar Telekom 2014.03.22. és 2014.03.21-én lejárató amerikai típusú call opcióit. Az eredmények a valóságnak megfeleltek, a piacon megfigyelt opcióárak többnyire a számolt korlátok között voltak.

Folytonos esetben az ún. „good-deal bounds” árazási technikát mutatom be. Jaschke és Küchler (2001)[23] cikke alapján tudjuk, hogy a GDB által kapott határok és a koherens kockázati mértékek ekvivalensek. A Floroiu és Pelsser (2013)[15] cikk alapján vizsgált európai call opció egy ritkán, vagy egyáltalán nem kereskedett alaptermékre vonatkozó származtatott követelés, amit egy, az alaptermékkel korreláló kockázatos eszközzel fedezünk. A call opció értéke a diszkontált kifizetésfüggvény várható értéke. Mivel nem

teljes piacon a fedezés csak részben lehetséges, a sztochasztikus diszkontfaktor tartalmaz egy nem fedezhető kockázati komponenst. A GDB módszer alapötlete, hogy a diszkontfaktor volatilitását korlátozzuk. Bizonyításra kerül, hogy a fedezhető komponens együtthatója megegyezik a kockázat piaci árával, azaz a Sharpe-mutatóval. Így a volatilitás korlátozása miatt a nem fedezhető komponens együtthatója egy bizonyos intervallumra korlátozódik. Ez határozza meg az opció árának intervallumát is. Ennek bizonyítására a többdimenziós Girsanov formulát alkalmaztam. Az alaptermék értékére így kapott dinamikában egy osztalékot fizető részvény dinamikáját ismerjük fel, amire vonatkozó opciót a Black-Scholes modellből ismert formulával árazhatunk. Bár a kapott osztalékfizetési ráta értéke negatív, ezt elfogadjuk, mint azt az árat, amit azért kell fizetni, hogy a fedezetlen kockázat eltűnjön és kilépjünk a nem teljes piacok világából. A Black-Scholes formulába behelyettesítve a paraméterek értékét, megkapjuk az opció árának lehetséges tartományát.

Megvizsgáltam az ár alakulását a paraméterek különböző alakulása mellett, illetve a legutolsó fejezetben bemutatásra kerül néhány példa is a GDB alkalmazására: a beépített földterületek, mint reálopciók, valamint az időjárásra vonatkozó opciók lehetséges árazása GDB módszerrel.

2. Alapfogalmak, jelölések

A származtatott termékek árazásának alapelve az arbitrázsmentes árazás. Az arbitrázs definíciójának bemutatásához először vezessünk be néhány jelölést a Gotoh, Yamamoto, Yao (2010) [18] cikk alapján! Diszkrét esetben az alaptermék áralakulását egy fával szemléltetjük, amihez a következő jelölések és tulajdonságok adottak:

2.1. A diszkrét fa felépítése

- T : a fa mélysége,
- N_t : a fa T lejáratkori állapotainak halmaza, ahol $t = 0, \dots, T$,
- n_t : ezen halmaz számossága,
- N : az összes lehetséges állapot halmaza, azaz $N := \bigcup_{0 \leq t \leq T} N_t$,
- $N_{-t} = N \setminus N_t$,
- $a(n)$: egy $n \in N_t$ pont őse,
- $c(n)$: annak utóda,
- p : az objektív valószínűségi eloszlás, amit az egyes végpontokhoz rendelt p_n súlyok jelentenek, ahol $\sum_{n \in N_T} p_n = 1$,
- $\tilde{p}$ pedig a középső pontokhoz tartozó valószínűségek, azaz $\tilde{p}_n = \sum_{m \in c(n)} \tilde{p}_m$, ahol $\tilde{p}_n = p_n \ \forall n \in N_T$ -re.

Legyen $J + 1$ darab kereskedhető értékpapírunk, $j = 0, \dots, J$ indexszel.

- $s_n = (s_n^0, s_n^1, \dots, s_n^J)^T$ az értékpapírok ára n állapotban, $s_n^0 > 0$,
- $\delta_n = \frac{1}{s_n^0}$ a diszkontráta,

- $z_n = \delta_n s_n$ a diszkontált értékfolyamat.
- Θ_n a j -dik értékpapírból tartott mennyiség n állapotban, $\Theta_n = (\Theta_n^0, \Theta_n^1, \dots, \Theta_n^J)^T$ a kereskedési stratégia (ezentúl jelöljük egyszerűen Θ -val).
- y_n a származtatott követelés értéke n állapotban,
- $c_n = \frac{y_n}{s_n^0}$ a származtatott követelés (vagy derivatíva) diszkontált értéke.

1. Definíció. Θ önfinanszírozó stratégia, ha

$$z_n^T(\Theta_n - \Theta_{a(n)}) = 0, \quad (n \in N_{-0}). \quad (1)$$

Most már egyszerűen definiálhatjuk az arbitrázst:

2. Definíció. Egy önfinanszírozó stratégiát arbitrázsnak nevezünk, ha kielégíti a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned} z_0^T \Theta_0 &= 0 \\ z_n^T(\Theta_n - \Theta_{a(n)}) &= 0, \quad (n \in N_{-0}) \\ z_n^T \Theta_n &\geq 0, \quad (n \in N_T) \\ \sum_{n \in N_T} p_n z_n^T \Theta_n &> 0 \end{aligned} \quad (2)$$

azaz

1. kezdőértéke 0,
2. önfinanszírozó,
3. minden n végállapotban nemnegatív,
4. lejáratkori várható értéke szigorúan pozitív.

2.2. Az eszközárak alaptételei

Nem teljes piacon az árazás eredményeként nem egy konkrét árat, hanem egy tartományt kapunk. Dolgozatom utolsó fejezetében ez a tartomány lesz konkrét példákra és különböző paraméterekre meghatározva. Nézzük meg, hogy hogyan is kapjuk meg ezeket a határokat!

Az eszközárak első alaptétele kimondja [20], hogy egy piac akkor és csak akkor arbitrázsmentes, ha létezik egy $\tilde{p}$ -vel ekvivalens $\tilde{q}$ martingálmérték, azaz amire

- a nullelemű halmazai megegyeznek: $\tilde{q}_n = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_n = 0 \ \forall n \in N$ -re és
- z_t martingál, azaz teljesül rá, hogy $\tilde{q}_n z_n = \sum_{m \in c(n)} \tilde{q}_m z_m \ \forall n \in N_T$ -re.

Az eszközárak második alaptétele alapján ha a piac teljes, akkor ez a martingálmérték egyértelmű. Mivel a nem teljes piacokat vizsgálom, ez a martingálmérték nem egyértelmű, létezik egy $\mathcal{M}$ halmaz, ami azokat a mértékeket tartalmazza, amik szerint az eszközök diszkontált értékfolyamata martingál. Így arbitrázsmentes piacon a derivatív termékek árának alsó és felső határa:

$$\frac{1}{\delta_0} \min_{\tilde{q} \in \mathcal{M}} \sum_{n \in N_T} \tilde{q}_n \delta_n y_n$$

és

$$\frac{1}{\delta_0} \max_{\tilde{q} \in \mathcal{M}} \sum_{n \in N_T} \tilde{q}_n \delta_n y_n. \quad (3)$$

Ha az ár az alsó határ alatt van, akkor a vásárló tud arbitrálni, ha a felső határ felett van, akkor az eladónak van arbitrázs lehetősége. A két határ közötti intervallumot hívjuk „no-arbitrázs intervallum”-nak.

3. A koherens kockázati mértékek és az arbitrázs

Az arbitrázsmentes tartományt a piaci szereplők kockázatelutasítási hajlama alapján határozzuk meg. A különböző kockázati mértékek a martingálmértékekre különböző megszorítást jelentenek. Nézzük meg pontosan a definíciókat és hogy hogyan kapcsolhatjuk össze őket!

3. Definíció. [18] Egy Θ stratégiát általánosított arbitrázsnek nevezünk, ha teljesülnek a 2. definíció feltételei, de a 3., a portfólió lejáratkori várható értékének pozitivitási feltétele helyett egy meghatározott $\mathcal{A}$ elfogadási tartományba esését követeljük meg, azaz

$$(z_n^T \Theta_n)_{n \in N_T} \in \mathcal{A}. \quad (4)$$

Az elfogadási tartományt meghatározhatjuk egy koherens kockázati mértékkel:

$$\mathcal{A}_\rho = \{x \in \mathbb{R}^{n_T} \mid \rho(x) \leq 0\}, \quad (5)$$

ahol x egy portfólió veszteségének eloszlása (valószínűségi változó), $\rho(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ koherens kockázati mérték. A $\rho(x)$ negativitása azt jelenti, hogy $-\rho(x)$ nagyságú pénzmennyiség lehívható a pozícióból a kockázatviselésért cserébe (pozitív $\rho(x)$ esetén bizonyos szabályozások szerint pótlólagos befizetésre van szükség).

4. Definíció. Egy $\rho(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt koherens kockázati mértéknek nevezünk, ha X valószínűségi változó eloszlása a portfólió veszteségének eloszlása és $\forall x, y \in X$ esetén teljesülnek rá a következő feltételek: (Artzner (1999) [3], Csóka (2003) [9])

- 1) *Szubadditív:* $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$
- 2) *Monoton:* $\forall x \geq y : \rho(x) \geq \rho(y)$
- 3) *Elsőfokú homogén:* $\forall \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} : \rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$
- 4) *Eltolás invariáns:* $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \rho(x + \alpha) = \rho(x) + \alpha$

A szubadditivitási tulajdonság szerint az összevonás nem jár extra veszteségekkel: két portfólió egyesítése esetén kockázatdiverzifikációs hatás érvényesül. A monotonitási tulajdonság szerint, ha az x portfólión legalább annyit veszítünk, mint az y portfólión, akkor az x kockázata legalább akkora, mint y kockázata. Az elsőfokú homogenitás biztosítja a skálainvarianciát, valutafüggetlenséget, valamint a linearitást. Az eltolásinvariancia (másnéven sallangmentesség) szerint egységnyi konstanssal növelve a veszteséget egységgel nő a kockázat.

Csóka, Herings és Kóczy (2007) [10] cikkében teljes piacokra belátták, hogy a koherens kockázati mértékek reprezentálhatók egy egyensúlyi modellből származtatott kockázati mértékkel.

Három széles körben alkalmazott kockázati mérték a kockáztatott érték (közismertebb nevén VaR – Value at Risk), a feltételes kockáztatott érték (CVaR – conditional value at risk), illetve az Expected Shortfall. Adott $\beta \in (0, 1)$ konfidencia szint mellett a VaR értéke az a legkisebb x érték, amire annak a valószínűsége, hogy az X veszteség meghaladja x értéket legfeljebb $(1 - \beta)$. Azaz, ha $F_X(x)$ az X eloszlásfüggvénye, akkor

$$VaR_\beta(X) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \beta\}. \quad (6)$$

A CVaR ezen VaR érték és az ennél nagyobb veszteségek átlagát adja meg:

$$CVaR_\beta(X) = \mathbb{E}(X | X \geq VaR_\beta(X)). \quad (7)$$

Az Expected Shortfall-t pedig a következő képlettel definiáljuk:

$$ES_\beta(X) = -\frac{1}{\beta} \int_0^\beta VaR_b(X) db. \quad (8)$$

A VaR nem szubadditív, ezért nem koherens kockázati mérték. Az Acerbi, Tasche (2002) [2] cikk alapján viszont tudjuk, hogy az Expected Shortfall koherens, illetve hogy az eloszlásfüggvény folytonossága esetén az Expected Shortfall éppen megegyezik a CVaR-ral. A CVaR is koherens kockázati mérték [30], ezért a bemutatott példákban ezt fogom alkalmazni az elfogadási tartomány meghatározására.

Az arbitrázs definíciójában az elfogadási tartományba esést tartalmazó ($\in \mathcal{A}$) feltétel helyett egyenlőtlenséggel is helyettesíthetjük. Ehhez vezessük be a következő jelölést:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\rho &= \{ \pi | \pi \text{ valószínűségi mérték } \mathcal{N}_T\text{-n és} \\ &\mathbb{E}_\pi(-x) \leq \rho(x), \forall x \in \mathbb{R}^{n_T}\text{-re (ahol } \mathbb{E}_\pi(-x) = \pi^T(-x)) \}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ekkor

$$\rho(x) = \sup \{ \mathbb{E}_\pi(-x) | \pi \in \mathcal{P}_\rho \}. \quad (10)$$

A jövőbeli kifizetés kockázatának negativitása, $\rho(-(z_n^T \Theta_n)_{n \in N_T}) \leq 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\forall \pi \in \mathcal{P}_\rho$ -ra $\sum_{n \in N_T} \pi_n z_n^T \Theta_n \geq 0$. Ekkor az általánosított arbitrázs 3. feltétele az alábbi alakba írható:

$$\sum_{n \in N_T} \pi_n z_n^T \Theta_n \geq 0, \quad (\pi \in \mathcal{P}_\rho). \quad (11)$$

Az általános arbitrázs definíciójának ezzel az egyenlettel kiegészített rendszerét nevezzük ρ -arbitrázsnek.

Az optimalizálási feladatnál szükségünk lesz az $\mathcal{A}_\rho$ halmaznak a következő tulajdonságára: ha ρ koherens kockázati mérték, akkor $\mathcal{A}_\rho$ zárt konvex kúp. (Bizonyítás Artzner cikkében[3].) $\mathcal{P}_\rho$ pedig $\mathbb{R}^{n_T}$ kompakt konvex részhalmaza, ami nem tartalmazza az origót. Ekkor ugyanis az opció árát meghatározó LP feladat a duálisának segítségével egyszerűbb alakra hozható. Az alsó, illetve felső korlát az opció lejáratkori értékének martingálmérték szerinti várható értékének minimuma, illetve maximuma. A következő fejezetben a Gotoh, Yamamoto, Yao [18] cikk alapján, a bizonyítás részletezésével

megmutatom, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén létezik martingál-mérték.

3.1. A martingálmérték létezése

1. Tétel. [18] Hasonlóan az arbitrázs egyszerű definíciójához, egy piac ρ -arbitrázs mentességének szükséges feltétele, hogy létezzen egy $\tilde{q}$ martingálmérték. Ha a ρ -arbitrázsra teljesül a Slater-féle regularitási feltétel, azaz létezik olyan $\tilde{\Theta} = (\tilde{\Theta}_n)_{n \in N}$ vektor, ami kielégíti a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned} z_0^T \tilde{\Theta}_0 &= 0 \\ z_n^T (\tilde{\Theta}_n - \tilde{\Theta}_{a(n)}) &= 0 \quad (n \in N_{-0}) \\ \sum_{n \in N_T} \pi_n z_n^T \tilde{\Theta}_n &> 0 \quad (\pi \in \mathcal{P}_\rho), \end{aligned} \tag{12}$$

akkor a ρ -arbitrázs mentes piacon létezik olyan $\tilde{q}$ valószínűségi mérték, ami

1. a végállapotokban $\mathcal{P}_\rho$ -beli,
2. 0-nál nagyobb értékeket vesz fel, ha p_n ($n \in N_T$) is 0-nál nagyobb,
3. valamint amely mérték alatt z_t ($t \in T$) martingál.

Bizonyítás. A tétel bizonyítása a [18]-es cikk alapján történik. Ebben azonban nincsenek részletezve a primál feladatból a duálra való áttérés lépései, úgyhogy azokat King (2002) [25] cikke illetve Temesi, Varró (2007) [32] Operációkutatás című könyve segítségével vezettem le.

Tekintsük az arbitrázsmentesség modellezésére a következő optimalizálási

problémát:

$$\begin{aligned}
\text{Célfüggvény:} \quad & \sup \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n z_n^T \Theta_n \\
\text{Feltételek:} \quad & z_0^T \Theta_0 = 0 \\
& z_n^T (\Theta_n - \Theta_{a(n)}) = 0, \quad (n \in \mathcal{N}_{-0}) \\
& \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n z_n^T \Theta_n \geq 0, \quad (\pi \in \mathcal{P}_\rho)
\end{aligned} \tag{13}$$

ahol az első feltétel jelenti, hogy kezdetben a portfólió értéke 0, azaz nem igényel tőkét induláskor, a második feltétel az önfinanszírozás feltétele. A harmadik pedig azt követeli meg, hogy a portfólió várható értéke lejáratkor pozitív legyen minden olyan valószínűségi mértékre, ami a ρ mérték szerint elfogadható. A célfüggvény a lejáratkori várható érték, aminek optimális értéke 0, ha nem létezik arbitrázs, egyébként a célfüggvény nem korlátos. Mivel végtelen sok $\pi \in \mathcal{P}_\rho$ létezik, végtelen sok egyenlőtlenségi feltételünk van, ezért nevezik ezt az optimalizálási feladatot félig-végtelen lineáris programozásnak.

A duális meghatározásához nézzük a Lagrange-függvényt [25]:

$$\begin{aligned}
L(\Theta; \lambda, \mu) = & \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n z_n^T \Theta_n - \\
& \sum_{t=1}^T \sum_{n \in \mathcal{N}_t} \lambda_n z_n^T (\Theta_n - \Theta_{a(n)}) - \\
& \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \mu_n \pi_n z_n^T \Theta_n.
\end{aligned} \tag{14}$$

Θ -ra rendezve:

$$\begin{aligned}
L(\Theta; \lambda, \mu) = & \sum_{n \in \mathcal{N}_T} (p_n - \lambda_n - \mu_n \pi_n) z_n^T \Theta_n - \\
& \sum_{t=1}^T \sum_{n \in \mathcal{N}_t} (\lambda_n z_n - \sum_{m \in c(n)} \lambda_m z_m)^T \Theta_n.
\end{aligned} \tag{15}$$

A duális feladat a Lagrange-függvény Θ -ban való maximalizálásából jön. Azaz teljesülnie kell a következő feltételeknek:

$$\begin{aligned} (p_n - \lambda_n - \sum_i \mu_i \pi_n^{(i)}) z_n &= 0 \quad (n \in \mathcal{N}_T) \\ \lambda_n z_n - \sum_{m \in c(n)} \lambda_m z_m &= 0 \quad (n \in \mathcal{N}_{-T}). \end{aligned} \quad (16)$$

Az elsőnél valamely véges számú $\pi^{(i)} \in \mathcal{P}_\rho$ valószínűségi mértékre való teljesülést követelünk meg. Mivel a primál feladatban a döntési változók (Θ_n) előjelkötetlenek, ezért a duál feladatban a feltételek egyenlőségként teljesülnek. A primál feladat egyenlőséggel teljesülő feltételeiből következik a hozzá tartozó λ_n duál változók előjelkötetlensége, a nagyobb vagy egyenlő feltételekből pedig a hozzájuk tartozó μ_n duál változók negativitási feltétele. (Bár λ_n -re azt mondtuk, hogy előjelkötetlen, a duál feladat első feltételéből az ármérce kezdeti értékére ($z_n^0 = 1$) látjuk, hogy $\underbrace{p_n}_{\geq 0} - \lambda_n - \sum_i \underbrace{\mu_i}_{\leq 0} \underbrace{\pi_n^{(i)}}_{\geq 0} = 0$ miatt $\lambda_n \geq 0$ -nak teljesülnie kell.)

Az előzőben levezetett primál-duál feladatok közötti összefüggések összefoglalva[32]: (ha a primál feladat döntési változói x_i , feltételeinek korlátai b_j , a duál feladat döntési változói y_j , feltételeinek korlátai c_i ($i \in I, j \in J$))

	maximumfeladat		minimumfeladat	
	$\leq b_j$		$y_j \geq 0$	
feltételek	$= b_j$	$\Leftrightarrow$	előjelkötetlen	változók
	$\geq b_j$		$y_j \leq 0$	
	$x_i \geq 0$		$\geq c_i \geq 0$	
változók	előjelkötetlen	$\Leftrightarrow$	$= c_i$	feltételek
	$x_i \leq 0$		$\leq c_i$	

Mivel fennáll a Slater-féle regularitási feltétel és $\mathcal{P}_\rho$ kompakt, ezért ha nincs arbitrázsra lehetőség, azaz az első feladat optimuma 0, akkor a duálisnak is

van optimuma, és az erős dualitási tétel miatt ezek éppen megegyeznek. A duális feladat célfüggvénye egyébként a primál feladat korlátainak jobb oldala miatt konstans 0-val egyezik meg, tehát egy lehetséges megoldást keresünk, mert ha az létezik, akkor létezik optimális megoldás.

Definiáljuk $\tilde{q}$ -t, mint λ_n és λ_0 hányadosát ($n \in \mathcal{N}$)!

A duális rendszer egyenletei az ármérce kezdeti értékéből ($z_n^0 = 1$):

$$\lambda_n = \sum_{m \in c(n)} \lambda_m, \quad (n \in \mathcal{N}_{-T}) \quad (17)$$

$$\lambda_n = p_n + \sum_i \mu_i \pi_n^{(i)}, \quad (n \in \mathcal{N}_T) \quad (18)$$

amiket ismételten alkalmazva:

$$\lambda_0 = \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \lambda_n = \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \left(p_n + \sum_i \mu_i \pi_n^{(i)} \right) = 1 + \sum_i \mu_i > 0 \quad (19)$$

amiből $\lambda_0 > 0$, $\lambda_n > 0$, azaz $\tilde{q} > 0$ ha $\tilde{p}_n > 0$. A második bizonyítandó állítást ($\tilde{q}$ ekvivalenciája $\tilde{p}$ -vel) ezzel beláttuk.

A duális rendszer harmadik egyenletébe λ_n -be beírva $\tilde{q}_n$ -t, egyértelműen látszik a martingáltulajdonság, ezzel a harmadik bizonyítandó állítás is belátva.

(18) és (19)-ből pedig kapjuk, hogy

$$\tilde{q}_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_0} = \frac{1}{\sum_i \mu_i} p_n + \sum_i \frac{\mu_i}{\sum_i \mu_i} \pi_n^{(i)}. \quad (20)$$

Tehát $\tilde{q}_n$ két $\mathcal{P}_\rho$ -beli konvex kombinációja (p_n és $\pi_n^{(i)}$). Mivel $\mathcal{P}_\rho$ konvex halmaz, $\tilde{q}_T$ ezen halmazba esik. Ezzel az első bizonyítandó állítást is beláttuk.

□

4. Árazás

Ebben a fejezetben a származtatott termékek körét leszűkítjük speciálisan az európai típusúakra, azaz ha a kifizetés csak lejáratkor, T -ben hívható le.

Az ár felső határát az eladók oldaláról közelítjük meg. Ez az a minimális összeg, amit az eladó a származtatott termék tartásából következő kockázatának fedezésére fordít. Az eladó célja tehát kezdeti költségeinek minimalizálása egy olyan stratégia kialakításával, ami önfinanszírozó, és ami fedezi a derivatívából származó kockázatát. Először definiáljuk a fedezeti stratégiát, azaz a ρ -hedge stratégiát!

4.1. Fedezeti stratégia

5. Definíció. [18] ρ -hedge stratégiának nevezzük a Θ stratégiát, akkor és csak akkor, ha teljesülnek a következő feltételek:

- $\sum_{n \in N_T} p_n(z_n^T \Theta_n - c_n) \geq 0$
- $\rho((z_n^T \Theta_n - c_n)_{n \in N_T}) \leq 0$

azaz

1. ha a portfólió a j -dik értékpapírból Θ_n^j darabot ($j = 0, \dots, J$), a származtatott követelésből pedig -1 darabot tartalmaz, akkor annak várható értéke nemnegatív és
2. ezen portfólió jövőbeli értéke elfogadható a ρ koherens kockázati mérték szerint.

A második egyenlet ekvivalens a következő alakkal:

$$\sum_{n \in N_T} \pi_n(z_n^T \Theta_n - c_n) \geq 0 \quad (\forall \pi \in \mathcal{P}_\rho). \quad (21)$$

Most már felírhatjuk az eladó optimális stratégiáját meghatározó lineáris programozási feladatot.

4.2. Az árat definiáló LP feladat

$$\begin{aligned}
\text{Célfüggvény:} \quad & \inf z_0^T \Theta_0 \\
\text{Feltételek:} \quad & z_n^T (\Theta_n - \Theta_{a(n)}) = 0, \quad (n \in \mathcal{N}_{-0}) \\
& \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n z_n^T \Theta_n \geq \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n c_n, \quad (\pi \in \mathcal{P}_\rho) \\
& \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n z_n^T \Theta_n \geq \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n c_n. \tag{22}
\end{aligned}$$

Az eladó célja kezdeti költségeinek minimalizálása úgy, hogy a portfólió önfinanszírozó maradjon és kitermelje a termék által kínált cash flow-t.

Vegyük az előző feladat duálisát! A p valószínűségi mértékre vonatkozó feltételtől eltekinthetünk, ugyanis feltesszük, hogy $p \in \mathcal{P}_\rho$. Ha a rendszer kielégíti a Slater-féle regularitási feltételt, akkor a duális rendszer (a korábbi táblázat alapján):

$$\begin{aligned}
\text{Célfüggvény:} \quad & \sup \sum_{\pi \in \mathcal{P}_\rho} \mu_\pi \left(\sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n c_n \right) \\
\text{Feltételek:} \quad & \lambda_0 := 1 \\
& \lambda_n z_n = \sum_{m \in c(n)} \lambda_m z_m, \quad (n \in \mathcal{N}_{-T}) \\
& \lambda_n z_n = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_\rho} \mu_\pi \pi_n z_n, \quad (n \in \mathcal{N}_T) \\
& \mu_\pi \geq 0, \quad (\pi \in \mathcal{P}_\rho) \\
& |\{\pi \in \mathcal{P}_\rho \mid \mu_\pi > 0\}| < \infty. \tag{23}
\end{aligned}$$

A harmadik egyenlőségéből $z_n^0 = 1$ -ből következik, hogy $\lambda_n = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_\rho} \mu_\pi \pi_n$, $\forall n \in \mathcal{N}_T$ -re. Legyen

$$\tilde{q}_n := \begin{cases} \lambda_n & \text{ha } n \in \mathcal{N}_{-T} \\ \sum_{\pi \in \mathcal{P}_\rho} \mu_\pi \pi_n & \text{ha } n \in \mathcal{N}_T \end{cases} \tag{24}$$

Ekkor a duális a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned}
\text{Célfüggvény:} \quad & \sup \tilde{q}_T^T c \\
\text{Feltételek:} \quad & \tilde{q}_0 = 1 \\
& \tilde{q}_n z_n = \sum_{m \in c(n)} \tilde{q}_m z_m, \quad (n \in \mathcal{N}_{-T}) \\
& \tilde{q}_T \in \mathcal{P}_\rho,
\end{aligned} \tag{25}$$

ami rövidebben:

$$\begin{aligned}
\text{Célfüggvény:} \quad & \sup \mathbb{E}_{\tilde{q}_T}(c) \\
\text{Feltételek:} \quad & \tilde{q}_T \in \mathcal{M}_T \cap \mathcal{P}_\rho.
\end{aligned} \tag{26}$$

A másik oldal a vásárló oldala, aki y_0 összeget fizet, cserébe y_n kifizetést vár $\forall n \in \mathcal{N}_T$ -ben. Az ő kitettsége ekkor $-y_n$. A vevő ρ -hedge stratégiát folytat, ha a portfóliójának várható értéke nem negatív, azaz $\sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n(z_n^T \Theta_n + c_n) \geq 0$ (c_n előjele itt pozitív, mert az eladóval ellentétben, ő kapja a kifizetést), illetve ha ezen portfólió jövőbeli értéke elfogadható a ρ koherens kockázati mérték szerint, azaz $\rho((z_n^T \Theta_n + c_n)_{n \in \mathcal{N}_T}) \leq 0$

Ez a következő optimalizálási feladatra írható:

$$\begin{aligned}
\text{Célfüggvény:} \quad & \inf z_0^T \Theta_0 \\
\text{Feltételek:} \quad & z_n^T (\Theta_n - \Theta_{a(n)}) = 0, \quad (n \in \mathcal{N}_{-0}) \\
& \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n z_n^T \Theta_n \geq - \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n c_n, \quad (\pi \in \mathcal{P}_\rho) \\
& \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n z_n^T \Theta_n \geq - \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n c_n.
\end{aligned} \tag{27}$$

A Slater-féle regularitási feltétel teljesülését feltéve, ez a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned}
\text{Célfüggvény:} \quad & \sup \mathbb{E}_{\tilde{q}_T}(-c) \\
\text{Feltételek:} \quad & \tilde{q}_T \in \mathcal{M}_T \cap \mathcal{P}_\rho.
\end{aligned} \tag{28}$$

ami ekvivalens a következő alakkal:

$$\begin{aligned} \text{Célfüggvény:} \quad & -\inf \mathbb{E}_{\tilde{q}_T}(c) \\ \text{Feltételek:} \quad & \tilde{q}_T \in \mathcal{M}_T \cap \mathcal{P}_\rho. \end{aligned} \tag{29}$$

Ez adja meg a kezdeti $-c_0$ érték felső határát.

2. Tétel. *[18] A derivatív termék árának alsó és felső határára tehát a következő értékeket kaptuk:*

$$\inf\{\mathbb{E}_{\tilde{q}_T}(c) | \tilde{q}_T \in \mathcal{M}_T \cap \mathcal{P}_\rho\}$$

és

$$\sup\{\mathbb{E}_{\tilde{q}_T}(c) | \tilde{q}_T \in \mathcal{M}_T \cap \mathcal{P}_\rho\} \tag{30}$$

3. Tétel. *Az előző tétel teljesül a Slater-féle regularitási feltétel helyett a $\mathcal{P}_\rho$ politóp feltétellel is. Ekkor no-arbitrázs esetén szintén létezik $\tilde{q}$ valószínűségi mérték, ami $\mathcal{P}_\rho$ -beli, ekvivalens p -vel $\forall \in \mathcal{N}_T$ -re és ami alatt z_T martingál.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{P}_\rho$ politóp, akkor a (13) rendszerbeli végtelen sok egyenlőtlenség ekvivalens véges számú egyenlőtlenségi korláttal, amik mind a politóp egy-egy extrém pontjához tartoznak. Ekkor szintén teljesül, hogy ha a primál feladat optimális megoldása 0, akkor a duálisnak is létezik optimális megoldása. $\square$

5. Példa

Az árak alakulásának illusztrálására nézzünk néhány egyszerűbb példát!

Mint a 3. fejezetben már megemlítettem, a három széles körben alkalmazott kockázati mérték közül a CVaR-t alkalmazom az elfogadási tartomány meghatározására. A CVaR a maximális veszteség várható értékét, átlagos nagyságát adja meg a β százalékos esemény bekövetkezése esetén. Rockafellar és Uryasev [30] bizonyítása alapján a CVaR (vagy β -CVaR, $\beta \in [0, 1)$) a következő feladat optimumaként is meghatározható:

$$\rho(x) = \min\{\alpha + \frac{1}{1-\beta} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n[-x_n - \alpha]^+ \mid \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad (31)$$

4. Tétel. [18] A β -CVaR-hoz tartozó $\mathcal{P}_\rho$ halmaz (azaz azon π valószínűségi mértékek halmaza $\mathcal{N}_T$ -n, amikre $\forall x \in \mathbb{R}^n$ esetén teljesül $\mathbb{E}_\pi(-x) \leq \rho(x)$):

$$\mathcal{P}_\rho = \{\pi \leq \frac{p}{1-\beta} \mid \pi \in \mathbb{R}^{n_T}, \pi \geq 0, e^T \pi = 1\} \quad (32)$$

Bizonyítás. A Gotoh, Yamamoto, Yao (2010) cikkben [18] ez a tétel bizonyítás nélkül lett megadva, itt viszont levezetem a $\mathcal{P}_\rho$ halmaz megválasztásának alkalmasságát.

$\mathbb{E}_\pi(-x) \leq \rho(x)$ teljesüléséhez kell, hogy

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n(-x_n) \leq \min\{\alpha + \frac{1}{1-\beta} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n[-x_n - \alpha]^+\}$$

A bal oldal kisebb a jobb oldal minimumánál, ha minden α -ra kisebb a jobb oldalon álló értéknél. Ezt, valamint az $\alpha = \alpha \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n$ egyenlőséget kihasználva és α -t baloldalra átírva a következő alakot kapjuk:

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_T} \pi_n(-x_n - \alpha) \leq \frac{1}{1-\beta} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n[-x_n - \alpha]^+, \forall \alpha \in \mathbb{R}\text{-re},$$

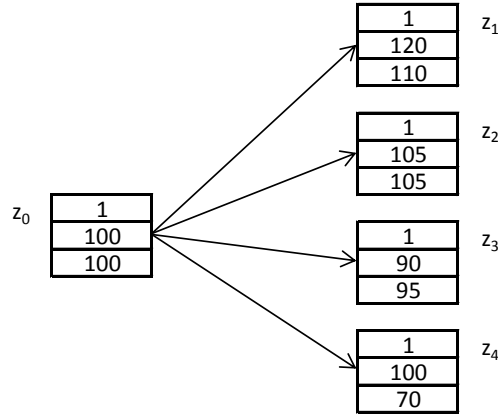
ami pontosan akkor teljesül, ha $\pi_n \leq \frac{p_n}{1-\beta} \forall n \in \mathcal{N}_T$ -re.

□

Mivel $\mathcal{P}_\rho$ politóp, teljesülnek rá a korábbi tételek.

5.1. Egyperiódusú modell

Az első példa legyen egy egyperiódusú modell ($T = 1$, $\mathcal{N}_T = \{1, 2, 3, 4\}$), három eszközzel (a nulladik az ármérce, aminek értéke az egyszerűség kedvéért végig 1, így a diszkontálástól most eltekinthetünk), és egy európai call opcióval. Az eszközök értékeit a következő ábra tartalmazza [18]:



Az eredeti valószínűség: $p = [1; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$, a származtatott követelés értéke $n \in \mathcal{N}_T$ -ben: $c^T = [75; 100; 0; 0]$, a keresett valószínűség: $\tilde{q} = [q_1; q_2; q_3; q_4]$ ($q_0 = 1$).

A lineáris optimalizálási feladat célfüggvénye:

$$\tilde{q}c \rightarrow \min / \max$$

Feltételei:

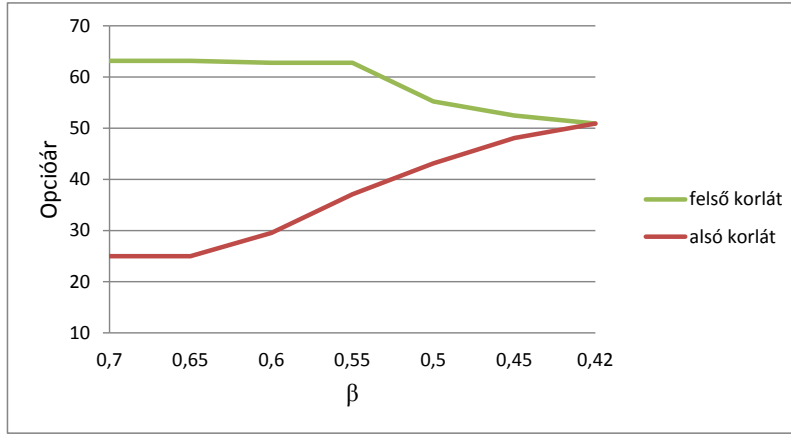
$$\begin{aligned} z_0 &= \sum_{i=1}^4 q_i z_i \\ q_i &\leq \frac{p_i}{1 - \beta} \quad i=1,2,3,4. \end{aligned}$$

Az LP feladatnak így 3 döntési változója van: q_1 , q_2 , q_3 ($q_0 = 1$ feltétel, q_4 pedig adott, mert az összeg 1) és 12 feltétele (mindhárom eszközre 1-1

martingál feltétel, $\mathcal{P}_\rho$ miatt q_i , $i = 1, 2, 3, 4$ értékére felső korlát, ugyanezekre nemnegativitási feltétel, valamint $q_0 = 1$).

Gotoh, Yamamoto, Yao[18] cikkében $\beta = 0.7$ esetén az opció árara a számossággal való téves leosztás miatt a $[6.25; 15.7895]$ tartomány jött ki megoldásként. Egy $[75; 100; 0; 0]$ kifizetési függvényű opcióra ez nagyon alacsony ár lenne. A valós megoldás ennek pont négyszerese, azaz $\beta = 0.7$ esetén az ár a $[25; 63.1579]$ tartományba esik.

A megoldás β függvényében:



Az árak közti különbség $\beta = 0.4167$ -ig csökken, ennél kisebb β -ra az ár egyértelmű. Ennél kisebb értékek esete nem is informatív, mert tipikusan 90% feletti konfidenciaszintet tekintünk, ami $\beta > 0.9$ -et jelent. $\beta > 0.7$ -re az árak állandósulnak.

5.2. Többperiódusú modell

Egy másik példához vegyünk valós adatokat! 9 kockázatos eszköz árfolyamát vizsgáljuk, amiből az első 4 eszköz adata lényeges, ezeket használjuk az opció fedezésére. Az eszközök értékének alakulását tíz historikus hozam alapján határozzuk meg (minden következő lépésben a lehetséges állapotok az előző érték szorozva a hozamegyütthatóval). A nulladik eszköz legyen az ármérce, aminek értéke végig egy, tehát az egyszerűség kedvéért a diszkontálástól most is eltekintünk. Legyen a fa mélysége $T = 3$, így mivel minden állapothoz 10 következő lehetséges állapotot rendelünk, lejáratkor a lehetséges állapotok halmaza 1000 elemű. Az opció legyen egy ázsiai put az első kockázatos eszközre, azaz olyan eladási jog, aminek lejáratkori értéke megegyezik az alaptermék lejáratkori árának és az opció élettartama alatti átlagárának különbségével, feltéve, hogy ez pozitív értéket ad. Egyébként pedig nulla. Hasonlóan az európai típusú opcióhoz, az ázsiai opciót is csak lejáratkor lehet lehívni. Az ázsiai put opció kifizetés függvénye 3 periódus esetén $n \in \mathcal{N}_T$ lejáratkori állapotokban, ahol K a kötési árfolyam, z_n az adott részvény árfolyama n állapotban, $a(n)$ pedig az n állapot őse:

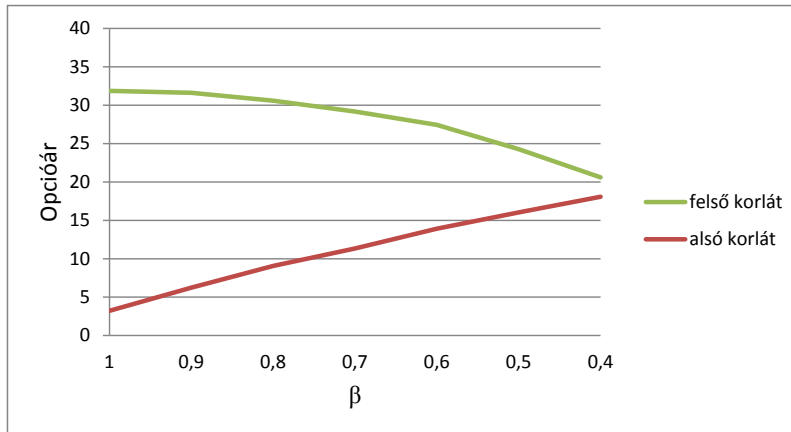
$$\left(K - \frac{z_n + z_{a(n)} + z_{a(a(n))} + z_0}{4}\right)^+ \quad (33)$$

Az eszközök kezdeti értékei: [1; 684; 223; 34000; 306; 1213; 506; 217; 2850]. Az első eszköz értéke végig 1 (mint ármérce folyamat, garantálja a diszkontálástól való eltekintés lehetőségét). Az eszközök hozamegyütthatói:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1,306	1,027	0,971	1,023	0,956	0,903	0,931	1,019
2	1	0,933	0,991	0,912	1,042	0,95	0,989	0,871	1,036
3	1	1,06	1,07	1,03	1,123	1,106	0,98	1,091	0,942
4	1	0,922	0,914	0,984	0,904	0,891	0,889	0,87	1,053
5	1	0,972	1,027	1,102	1,272	1,117	0,896	1,09	0,995
6	1	1,024	1,075	1,046	0,964	1,132	0,861	1,005	0,98
7	1	0,987	1,057	1,038	1,059	1,098	1,056	1,033	1,014
8	1	1,047	1,035	1	0,998	1,017	0,997	1,016	1,017
9	1	0,992	0,929	0,934	0,96	0,961	1,063	1,052	0,92
10	1	0,904	0,928	0,944	0,925	0,908	0,991	0,916	1,004

Ez egy 999 döntési változóból és 2555 feltételből álló LP feladathoz vezet. (Döntési változók a végállapotokhoz tartozó valószínűségek, egyel csökkentve az összeg = 1 feltétel miatt, a feltételek pedig: 111 martingál feltétel mind a 4 értékpapírra, a végállapotokban a valószínűségekre 1000 darab felső korlát, illetve az összes valószínűségre nemnegativitási korlát).

A derivatíva árara kapott korlátok β függvényében:



A Gotoh, Yamamoto, Yao[18] cikkben $\beta = 1$ esetben az opcióár tartománya: $[2.62; 31.91]$. Az általam kapott tartomány pedig $[3.22; 31.86]$, ami nagyságrendileg megegyezik a cikkben kapottal. A cikkszerzők programjában

itt már nem található a korábban megfigyelhető eszközzámmal való osztás, így a számolás helyes.

A függelékben a számoláshoz használt R programkód részletesen megtalálható. Futási ideje egy-egy LP feladat megoldására 30 másodperc körüli. $\beta < 0.4167$ értékekre a *solve* parancs visszatérési értéke 2, ami azt jelenti, hogy nincs megfelelő megoldás.

5.3. Valós adatok

Egy az előzőhöz hasonló modellt állítottam fel a Google 2014.03.22-én lejáró, különböző kötési árfolyamú amerikai típusú call opcióira, valamint a Magyar Telekom 2014.03.21-én lejáró amerikai típusú call opcióira. Az ár alakulásához a heti effektív hozamokat vettem ($\Delta t = 1$ hét), ezért ezen a rövid időtávon a diszkontálástól én is eltekintek (azaz a nulladik, kockázatmentes eszköz értéke végig 1). Először nézzük a Google opcióit! A kockázatmentes eszköz mellett a másik három eszköz a Google, a Yahoo és az IBM részvénye. Ezeket úgy választottam, hogy megvizsgáltam néhány, a Google-lel korreláló részvényt, és a Yahoo-nak a legmagasabb a pozitív korrelációja (0.925), az IBM-nek pedig a legnagyobb a negatív korrelációja (-0.67). Mivel árjegyzés csak hétköznapokon van, így T lejáratú időt én (az amúgy sztenderdizált, minden hónap 3. szombati lejáratú napjától eltekintve most) 2014.03.21.-nek veszem, a t időpontok pedig: $t_0=2014.02.28.$, $t_1=2014.03.07.$, $t_2=2014.03.14.$ Az eszközök értéke a kezdeti időpontban(t_0): [1; 1215.65; 38.67; 185.17]. Az árfolyamok alakulását 10 hétre visszamenőleg a heti hozamokból számítottam (2014.02.28. előtti heti hozamok). Így az eszközök alakulása a következőkből számolható (a sorokban a heti hozamok, az oszlopokban a kockázatos eszközök):

	GOOGLE	YAHOO	IBM
1	0,985%	3,701%	1,302%
2	0,324%	-3,193%	0,522%
3	3,443%	6,291%	4,105%
4	-1,779%	0,639%	-0,598%
5	5,084%	-5,012%	-1,646%
6	-2,801%	-6,024%	-4,831%
7	2,299%	-1,417%	0,735%
8	2,284%	1,994%	0,399%
9	-1,115%	-1,304%	0,694%
10	3,015%	1,523%	3,719%

A részvényárfolyamokat és az opciók árát a Corvinus Pénzügyi Laboratóriumban, a Bloomberg programból töltöttem le.

Az LP feladatot szintén R program segítségével oldottam meg, a programkódban a kifizetés függvény a következőképpen módosul:

$$\max \left\{ K - \frac{z_n + z_{a(n)} + z_{a(a(n))} + z_0}{4}; 0 \right\}$$

helyett

$$\max \{ z_n - K; 0 \}$$

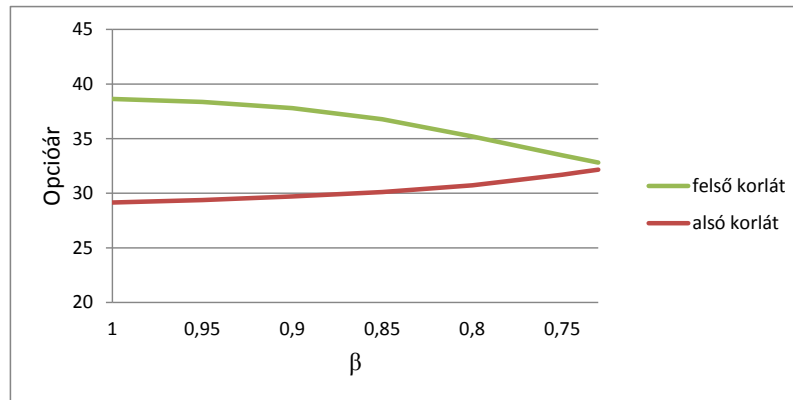
$\forall n \in \mathcal{N}_T$ állapotra.

Különböző K kötési árfolyamok mellett az európai call opcióra kapott korlátok értékei, valamint az utolsó oszlopban a vizsgált opció piaci értéke 2014.02.28-án:

K	min	max	opcióár
1185	33,413	41,82	39,1
1190	29,068	38,035	32,49
1195	25,44	35,083	29

Mivel a Google opciói amerikai típusúak, meg kell még jegyeznünk, hogy a jegyzett ár magasabb, mint az európai típusúé. Viszont még ez az ár is a várt tartományon belülre esik.

$K = 1990$ dollár mellett β függvényeként a következő korlátokat kapjuk:



Három tizedesjegyre vizsgálva a feladat $\beta = 0.722$ értékéig oldható meg. Ez még tovább pontosítható, a program futási ideje azonban egy LP feladatra 3 periódus és 10 hozam esetén fél perc, ami egy tizedesjegy pontosítással tízszeresére nő, 3 tizedesjegyre ez 15 perc körüli, ezért most további pontosítást nem vizsgáltam.

Nézzük meg a Magyar Telekom opciójára vonatkozó modellt! A kockázatos eszközök a következők: a Magyar Telekom, az OTP, illetve a MOL részvényei. Kezdeti, 2014.02.28-i értékeik: [335; 12.49; 29.4]. Hasonlóan számítva heti hozamokat, a részvények várható alakulása a következők alapján számítható:

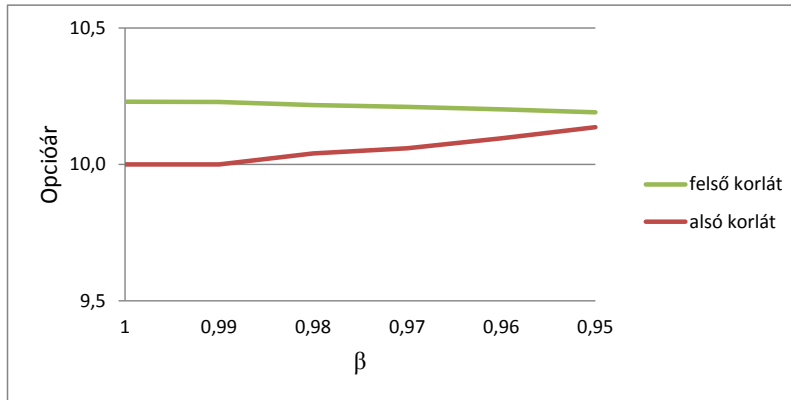
	MTELEKOM	OTP	MOL
1	1,515%	-5,697%	-1,161%
2	-0,602%	0,475%	-2,909%
3	8,852%	-1,405%	0,073%
4	-0,974%	2,398%	-1,009%
5	1,987%	-1,882%	0,362%
6	-1,307%	-4,106%	-2,261%
7	-0,971%	-0,628%	-1,668%
8	-0,962%	5,938%	0,594%
9	0,322%	3,720%	-0,383%
10	5,424%	-5,846%	-0,931%

K kötési árfolyamok mellett az $(S_T - K)^+$ kifizetésfüggvényű európai call opcióra kapott korlátok értékei, valamint az utolsó oszlopban a vizsgált opció piaci értéke 2014.02.28-án (illetve amennyiben nincs aznapra jegyzett árfolyam, akkor az előző jegyzett ár):

K	min	max	opcióár
320	15	18,16289	9,5
325	10,08489	14,6781	15,5
330	6,242556	11,65438	8,5

Ebben a magyar példában a tényleges jegyzett opció árak már nem mindig esetenként estek a várt tartományba. Ennek oka lehet egy másik kockázati mérték használata, más időtáv vagy más historikus hozam adatok használata, illetve ha a piaci szereplők egyéb modellt alkalmaznak. Ha van az opcióra jegyzett ár, akkor a modell az árképzés szempontjából nem is annyira, mint inkább a fedezéshez lehet hasznos.

$K = 325$ forint mellett β függvényeként a következő korlátokat kapjuk az opció értékére:



Látható, hogy β -nak igen kevés értékére oldható meg az LP feladat, $\beta = 0.947$ alatt már nincs megoldás. Így a korlát is szűk tartományok között mozog, $\beta \rightarrow 1$ esetén $[10; 10.23]$ az opció árának korlátai, tehát az opció értéke jól behatárolható.

6. Folytonos eset

6.1. Áralakulás nem teljes piacon

Folytonos világban a derivatív árazás alapmodellje a Black-Scholes-Merton modell. Ez azonban több alapfeltevéssel is él, amelyek a valóságban sokszor sérülnek. A modell feltételei:

- a rövidtávú kamatláb ismert és időben állandó,
- az alaptermék árfolyama geometriai Brown-mozgást követ folytonos időben, konstans drifttel és konstans volatilitással,
- az alaptermék osztalékot nem fizet,
- az opció európai típusú (azaz csak lejáratkor lehívható),
- nincs tranzakciós költség,
- megengedett a rövidre eladás.

Az általam vizsgált nem teljes piac esetén a folytonos kereskedés feltétele sérül, ekkor ugyanis az alaptermék ritkán vagy akár egyáltalán nem kereskedett, és már nem létezik replikáló stratégia és kockázatsemleges mérték.

Nem létezik egyértelmű opcióár sem. Közöséges európai call opció esetén például az arbitrázsmentesség teljesül minden olyan opcióár esetén, ami 0 és az alaptermék ára közötti tartományba esik. Ez igen széles tartomány, nem túl informatív. Leszűkítésére több módszerrel próbálkoztak, a három leginkább használt árazási formula[15]:

- Az egyik hasznosságfüggvény segítségével határozza meg az opció árának tartományát, ami a kockázatkerülési együttható csökkentésével csökkenthető. Ennek hátránya, hogy csak exponenciális hasznosságfüggvényre meghatározható, amivel ráadásul a call opció eladási árfolyama végtelenhez konvergál.

- Egy másik lehetőség a koherens kockázati mértékkel való árazás, amiről először Artzner (1999)[3] cikkében olvashatunk. Később Carr és szerzőtársai (2001)[5] általánosították a módszert, ha a befektetők nem csak az arbitrázs lehetőségeket keresik, hanem bármilyen lehetőséget, ami a kockázatkerülési szintjüknek megfelelő elfogadási tartományba esik. Így (a korábbi, diszkrét esethez hasonlóan) a kockázatok minimumát keresik egy elfogadási tartományban. A módszer hátránya, hogy az elfogadási tartomány szubjektív, nem lehet a piac egészére általánosítani.
- A harmadik módszer Hansen és Jagannathan (1991) [19], valamint Cochrane és Saa-Requejo (2000) [7] ötlete alapján a Sharpe-mutató korlátozására épül, kihasználva a tényt, hogy a befektetők azokat az eszközöket is előnyben részesítik, amiknek magas a Sharpe-mutatójuk (mert ezek azok a „jó üzletek”, amiknek magas az egységnyi szórásra jutó, kockázatmentes hozam feletti többlethozama).

A Floroiu és Pelsser (2013) [15] által vizsgált „good-deal bounds” módszer (ezentúl GDB) a harmadik típusúra hasonló árazási mechanizmus, azzal az eltéréssel, hogy a Cochrane és Saa-Requejo (2000) [7] által vizsgált esettel ellentétben itt a folyamat diszkontfaktora az új mérték alatt nem ismert. A GDB legnagyobb előnye a többi módszerrel szemben, hogy nincs szüksége a kockázatkerülési paraméterre. A dolgozatomban szempontjából pedig azért is érdekes ez az árazási technika, mert ahogy Jaschke és Küchler (2001) [23] cikkében olvashatjuk, a koherens kockázati mértékek ekvivalensek az általánosított arbitrázs határokkal, azaz a GDB-vel.

6.2. Az árat meghatározó modell

A Floroiu és Pelsser (2013) [15] cikk által bevezetett jelöléseket használva legyen a beárazni kívánt, ritkán kereskedett opció értéke V , kötési árfolyama K . Tegyük fel, hogy a piacon létezik egy S -el jelölt, kereskedett kockázatos eszköz, ami korrelál V -vel (korrelációs együtthatójuk ρ), és egy kockázatmentes eszköz, B . A három eszköz dinamikája ekkor:

$$dB = rBdt \quad (34)$$

$$dS = \mu_S Sdt + \sigma_S SdW_1 \quad (35)$$

$$dV = \mu_V Vdt + \sigma_V V(\rho dW_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2), \quad (36)$$

ahol r a rövid kamatláb (determinisztikus), dW_1 és dW_2 független Brown-mozgások. A drift és diffúzió együtthatói (μ_S , μ_V , σ_S , σ_V) konstansok, nincs osztalékfizetés, a kockázatos eszközös értékfolyamatai geometriai Brown mozgást követnek.

Így a közönséges, lejáratkor egy összegben fizető európai call opció értéke tetszőleges $t \in [0, T]$ -ben a t és T időpontok között diszkontált kifizetés P valódi mérték szerinti várható értéke:

$$C_t = \mathbb{E}_t \left[\frac{\Lambda_T}{\Lambda_t} \max(V_T - K, 0) \right], \quad (37)$$

ahol Λ_t a diszkontfaktor értéke t -ben, T a lejárat idő. A sztochasztikus diszkontfaktor a következő alakban áll elő:

$$d\Lambda_t = -r\Lambda_t dt - K_1 \Lambda_t dW_1(t) - K_2 \Lambda_t dW_2(t), \quad (38)$$

ahol dW_1 a fedezhető, dW_2 a nem fedezhető komponens K_1 és K_2 konstans együtthatókkal. Az egyenlet determinisztikus része a következő tétel bizonyításában levezetésre kerül.

5. Tétel. *Teljes piacon csak a dW_1 -es fedezhető komponens lenne. Ekkor a sztochasztikus diszkontfaktor volatilitása megegyezik az árazni kívánt eszköz kockázatának piaci árával, azaz a Sharpe-mutatóval.*

Bizonyítás. A tétel bizonyításának alapjául Cochrane 2005-ös Asset Pricing[6] című könyve szolgált. A könyvben a bizonyítás az általam feltett osztalékfizetés-mentességtől eltekint. A levezetésbe most én is beleveszem az osztalékfizetést, azonban ez csupán egy plusz tagot eredményez, a bizonyítás lényegén nem változtat.

A jelölések legyen az eddig bevezetettek, teljes piacon azonban a V -vel jelölt eszköz nem létezik, csak a kockázatmentes B , illetve a geometriai Brown-mozgást végző S részvény. A részvény dt időintervallum alatt $D_t dt$ osztalékot fizet. A Sharpe-mutató meghatározásához a későbbiekben szükség lesz a részvény teljes hozamának, azaz a

$$\frac{dS_t}{S_t} + \frac{D_t}{S_t} dt \quad (39)$$

egyenletnek a várható értékére:

$$\mathbb{E}_t \left(\frac{dS_t}{S_t} \right) + \frac{D_t}{S_t} dt, \quad (40)$$

illetve szórására:

$$\mathbb{D}_t \left(\frac{dS_t}{S_t} \right), \quad (41)$$

az osztaléktag determinisztikus, így annak szórása 0. $\mathbb{E}_t(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot | \mathcal{F}_t)$ jelöli a feltételes várható értéket (és hasonlóan $\mathbb{D}_t(\cdot) = \mathbb{D}(\cdot | \mathcal{F}_t)$ a feltételes szórást), azaz ha a t időpillanatig az információ ismert.

Most vizsgáljuk meg a részvény diszkontált értékének alakulását! Tudjuk, hogy végtelen intervallumon felírható a jövőbeli osztalékok végtelen sorozatának együttes jelenértékeként, azaz

$$\Lambda_t S_t = \mathbb{E}_t \int_0^\infty \Lambda_{t+s} D_{t+s} ds. \quad (42)$$

A $[0, \infty]$ intervallumot $[0, \Delta t]$ és $[\Delta t, \infty]$ részre bontva az integrál két tagból áll:

$$\Lambda_t S_t = \mathbb{E}_t \int_0^{\Delta t} \Lambda_{t+s} D_{t+s} ds + \mathbb{E}_t \int_{\Delta t}^\infty \Lambda_{t+s} D_{t+s} ds. \quad (43)$$

Δt infinitezimális időtartam, így az egyenlet jobb oldalának első tagja a következő alakra hozható:

$$\mathbb{E}_t \int_0^{\Delta t} \Lambda_{t+s} D_{t+s} ds = \Lambda_t D_t dt, \quad (44)$$

mert az integrált az alsó közelítő összeggel helyettesíthetjük, és ekkor a feltételes várható érték elhagyható, mert az így kapott változó $\mathcal{F}_t$ -mérhető.

A második tag az $u = s - \Delta t$ változócserével tovább alakítható:

$$\mathbb{E}_t \int_{\Delta t}^{\infty} \Lambda_{t+s} D_{t+s} ds = \mathbb{E}_t \int_0^{\infty} \Lambda_{t+u+\Delta t} D_{t+u+\Delta t} du = \mathbb{E}_t(\Lambda_{t+\Delta t} D_{t+\Delta t}). \quad (45)$$

A várható értéket tovább alakítva

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t(\Lambda_{t+\Delta t} S_{t+\Delta t}) &= \mathbb{E}_t[\Lambda_t S_t + (\Lambda_{t+\Delta t} S_{t+\Delta t} - \Lambda_t S_t)] \\ &= \mathbb{E}_t(\Lambda_t S_t) + \mathbb{E}(\Lambda_{t+\Delta t} S_{t+\Delta t} - \Lambda_t S_t). \end{aligned} \quad (46)$$

Ennek első tagjából a várható érték az $\mathcal{F}_t$ -mérhetőség miatt elhagyható, így ez a tag egyszerűsíthető a (43) egyenlet bal oldalával. A második tag pedig a $dx = x_{t+dt} - x_t$ jelöléssel: $\mathbb{E}_t(d(\Lambda_t S_t))$.

A kapott egyenlet a diszkontált részvényárfolyam dinamikájára:

$$\mathbb{E}_t(d(\Lambda_t S_t)) + \Lambda_t D_t dt = 0, \quad (47)$$

ami $\Lambda_t S_t$ -vel osztva arra vezet, hogy

$$\frac{\mathbb{E}_t(d(\Lambda_t S_t))}{\Lambda_t S_t} + \frac{D_t}{S_t} dt = 0. \quad (48)$$

A kockázatmentes B eszközre gondolhatunk úgy, mint egy olyan részvény, aminek ára konstans 1, és osztalékként a kockázatmentes hozamot fizeti, azaz $S_t = 1$, $D_t = r$. Az előző egyenletet erre a kockázatmentes eszközre alkalmazva a következő egyenlethez jutunk:

$$\mathbb{E}_t\left(\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t}\right) = -r dt. \quad (49)$$

Ez konzisztens a korábban már felírt (38) egyenlettel.

Visszatérve a diszkontált részvényárfolyamhoz, alkalmazzuk az Itó-lemmát!

$$d(\Lambda_t S_t) = \Lambda_t dS_t + S_t d\Lambda_t + d\Lambda_t dS_t, \quad (50)$$

$\Lambda_t S_t$ -vel leosztva:

$$\frac{d(\Lambda_t S_t)}{\Lambda_t S_t} = \frac{dS_t}{S_t} + \frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t} + \frac{d\Lambda_t dS_t}{\Lambda_t S_t}. \quad (51)$$

Várható értéket véve és a már ismert tagokat behelyettesítve a következő egyenletet kapjuk:

$$\mathbb{E}_t \frac{dS_t}{S_t} + \left(\frac{D_t}{S_t} - r \right) dt = -\mathbb{E}_t \left(\frac{d\Lambda_t dS_t}{\Lambda_t S_t} \right). \quad (52)$$

Így az egyenlet bal oldalán megjelenik a (hozam várható értéke - r) kifejezés, azaz a Sharpe-mutató számlálója. Már csak azt kellene belátni, hogy a jobb oldal éppen a diszkontfaktor szórásának, illetve a hozam szórásának szorzata.

$$\begin{aligned} -\mathbb{E}_t \left(\frac{d\Lambda_t dS_t}{\Lambda_t S_t} \right) &= -\left[\text{Cov} \left(\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t}, \frac{dS_t}{S_t} \right) + \mathbb{E}_t \left(\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t} \right) \mathbb{E}_t \left(\frac{dS_t}{S_t} \right) \right] \\ &= -\text{Corr} \left(\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t}, \frac{dS_t}{S_t} \right) \mathbb{D}_t \left(\frac{dS_t}{S_t} \right) \mathbb{D}_t \left(\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t} \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Az első átalakítás a kovariancia definíciójából következik, a második pedig a korreláció definíciójából, illetve felhasználva, hogy a két várható érték csak dt -s tagot tartalmaz, így szorzatuk eltűnik. Ebben az egyenletben már megjelent a két szórás tényező, nézzük meg mi lesz $\text{Corr} \left(\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t}, \frac{dS_t}{S_t} \right)$ értéke!

A részvényre vonatkozó (35) és a diszkontfaktorra vonatkozó (38) egyen-

letekből, illetve $dt \cdot dt = dt \cdot dW = dW \cdot dt = 0$ és $dW \cdot dW = dt$ használatával:

$$\begin{aligned}
\text{Corr}\left(\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t}, \frac{dS_t}{S_t}\right) &= \frac{\text{Cov}\left(\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t}, \frac{dS_t}{S_t}\right)}{\mathbb{D}_t\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)\mathbb{D}_t\left(\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t}\right)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_t\left(\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t} \frac{dS_t}{S_t}\right) - \mathbb{E}_t\left(\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t}\right)\mathbb{E}_t\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)}{\mathbb{D}_t\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)\mathbb{D}_t\left(\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t}\right)} \\
&= \frac{-\sigma_S K_1 dt - (\mu_S dt)(-r dt)}{\sigma_S K_1 dt} \\
&= -1.
\end{aligned} \tag{54}$$

Így (53)-ba a korrelációt beírva és a hozam szórásával leosztva:

$$\frac{\mathbb{E}_t \frac{dS_t}{S_t} + \left(\frac{D_t}{S_t} - r\right)dt}{\mathbb{D}_t\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)} = \mathbb{D}_t\left(\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t}\right). \tag{55}$$

A bal oldal a kockázat piaci ára, a jobb oldal pedig a diszkontfaktor volatilitása, tehát pont a kívánt egyenletet kaptuk. $\square$

Az előző tétel a diszkontfaktor volatilitására csak teljes piac esetén érvényes, ugyanis a Sharpe-mutató csak kereskedett eszközök esetén megfigyelhető. Nem teljes piac esetén az ismert piaci információt használhatjuk, azaz az alaptermékkel korreláló, folytonosan kereskedett másik termék kockázatának piaci árát: $\frac{\mu_S - r}{\sigma_S}$ (a negatív előjel abból következik, hogy ha dW_1 értéke csökken, akkor az alaptermék értéke is csökken, így a diszkontfaktor értéke nő). Viszont így csak részben fedezhető a derivatív kockázata, így jön be a másik tag.

A GDB mechanizmus alapfeltevése, hogy csak olyan Sharpe-mutatókat vizsgál, amik elég nagyok, hogy kereskedést indukáljanak, viszont nem túl nagyok, az ilyen típusú ügyletek ugyanis azonnal eltűnnek a piacról. A diszkontfaktor teljes volatilitására tehát egy k korlátot kell meghatározni, ahol k a modell egy exogén változója.

$$K_1^2 + K_2^2 \leq k^2. \tag{56}$$

K_1 ismeretében K_2 -re a következő korlátokat kapjuk:

$$K_2 \in \left[-\sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu_S - r}{\sigma_S}\right)^2}, \sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu_S - r}{\sigma_S}\right)^2} \right]. \quad (57)$$

Éppen ez az intervallum határozza meg az opció árának korlátait is. Ennek bizonyítására az opció árát meghatározó egyenletet egy mértékcserevel alakítsuk át!

Az egyenlet a valódi mértékkel:

$$C_0 = \mathbb{E}^P \left[\frac{\Lambda_T}{\Lambda_0} \max(V_T - K, 0) \right] \quad (58)$$

6. Definíció. [27] Legyen P a valódi, Q^{GDB} pedig az új valószínűségi mérték. Vezessük be a Radon-Nikodym deriváltakból álló $\lambda(t) = \frac{dQ_t^{GDB}}{dP_t}$ folyamatot, ahol Q_t^{GDB} , illetve P_t a megfelelő mértékek leszűkítése az $\mathcal{F}_t$ σ -algebrákra. Ekkor a sztochasztikus diszkontfaktor értéke t -ben a kockázatmentes diszkontfaktor értéke t -ben és ezen $\lambda(t)$ szorzata, azaz:

$$\Lambda_t = e^{-rt} \lambda(t) = e^{-rt} \frac{dQ_t^{GDB}}{dP_t} \quad (59)$$

Így az opció ára az alábbi alakba írható:

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathbb{E}^P \left[e^{-rT} \frac{dQ^{GDB}}{dP} \max(V_T - K, 0) \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{Q^{GDB}} \left[\max(V_T - K, 0) \right], \end{aligned} \quad (60)$$

ahol Q^{GDB} az eredeti P mértékkel ekvivalens mérték. (A Radon-Nikodym deriváltaknál eltekintünk a T indextől, ez ugyanis a T -ig lehetséges összes információ ismeretét jelenti.)

Mivel Q^{GDB} nem egyértelmű, ezért keressünk olyan Q^{GDB} mértéket, amivel C_0 minimális, illetve maximális! Ezek az értékek adják meg a derivatív árának alsó és felső határát. Tehát

$$C_0 \in \left[\min_{„Q^{GDB} \leq k^2”} e^{-rT} \mathbb{E}^{Q^{GDB}} \left[\max(V_T - K, 0) \right], \max_{„Q^{GDB} \leq k^2”} e^{-rT} \mathbb{E}^{Q^{GDB}} \left[\max(V_T - K, 0) \right] \right] \quad (61)$$

Ezzel a jelöléssel a GDB egy koherens kockázati mérték, amely a kockázati mértékek infimumát és supremumát keresi egy elfogadási tartományon belül. Jaschke és Küchler (2001) [23] cikkében bebizonyítja, hogy a koherens kockázati mértékek ekvivalensek az általános arbitrázs határokkal, azaz a GDB-vel.

Annak bizonyítására, hogy a közönséges európai call opció árának korlátait meghatározza a fent K_2 -re megkapott korlát, végezzük el a következő Girsanov-transzformációt!

Először definiáljuk a többdimenziós Girsanov tételt!

7. Definíció. [29] Legyen $\Theta(t) = (\Theta_1(t), \dots, \Theta_n(t))$ n -dimenziós $\mathcal{F}_t$ -mérhető folyamat, amire teljesül a Novikov-feltétel, azaz

$$\mathbb{E}^P \left(\exp \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^n \Theta_i(u) du \right) \leq \infty. \quad (62)$$

Vegyük a

$$Z_t = \exp \sum_{i=1}^n \left(- \int_0^t \Theta_i(u) dW_i^P(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta_i^2(u) du \right) \quad (63)$$

folyamatot, ahol dW_i^P , $i = 1, \dots, n$ n -dimenziós Wiener-folyamat P -mérték alatt. Ekkor ha a Q -mérték a következőképpen van definiálva:

$Q(A) = \int_A Z_t dP$, $A \in \mathcal{F}_t$, akkor

$$W_i^Q = W_i^P + \int_0^t \Theta_i(u) du \quad (64)$$

Wiener-folyamat Q -mérték alatt ($i = 1, \dots, n$).

Alkalmazzuk a Girsanov-tételt $\Theta(t) = \left(-\frac{\mu_S - r}{\sigma_S}, -K_2 \right)$ -val! Eszerint létezik olyan P -vel ekvivalens Q -mérték, amire

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dP} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T (\Theta_1^2(t) + \Theta_2^2(t)) dt - \int_0^T \Theta_1(t) dW_1(t) - \int_0^T \Theta_2(t) dW_2(t) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\mu_S - r}{\sigma_S} - K_2^2(t) \right) dt + \int_0^T \frac{\mu_S - r}{\sigma_S} dW_1(t) + \int_0^T K_2 dW_2(t) \right\}. \end{aligned} \quad (65)$$

Ekkor

$$\begin{aligned}dW_1 &= dW_1^Q - \frac{\mu_S - r}{\sigma_S} dt \\dW_2 &= dW_2^Q - K_2 dt,\end{aligned}\tag{66}$$

ahol dW_1^Q és dW_2^Q Q-mérték szerinti Wiener-folyamatok. Ekkor a V értékének alakulását leíró egyenlet:

$$\begin{aligned}dV &= \mu_V V dt + \sigma_V V (\rho dW_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2) \\&= \mu_V V dt + \sigma_V V \left[\rho \left(dW_1^Q - \frac{\mu_S - r}{\sigma_S} dt \right) + \sqrt{1 - \rho^2} (dW_2^Q - K_2 dt) \right] \\&= \left(\mu_V - \sigma_V \rho \frac{\mu_S - r}{\sigma_S} - \sigma_V \sqrt{1 - \rho^2} K_2 \right) V dt \\&\quad + \sigma_V V \left(\rho dW_1^Q + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2^Q \right).\end{aligned}$$

Az opció ára C_0 alapján pozitív korrelációban áll V_T alaptermék T-beli árával, így annak driftjével is. Az opció ára akkor lesz minimális, ha ez a drift minimális (ez lesz az eladók rezervációs ára, tehát a legkisebb ár, amin hajlandóak eladni). Ez akkor következik be, ha K_2 értéke maximális, azaz $K_2 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu_S - r}{\sigma_S}\right)^2}$. Hasonlóan kapjuk a vevők rezervációs árát, azt a legmagasabb értéket, amin hajlandóak vásárolni: a driftet maximalizáljuk, azaz vegyük K_2 minimum értékét $K_2 = -\sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu_S - r}{\sigma_S}\right)^2}$ -t. Ahhoz, hogy tranzakció jöhessen létre, az opció árának ezen korlátok közé kell esnie, azaz

$$\left[-\sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu_S - r}{\sigma_S}\right)^2}, \sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu_S - r}{\sigma_S}\right)^2} \right].\tag{67}$$

intervallum egyértelműen meghatározza az opció árának lehetséges értékeit.

Ha a dV -re kapott egyenletet átírom a következő alakra, egy osztalékot fizető részvény folyamatát ismerjük fel benne.

$$dV = (r - q)V dt + \sigma_V V (\rho dW_1^Q + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2^Q),\tag{68}$$

ahol $q = r - \mu_V + \sigma_V \rho \frac{\mu_S - r}{\sigma_S} - \sigma_V \sqrt{1 - \rho^2} K_2$ az osztalékfizetési ráta. (μ_V , σ_V és K_2 értékéről feltesszük, hogy konstans, így V lognormális eloszlást követ. A q osztalékfizetési ráta negatív.

Ennek bizonyítására szükségünk lesz a CAPM modellből ismert összefüggésre a részvény várható hozamára:

$$\mathbb{E}(R_i) = r_f + \beta_i(\mathbb{E}(R_m) - r_f), \quad (69)$$

ahol R_i jelöli a részvény hozamát, r_f a kockázatmentes kamatláb, R_m a részvénytőkepiac hozama és $\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)} = \frac{\text{Corr}(R_i, R_m)\sigma(R_i)}{\sigma(R_m)}$ a részvény hozama és a részvénytőkepiaci hozam közötti összefüggést fejezi ki. β_i -t behelyettesítve:

$$\mathbb{E}(R_i) = r_f + \text{Corr}(R_i, R_m)\sigma(R_i)\frac{\mathbb{E}(R_m) - r_f}{\sigma(R_m)}, \quad (70)$$

ami a korábbi jelölésekkel:

$$\mu_V = r + \rho\sigma_V \frac{\mu_S - r}{\sigma_S}. \quad (71)$$

μ_V -t behelyettesítve q -ba csak a $-\sigma_V \sqrt{1 - \rho^2} K_2$ tag marad, ami pedig negatív, tehát q osztalékfizetési ráta értéke negatív, de ezt elfogadjuk, mint egy „árat”, amit azért kell fizetni, hogy a fedezetlen kockázat eltűnjön és kilépjünk a nem teljes piacok világából.

Így a call opció árát már a Black-Scholes képlettel ki tudjuk fejezni:

$$C_0 = V_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2). \quad (72)$$

$N(x)$ a sztenderd normális eloszlásfüggvény x helyen felvett értéke,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{K}\right) + \left(\mu_V - \sigma_V \rho \frac{\mu_S - r}{\sigma_S} - \sigma_V \sqrt{1 - \rho^2} K_2 + \frac{\sigma_V^2}{2}\right)T}{\sigma_V \sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T}$$

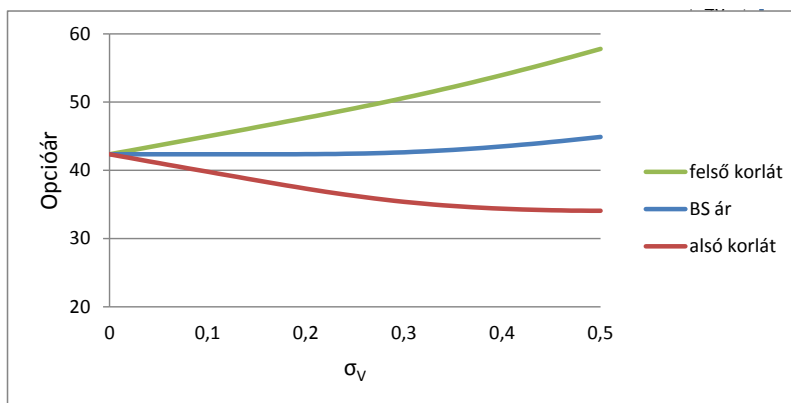
Nem teljes piac esetén, a teljes piaccal ellentétben, az alaptermék driftje sosem tűnik el. Még egy, az ezzel tökéletesen korreláló kereskedett termék esetén ($\rho = 1$) sem, ugyanis a kettő várható hozama különbözik.

6.3. Paraméterválasztás

Ebben a modellben már könnyen számolhatunk opcióárat, mert a paraméterek ismertek, vagy megfigyelhetők. Az egyetlen exogén paraméter a volatilitási korlát, k . Ahhoz, hogy az opcióárak értelmesek legyenek, tudjuk, hogy $k \geq \frac{\mu_S - r}{\sigma_S}$ -nek teljesülnie kell. Egyenlőség esetén a piac teljes, az árak a Black-Scholes árhoz konvergálnak. Azonban minél nagyobb értéket választunk neki, az opcióárra a korlát annál szélesebb. Cochrane és Saa-Requejo (2000) [7] szerint k -ra jó választás a Sharpe-mutató 2-szerese.

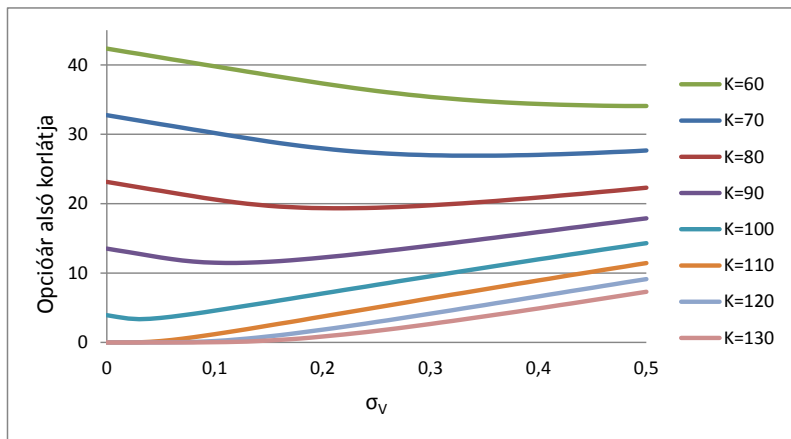
Vegyünk egy egyszerű példát! Legyenek a paraméterek a következők: $\mu_S = 8\%$, $\sigma_S = 16\%$, $\mu_V = \rho\sigma_V \frac{\mu_S - r}{\sigma_S} + r$, $r = 4\%$, $T = 1$, $k = 2 \frac{\mu_S - r}{\sigma_S}$, $\rho = 0,8$, $V_0 = 100$, $K = 60$.

Ekkor a GDB alsó és felső korlátjára kapott értékek, valamint a Black-Scholes ár az alaptermék volatilitásának függvényében:

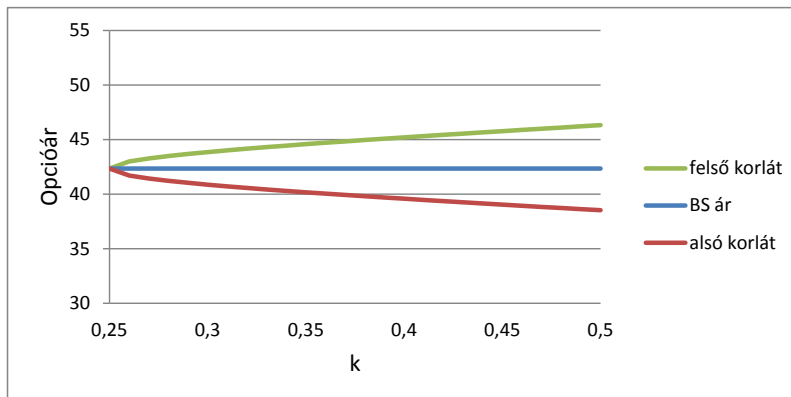


Az ábrából jól látszik, hogy az alaptermék volatilitásának kis értékeire ($\sigma_V \rightarrow 0$) az árak a Black-Scholes árhoz konvergálnak, mert eltűnik az alaptermék kockázata, az egyetlen kockázat, ami a modellben marad, az alaptermékkel korreláló, kereskedett részvény kockázata, akárcsak a Black-Scholes modellben. A teljes piaccal ellentétben, nem teljes piac esetén az opció árának alsó korlátja az alaptermék volatilitásának növekedésével csökken (ez az

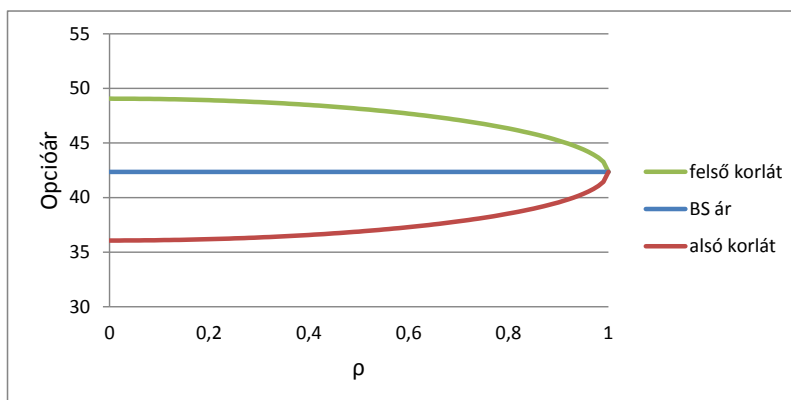
osztalék negativitásából következik: $q \leq 0$). Mivel ez a vevők rezervációs ára, ez azt jelenti, hogy ahogy a bizonytalanság nő, úgy a vevők a nem fedezhető kockázat miatt kevesebbet akarnak fizetni. A piac nem-teljessége tehát az opció piaci árát csökkentheti. A csökkenő tendencia azonban csak in-the-money opció ($K < V_0$) esetén figyelhető meg. Amint at-the-money-vá válik ($K = V_0$), a volatilitás negatív hatása az opció árára elmúlik.



Nagyon fontos paraméter még a diszkontfaktor volatilitásának korlátja k . Ha ennek értéke a kereskedett termék Sharpe-mutatójával egyezik meg, akkor a piac teljessé válik, az opció GDB szerinti ára konvergál a Black-Scholes modellben számított árhoz. k növelésével az alsó és felső korlát közötti intervallum nő. A korábban megadott paraméterekkel, és $\sigma_V = 15\%$ -kal (amiből $\mu_V = 7\%$):



A modellt pontosíthatjuk azáltal is, ha kereskedett eszköznek olyan eszközt választunk, aminek az alaptermékkel vett korrelációja minél nagyobb. A korrelációs együttható növekedésével ugyanis a GDB modell szintén a Black-Scholes árat közelíti. $\rho = 0$ korrelálatlanság esetén pedig a kockázat nem fedezhető, ezért ekkor a legszélesebb az intervallum.



6.4. Példa

A következőkben a 6. fejezetben megismert GDB árazási mechanizmus néhány alkalmazását ismertetem. Az első a reálopcióra egy példa, a beépített földterületek árazása. Először Titman (1985)[33] elméleti dolgozatában olvashatunk az ötletéről, miszerint egy földterület értéke megegyezik egy olyan európai call opció értékével, aminek alapterméke az épület, amit a területre lehet építeni, kötési árfolyama az építési költség és az építkezés kezdete a lehívás időpontja. Henderson (2007)[22] és Miao, Wang (2007)[28] hasznosságfüggvény alapú árazási technikája alapján Floroiu és Pelsser (2012)[16] cikkében olvashatunk a GDB módszer alkalmazásáról részletesebben.

Egy másik példa a dolgozatomban bemutatott módszerhez hasonló árazásra az időjárési opciók árazása. A legszélesebb körben ismert időjárési opciók az úgynevezett HDD (Heating Degree Days) és CDD (Cooling Degree Days) opciók. Az alaptermék ekkor a hőmérsékletből származtatott, ami nem kereskedhető, ezért lesz a piac nem teljes. Az alaptermék értéke a T napból álló kötési időszak végén:

$$\text{HDD} = \sum_{i=1}^T \text{napi HDD} = \sum_{i=1}^T \max(0; 18\text{C}^\circ - \text{napi középhőmérséklet})$$

és

$$\text{CDD} = \sum_{i=1}^T \text{napi CDD} = \sum_{i=1}^T \max(0; \text{napi középhőmérséklet} - 18\text{C}^\circ).$$

Az erre vonatkozó call opció kifizetési függvénye:

$$p(\$/\text{foknap}) \cdot \max\{0; \text{HDD} - K\},$$

$$p(\$/\text{foknap}) \cdot \max\{0; \text{CDD} - K\},$$

ahol $p(\$/\text{foknap})$ a kötési árfolyamtól való pozitív eltérés egységnyi ára dollárban. A viszonyítási foksám általában 18C° , de az átlag európaiktól eltérő

klímájú országokban ezt más értékben is meghatározhatják. Az opció átlagos időtartama egy hónap vagy egy évszak (HDD esetében jellemzően november-től márciusig, CDD esetében májustól szeptemberig). Viszont a hőmérséklet nem geometriai Brown-mozgást végez, ezért erre az általam bemutatott modellnél egy általánosabbat kellene alkalmazni. Ennek egy példáját olvashatjuk Girón (2010)[17] diplomamunkájában.

Egy másik típusú időjárási derivatíva a Japánban használt „nyári napok” opció. Ennek kifizetési függvényét a nyári napok száma határozza meg, azaz azon napok száma az opció időtartama alatt, amik meghaladják a 25°C -ot. Kanamura és Ohashi (2009)[24] cikkében ilyen típusú opciók árazásáról olvashatunk a GDB módszerrel, viszont a hőmérséklet itt sem geometriai Brown-mozgást követ, ők a volatilitásáról azt feltételezik, hogy Ornstein-Uhlenbeck folyamatot követ.

7. Összefoglalás, további kutatási irányok

Az eszközárak alaptételei alapján tudjuk, hogy nem teljes piacon arbitrázsmentesség esetén létezik martingálmérték, azonban az nem egyértelmű. Így a származtatott termékekre nem tudunk egyértelmű árat meghatározni, csupán egy tartományt, ami a minimum- és maximumértékeit adja meg. Dolgozatomban az elfogadási tartományt a piaci szereplők egyéni kockázatelutasítási hajlamát tükröző kockázati mértékekkel adtam meg.

Diszkrét esetben definiáltam egy olyan fedezési stratégiát, ami a kockázati mérték segítségével meghatározható. Az arbitrázsmentességet ennek segítségével egy félig-végtelen lineáris programozási feladatként felírva, majd duálisát véve azt láttuk, hogy az ár alsó és felső korlátjaként a derivatíva kifizetésfüggvényének martingálmérték szerint számított várható értékének minimumát és maximumát kapjuk. Az LP feladat R programban való megoldásával két feltételezett modellre, illetve valós adatokra is megmutattam a tartomány alakulását különböző paraméterek mellett.

Diszkrét esetben a dolgozat folytatása lehet a hozamok különböző megválasztása. Korábbi heti effektív hozamokkal vizsgálva az LP feladatnak nem minden esetben létezik megoldása, előfordul ugyanis, hogy a heti hozamok egy részvénynél mind a 10 hétre pozitívak. Ekkor a részvény árfolyamata nem lehet martingál. A trendek illetve zajok pontosabb vizsgálatával és hozamok szimulálásával megfelelőbb képet kaphatunk az árfolyamalakulásról. A heti hozamok helyett vizsgálhatunk napi hozamokat is (az opciók havi időtartama miatt hosszabb időtávút nem érdemes választani). Viszont ekkor célszerű lenne a 3 periódus helyett többet vizsgálni, aminek futási ideje már 4 periódusra is 89 perc (a döntési változók száma itt már 10^4 , a feltételeké pedig 25 555). Az árak alakulását nagyban befolyásolja a különböző kockázati mérték, illetve az ahhoz kapcsolódó β paraméter megválasztása is, ezért érdekes lehet megvizsgálni az árakat az egyes piaci szereplők erre vonatkozó

preferenciái alapján.

Folytonos esetben az ún. „good-deal bounds” mechanizmust ismertettem, ami a diszkontfaktor volatilitásának megszorítására épül. Geometriai Brown-mozgást végző alaptermék, és egy azzal korreláló, szintén geometriai Brown-mozgást végző fedezeti eszköz esetén megmutattam, hogy a különböző paraméterek esetén hogyan alakul az ár tartománya.

A dolgozat folytatása lehet a piacokon ténylegesen kereskedett opciók vizsgálata. Sajnos azonban az alaptermék dinamikájára vonatkozó feltétel a valóságban sokszor nem teljesül, ezért célszerű a modellt általánosabb esetre is kiterjeszteni és megvizsgálni.

8. Függelék

8.1. Az opció árát meghatározó LP feladat programkódja

```
library(lpSolve)
library(lpSolveAPI)

depth ← 3
subscenario ← 10
asset ← 4
beta ← 0.7
rho ← (1/(subscenario ^ depth))/(1-beta)
# összes állapot száma: (most 1111)
nodeset ← (subscenario ^ (depth+1)-1)/(subscenario-1)
# lejáratkori állapotok száma: (most 1000)
terminalnodes ← (subscenario ^ (depth+1)-1)/(subscenario-1) -
  (subscenario ^ (depth)-1)/(subscenario-1)

# részvények változásai
tr ← rbind(
  cbind(1,1,1,1,1,1,1,1,1),
  cbind(# az első részvény alakulása
    1.306, 0.933, 1.06, 0.922, 0.972, 1.024, 0.987, 1.047, 0.992, 0.904),
  cbind(# a második részvény alakulása
    1.027, 0.991, 1.07, 0.914, 1.027, 1.075, 1.057, 1.035, 0.929, 0.928),
  cbind(# a harmadik részvény alakulása
    0.971, 0.912, 1.03, 0.984, 1.102, 1.046, 1.038, 1, 0.934, 0.944))
r ← t(tr)
```

```

# kötési ár
kk ← 680

# ősök meghatározása (először nullvektor, majd értékadás)
adult ← rep(0,nodeset)
for (n in 2:nodeset){
  adult[n]=((n-2)-(n-2)%%subscenario)/subscenario+1}

# z mátrix (eszközök értékei, sorokban a lehetséges állapotok, oszlopokban
az eszközök)
# (először nullvektor)
z=matrix(data=NA, nrow=nodeset, ncol=asset)
for (i in 1:100){
  for (j in 1:asset){
    z[i,j]=0
  }
}
# első sora: kezdeti értékek
elsosor ← cbind(1,684,223,34000)
# (értékadás)
for (i in 1:nodeset){
  for (k in 1:asset){
    if (i==1){z[1,k] = elsosor[k]}
    else if (i%%subscenario>1) {z[i,k] = z[adult[i],k] *
      r[i%%subscenario-1,k]}
    else {z[i,k] = z[adult[i],k] * r[i%%subscenario+9,k]}
  }
}

```

```

# c vektor (származtatott követelés értéke)
c=rep(0,nodeset)
for (i in 1:(nodeset-subscenario^depth))
  {c[i]=0}
for (i in (nodeset-subscenario^depth+1):nodeset)
  {c[i] = max(kk-(z[i,2]+z[adult[i],2]+z[adult[adult[i]],2]+z[1,2])/(depth+1),0)}

# optimalizálási feladat
lprec ← make.lp(0,nodeset)
set.objfn(lprec,c)
lp.control(lprec,sense='max')

# feltételek
# z martingál
qnzn=rep(0,nodeset)
for (j in 1:4)
  for (i in 1:(nodeset-subscenario^depth)){
    for (k in 1:nodeset) {
      if (k==i) {qnzn[k]=-z[i,j]} else if (k==10*(i-1)+2) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+3) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+4) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+5) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+6) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+7) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+8) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+9) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+10) {qnzn[k]=z[k,j]}
      else if (k==10*(i-1)+11) {qnzn[k]=z[k,j]}
    }
  }

```

```

        else qnzn[k]=0
    }
    add.constraint(lprec, qnzn, "=", 0)}

#  $q_0 = 1$ 
add.constraint(lprec, c(1,rep(0,nodeset-1)), "=", c(1,rep(0,nodeset-1)))

# valószínűségek 0-nál nagyobbak
for (i in 1:nodeset){
    set.bounds(lprec, lower = 0, columns = i)}

# felső korlát  $\mathcal{P}_\rho$  alapján
for (i in (nodeset-subscenario ^ depth+1):nodeset){
    set.bounds(lprec, upper = rho, columns = i)}

solve(lprec)

```

8.2. Minimum β -t meghatározó programkód

```

# Első tizedesjegy meghatározása
megoldas  $\leftarrow$  0
m=1

# a megoldas változó a solve függvény értékét kapja, ami 0, ha az LP feladat
megoldható, 2, ha nem létezik optimális megoldás
while (megoldas==0) {
    #  $\beta$  értéke kezdetben 1-ről indul, minden lépésben 0.1-el csökken
    beta = 1-m*0.1
    rho  $\leftarrow$  (1/(subscenario ^ depth))/(1-beta)
}

```

```

# ide jön az optimalizálási feladat a feltételekkel együtt
megoldas ← solve(lprec)
m ← m+1}

# a még megoldható béta értéke
beta_1 ← beta+0.1

# Második tizedesjegy
megoldas ← 0
m=1
while (megoldas==0) {
  beta = beta_1-m*0.01
  rho ← (1/(subscenario ^ depth))/(1-beta)
  # ide jön az optimalizálási feladat a feltételekkel együtt
  megoldas ← solve(lprec)
  m← m+1}
beta_2 ← beta+0.01

# Harmadik tizedesjegy
megoldas ← 0
m=1
while (megoldas==0) {
  beta = beta_2-m*0.001
  rho ← (1/(subscenario ^ depth))/(1-beta)
  # ide jön az optimalizálási feladat a feltételekkel együtt
  megoldas ← solve(lprec)
  m←m+1}
# a három tizedesjegyű béta, amire az LP még megoldható:
beta_3 ← beta+0.001

```

Hivatkozások

- [1] C. Acerbi (2004), *Coherent representations of subjective risk aversion*, G. Szegő: Risk Measures for the 21st Century, Wiley, New York, pp. 147-207.
- [2] C. Acerbi, D. Tasche (2002), *Expected Shortfall: A natural coherent alternative to value at risk*, Economic Notes, 31: 379-388.
- [3] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath (1999), *Coherent measures of risk*, Math. Finance 9, 203-222
- [4] F. Black, M. Scholes (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy 81, 637-54.
- [5] P. Carr, H. German, D. B. Madan (2001), *Pricing and hedging in incomplete markets*, Journal of Financial Economics 62(1), 131-167.
- [6] J. H. Cochrane (2005), *Asset Pricing - Revised Edition*, Princeton University Press
- [7] J. H. Cochrane, J. Saa-Requejo (2000), *Beyond Arbitrage: Good-deal asset price bounds in incomplete markets*, The Journal of Political Economy, Volume 108, Issue 1 (Feb., 2000), 79-119.
- [8] J. Cox, S. Ross (1976), *The valuation of options for alternative stochastic processes*, Journal of Financial Economy 3, 145-66.
- [9] Csóka Péter (2003), *Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció*, Közgazdasági Szemle, L. évf., 2003. október (855 - 880. o.)
- [10] Csóka Péter, Herings P.J.J., Kóczy Á. László (2007), *Coherent Measures of Risk from a General Equilibrium Perspective*, Journal of Banking and Finance 31(8), 2517-2534.

- [11] G. Debreu (1959), *Theory of value* , Wiley, New York.
- [12] K. Dowd, J. Cotter (2007), *Spectral Risk Measures and the Choice of Risk Aversion Function*, University College Dublin. School of Business. Centre for Financial Markets working paper series; WP-07-20
- [13] Dömötör Barbara (2011), *A kockázat megjelenése a származtatott pénzügyi termékekben*, Hitelintézeti Szemle 04/2011
- [14] P. H. Dybvig, S. A. Ross (1987), *Arbitrage*, J. EATWELL, M. MILLGATE, P. NEUMANN: The New Pelgrave: A Dictionary of Economics. London, Macmillan, 100106. o.
- [15] O. Floroiu, A. Pelsser (2013), *Closed-form solutions for options in incomplete markets*, Netspar Discussion Paper No. 02/2013-004.
- [16] O. Floroiu, A. Pelsser (2012), *Incomplete-market prices for real estate*, Műhelytanulmány. Bemutatva: AsRES & AREUEA Joint International Conference, Singapore, 8 July 2012
- [17] J. P. Girón (2010), *Good-deal bounds pricing for temperature options in the Netherlands*, Thesis, Tilburg University
- [18] J. Gotoh, Y. Yamamoto, W. Yao (2010), *Bounding Contingent Claim Prices via Hedging Strategy with Coherent Risk Measures*, Journal of Optimization Theory and Applications 04/2012
- [19] L. P. Hansen, R. Jagannathan (1991), *Implications of security market data for models of dynamic economies*, Journal of Political Economy 99(2), 225-262.
- [20] M. Harrison, D. Kreps (1979), *Martingales and arbitrage in multiperiod security markets*, Journal of Economic Theory 20, 381-408.

- [21] M. Harrison, S. Pliska (1981), *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*, Stochastic Processes and their Applications, 11, 215-260.
- [22] V. Henderson (2007), *Valuing the option to invest in an incomplete market*, Mathematics and Financial Economics, Vol. 1, No. 2
- [23] S. Jaschke, U. Küchler (2001), *Coherent risk measures and good-deal bounds*, Finance Stochast. 5, 181-200
- [24] T. Kanamura, K. Ohashi (2009), *Pricing summer day options by good-deal bounds*, Energy Economics 2009. Vol. 31. Pgs. 289-297.
- [25] A. J. King (2002), *Duality and martingales: a stochastic programming perspective on contingent claims*, Math. Program., Ser. B 91: 543562
- [26] Medvegyev Péter (2002), *A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben*, Közgazdasági Szemle, XLIX. évf., 2002. július-augusztus (597620. o.), Pénzügytan
- [27] Medvegyev Péter (2013), *Pénzügyi matematika jegyzet*
- [28] J. Miao, N. Wang (2007), *Investment, consumption, and hedging under incomplete markets*, Journal of Financial Economics, 86
- [29] S. Mitra (2011), *A review of volatility and option pricing*, Int. J. Financial Markets and Derivatives, Vol. 2, No. 3.
- [30] T. R. Rockafellar, S. Uryasev (2002), *Conditional value-at-risk for general loss distributions*, J. Bank. Finance 26, 14431471
- [31] Szűcs Balázs Árpád (2012), *A geometriai Brown-mozgás feltevésének elfogadhatósága a reálopciók értékelésében*, Hitelintézeti Szemle, 11 (ksz). pp. 44-49.

- [32] Temesi József, Varró Zoltán (2007), *Operációkutatás*, Aula Kiadó
- [33] S. Titman (1985), *Urban Land Prices under Uncertainty*, The American Economic Review