

A fordított inga dinamikájának vizsgálata a végelelem-módszerrel

TDK-dolgozat

Vörös Anett

Alkalmazott matematikus MSc, II. évfolyam

E-mail: voros.anett@stud.u-szeged.hu

Szegedi Tudományegyetem

Természettudományi és Informatikai Kar

Bolyai Intézet

Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszék

Témavezető: Dr. Van Leeuwen-Polner Mónika
egyetemi adjunktus

2014

Kivonat

A végeselem-módszer napjainkban széles körben alkalmazott eljárás differenciálegyenletek numerikus megoldására. Gyakran használatos fizikai és mérnöki területeken. Ezen kutatómunka célkitűzése a módszer matematikai hátterének alapos megismerése és példákon keresztül való bemutatása volt.

Ebben a dolgozatban a fordított inga modelljének véges elemes megoldásával foglalkozunk. A mozgást az

$$\ddot{x} - \frac{1}{\ell} (g + a(t)) \sin x = 0$$

nemlineáris másodrendű differenciálegyenlettel modellezzük, ahol x a függőleges irány és az inga rúdja által bezárt szög, g a gravitációs gyorsulás, ℓ az ingarúd hossza, $a(t)$ egy T -periodikus, szakaszonként konstans függvény.

A végeselem-módszer bemutatására a fordított inga egyenletének linearizáltját választjuk. Ekkor ugyanis lehetőségünk van összehasonlítani a numerikus megoldást az analitikussal, és a hibavizsgálatra. Tudjuk azt is, hogy a fordított inga felső egyensúlyi helyzete stabillá tehető a felfüggesztési pont elegendően nagy frekvenciájú rezgőmozgásával [5].

A lineáris eset egy érdekes alkalmazását, a Mathieu-egyenletet vizsgáljuk, amikor a lineáris tag együttthatója egy T -periodikus, nem szakaszonként konstans függvény:

$$\ddot{x} - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) x = 0.$$

A kapott numerikus megoldást összehasonlítjuk a szakaszonként konstans együttthatós lineáris differenciálegyenlet véges elemes megoldásával.

Végül módszerünket átültetjük a nemlineáris esetre. A nemlinearitást közelítjük az egyre magasabb rendű Taylor-polinomjával, és az eredendő nemlineáris differenciálegyenlet numerikus megoldását vizsgáljuk a végeselem-módszerrel. Mivel a nemlineáris esetben nem ismert az analitikus megoldás, csak olyan megfigyeléseket tudunk tenni, hogy mi történik a numerikus megoldással, ha növeljük a közelítő Taylor-polinom foksámát. A fázissíkon ábrázoljuk a Poincaré-leképezést.

A dolgozat zárásaként áttekintjük az elért eredményeket az ide vonatkozó szakirodalom tükrében, valamint – továbblépésként – vázoljuk az alkalmazott közelítő eljárás javításának lehetőségét.

Előszó

A TDK-dolgozatom anyaga az elmúlt hónapok, évek alatt folytatott kutatómunkára épül. Törekedtem arra, hogy a téma kiterjedt szakirodalmának leglényegesebb részét megismerjem. A cél az volt, hogy a fordított inga jelenségét tanulmányozzuk a végeselem-módszer segítségével. A dolgozat alapját képező folytonos Galjorkin-módszer általános ismertetésével diplomamunkámban foglalkozom részletesebben [18].

Remélem, hogy a dolgozatom megfelel az eredeti célkitűzéseknek, és sikerül átadnom valamennyit a lelkesedésből, ami a megírását kísérte.

Köszönöm mindazok segítségét, észrevételeit, akik bármilyen formában hozzájárultak a TDK-dolgozatom, illetve a diplomamunkám elkészültéhez. Külön szeretném megköszönni Dr. Van Leeuwen-Polner Mónika türelmét és bátorítását, aki témavezetőként részletes útmutatásával, tanácsaival segített engem a dolgozatok készítése során. Köszönettel tartozom Somogyi Anikónak is, hasznos megjegyzéseiért. Végül, de nem utolsó sorban nagyon köszönöm Dr. Hatvani Lászlónak, hogy tudásával és munkájával inspirált, így járulva hozzá a dolgozatom sikeréhez.

Hálás vagyok a családomnak, a vőlegényemnek, Gergőnek és a barátaimnak azért, hogy bátorítottak és mindenben támogattak.

Szeged, 2014. 04. 20.

Vörös Anett

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. A fordított inga	5
1.1. A Meissner-egyenlet analitikus megoldása	7
1.2. A Meissner-egyenlet véges elemes megoldása	11
1.3. A Mathieu-egyenlet	23
1.4. A nemlineáris eset	29
Összefoglalás	34
A Saját diákköri kutatómunka bemutatása	35
B Abszolutóriumot szerzett hallgatók nevezése	37
B.1. MSc diplomamunka	37
B.2. TDK-dolgozat	38
Irodalomjegyzék	39
Ábrák jegyzéke	41

Bevezetés

Számos területen szokás végeelem-módszert alkalmazni, például szilárd és folyadékmechanikában, elektromágnességben, populációdinamikában, gazdasági modellekben, mérnöki számításokban. Tipikus modellproblémák, amelyeken a végeelem-módszert vizsgáljuk: a hővezetés egyenlete Dirichlet-, Neumann-, és Robin-peremfeltételekkel, a Poisson-egyenlet, a hullám-egyenlet egy és több dimenzióban.

A véges elemek módszerének (röviden: VEM) számos fajtája létezik [2, 8, 10, 12]. Két különböző megközelítés fűződik például Walther Ritz, és Borisz Galjorkin nevéhez, mi a dolgozatban az utóbbi szemléletet követjük. Azon belül is az ún. folytonos Galjorkin-módszert.

Az egyes módszerek nemcsak a megoldás menetében, hanem a véges elemek kiválasztásában is különböznek. A különböző végeelem-módszerek alkalmassága függ az adott problémától. Például a megoldás „gyors” változásának kezelésére alkalmazhatóak ún. adaptív végeelem-módszerek. Az elemtartomány, a véges dimenziós függvényter, a szabadsági fokok megválasztása mind a végeelem-analízis része. Itt megemlíthetjük a Lagrange-, Argyris-, Hermite- stb. elemeket. Az elemtartománynak akkor van jelentősége, ha magasabb dimenzióban vagyunk. Két dimenzióban szokásos elemtartományok a háromszög és a négyzet, három dimenzióban a tetraéder és a kocka.

A véges elemes megoldás létezését és egyértelműségét a Lax – Milgram-lemma biztosítja, aminek részleteire a diplomamunkámban térek ki [18].

Ebben a dolgozatban a fordított inga modelljének véges elemes megoldásával foglalkozunk. A mozgást az

$$\ddot{x} - \frac{1}{\ell} (g + a(t)) \sin x = 0$$

nemlineáris másodrendű közönséges differenciálegyenlettel modellezzük, ahol x a függőleges irány és az inga rúdja által bezárt szög, g a gravitációs gyorsulás, ℓ az ingarúd hossza, $a(t)$ egy T -periodikus, szakaszonként konstans függvény.

A végeelem-módszer bemutatására a fordított inga egyenletének linearizáltját választjuk. Ekkor ugyanis lehetőségünk van összehasonlítani a numerikus megoldást az analitikussal, és a hibavizsgálatra. Tudjuk azt is, hogy a fordított inga felső egyensúlyi helyzete stabillá tehető a

felfüggesztési pont elegendően nagy frekvenciájú rezgőmozgásával [5].

A lineáris eset egy érdekes alkalmazását, a Mathieu-egyenletet vizsgáljuk, amikor a lineáris tag együtthatója egy T -periodikus, nem szakaszonként konstans függvény:

$$\ddot{x} - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)x = 0.$$

A kapott numerikus megoldást összehasonlítjuk a szakaszonként konstans együtthatós lineáris differenciálegyenlet véges elemes megoldásával.

Végül módszerünket átültetjük a nemlineáris esetre. A nemlinearitást közelítjük az egyre magasabb rendű Taylor-polinomjával, és az eredendő nemlineáris differenciálegyenlet numerikus megoldását vizsgáljuk a végeselem-módszerrel. Mivel a nemlineáris esetben sem ismert az analitikus megoldás, csak olyan megfigyeléseket tudunk tenni, hogy mi történik a numerikus megoldással, ha növeljük a közelítő Taylor-polinom fokszámát. A fázissíkon ábrázoljuk a Poincaré-leképezést.

A dolgozat zárásaként áttekintjük az elért eredményeket az ide vonatkozó szakirodalom tükrében, valamint – továbblépésként – vázoljuk az alkalmazott közelítő eljárás javításának lehetőségét.

Ebben a dolgozatban lineáris bázisfüggvényeket használunk, ezért az általunk alkalmazott módszer elsőrendű.

Első fejezet

A fordított inga

„A matematikának a természettudományok terén való hasznossága a csodával határos. Nincs is rá racionális magyarázat. Mert semmiképpen sem természetes, hogy legyenek »természeti törvények«, és még kevésbé kézenfekvő, hogy az ember felfedezhesse őket. Az a tény, hogy a matematika nyelve alkalmas a fizikai törvények megfogalmazására, csodálatos ajándék, amelyet soha nem lesziünk képesek igazán megérteni vagy kiérdekelni.”

/Wigner Jenő/

Tekintsünk egy ℓ hosszúságú, egységnyi tömegű ingát. Jelölje ψ a függőleges lefelé mutató irány és az ingarúd által bezárt szöget (az óramutató járásával ellentétes irányban mérve), valamint jelölje g a gravitációs gyorsulást. A mozgási energiát a $K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\ell\dot{\psi})^2$, a helyzeti energiát az $U \stackrel{\text{def}}{=} -g\ell \cos \psi$ kifejezések adják meg. A dinamikai rendszer Lagrange-függvénye

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} K - U = \frac{(\ell\dot{\psi})^2}{2} + g\ell \cos \psi, \quad (1.0.1)$$

amit behelyettesítve a Lagrange-egyenletbe:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad (1.0.2)$$

eljutunk az inga mozgásának egyenletéhez [3]:

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{\ell} \sin \psi = 0. \quad (1.0.3)$$

Világos, hogy az ingának két egyensúlyi helyzete van: az alsó stabil ($\psi = 0$), míg a felső instabil ($\psi = \pi$). Ismeretes, hogy az instabil egyensúlyi helyzet a felfüggesztési pont függőleges irányú megfelelő rezgőmozgása mellett stabillá tehető [13, 6]. A jelenség tanulmányozásához célszerű bevezetnünk a $\theta \stackrel{\text{def}}{=} \psi - \pi$ változót [1]. Ekkor az (1.0.3) egyenlet átírható a

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (1.0.4)$$

alakba, ahol θ a függőleges fölfelé mutató irány és az ingarúd által bezárt szög (az óramutató járásával ellentétes irányt tekintve pozitívnak). Az a meglepő eredmény, hogy a fordított inga felső egyensúlyi helyzete elég nagy frekvenciájú rezgés segítségével stabilizálható, Kapica [9] nevéhez fűződik, tiszteletére a rendszert szokás Kapica-ingának is nevezni.

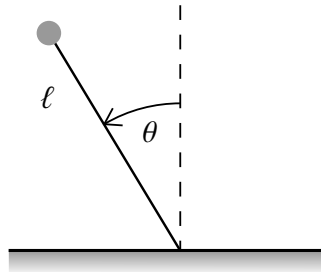
Tegyük fel, hogy a felfüggesztési pont függőlegesen oszcillál, gyorsulását jelöljük $a(t)$ -vel. Minthogy az inga rúdja merev, a felfüggesztési pont gyorsulása folytonosan adódik hozzá a gravitációs gyorsuláshoz [5]. Ekkor tehát a fordított inga mozgását a

$$\ddot{\theta} - \frac{1}{\ell} (g + a(t)) \sin \theta = 0 \quad (1.0.5)$$

másodrendű differenciálegyenlet írja le. Legyen most az inga függőleges irányú rezgőmozgásának $a(t)$ gyorsulása az alábbi T -periodikus, lépcsős függvény:

$$a(t) = \begin{cases} A_H, & \text{ha } kT \leq t < kT + T_H \\ -A_E, & \text{ha } kT + T_H \leq t < (kT + T_H) + T_E, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}, \quad (1.0.6)$$

ahol A_H , A_E , T_H , T_E pozitív konstansok, $A_H > 0$, $A_E > g$, $T_H + T_E = T$, $A_H = A_E T_E / T_H$, T a felfüggesztési pont mozgásának periódusa, és $k_{\max} \in \mathbb{N}$ a tekintett periódusok számánál eggyel kisebb, rögzített, nemnegatív egész szám. Az indexekben előforduló „H” és „E” betűk a mozgás hiperbolikus illetve elliptikus szakaszaira utalnak.



1.1. ábra. Fordított inga

A továbbiakban az egyszerűbb jelölés érdekében bevezetünk két konstanst:

$$\omega_H \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{g + A_H}{\ell}},$$

$$\omega_E \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{A_E - g}{\ell}}.$$

Az (1.0.5) egyenletre bevezetjük a stabilitás fogalmát [5]. Azt mondjuk, hogy az (1.0.5) egyenlet *stabil*, ha minden $\theta(t)$ megoldás esetén $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ korlátos $\mathbb{R}$ -en. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az egyenlet *instabil*.

1.1. A Meissner-egyenlet analitikus megoldása

Először egy olyan esetet fogunk numerikusan vizsgálni, amelynek az analitikus megoldását ismerjük. Ehhez az (1.0.5) egyenletben írjuk $\sin \theta$ helyébe θ -t. Tekintsük tehát az alábbi másodrendű közönséges differenciálegyenletet:

$$\ddot{\theta} - \frac{1}{\ell} (g + a(t)) \theta = 0, \quad (1.1.1)$$

ahol $a(t)$ az (1.0.6)-ben adott periodikus lépcsős függvény. A kezdeti feltételek legyenek

$$\theta(0) = 1, \quad (1.1.2a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0. \quad (1.1.2b)$$

Az (1.1.1) egyenlet az inga mozgásának már említett egymás utáni szakaszait írja le. Először vizsgáljuk a hiperbolikus szakaszt.

Hiperbolikus rész

A fent bevezetett jelölésekkel az (1.1.1) egyenlet alakja a periódus első szakaszában:

$$\ddot{\theta} - \omega_H^2 \theta = 0, \quad kT \leq t < kT + T_H, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}. \quad (1.1.3)$$

Legyenek

$$\begin{aligned} x_{H,k} &= \theta, \\ y_{H,k} &= \frac{\dot{\theta}}{\omega_H}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}, \end{aligned}$$

a fázisváltozók. Ekkor az (1.1.3) egyenlet átírható egy rendszerré:

$$\dot{x}_{H,k} = \omega_H y_{H,k}, \quad (1.1.4a)$$

$$\dot{y}_{H,k} = -\omega_H x_{H,k}, \quad kT \leq t < kT + T_H, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}. \quad (1.1.4b)$$

Belátható, hogy a trajektóriák hiperboladarabok [5], erre utal a hiperbolikus elnevezés. Vezessünk be polárkoordinátákat, azaz legyen $x_{H,k} = r_{H,k} \cos \varphi_{H,k}$, $y_{H,k} = r_{H,k} \sin \varphi_{H,k}$, $r_{H,k} > 0$, $\varphi_{H,k} \in \mathbb{R}$. Ekkor (1.1.3) alakja:

$$\dot{r}_{H,k} = r_{H,k} \omega_H \sin 2\varphi_{H,k}, \quad (1.1.5a)$$

$$\dot{\varphi}_{H,k} = \omega_H \cos 2\varphi_{H,k}. \quad (1.1.5b)$$

1.1. A MEISSNER-EGYENLET ANALITIKUS MEGOLDÁSA

Ha $\cos 2\varphi_{H,k}(kT) = 0$, akkor $\cos 2\varphi_{H,k}(t) \equiv 0$, $\forall t \in [kT, kT + T_H)$. Ha $\cos 2\varphi_{H,k}(kT) \neq 0$, akkor legyenek $\varphi_{H,k}(kT) = \bar{\varphi}_{H,k}$, $r_{H,k}(kT) = \bar{r}_{H,k}$ adottak, valamint legyen $\tilde{t} \stackrel{\text{def}}{=} t - kT$, $t \in [kT, kT + T_H)$, $c_{H,k} \stackrel{\text{def}}{=} (1 + \operatorname{tg} \bar{\varphi}_{H,k}) / (1 - \operatorname{tg} \bar{\varphi}_{H,k})$. Így

$$\omega_H \cos 2\varphi_{H,k} = \dot{\varphi}_{H,k},$$

$$\begin{aligned} \omega_H \tilde{t} &= \int_{kT}^{kT+\tilde{t}} \frac{\dot{\varphi}_{H,k}(s)}{\cos 2\varphi_{H,k}(s)} ds = \int_{\varphi_{H,k}(kT)}^{\varphi_{H,k}(kT+\tilde{t})} \frac{d\tau}{\cos 2\tau} \\ &= \ln \left(\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} \bar{\varphi}_{H,k}}{1 + \operatorname{tg} \bar{\varphi}_{H,k}}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} \varphi_{H,k}(t)}{1 - \operatorname{tg} \varphi_{H,k}(t)}} \right), \end{aligned}$$

amiből (1.1.5b) megoldása

$$\varphi_{H,k}(t) = \arctg \frac{c_{H,k} \cdot e^{2\omega_H(t-kT)} - 1}{c_{H,k} \cdot e^{2\omega_H(t-kT)} + 1}. \quad (1.1.6)$$

Továbbá (1.1.5a)-t átalakítva

$$\begin{aligned} r_{H,k} \omega_H \sin 2\varphi_{H,k} &= \dot{r}_{H,k}, \\ \omega_H \int_{kT}^{kT+\tilde{t}} \sin 2\varphi_{H,k}(s) ds &= \int_{kT}^{kT+\tilde{t}} \frac{\dot{r}_{H,k}(s)}{r_{H,k}(s)} ds = \ln r_{H,k}(t) - \ln \bar{r}_{H,k}, \end{aligned}$$

amiből az adódik, hogy

$$r_{H,k}(t) = \bar{r}_{H,k} \cdot \sqrt{1 + c_{H,k}^2} e^{4\omega_H(t-kT)} \cdot e^{-\omega_H(t-kT)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + c_{H,k}^2}}. \quad (1.1.7)$$

Az (1.1.6) és (1.1.7) kifejezéseket visszaírva a rendszer polár alakjába, megkapjuk a hiperbolikus szakasz egzakt megoldását:

$$x_{H,k}(t) = r_{H,k}(t) \cos \varphi_{H,k}(t) \quad (1.1.8a)$$

$$= \bar{r}_{H,k} \cdot \sqrt{1 + c_{H,k}^2} e^{4\omega_H(t-kT)} \cdot e^{-\omega_H(t-kT)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + c_{H,k}^2}} \cdot \cos \left(\arctg \frac{c_{H,k} \cdot e^{2\omega_H(t-kT)} - 1}{c_{H,k} \cdot e^{2\omega_H(t-kT)} + 1} \right),$$

$$y_{H,k}(t) = r_{H,k}(t) \sin \varphi_{H,k}(t) \quad (1.1.8b)$$

$$= \bar{r}_{H,k} \cdot \sqrt{1 + c_{H,k}^2} e^{4\omega_H(t-kT)} \cdot e^{-\omega_H(t-kT)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + c_{H,k}^2}} \cdot \sin \left(\arctg \frac{c_{H,k} \cdot e^{2\omega_H(t-kT)} - 1}{c_{H,k} \cdot e^{2\omega_H(t-kT)} + 1} \right),$$

$kT \leq t < kT + T_H$, $k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}$.

Kifejeztük tehát a keresett $x_{H,k}$ függvényt bizonyos, $r_{H,k}$ -ra és $\varphi_{H,k}$ -ra vonatkozó kezdeti feltételek segítségével. Most a fordított inga szakaszonként konstans együtthatós lineáris egyenletének vizsgálatát a második, elliptikus szakasszal folytatjuk.

Elliptikus rész

Hasonlóan felírható a ciklus második részében az (1.1.1) egyenlet:

$$\ddot{\theta} + \omega_E^2 \theta = 0, \quad kT + T_H \leq t < (k+1)T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}. \quad (1.1.9)$$

Legyenek a megfelelő fázisváltozók

$$\begin{aligned} x_{E,k} &= \theta, \\ y_{E,k} &= \frac{\dot{\theta}}{\omega_E}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}, \end{aligned}$$

ekkor az (1.1.9) átírható rendszerré:

$$\dot{x}_{E,k} = \omega_E y_{E,k}, \quad (1.1.10a)$$

$$\dot{y}_{E,k} = -\omega_E x_{E,k}, \quad kT + T_H \leq t < (k+1)T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}. \quad (1.1.10b)$$

Hasonlóan a hiperbolikus rendszerhez, belátható, hogy a trajektóriák ellipszisdarabok [5]. Vezessünk be ismét polárkoordinátákat, $x_{E,k} = r_{E,k} \cos \varphi_{E,k}$, $y_{E,k} = r_{E,k} \sin \varphi_{E,k}$, $r_{E,k} > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, valamint legyenek $\varphi_{E,k}(kT + T_H) = \bar{\varphi}_{E,k}$, $r_{E,k}(kT + T_H) = \bar{r}_{E,k}$ adottak. A polárkoordinátás felírásból adódik, hogy $\dot{r}_{E,k} \equiv 0$, amiből pedig azt kapjuk, hogy $\dot{\varphi}_{E,k} = -\omega_E$. Így

$$\varphi_{E,k}(t) = -\omega_E (t - (kT + T_H)) + \bar{\varphi}_{E,k}, \quad (1.1.11)$$

$$r_{E,k}(t) = \bar{r}_{E,k}. \quad (1.1.12)$$

A polárkoordinátákban felírt rendszerbe visszahelyettesítjük (1.1.11)-t és (1.1.12)-t, és így az analitikus megoldás az elliptikus szakaszon:

$$x_{E,k}(t) = r_{E,k}(t) \cos \varphi_{E,k}(t) = \bar{r}_{E,k} \cdot \cos(-\omega_E (t - (kT + T_H)) + \bar{\varphi}_{E,k}), \quad (1.1.13a)$$

$$y_{E,k}(t) = r_{E,k}(t) \sin \varphi_{E,k}(t) = \bar{r}_{E,k} \cdot \sin(-\omega_E (t - (kT + T_H)) + \bar{\varphi}_{E,k}), \quad (1.1.13b)$$

$$kT + T_H \leq t < (k+1)T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}.$$

A fentiekben meghatároztuk az egzakt megoldásokat az egyes szakaszokon. Most az a dolgunk, hogy a megoldásokat a szakaszhatárokon összekapcsoljuk [5]. Minthogy az (1.1.1) egyenletben $\theta(t)$ együtthatója (1.0.6) miatt szakaszonként konstans, a szokásostól némiképp eltérően definiáljuk az egyenlet megoldását. Azt mondjuk, hogy egy $\theta(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény megoldása az (1.1.1) egyenletnek, ha a következők teljesülnek:

- (i) $\theta \in C^1(\mathbb{R})$, azaz θ folytonosan differenciálható a számegyenesen;
- (ii) $\theta \in \mathcal{D}^2\left(\mathbb{R} \setminus \left(\{kT\}_{k \in \{0, 1, \dots, k_{\max}\}} \cup \{kT + T_H\}_{k \in \{0, 1, \dots, k_{\max}\}}\right)\right)$, azaz θ legalább kétszer differenciálható a számegyenesen, kivéve a szakaszhatárok pontjait;

(iii) θ eleget tesz az (1.1.1) egyenletnek az $\mathbb{R} \setminus (\{kT\}_{k \in \{0,1,\dots,k_{\max}\}} \cup \{kT + T_H\}_{k \in \{0,1,\dots,k_{\max}\}})$ halmazon.

A (ii) és (iii) feltételek nyilván teljesülnek, ha $\theta(t)$ -t az x_H és az x_E megoldásokból úgy állítjuk elő, hogy

$$\theta(t) = \begin{cases} x_{H,k}(t), & t \in [kT, kT + T_H), \\ x_{E,k}(t), & t \in [kT + T_H, (k+1)T), \end{cases} \quad (1.1.14)$$

ahol $k = 0, 1, \dots, k_{\max}$. vagyis a hiperbolikus szakaszoknak megfelelő időintervallumokon θ értékét $x_{H,k}$ -nak vesszük, az elliptikus intervallumokon pedig $x_{E,k}$ -nak.

A megoldás a következőképpen keletkezik. Tegyük fel, hogy $x_{H,k}$ a $kT + T_H$ időpillanatig definiálva van, $k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}$. A megoldást folytatjuk a $[kT + T_H, (k+1)T)$ szakaszra. Legyen

$$x_{E,k}(kT + T_H) = \lim_{t \rightarrow kT + T_H - 0} x_{H,k}(t), \quad (1.1.15a)$$

$$\dot{x}_{E,k}(kT + T_H) = \lim_{t \rightarrow kT + T_H - 0} \dot{x}_{H,k}(t). \quad (1.1.15b)$$

Tegyük fel most, hogy $x_{E,k}$ a $(k+1)T$ -ig definiálva van, $k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max} - 1$. A megoldást folytatjuk a $[(k+1)T, (k+1)T + T_H)$ szakaszra. Ehhez legyen

$$x_{H,k}((k+1)T) = \lim_{t \rightarrow (k+1)T - 0} x_{E,k}(t), \quad (1.1.16a)$$

$$\dot{x}_{H,k}((k+1)T) = \lim_{t \rightarrow (k+1)T - 0} \dot{x}_{E,k}(t). \quad (1.1.16b)$$

Ezt kiegészítve az (1.1.2) kezdeti feltételekkel, meghatároztuk a kezdeti feltételeket minden szakaszra, $k = 0, 1, \dots, k_{\max}$, és ekkor (i) teljesül. Így a $\theta(t)$ megoldás egyértelmű: $\theta(t)$ az (1.1.14) szerint áll elő, ahol az $x_{H,k}(t)$ (1.1.8a)-ban, $x_{E,k}(t)$ (1.1.13a)-ban megadott, továbbá

$$\bar{r}_{H,0} = 1,$$

$$\bar{\varphi}_{H,0} = 0,$$

$$\bar{r}_{H,k} = \sqrt{(x_{H,k}(kT))^2 + (y_{H,k}(kT))^2}, \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max},$$

$$\bar{\varphi}_{H,k} = \begin{cases} \arcsin \frac{y_{H,k}(kT)}{\bar{r}_{H,k}}, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{E,k}(kT) < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - \arcsin \frac{y_{H,k}(kT)}{\bar{r}_{H,k}}, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq \varphi_{E,k}(kT) < \frac{3\pi}{2}, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max};$$

valamint

$$\bar{r}_{E,k} = \sqrt{(x_{E,k}(kT + T_H))^2 + (y_{E,k}(kT + T_H))^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max},$$

$$\bar{\varphi}_{E,k} = \begin{cases} \arcsin \frac{y_{E,k}(kT + T_H)}{\bar{r}_{E,k}}, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{H,k}(kT + T_H) < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - \arcsin \frac{y_{E,k}(kT + T_H)}{\bar{r}_{E,k}}, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq \varphi_{H,k}(kT + T_H) < \frac{3\pi}{2}, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}.$$

M. Levi és W. Weckesser a linearizált egyenlet instabil egyensúlyi helyzetének stabilizálhatóságára geometriai magyarázatot adott, feltéve, hogy a frekvencia olyan nagy, hogy a gravitáció elhanyagolható; valamint alsó becslést is adtak a stabilitáshoz elegendő frekvencia nagyságára [11].

M. Levi és W. Weckesser a szimmetrikus esetre ($A_H = A_E$) vonatkozó eredményeit L. Hatvani és L. Csizmadia általánosította a nem szimmetrikus esetre: elégséges feltételt adtak az (1.1.1) egyenlet stabilitására [5].

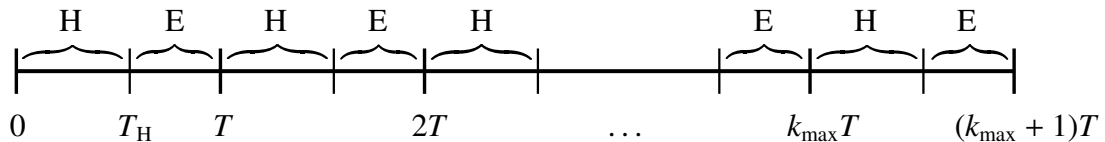
A lineáris egyenlet analitikus tárgyalását ezzel befejeztük. A következő szakaszban rátérünk a dolgozat fő témájára, a véges elemes módszerre.

1.2. A Meissner-egyenlet véges elemes megoldása

Ebben a fejezetben a fordított inga (1.1.1) egyenletét vizsgáljuk numerikusan a végeselem-módszerrel. Ahhoz, hogy átfogóbb képet kapjunk a módszer működéséről, felvázoljuk a főbb lépéseit. Ez után kitérünk az egyes lépések részleteire. A megoldást implementáljuk, majd kiértékeljük a kapott eredményeket.

Megjegyezzük, hogy a módszer tárgyalásánál áttérünk a szakirodalomban megszokott általános jelölésre, így a továbbiakban u jelöli a független változót, valamint u_h -val jelöljük a megoldás véges elemes közelítését, ami nem összetévesztendő az ingára vonatkozó hiperbolikus fázis jelölésével.

Mint ahogy a megoldás minden egyes periódusban egy hiperbolikus és egy elliptikus részből tevődik össze (1.2. ábra), két kezdetiérték-problémát fogunk tekinteni. Ezekre kidolgozzuk a végeselem-módszert. Az implementálás során megadjuk a $t = 0$ -hoz tartozó kezdeti értékeket, kiszámítjuk az első hiperbolikus részen a véges elemes megoldást. Utána következik az elliptikus rész. Az elliptikus kezdeti értékeiként az előzőleg a hiperbolikus rész jobb végpontjára kiszámolt adatokat használjuk. Általánosan, a soron következő hiperbolikus rész kezdeti feltételeit a megelőző elliptikus adatsor végéről, a következő elliptikus rész kezdeti feltételeit a megelőző hiperbolikus adatsor végéről vesszük. Ezzel biztosítjuk az (1.1.15), (1.1.16) folytonossági kritériumok teljesülését.



1.2. ábra. Az egyes szakaszok

1.2. A MEISSNER-EGYENLET VÉGES ELEMES MEGOLDÁSA

Tekintsük tehát az alábbi kezdetiérték-problémákat: a hiperbolikus mozgás

$$\ddot{u} - \omega_H^2 u = 0, \quad t \in [kT, kT + T_H), \quad k = 0, 1, \dots, k_{\max}, \quad (1.2.1a)$$

$$u(kT) = u_k^H, \quad (1.2.1b)$$

$$\dot{u}(kT^+) = \bar{u}_k^H; \quad (1.2.1c)$$

és az elliptikus mozgás egyenlete és kezdeti feltételei

$$\ddot{u} + \omega_E^2 u = 0, \quad t \in [kT + T_H, (k+1)T), \quad k = 0, 1, \dots, k_{\max}, \quad (1.2.2a)$$

$$u(kT + T_H) = u_k^E, \quad (1.2.2b)$$

$$\dot{u}(kT + T_H^+) = \bar{u}_k^E; \quad (1.2.2c)$$

ahol

$$u_0^H = 1, \quad \bar{u}_0^H = 0,$$

$$u_k^H = \lim_{t \rightarrow kT-0} u(t), \quad \bar{u}_k^H = \lim_{t \rightarrow kT-0} \dot{u}(t), \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max},$$

$$u_k^E = \lim_{t \rightarrow kT+T_H-0} u(t), \quad \bar{u}_k^E = \lim_{t \rightarrow kT+T_H-0} \dot{u}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}.$$

A VEM lépései

A konstans együtthatós lineáris egyenletre a véges elemes módszert az alábbi lépésekből konstruáljuk:

1. Legyen $c \in \mathbb{R}$. Tekintsük az $I \stackrel{\text{def}}{=} (t_0, t_{\max})$ intervallumon a következő kezdetiérték-problémát:

$$\ddot{u}(t) + cu(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_{\max}), \quad (1.2.3a)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (1.2.3b)$$

$$\dot{u}(t_0) = \bar{u}_0. \quad (1.2.3c)$$

Ennek a feladatnak keressük a véges elemes megoldását.

Legyen

$$H^1(t_0, t_{\max}) = W_2^1(t_0, t_{\max}),$$

ahol $W_2^1(t_0, t_{\max})$ Szoboljev-tér [2], a belső szorzat

$$(u, v)_{H^1} = \int_{t_0}^{t_{\max}} uv \, dt + \int_{t_0}^{t_{\max}} \dot{u} \dot{v} \, dt,$$

a norma

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2(I)}^2 + \|\dot{u}\|_{L^2(I)}^2$$

által meghatározott. Legyen $V \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in H^1(I) : v(t_0) = u_0\}$. Az (1.2.3) kezdetiérték-problémára felírjuk a variációs egyenletet (gyenge alak). Ez a következőkből tevődik össze: Az (1.2.3a) egyenletet megszorozzuk egy $v \in V$ tesztfüggvénnyel, majd integráljuk az I intervallumon:

$$\int_{t_0}^{t_{\max}} (\ddot{u}v + cuv) dt = 0. \quad (1.2.4)$$

Parciális integrálás után, majd beírva a kezdeti feltételeket, azt kapjuk, hogy

$$-\dot{u}(t_{\max})v(t_{\max}) + \bar{u}_0 v(t_0) + \int_{t_0}^{t_{\max}} \dot{u}\dot{v} dt - c \int_{t_0}^{t_{\max}} uv dt = 0, \quad \forall v \in V. \quad (1.2.5)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$a(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{u}(t_{\max})v(t_{\max}) - \int_{t_0}^{t_{\max}} \dot{u}\dot{v} dt + c \int_{t_0}^{t_{\max}} uv dt,$$

$$l(v) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{u}_0 v(t_0).$$

Azt mondjuk, hogy $a(\cdot, \cdot)$ V -elliptikus (V -ben pozitív definit vagy *koercitív*), ha

$$\exists \alpha > 0 : \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Ekkor V Hilbert-tér, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ V -elliptikus, korlátos bilineáris forma, $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionál. Olyan $u \in V$ elemet keresünk, amelyre teljesül a variációs formula:

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V.$$

A fenti $a(\cdot, \cdot)$ -ra és $l(\cdot)$ -re adott feltételek teljesülése mellett a Lax – Milgram-tétel [18] szerint pontosan egy ilyen u megoldás létezik, és az stabil.

2. Elemekre (szakaszokra) bontjuk az I megoldási tartományt.
3. Kiválasztjuk a megfelelő $V_h \subset V$ végeelem-teret, amellyel a végtelen dimenziós V teret közelítjük (a bázisfüggvények legyenek kis tartójúak, elemei legyenek szakaszonként sima függvények). A véges dimenziós probléma ekkor a következőre redukálódik: keresünk olyan $u_h \in V_h$ -t, hogy

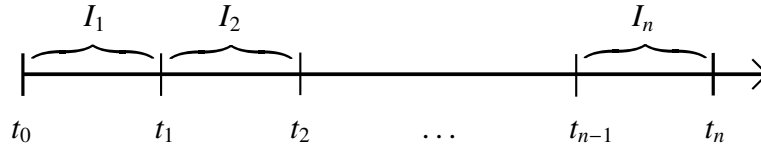
$$a(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in V_h,$$

ahol a és l ugyanazok az operátorok, mint végtelen dimenzióban.

4. Felírjuk a véges dimenziójú tér variációs feladatával ekvivalens lineáris egyenletrendszert.
5. Az egyenletrendszert átírjuk mátrixegyenlet-alakba.
6. Megoldjuk az eredendő mátrixegyenletet.
7. Szemléltetjük a megoldást.
8. Ha az analitikus megoldás rendelkezésre áll, akkor összehasonlítjuk a numerikus megoldással.

A megoldási tartomány felbontása és a bázisfüggvények kiválasztása

Osszuk fel I -t n darab diszjunkt, egyenlő hosszúságú intervallumra (1.3. ábra). Jelöljük az intervallumok hosszát h -val. Legyenek a rácspontok $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_{\max}$, az i -edik intervallum $I_i = (t_{i-1}, t_i)$. A későbbi jelölés miatt speciálisan legyen $h_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.



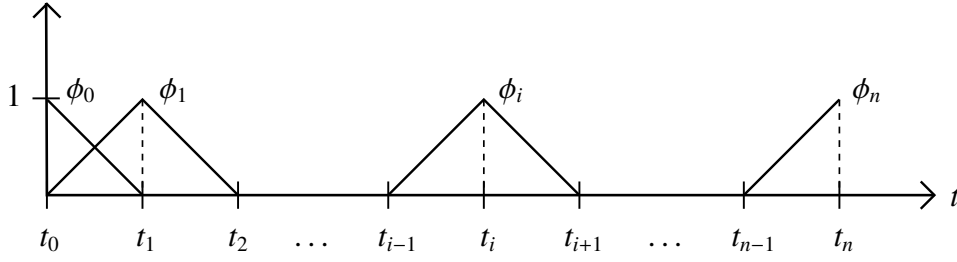
1.3. ábra. Az I intervallum felosztása n részintervallumra

Jelöljük $\mathcal{P}^k(\bar{I}_i)$ -vel az $\bar{I}_i$ -n k -adrendű polinomok vektorterét. Az interpolációhoz lineáris polinomokat szeretnénk használni: $\mathcal{P}^1(\bar{I}_i)$. Jelöljük továbbá V_h -val az $\bar{I}$ -on folytonos, szakaszonként lineáris függvények terét:

$$V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{I}), v|_{\bar{I}_i} \in \mathcal{P}^1(\bar{I}_i), i = 1, \dots, n \right\} \subset V.$$

A $\mathcal{P}^1(\bar{I}_i)$ vektortér egyik bázisa az $\{1, t\}$, mivel tetszőleges $v \in \mathcal{P}^1(\bar{I}_i)$ egyértelműen felírható 1 és t lineáris kombinációjaként, $c_0 + c_1 t$ alakban. Nyilvánvaló, hogy $v \in \mathcal{P}^1(\bar{I}_i)$ -t a rácspontokban felvett értékei is egyértelműen meghatározzák. Utóbbi hasonlóan igaz $v \in V_h$ -ra is. Ebből a megfontolásból vezetjük be V_h alábbi bázisát.

Legyenek a *globális bázisfüggvények*: $\phi_i(t) \in V_h$, $\phi_i(t_j) = \delta_{ij}$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, n$, ahol δ_{ij} a Kronecker-delta.



1.4. ábra. A globális bázisfüggvények

Míthogy a ϕ_i -k folytonosak és szakaszonként lineárisak, explicit módon a következőképen fejezhetők ki (1.4. ábra):

$$\phi_i(t) = \begin{cases} (t - t_{i-1})/(t_i - t_{i-1}), & \text{ha } t_{i-1} \leq t \leq t_i, \\ (t_{i+1} - t)/(t_{i+1} - t_i), & \text{ha } t_i \leq t \leq t_{i+1}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Hiperbolikus rész

Először az (1.2.1) problémára keresünk megoldást a végelem-módszer segítségével. Legyen $k \in \{0, 1, \dots, k_{\max}\}$ adott, $I \stackrel{\text{def}}{=} (kT, kT + T_H)$. Legyen V függvénytér a korábban meghatározott. A véges elemes megoldás első lépése, hogy felírjuk az egyenlet *gyenge alakját*, más néven a *variációs megfogalmazását*. Szorozzuk be az (1.2.1a) egyenletet egy tetszőleges $v \in V$ *teszt-függvénnyel*, és integráljunk. Ekkor a variációs probléma a következő. Olyan $u \in V$ -t keresünk, amelyre

$$\int_{kT}^{kT+T_H} (\ddot{u} - \omega_H^2 u) v \, dt = 0, \quad \forall v \in V.$$

Parciális integrálással és a kezdeti értékek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -[\dot{u}v]_{kT}^{kT+T_H} + \int_{kT}^{kT+T_H} \dot{u}\dot{v} \, dt + \omega_H^2 \int_{kT}^{kT+T_H} uv \, dt &= 0, \quad \forall v \in V, \\ -\dot{u}(kT + T_H)v(kT + T_H) + \dot{u}(kT)v(kT) + \int_{kT}^{kT+T_H} \dot{u}\dot{v} \, dt + \omega_H^2 \int_{kT}^{kT+T_H} uv \, dt &= 0, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Legyen $V_h \subset V$ véges dimenziós altér. A V_h *végelem-teret* a lineáris bázisfüggvények kifeszítik, azaz $V_h = \text{span}\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$, így az $u_h \in V_h$ *próbafüggvény* előáll a következő alakban:

$$u_h(t) = \sum_{j=0}^n u_h(t_j) \phi_j(t).$$

Legyen

$$\xi_j^H = u_h(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad \xi_0^H = u_k^H, \quad \dot{u}_h(t_0) = \bar{u}_k^H.$$

A véges dimenziós probléma megfogalmazása a következő. Olyan $u_h \in V_h$ -t keresünk, amelyre

$$-\dot{u}_h(kT + T_H) v(kT + T_H) + \dot{u}_h(kT) v(kT) + \int_{kT}^{kT+T_H} \dot{u}_h \dot{v} dt + \omega_H^2 \int_{kT}^{kT+T_H} u_h v dt = 0, \quad \forall v \in V_h.$$

Hasonlóan az analitikus megoldásnál leírtakhoz, az egyes szakaszokon vett $u_h(t)$ megoldásfüggvényekből előállított megoldásnak is rendelkeznie kell majd bizonyos „szép” tulajdonságokkal a szakaszok határán. Ezt a következőképpen érjük el. Az egyes szakaszok bal végpontját t_0 jelöli. Az $u_h(t_0)$ és $\dot{u}_h(t_0)$ értékeket mindig az előző intervallumra kiszámolt $u_h(t_n)$ és $(u_h(t_n) - u_h(t_{n-1})) / h$ értékekkel megegyezőnek választjuk meg. Így a kapott függvény és a deriváltja is folytonosnak tekinthető az értelmezési tartomány minden pontjában.

Mivel az előző egyenlet teljesül $\forall v \in V_h$ -ra, legyen $v = \phi_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Olyan $u_h \in V_h$ -t keresünk, amelyre

$$\begin{aligned} & \dot{u}_h(t_0) v(t_0) - \dot{u}_h(t_n) v(t_n) + \int_{t_0}^{t_n} \dot{u}_h \dot{v} dt + \omega_H^2 \int_{t_0}^{t_n} u_h v dt \\ &= \bar{u}_k^H \phi_i(t_0) + \frac{\xi_{n-1}^H - \xi_n^H}{h_n} \phi_i(t_n) + \xi_0^H \int_{t_0}^{t_n} \dot{\phi}_0(t) \dot{\phi}_i(t) dt + \sum_{j=1}^n \xi_j^H \int_{t_0}^{t_n} \dot{\phi}_j(t) \dot{\phi}_i(t) dt \\ &+ \omega_H^2 \xi_0^H \int_{t_0}^{t_n} \phi_0(t) \phi_i(t) dt + \omega_H^2 \sum_{j=1}^n \xi_j^H \int_{t_0}^{t_n} \phi_j(t) \phi_i(t) dt = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

ahol az $\dot{u}_h(t_n)$ deriváltat $(\xi_n^H - \xi_{n-1}^H) / h_n$ -nel közelítettük. A derivált közelítésénél a továbbiakban is így fogunk eljárni. Legyenek

$$A_{ij} = \int_{t_0}^{t_n} \dot{\phi}_j \dot{\phi}_i dt, \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad (1.2.7)$$

$$M_{ij} = \int_{t_0}^{t_n} \phi_j \phi_i dt, \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (1.2.8)$$

Látható, hogy $n - 1$ darab ismeretlenre n darab egyenlet jut. Ahhoz, hogy a probléma jól meghatározott legyen, felhasználva a kezdeti feltételeket, elhagyhatjuk az utolsó egyenletet. Ekkor

1.2. A MEISSNER-EGYENLET VÉGES ELEMES MEGOLDÁSA

az (1.2.6) egyenletből konstruált rendszer, a most bevezetett jelölésekkel:

$$\begin{aligned} A_{01}\xi_1^H + \omega_H^2 M_{01}\xi_1^H &= -\bar{u}_k^H - \omega_H^2 M_{00}\xi_0^H - A_{00}\xi_0^H & (i=0), \\ A_{11}\xi_1^H + A_{12}\xi_2^H + \omega_H^2 M_{11}\xi_1^H + \omega_H^2 M_{12}\xi_2^H &= -\omega_H^2 M_{01}\xi_0^H - A_{01}\xi_0^H & (i=1), \\ A_{i-1,i}\xi_{i-1}^H + A_{ii}\xi_i^H + A_{i,i+1}\xi_{i+1}^H + \omega_H^2 M_{i-1,i}\xi_{i-1}^H + \omega_H^2 M_{ii}\xi_i^H + \omega_H^2 M_{i,i+1}\xi_{i+1}^H &= 0 & (i=2,3,\dots,n-1), \end{aligned}$$

és

$$b = \begin{pmatrix} -\bar{u}_k^H - \omega_H^2 M_{00}\xi_0^H - A_{00}\xi_0^H \\ -\omega_H^2 M_{01}\xi_0^H - A_{01}\xi_0^H \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az $A = (A_{ij})$ mátrix neve *merevségi mátrix*, az $M = (M_{ij})$ az úgynevezett *tömegmátrix*, b pedig a *terhelési vektor*. Ekkor az (1.2.6) egyenletrendszer mátrix alakban:

$$(A + \omega_H^2 M)\xi^H = b, \quad (1.2.9)$$

amelynek $\xi^H = (\xi_1^H, \dots, \xi_n^H)^T$ megoldását numerikus eszközökkel könnyen kiszámíthatjuk.

Elliptikus rész

Az (1.2.2) elliptikus egyenlet véges elemes megoldása teljesen analóg a hiperbolikus esetről leírtakkal, így itt csak a mátrixegyenletet tüntetjük fel:

$$(A - \omega_E^2 M)\xi^E = b, \text{ ahol} \quad (1.2.10)$$

$$b = \begin{pmatrix} -\bar{u}_k^E + \omega_E^2 M_{00}\xi_0^E - A_{00}\xi_0^E \\ \omega_E^2 M_{01}\xi_0^E - A_{01}\xi_0^E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$A = (A_{ij})$ és $M = (M_{ij})$ pedig az (1.2.7) és (1.2.8) kifejezésekben definiált.

Az eredmények értékelése

Az 1.5. ábrán együtt ábrázoltuk a numerikus és az analitikus megoldást. Kis $k_{\max}$ -ot választottunk, így jól látszik a kezdeti és folytonossági feltételek teljesülése. Az alsó képen, a fázissíkon jól elkülöníthetőek a hiperbolikus és elliptikus szakaszok.

A következő lépésben (1.6. ábra) hosszabb ideig, hasonló paraméterekkel vizsgáltuk az egyenletet, megfigyelhető a ciklikus viselkedés, illetve az idő előrehaladtával a hiba növekedése is.

Az 1.7. ábra az előbbi paraméterekkel ellátott egyenlet fázisképét mutatja. Az alsó grafikonon az $(x(t), y(t))$ pontokat ábrázoltuk, az y tengely irányában jelentkező ugrások a szakaszhatárokon fellépő dilatációnak, illetve kontrakciónak köszönhetőek [5]:

$$(x, y) \mapsto (x, qy),$$

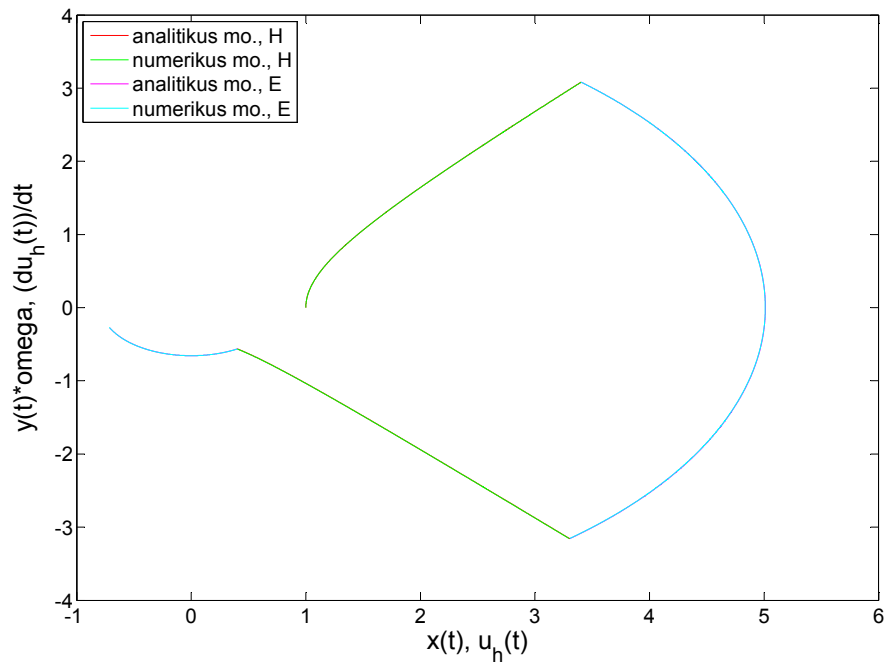
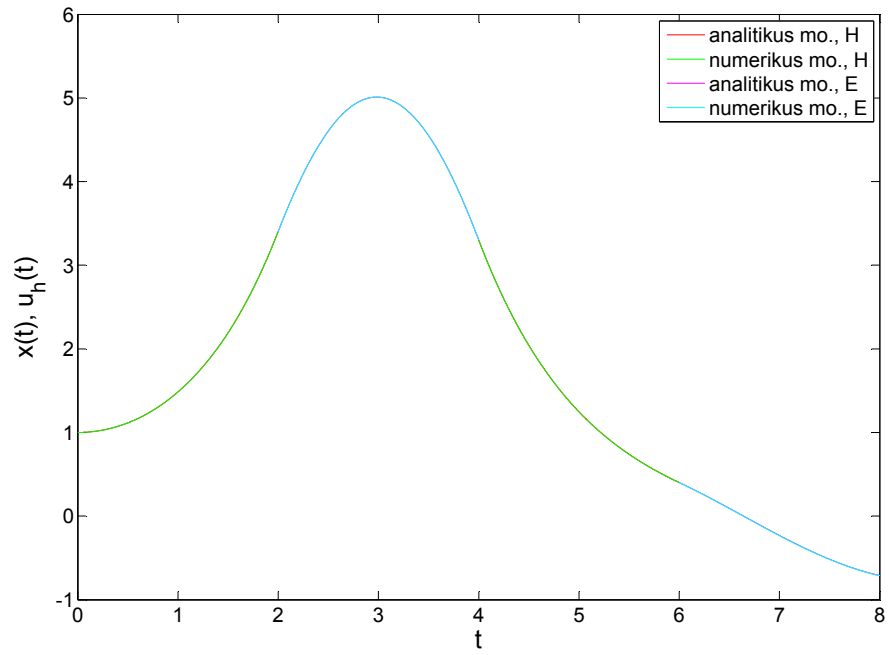
ahol

$$q = \begin{cases} \omega_H/\omega_E, & \text{ha } t = kT + T_H, \\ \omega_E/\omega_H, & \text{ha } t = kT, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, k_{\max}.$$

A felső kép az $(u_h(t), du_h/dt)$, $(x(t), \omega y(t))$ pontok grafikonja, így ott természetesen nincs nyoma a fázispont lineáris transzformációjának. Mindkét képen elkülöníthetőek a hiperbolikus és elliptikus rotációk.

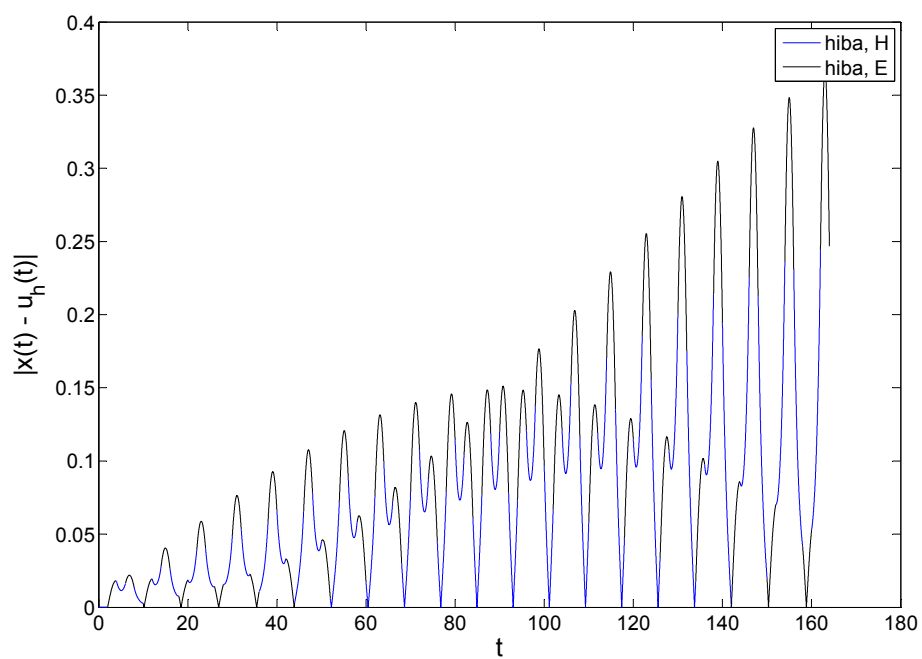
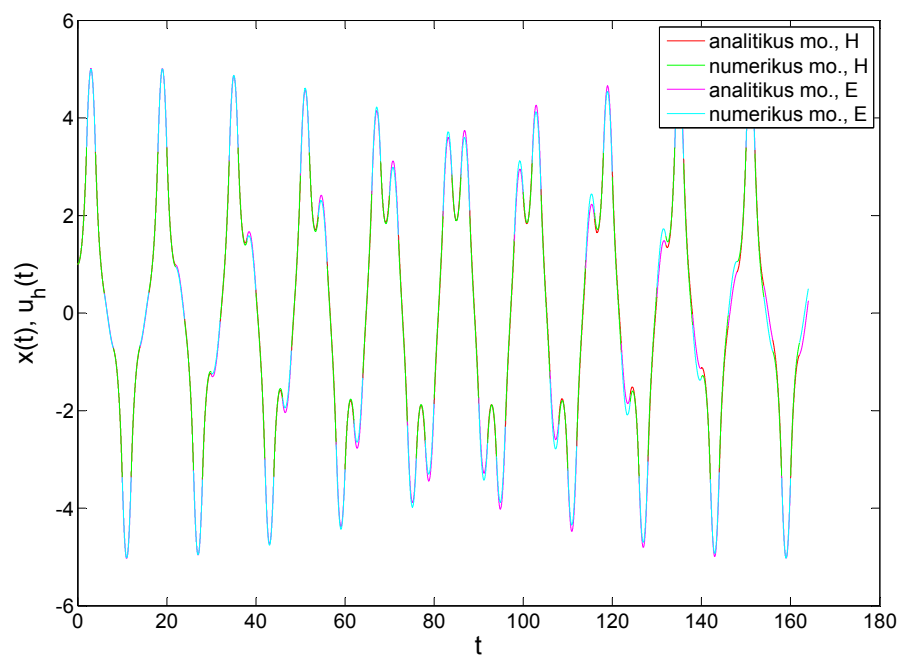
Megtartva az eddigi paramétereket, elhagyva az egzakt megoldást, $k_{\max} = 400$ mellett már egészen szép fázisképhez jutunk (1.8. ábra).

1.2. A MEISSNER-EGYENLET VÉGES ELEMES MEGOLDÁSA



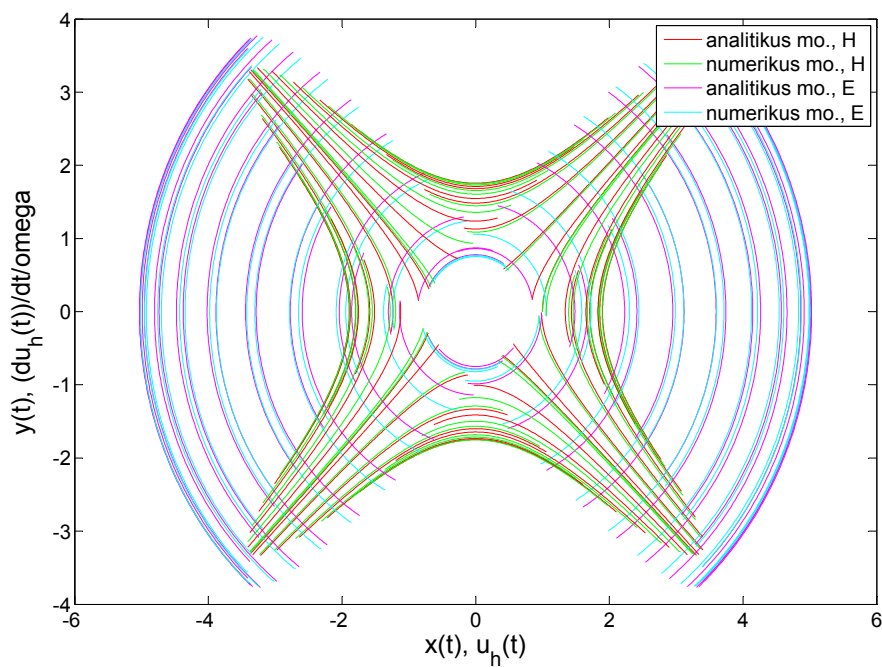
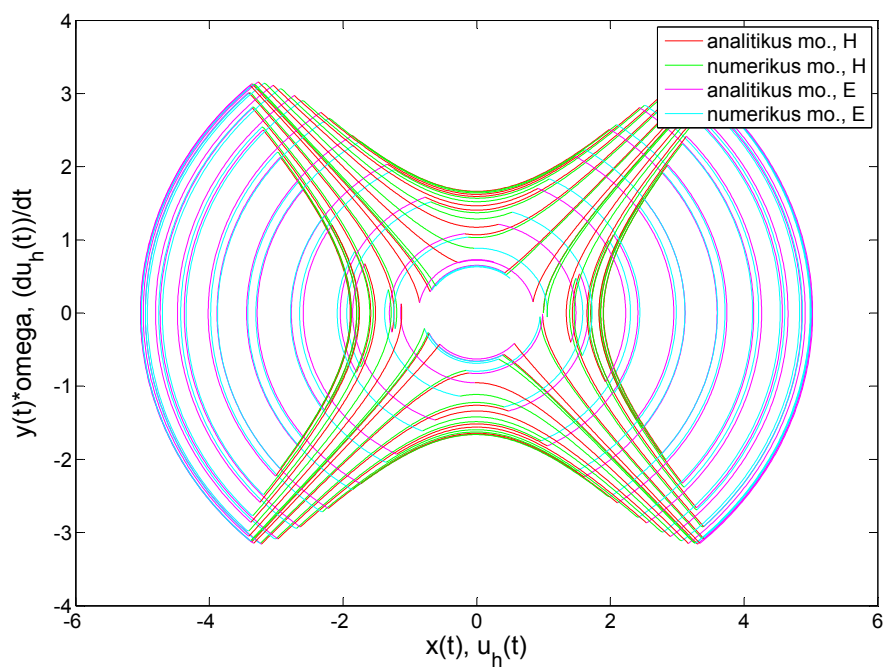
1.5. ábra. A Meissner-egyenlet véges elemes megoldása és a fáziskép,
 $\Delta t = 0,001$, $T_H = 2$, $T_E = 2$, $A_E = 80$, $\ell = 100$, $\omega_H = 0,94768$, $\omega_E = 0,83779$, $k_{\max} = 1$.

1.2. A MEISSNER-EGYENLET VÉGES ELEMES MEGOLDÁSA



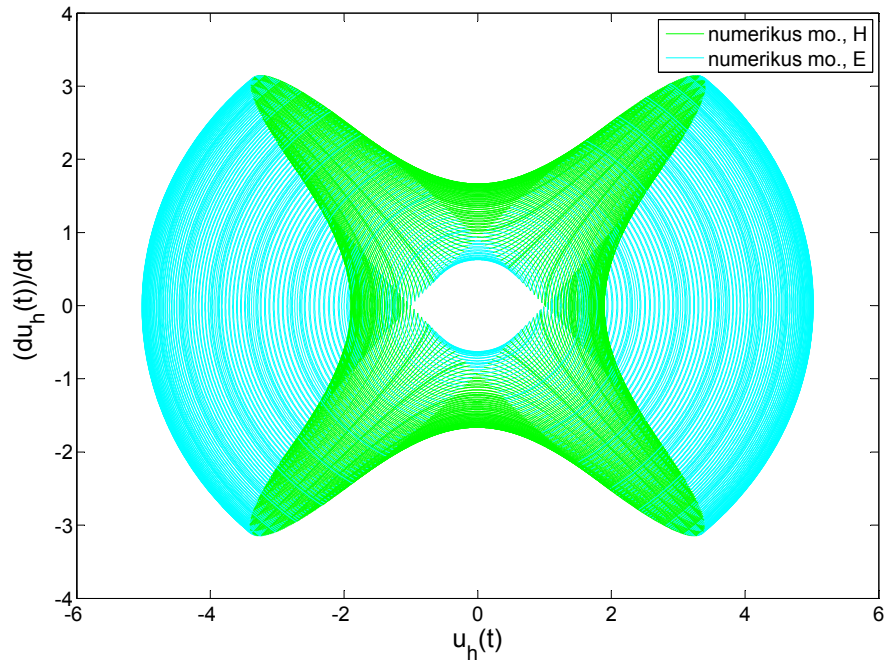
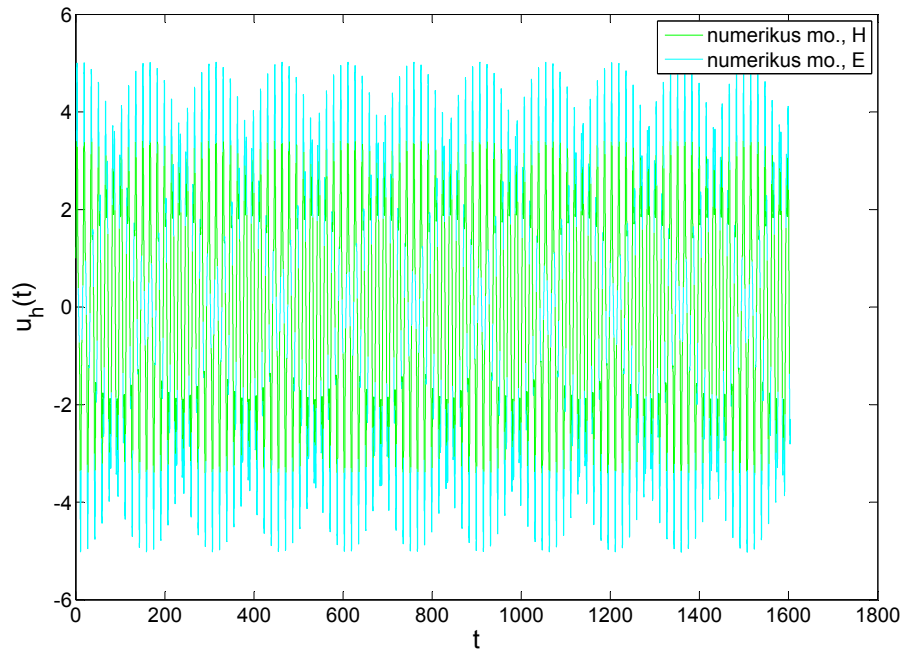
1.6. ábra. A Meissner-egyenlet véges elemes megoldása és a hiba, $\Delta t = 0,01$, $T_H = 2$, $T_E = 2$, $A_E = 80$, $\ell = 100$, $\omega_H = 0,94768$, $\omega_E = 0,83779$, $k_{\max} = 40$.

1.2. A MEISSNER-EGYENLET VÉGES ELEMES MEGOLDÁSA



1.7. ábra. A Meissner-egyenlet véges elemes megoldása, a fáziskép,
 $\Delta t = 0,01$, $T_H = 2$, $T_E = 2$, $A_E = 80$, $\ell = 100$, $\omega_H = 0,94768$, $\omega_E = 0,83779$, $k_{\max} = 40$.

1.2. A MEISSNER-EGYENLET VÉGES ELEMES MEGOLDÁSA



1.8. ábra. A Meissner-egyenlet véges elemes megoldása és a fáziskép,
 $\Delta t = 0,01$, $T_H = 2$, $T_E = 2$, $A_E = 80$, $\ell = 100$, $\omega_H = 0,94768$, $\omega_E = 0,83779$, $k_{\max} = 400$.

1.3. A Mathieu-egyenlet

A konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletről továbblépünk a lineáris eset egy érdekes alkalmazására, a Mathieu-egyenletre, amikor a lineáris tag együtthatója egy T -periodikus, nem szakaszonként konstans függvény. A Mathieu-egyenlet analitikus megoldása nem ismert, így csak a végeselem-megoldást ismertetjük. Legyen $I = (0, (k_{\max} + 1)T)$. Tekintsük az alábbi kezdetiérték-problémát:

$$\ddot{u} - \cos(\mu t) u = 0, \quad t \in [0, (k_{\max} + 1)T), \quad (1.3.1a)$$

$$u(0) = u_0, \quad (1.3.1b)$$

$$\dot{u}(0) = \bar{u}_0, \quad (1.3.1c)$$

ahol $k_{\max} \in \mathbb{N}$, $\mu = 2\pi/T$. Legyen a V függvénytér a korábbiakban megadott. Szorozzuk be az (1.3.1a) egyenletet egy $v \in V$ tesztfüggvénnyel, és integráljuk $(0, (k_{\max} + 1)T)$ -n:

$$\int_0^{(k_{\max}+1)T} \ddot{u}v - \cos(\mu t) u(t)v(t) dt = 0.$$

Integráljunk parciálisan:

$$\begin{aligned} & - [\dot{u}v]_0^{(k_{\max}+1)T} + \int_0^{(k_{\max}+1)T} \dot{u}\dot{v} dt + \int_0^{(k_{\max}+1)T} \cos(\mu t) u(t)v(t) dt \\ & = -\dot{u}((k_{\max} + 1)T) v((k_{\max} + 1)T) + \dot{u}(0) v(0) + \int_0^{(k_{\max}+1)T} \dot{u}\dot{v} dt + \int_0^{(k_{\max}+1)T} \cos(\mu t) u(t)v(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Osszuk fel I -t egyenlő h hosszúságú részintervallumokra, és legyen a végeselem-tér $V_h = \text{span}\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$, ahol a bázisfüggvények a korábbiakban definiált lineáris bázisfüggvények. Ekkor a közelítő megoldás

$$u_h = \sum_{j=0}^n u_h(t_j) \phi_j \in V_h.$$

Legyen

$$\xi_j = u_h(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad \xi_0 = u_0, \quad \dot{u}_h(t_0) = \bar{u}_0.$$

Mivel a variációs egyenlet igaz minden $v \in V_h$ -ra, legyen $v = \phi_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ tesztfüggvény. Ekkor a variációs egyenlet: keressünk olyan $u_h \in V_h$ -t, hogy

$$\begin{aligned} & \dot{u}_h(t_0) v(t_0) - \dot{u}_h(t_n) v(t_n) + \int_{t_0}^{t_n} \dot{u}_h \dot{v} \, dt + \int_{t_0}^{t_n} \cos(\mu t) u_h(t) v(t) \, dt \\ &= \bar{u}_0 \phi_i(t_0) + \frac{\xi_{n-1} - \xi_n}{h_n} \phi_i(t_n) + \xi_0 \int_{t_0}^{t_n} \dot{\phi}_0(t) \dot{\phi}_i(t) \, dt + \sum_{j=1}^n \xi_j \int_{t_0}^{t_n} \dot{\phi}_j(t) \dot{\phi}_i(t) \, dt \\ &+ \xi_0 \int_{t_0}^{t_n} \cos(\mu t) \phi_0(t) \phi_i(t) \, dt + \sum_{j=1}^n \xi_j \int_{t_0}^{t_n} \cos(\mu t) \phi_j(t) \phi_i(t) \, dt = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Legyenek

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{t_0}^{t_n} \dot{\phi}_j \dot{\phi}_i \, dt, \\ M_{ij}^{\cos} &= \int_{t_0}^{t_n} \cos(\mu t) \phi_j \phi_i \, dt, \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ekkor az (1.3.2) egyenlet a most bevezetett jelölésekkel:

$$\begin{aligned} A_{01} \xi_1 + M_{01}^{\cos} \xi_1 &= -u'_0 - M_{00}^{\cos} \xi_0 - A_{00} \xi_0 & (i = 0), \\ A_{11} \xi_1 + A_{12} \xi_2 + M_{11}^{\cos} \xi_1 + M_{12}^{\cos} \xi_2 &= -M_{01}^{\cos} \xi_0 - A_{01} \xi_0 & (i = 1), \\ A_{i-1} \xi_{i-1} + A_{ii} \xi_i + A_{i,i+1} \xi_{i+1} + M_{i-1}^{\cos} \xi_{i-1} + M_{ii}^{\cos} \xi_i + M_{i,i+1}^{\cos} \xi_{i+1} &= 0 & (i = 2, 3, \dots, n-1), \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} M_{ii}^{\cos} &= \frac{2}{\mu^2} \cos(\mu t_i) \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) \\ &+ \frac{2}{\mu^3} \left(\frac{1}{h_i^2} (\sin(\mu t_{i-1}) - \sin(\mu t_i)) + \frac{1}{h_{i+1}^2} (\sin(\mu t_i) - \sin(\mu t_{i+1})) \right), \\ M_{i,i+1}^{\cos} &= M_{i+1,i}^{\cos} = -\frac{1}{\mu^2 h_{i+1}} (\cos(\mu t_i) + \cos(\mu t_{i+1})) + \frac{2}{\mu^3 h_{i+1}^2} (\sin(\mu t_{i+1}) - \sin(\mu t_i)), \end{aligned}$$

amelyek kiszámításakor felhasználtuk, hogy $\phi_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$ lineáris bázisfüggvények. Tehát a mátrixegyenlet:

$$(A + M^{\cos}) \xi = b, \quad (1.3.3)$$

ahol

$$b = \begin{pmatrix} -\bar{u}_0 - M_{00}^{\cos} \xi_0 - A_{00} \xi_0 \\ -M_{01}^{\cos} \xi_0 - A_{01} \xi_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

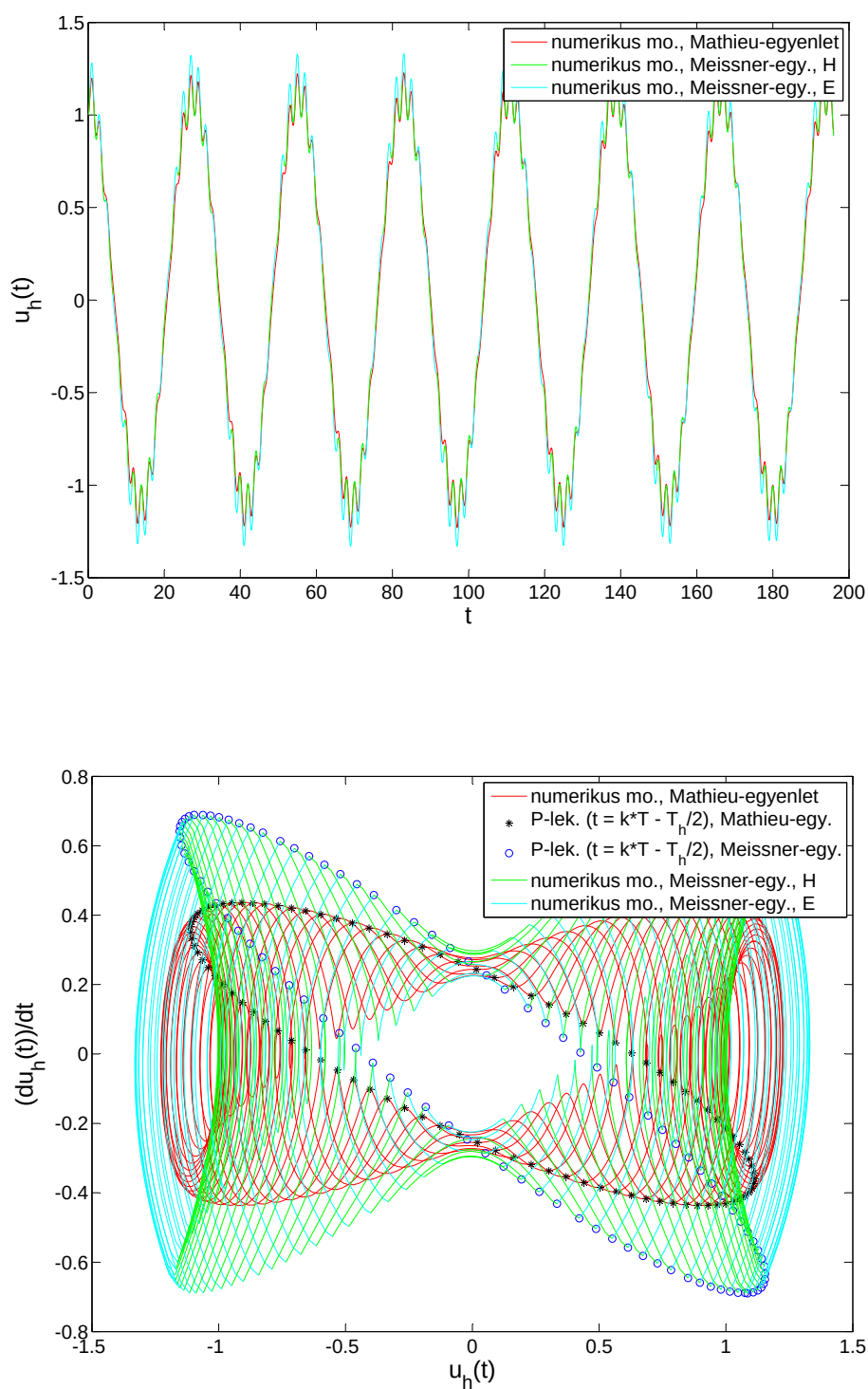
Az (1.3.3) egyenlet $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ megoldását numerikus eszközökkel könnyen kiszámíthatjuk.

Továbbá követtük a VEM megoldáshoz tartozó Poincaré-leképezés pontjait. A $kT - T_H/2$ időpillanatokban, T időközönként figyeljük meg, hogy hol van az $(u_h(t), \dot{u}_h(t))$ pont a fázissíkon. Így egy pontsorozatot kapunk (1.9., 1.10., 1.11. ábrák).

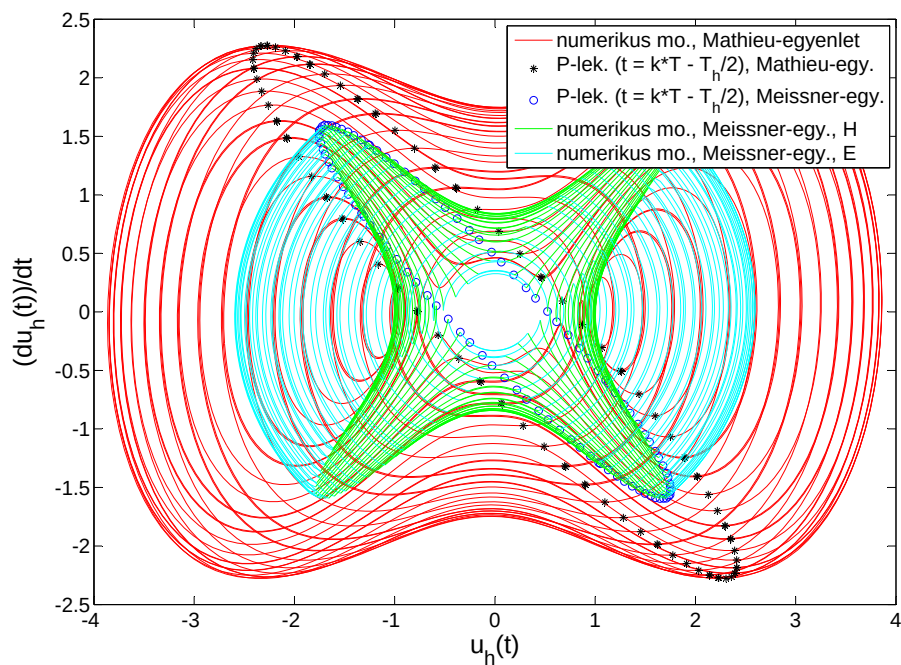
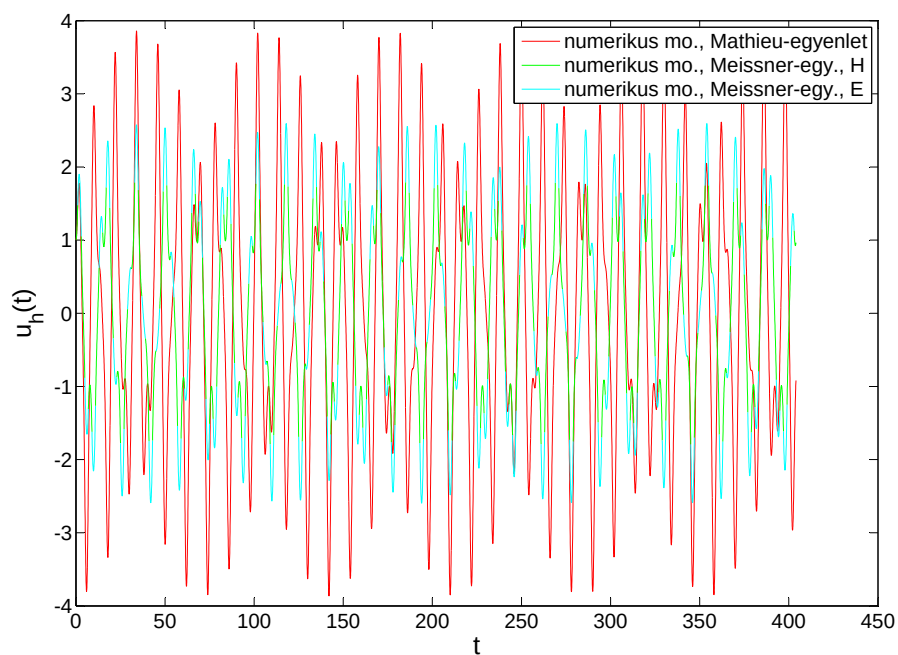
Az eredmények értékelése

Ábrázoltuk a Meissner- és a Mathieu-egyenlet megoldását az 1.9., 1.10., 1.11. ábrákon. A paraméterek $(T, A_E, \ell, \omega_H, \omega_E)$ megfelelő megválasztása mellett mindkét egyenlet stabil.

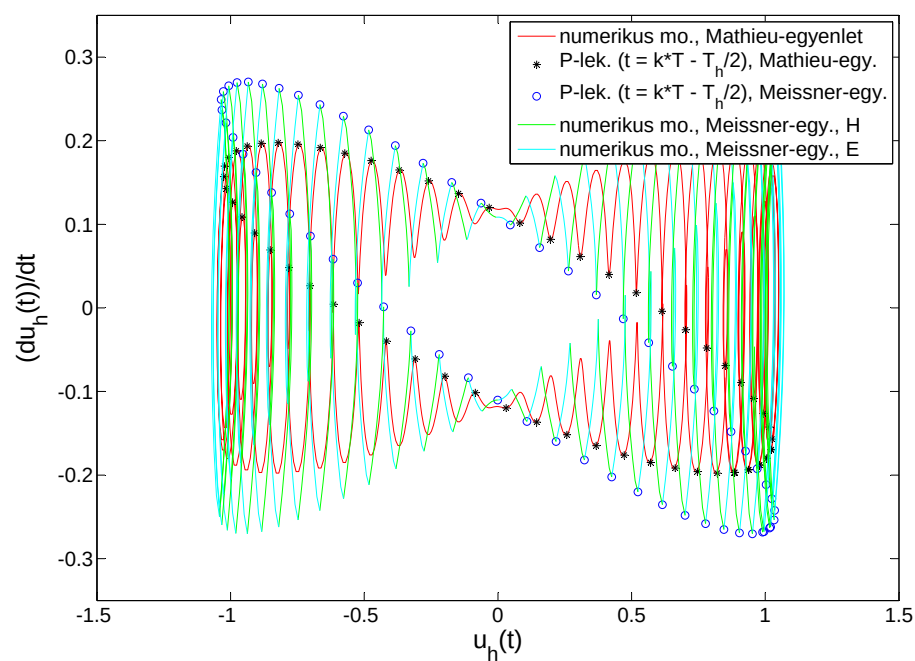
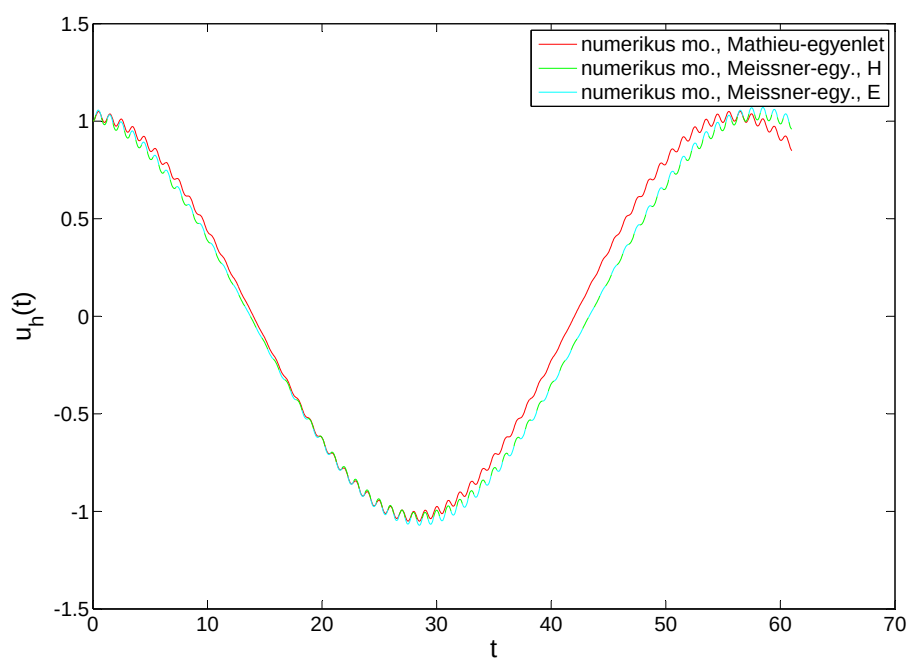
A fázisképeken a $kT - T_H/2$ helyeken vett megfelelő Poincaré-leképezések pontjai megfigyeléseink szerint egy-egy ellipszisre illeszkednek.



1.9. ábra. A Mathieu- és a Meissner-egyenlet véges elemes megoldása és a fázisképek, $\Delta t = 0,05$, $T = 2$, $A_E = 200$, $\ell = 179$, $\omega_H = 1,0826$, $\omega_E = 1,0308$, $k_{\max} = 97$.



1.10. ábra. A Mathieu- és a Meissner-egyenlet véges elemes megoldása és a fázisképek, $\Delta t = 0,05$, $T = 4$, $A_E = 79$, $\ell = 100$, $\omega_H = 0,94239$, $\omega_E = 0,83181$, $k_{\max} = 100$.



1.11. ábra. A Mathieu- és a Meissner-egyenlet véges elemes megoldása és a fázisképek,
 $\Delta t = 0,05$, $T = 1$, $A_E = 1000$, $\ell = 1000$, $\omega_H = 1,0049$, $\omega_E = 0,99508$, $k_{\max} = 60$.

1.4. A nemlineáris eset

Ebben a fejezetben szintén egy olyan kezdetiérték-probléma véges elemes megoldását tűzzük ki célul, amelynek nem ismert az analitikus megoldása. A numerikus vizsgálat során a nemlineáris tagot az egyre magasabb rendű Taylor-polinomjával közelítjük, és az eredendő nemlineáris differenciálegyenletet oldjuk meg végeselem-módszerrel. Analitikus megoldás hiányában csak a numerikus megoldás viselkedését tudjuk megfigyelni, a közelítő Taylor-polinom fokszámának függvényében.

Tekintsük tehát az alábbi kezdetiérték-problémákat:

$$\ddot{u} - \omega_H^2 \sin u = 0, \quad t \in [kT, kT + T_H), \quad k = 0, 1, \dots, k_{\max}, \quad (1.4.1a)$$

$$u(kT) = u_k^H, \quad (1.4.1b)$$

$$\dot{u}(kT^+) = \bar{u}_k^H, \quad (1.4.1c)$$

és

$$\ddot{u} + \omega_E^2 \sin u = 0, \quad t \in [kT + T_H, (k+1)T), \quad k = 0, 1, \dots, k_{\max}, \quad (1.4.2a)$$

$$u(kT + T_H) = u_k^E, \quad (1.4.2b)$$

$$\dot{u}(kT + T_H^+) = \bar{u}_k^E, \quad (1.4.2c)$$

ahol

$$u_0^H = 1, \quad \bar{u}_0^H = 0,$$

$$u_k^H = \lim_{t \rightarrow kT-0} u(t), \quad \bar{u}_k^H = \lim_{t \rightarrow kT-0} \dot{u}(t), \quad 1 \leq k \leq k_{\max},$$

$$u_k^E = \lim_{t \rightarrow kT+T_H-0} u(t), \quad \bar{u}_k^E = \lim_{t \rightarrow kT+T_H-0} \dot{u}(t), \quad 0 \leq k \leq k_{\max}.$$

Hiperbolikus rész

Legyen $k_{\max} \in \mathbb{N}$ adott, $I = (kT, kT + T_H)$. A szinuszfüggvényt helyettesítsük az u megoldás szerinti Taylor-sorával:

$$\ddot{u} - \omega_H^2 u + \omega_H^2 \frac{u^3}{3!} - \omega_H^2 \frac{u^5}{5!} + \omega_H^2 \frac{u^7}{7!} - \dots = 0, \quad t \in [kT, kT + T_H), \quad k = 0, 1, \dots, k_{\max}, \quad (1.4.3a)$$

$$u(kT) = u_k^H, \quad (1.4.3b)$$

$$\dot{u}(kT^+) = \bar{u}_k^H, \quad (1.4.3c)$$

Az így kapott (1.4.3) problémát vizsgáljuk numerikusan a végeselem-módszer segítségével.

Legyen a V függvénytér a korábban megadott. Az (1.4.3a) egyenletet szorozzuk meg $v \in V$ tesztfüggvénnyel, és integráljuk $(kT, kT + T_H)$ -n. Olyan $u \in V$ -t keresünk, amelyre

$$\int_{kT}^{kT+T_H} \left(\ddot{u} - \omega_H^2 u + \omega_H^2 \frac{u^3}{3!} - \omega_H^2 \frac{u^5}{5!} + \omega_H^2 \frac{u^7}{7!} - \dots \right) v \, dt = 0, \quad \forall v \in V.$$

Parciális integrálás után, mivel a $\sin u$ sora konvergens $\forall u$ -ra, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & - [\dot{u}v]_{kT}^{kT+T_H} + \int_{kT}^{kT+T_H} \dot{u}\dot{v} \, dt + \omega_H^2 \int_{kT}^{kT+T_H} uv \, dt - \frac{\omega_H^2}{3!} \int_{kT}^{kT+T_H} u^3 v \, dt + \frac{\omega_H^2}{5!} \int_{kT}^{kT+T_H} u^5 v \, dt - \dots \\ & = -\dot{u}(kT + T_H) v(kT + T_H) + \dot{u}(kT) v(kT) \\ & + \int_{kT}^{kT+T_H} \dot{u}\dot{v} \, dt + \omega_H^2 \int_{kT}^{kT+T_H} uv \, dt - \frac{\omega_H^2}{3!} \int_{kT}^{kT+T_H} u^3 v \, dt + \frac{\omega_H^2}{5!} \int_{kT}^{kT+T_H} u^5 v \, dt - \dots = 0, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Osszuk fel $(kT, kT + T_H)$ -t h hosszúságú intervallumokra.

Legyen a végeelem-tér $V_h = \text{span}\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\} \subset V$, ahol ϕ_i , $i = 0, 1, \dots, n$, lineáris bázis-függvények, és

$$u_h = \sum_{j=0}^n u_h(t_j) \phi_j,$$

valamint

$$\xi_j = u_h(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad \xi_0 = u_k^H, \quad \dot{u}_h(t_0) = \bar{u}_k^H.$$

Tekintsük a $v = \phi_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ tesztfüggvényeket. Ekkor a variációs egyenlet: keressünk olyan $u_h \in V_h$ -t, hogy

$$\begin{aligned} & \dot{u}_h(t_0) v(t_0) - \dot{u}_h(t_n) v(t_n) + \int_{t_0}^{t_n} \dot{u}_h \dot{v} \, dt + \omega_H^2 \int_{t_0}^{t_n} u_h v \, dt - \frac{\omega_H^2}{3!} \int_{t_0}^{t_n} u_h^3 v \, dt + \frac{\omega_H^2}{5!} \int_{t_0}^{t_n} u_h^5 v \, dt - \dots \\ & = \bar{u}_k^H \phi_i(t_0) + \frac{\xi_{n-1} - \xi_n}{h_n} \phi_i(t_n) + \xi_0 \int_{t_0}^{t_n} \dot{\phi}_0(t) \dot{\phi}_i(t) \, dt + \sum_{j=1}^n \xi_j \int_{t_0}^{t_n} \dot{\phi}_j(t) \dot{\phi}_i(t) \, dt \\ & + \omega_H^2 \xi_0 \int_{t_0}^{t_n} \phi_0(t) \phi_i(t) \, dt + \omega_H^2 \sum_{j=1}^n \xi_j \int_{t_0}^{t_n} \phi_j(t) \phi_i(t) \, dt \\ & - \frac{\omega_H^2}{3!} \xi_0 \int_{t_0}^{t_n} \phi_0^3(t) \phi_i(t) \, dt - \frac{\omega_H^2}{3!} \sum_{j=1}^n \xi_j \int_{t_0}^{t_n} \phi_j^3(t) \phi_i(t) \, dt \\ & + \frac{\omega_H^2}{5!} \xi_0 \int_{t_0}^{t_n} \phi_0^5(t) \phi_i(t) \, dt + \frac{\omega_H^2}{5!} \sum_{j=1}^n \xi_j \int_{t_0}^{t_n} \phi_j^5(t) \phi_i(t) \, dt - \dots = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.4.4) \end{aligned}$$

Legyenek

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \int_{t_0}^{t_n} \dot{\phi}_j \dot{\phi}_i \, dt, \\
 M_{ij}^1 &= \int_{t_0}^{t_n} \phi_j^1 \phi_i \, dt, \\
 M_{ij}^3 &= \frac{1}{3!} \int_{t_0}^{t_n} \phi_j^3 \phi_i \, dt, \\
 M_{ij}^5 &= \frac{1}{5!} \int_{t_0}^{t_n} \phi_j^5 \phi_i \, dt, \dots, \quad i, j = 0, 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Így a tömegmátrixok egyes elemei:

$$\begin{aligned}
 M_{ii}^1 &= \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3}, & M_{ii+1}^1 &= M_{i+1i}^1 = \frac{h_{i+1}}{2 \cdot 3}, \\
 M_{ii}^3 &= \frac{1}{3!} \left(\frac{h_i}{5} + \frac{h_{i+1}}{5} \right), & M_{ii+1}^3 &= M_{i+1i}^3 = \frac{1}{3!} \frac{h_{i+1}}{4 \cdot 5}, \\
 M_{ii}^5 &= \frac{1}{5!} \left(\frac{h_i}{7} + \frac{h_{i+1}}{7} \right), & M_{ii+1}^5 &= M_{i+1i}^5 = \frac{1}{5!} \frac{h_{i+1}}{6 \cdot 7}, \dots
 \end{aligned}$$

Ekkor az (1.4.4) egyenletrendszer, a most bevezetett jelölésekkel:

$$\begin{aligned}
 &A_{01}\xi_1 + \omega_H^2 M_{01}^1 \xi_1 - \omega_H^2 M_{01}^3 \xi_1 + \omega_H^2 M_{01}^5 \xi_1 - \dots \\
 &= -\ddot{u}_k^H - A_{00}\xi_0 - \omega_H^2 M_{00}^1 \xi_0 + \omega_H^2 M_{00}^3 \xi_0 - \omega_H^2 M_{00}^5 \xi_0 + \dots
 \end{aligned} \quad (i = 0),$$

$$\begin{aligned}
 &A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + \omega_H^2 M_{11}^1 \xi_1 + \omega_H^2 M_{12}^1 \xi_2 - \omega_H^2 M_{11}^3 \xi_1 - \omega_H^2 M_{12}^3 \xi_2 + \omega_H^2 M_{11}^5 \xi_1 + \omega_H^2 M_{12}^5 \xi_2 - \dots \\
 &= -A_{01}\xi_0 - \omega_H^2 M_{01}^1 \xi_0 + \omega_H^2 M_{01}^3 \xi_0 - \omega_H^2 M_{01}^5 \xi_0 + \dots
 \end{aligned} \quad (i = 1),$$

$$\begin{aligned}
 &A_{i-1i}\xi_{i-1} + A_{ii}\xi_i + A_{i+1i}\xi_{i+1} + \omega_H^2 M_{i-1i}^1 \xi_{i-1} + \omega_H^2 M_{ii}^1 \xi_i + \omega_H^2 M_{i+1i}^1 \xi_{i+1} \\
 &- \omega_H^2 M_{i-1i}^3 \xi_{i-1} - \omega_H^2 M_{ii}^3 \xi_i - \omega_H^2 M_{i+1i}^3 \xi_{i+1} + \omega_H^2 M_{i-1i}^5 \xi_{i-1} + \omega_H^2 M_{ii}^5 \xi_i + \omega_H^2 M_{i+1i}^5 \xi_{i+1} - \dots = 0
 \end{aligned} \quad (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

Végül mátrix formában:

$$(A + \omega_H^2 M^1 - \omega_H^2 M^3 + \omega_H^2 M^5 - \dots) \xi = b,$$

ahol

$$b = \begin{pmatrix} -\bar{u}_k^H - A_{00}\xi_0 - \omega_H^2 M_{00}^1 \xi_0 + \omega_H^2 M_{00}^3 \xi_0 - \omega_H^2 M_{00}^5 \xi_0 + \dots \\ -A_{01}\xi_0 - \omega_H^2 M_{01}^1 \xi_0 + \omega_H^2 M_{01}^3 \xi_0 - \omega_H^2 M_{01}^5 \xi_0 + \dots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elliptikus rész

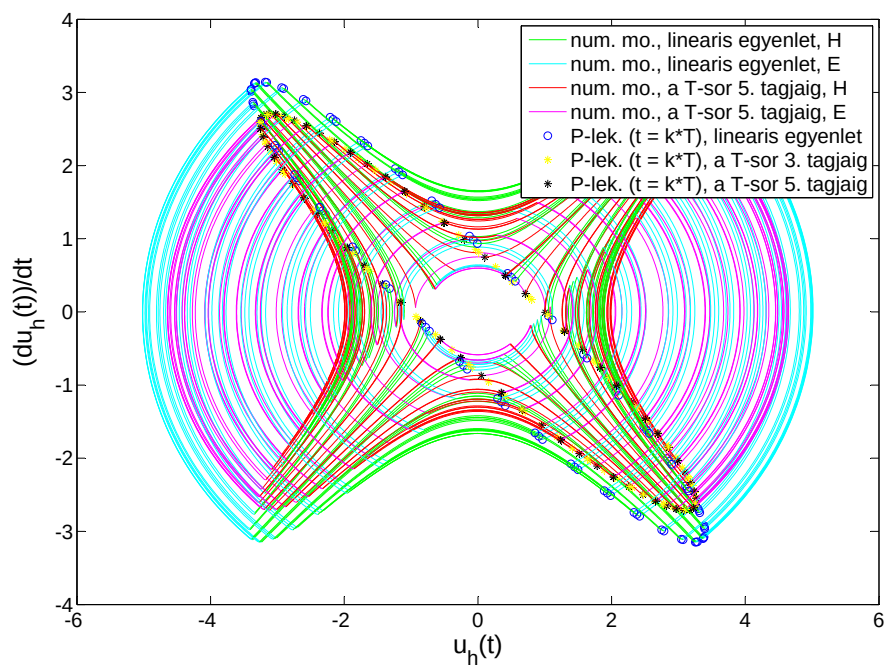
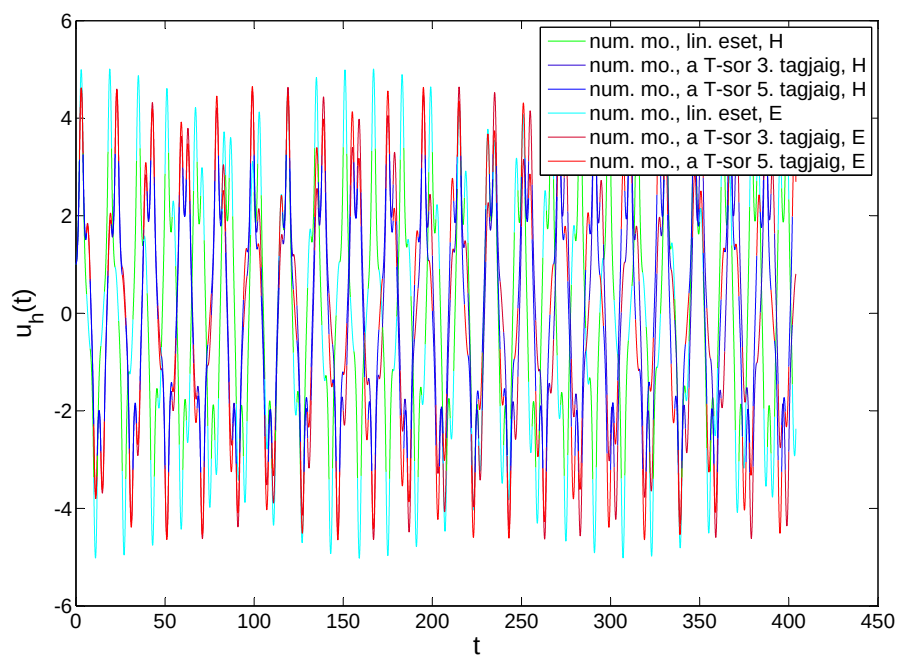
Hasonlóan a hiperbolikus esethez, az eredendő egyenletrendszer:

$$(A - \omega_E^2 M^1 + \omega_E^2 M^3 - \omega_E^2 M^5 + \dots) \xi = b, \text{ ahol} \quad (1.4.5)$$

$$b = \begin{pmatrix} -\bar{u}_k^E - A_{00}\xi_0 + \omega_E^2 M_{00}^1 \xi_0 - \omega_E^2 M_{00}^3 \xi_0 + \omega_E^2 M_{00}^5 \xi_0 - \dots \\ -A_{01}\xi_0 + \omega_E^2 M_{01}^1 \xi_0 - \omega_E^2 M_{01}^3 \xi_0 + \omega_E^2 M_{01}^5 \xi_0 - \dots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az eredmények értékelése

Az 1.12. ábrán összevetjük a lineáris (Meissner-egyenlet) és a nemlineáris esetet. A Taylor-polinomokat először a harmad-, majd az ötödrendű tagig vesszük. A fázisképen bejelöljük a Poincaré-leképezés $(u_h(kT), du_h/dt(kT))$ pontjait, amik mindkét esetben – megfigyeléseink szerint – egy-egy ellipszisen helyezkednek el.



1.12. ábra. A nemlineáris egyenlet megoldása végeselem-módszerrel, fáziskép,
 $\Delta t = 0,01$, $T_H = 2$, $T_E = 2$, $A_E = 80$, $l = 100$, $\omega_H = 0,94768$, $\omega_E = 0,83779$, $k_{\max} = 100$.

Összefoglalás

A dolgozatban az ún. folytonos Galjorkin-módszert mutattuk be. Rendszerint peremérték-feladatok esetében használatos [4, 7, 8, 10, 14, 15, 16, 17]. Mi ezt kidolgoztuk a fordított inga kezdetiérték-problémájára.

Először az egyenlet linearizáltján, a Meissner-egyenleten mutattuk be a végeelem-módszert, ahol a lineáris tag együtthatója egy T -periodikus, szakaszonként konstans függvény. A dinamikát alkotó hiperbolikus és elliptikus szakaszokra is felírtuk a véges elemes megoldást, majd ezeket a megfelelő kezdeti feltételekkel összekapcsoltuk. Ekkor ismert az analitikus megoldás, így azzal a VEM numerikus megoldást össze tudtuk hasonlítani. Ábrázoltuk a fázisképeket, majd azokat értelmeztük az analitikus megoldás tükrében.

A másodikként tekintett Mathieu-egyenletben a lineáris tag együtthatója egy T -periodikus, nem konstans függvény. Az egzakt megoldás itt nem ismert. A kapott numerikus megoldást együtt ábrázoltuk a Meissner-egyenlet megoldásával, illetve a fázissíkon ábrázoltuk a VEM megoldáshoz tartozó Poincaré-leképezést is.

A harmadik fejezetben áttértünk a nemlineáris egyenletre. Ennek sem ismert az analitikus megoldása, így nem volt lehetőségünk összehasonlításra. A szinuszfüggvényt közelítettük az egyre magasabb rendű Taylor-polinomjával. A végeelem-analízissel kapott megoldást együtt ábrázoltuk a Meissner-egyenlet VEM megoldásával, és a véges elemes megoldáshoz tartozó Poincaré-leképezés pontjaival.

A számítások elvégzéséhez és a megoldások ábrázolásához a módszert mindhárom feladat esetében lefordítottuk a MATLAB programnyelvére és implementáltuk.

Eljárásunkon javíthatunk: egyfelől az intervallumok sűrűbb beosztásával, másfelől, a bázisfüggvények megválasztásakor a lineáris helyett magasabb fokú függvényeket is vehetünk [2]. Utóbbi feladat vizsgálata akár további kutatómunka célkitűzése is lehet.

A fordított inga modelljének további véges elemes analízisére adhat lehetőséget a nemfolytonos Galjorkin-módszer [12]. Előnye, hogy használhatunk nem folytonos elemeket, például a hiperbolikus és elliptikus szakaszok között; továbbá vehetünk különböző fokszámú polinomokat a különböző elemeken, például magasabb fokszámút, ahol szükséges.

A függelék

Saját diákköri kutatómunka bemutatása

SAJÁT KUTATÁSI FELADATOK :

A kutatómunka keretében igyekeztünk a kiterjedt szakirodalomból kiválasztani néhány átfogó, mégis alapos jegyzetet [2, 4, 7, 8, 10, 12, 15, 16, 17]. Ezek tanulmányozása által megismertem a végeselem-módszer matematikai alapjait.

A dolgozat témájaként a fordított inga modelljének véges elemes megoldását tűztük ki. A feladathoz a jelenségről már meglévő ismereteink elsajátításával fogtam hozzá [1, 3, 5, 6, 11, 13].

A végeselem-módszert a fordított inga egyenletének linearizáltján mutatom be. A nehézséget az jelentette, hogyan alkalmazzam a rendszerint peremérték-feladatok megoldására használt folytonos Galjorkin-módszert a tekintett kezdetiérték-problémára, illetve az elliptikus és hiperbolikus szakaszok határain az egyes megoldásdarabok megfelelő összekapcsolására is ügyelnem kellett. A Meissner-egyenletre kidolgoztam a numerikus megoldást, majd azt összehasonlítottam az analitikussal, és hibavizsgálatot végeztem. Az eredmények azt mutatják, hogy bizonyos módosításokkal a folytonos Galjorkin-módszer jól alkalmazható erre a kezdetiérték-problémára. Tudjuk, hogy a fordított inga felső egyensúlyi helyzete stabillá tehető a felfüggesztési pont elegendően nagy frekvenciájú rezgőmozgásával [5], ennek illusztrálására szimulációt készítettem.

A lineáris eset egy érdekes alkalmazását, a Mathieu-egyenletet vizsgáltam, aminek nem ismerjük az egzakt megoldását. A Meissner-egyenletnél szerzett tapasztalatokat hasznosítottam a módszer kidolgozásánál. A kapott numerikus megoldást összehasonlítottam a szakaszonként konstans együtthatós lineáris differenciálegyenlet véges elemes megoldásával.

Végül a módszert átültettem a nemlineáris esetre. A legjobbnak az bizonyult, ha a nemlinearitást közelítettem az egyre magasabb rendű Taylor-polinomjával, és így az eredendő nemlineáris differenciálegyenlet vizsgálatát végezhettem el a végeselem-módszerrel. Mivel a nem-

lineáris esetben sem ismert az analitikus megoldás, csak olyan megfigyeléseket tudtam tenni, hogy mi történik a numerikus megoldással, ha növelem a közelítő Taylor-polinom fokszámát. A fázissíkon ábrázoltam a Poincaré-leképezést.

Az általam a fenti kezdetiérték-problémákra kidolgozott végeselem-megoldást a MATLAB programnyelven implementáltam, a szakirodalomban fellelhető praktikus programozási fogások [4, 8, 10, 14] felhasználásával és célszerű módosításával. A dolgozatban bemutatott és hivatkozott számítások elvégzéséhez, az eredmények ábrázolására, valamint a szimuláció elkészítésére szintén a MATLAB nyelvet használtam.

A dolgozat zárásaként áttekintem az elért eredményeket az ide vonatkozó szakirodalom tükrében, valamint – továbblépésként – vázolom az alkalmazott közelítő eljárás javításának lehetőségét.

B függelék

Abszolutóriumot szerzett hallgatók nevezése

Minthogy az intézményi TDK-konferencia félévében – amelyen a benevezett pályamunkámmal jogosultságot kaptam a XXXII. OTDK-ra – MSc képzésben vettem részt, és abszolutóriumot szereztem, az alábbiakban szeretnék rávilágítani a mesterképzésbeli diplomamunkámban és a TDK-dolgozatomban bemutatott, elvégzett kutatási feladatok különbségére.

B.1. MSc diplomamunka

TÉMAVEZETŐ:

Dr. Van Leeuwen-Polner Mónika, egyetemi adjunktus

DIPLOMAMUNKA CÍME:

Differenciálegyenletek numerikus megoldásai a véges elemek módszerével

RÉSZLETES TÉMATERV ÉS AZ ELVÉGZETT KUTATÁSI FELADATOK:

A kutatómunka célkitűzése a módszer matematikai hátterének alapos megismerése és peremérték-feladatokon keresztül való bemutatása volt. A diplomamunkámban a véges elemek módszerét (röviden: VEM) differenciálegyenletek numerikus megoldására alkalmazzuk, és kitérünk az elméleti alapjaira is.

A dolgozat felépítése a következő. Először absztrakt formában áttekintjük e numerikus módszer főbb lépéseit.

A második fejezetben a VEM másodrendű parciális differenciálegyenletekre történő alkalmazását mutatjuk be. Egy elliptikus modellproblémára felírjuk a variációs egyenletet általános peremfeltételek mellett. Áttekintjük a módszer matematikai alapjait, azon belül bemutatjuk

a Lax–Milgram-tétel és a Céa-lemma bizonyítását, valamint ellenőrizzük a tételek feltételeinek teljesülését a tekintett általános peremérték-probléma esetében. Vázoljuk a végelelem-tér szokásos konstrukcióit, majd a VEM használatát egy, illetve két dimenzióban. A másodrendű parciális differenciálegyenletek mindhárom típusára tekintünk egy-egy példát, nevezetesen a Poisson-egyenletet két dimenzióban, a hővezetés egyenletét, valamint a hullámeqyenletet.

A harmadik fejezetben egy rugalmasságtani alkalmazást, a Navier-egyenlethez kapcsolódó peremérték-feladatot vizsgáljuk a végelelem-módszer segítségével.

Az egyes feladatok esetében az általunk kidolgozott VEM implementálására, a számítások elvégzéséhez, valamint az eredmények szemléltetésére a MATLAB programnyelvét használtuk.

B.2. TDK-dolgozat

TÉMAVEZETŐ:

Dr. Van Leeuwen-Polner Mónika, egyetemi adjunktus

TDK-DOLGOZAT CÍME:

A fordított inga dinamikájának vizsgálata a végelelem-módszerrel

RÉSZLETES TÉMATERV ÉS AZ ELVÉGZETT KUTATÁSI FELADATOK:

Ebben a dolgozatban kezdetiérték-problémákra alkalmazzuk a rendszerint peremérték-feladatok esetén használt folytonos Galjorkin-módszert: a fordított inga modelljének VEM megoldásával foglalkozunk. A mozgást az

$$\ddot{x} - \frac{1}{\ell} (g + a(t)) \sin x = 0$$

nemlineáris másodrendű közönséges differenciálegyenlettel modellezzük.

A VEM bemutatására a fordított inga egyenletének linearizáltját választjuk. Ekkor ugyanis lehetőségünk van összehasonlítani a numerikus megoldást az analitikussal, és a hibavizsgálatra.

A lineáris eset egy érdekes alkalmazását, a Mathieu-egyenlet kezdetiérték-problémáját vizsgáljuk, amikor a lineáris tag együtthatója egy T -periodikus, nem szakaszonként konstans függvény:

$$\ddot{x} - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)x = 0.$$

A kapott numerikus megoldást összehasonlítjuk a Meissner-egyenlet VEM megoldásával.

Végül módszerünket átültetjük a nemlineáris esetre. A nemlinearitást közelítjük az egyre magasabb rendű Taylor-polinomjával, és az eredendő nemlineáris differenciálegyenlet numerikus megoldását vizsgáljuk a VEM-mel. A fázissíkon ábrázoljuk a Poincaré-leképezést.

Irodalomjegyzék

- [1] ARNOL'D, VLADIMIR I. (1992). *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin.
- [2] BRENNER, SUSANNE C.; SCOTT, L. RIDGWAY (2008). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, New York.
- [3] CHICONE, CARMEN (2006). *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer, New York.
- [4] COOPER, JEFFERY (1998). *Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB*. Birkhauser, Boston.
- [5] CSIZMADIA L.; HATVANI L. (2013). „An extension of the Levi–Weckesser method to the stabilization of the inverted pendulum under gravity”. *Meccanica (Springer)*, doi: 10.1007/s11012-013-9855-z.
- [6] HATVANI LÁSZLÓ (2014). „A conjecture connected with the stabilization of the inverted pendulum”. *Szeged Dynamics Days*, February 28 - March 1 2014.
- [7] HORVÁTH RÓBERT (2012). *Numerikus módszerek 2*. BME Matematika Intézet.
- [8] JOHNSON, CLAES (1987). *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [9] KAPITZA, PYOTR L. (1965). „Dynamical stability of a pendulum when its point of suspension vibrates”. *Collected Papers of P. L. Kapitza* **2**, Pergamon Press, Oxford, New York.
- [10] LARSON, MATS G.; BENGZON, FREDRIK (2013). *The Finite Element Method: Theory, Implementation and Practice*. Springer-Verlag, Heidelberg.
- [11] LEVI, MARK; WECKESSER, WARREN (1995). „Stabilization of the inverted linearized pendulum by high frequency vibrations”. *SIAM Review* **37** (2): 219-223, Philadelphia.

- [12] LI, BEN Q. (2006). *Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer*. Springer-Verlag, New York.
- [13] MERKIN, DAVID R. (1997). *Introduction to the Theory of Stability*. Springer-Verlag, New York.
- [14] STOYAN GISBERT (szerk.) (2011). *MATLAB*. TypoTeX, Budapest.
- [15] STOYAN GISBERT; TAKÓ GALINA (1995). *Numerikus módszerek II*. TypoTeX, Budapest.
- [16] STOYAN GISBERT; TAKÓ GALINA (1997). *Numerikus módszerek III*. TypoTeX, Budapest.
- [17] SÜLI, ENDRE (2012). *Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations*. Mathematical Institute, University of Oxford.
- [18] VÖRÖS ANETT (2014). *Differenciálegyenletek numerikus megoldásai a véges elemek módszerével*. SZTE Bolyai Intézet.
- [19] WIGNER, EUGENE (1960). „The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard Courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959”. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **13**: 1–14, doi: 10.1002/cpa.3160130102.

Ábrák jegyzéke

1.1. Fordított inga	6
1.2. Az egyes szakaszok	11
1.3. Az I intervallum felosztása n részintervallumra	14
1.4. A globális bázisfüggvények	15
1.5. A Meissner-egyenlet véges elemes megoldása és a fáziskép, $\Delta t = 0,001$, $T_H = 2$, $T_E = 2$, $A_E = 80$, $\ell = 100$, $\omega_H = 0,94768$, $\omega_E = 0,83779$, $k_{\max} = 1$	19
1.6. A Meissner-egyenlet véges elemes megoldása és a hiba, $\Delta t = 0,01$, $T_H = 2$, $T_E = 2$, $A_E = 80$, $\ell = 100$, $\omega_H = 0,94768$, $\omega_E = 0,83779$, $k_{\max} = 40$	20
1.7. A Meissner-egyenlet véges elemes megoldása, a fáziskép, $\Delta t = 0,01$, $T_H = 2$, $T_E = 2$, $A_E = 80$, $\ell = 100$, $\omega_H = 0,94768$, $\omega_E = 0,83779$, $k_{\max} = 40$	21
1.8. A Meissner-egyenlet véges elemes megoldása és a fáziskép, $\Delta t = 0,01$, $T_H = 2$, $T_E = 2$, $A_E = 80$, $\ell = 100$, $\omega_H = 0,94768$, $\omega_E = 0,83779$, $k_{\max} = 400$	22
1.9. A Mathieu- és a Meissner-egyenlet véges elemes megoldása és a fázisképek, $\Delta t = 0,05$, $T = 2$, $A_E = 200$, $\ell = 179$, $\omega_H = 1,0826$, $\omega_E = 1,0308$, $k_{\max} = 97$	26
1.10. A Mathieu- és a Meissner-egyenlet véges elemes megoldása és a fázisképek, $\Delta t = 0,05$, $T = 4$, $A_E = 79$, $\ell = 100$, $\omega_H = 0,94239$, $\omega_E = 0,83181$, $k_{\max} = 100$	27
1.11. A Mathieu- és a Meissner-egyenlet véges elemes megoldása és a fázisképek, $\Delta t = 0,05$, $T = 1$, $A_E = 1000$, $\ell = 1000$, $\omega_H = 1,0049$, $\omega_E = 0,99508$, $k_{\max} = 60$	28
1.12. A nemlineáris egyenlet megoldása végeselem-módszerrel, fáziskép, $\Delta t = 0,01$, $T_H = 2$, $T_E = 2$, $A_E = 80$, $l = 100$, $\omega_H = 0,94768$, $\omega_E = 0,83779$, $k_{\max} = 100$	33