

DIPLOMAMUNKA

Vörös Anett

2014

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet
Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszék

D I P L O M A M U N K A

Differenciálegyenletek numerikus
megoldásai a véges elemek módszerével

Numerical Solutions of Differential Equations
Using Finite Elements

Készítette:

Vörös Anett

Alkalmazott matematikus MSc szakos hallgató

E-mail: voros.anett@stud.u-szeged.hu

Témavezető:

Dr. Van Leeuwen-Polner Mónika

Egyetemi adjunktus

2014

Kivonat

A diplomamunkámban a véges elemek módszerét (röviden: VEM) differenciálegyenletek numerikus megoldására alkalmazzuk.

A dolgozat felépítése a következő. Először absztrakt formában áttekintjük a numerikus módszer főbb lépéseit.

A második fejezetben a VEM másodrendű parciális differenciálegyenletekre történő alkalmazását mutatjuk be. Egy elliptikus modellproblémára felírjuk a variációs egyenletet általános peremfeltételek mellett. Áttekintjük a módszer matematikai hátterét, azon belül bemutatjuk a Lax–Milgram-tétel és a Céa-lemma bizonyítását. Vázoljuk a végeselem-tér szokásos konstrukcióit, majd a VEM használatát egy, illetve két dimenzióban. A másodrendű parciális differenciálegyenletek mindhárom típusára tekintünk egy-egy példát, nevezetesen a Poisson-egyenletet, a hővezetés egyenletét, valamint a hullámeqyenletet.

A harmadik fejezetben a Navier-egyenletet vizsgáljuk a végeselem-módszer segítségével.

Az egyes feladatok esetében az általunk kidolgozott VEM implementálására, a számítások elvégzéséhez, valamint az eredmények szemléltetésére a MATLAB programnyelvét használtuk.

A dolgozat zárásaként áttekintjük az elért eredményeket az ide vonatkozó szakirodalom tükrében, valamint – továbblépésként – vázoljuk az alkalmazott közelítő eljárások javításának lehetőségét.

Előszó

A diplomamunkám anyaga az elmúlt hónapok, évek alatt folytatott kutatómunkára épül. Törekedtem arra, hogy a téma kiterjedt szakirodalmának leglényegesebb részét megismerjem. A cél az volt, hogy ismertessem a módszer matematikai alapjait, különböző modellproblémák vizsgálatán keresztül bemutassam a működését, és alkalmazásokon szemléltessem a használatát. A dolgozat alapját képező végeselem-módszer általános tanulmányozása mellett lehetőség adódott a fordított inga dinamikájának numerikus vizsgálatára is, aminek eredményeképpen tudományos diákköri dolgozat született [14].

Remélem, hogy a diplomamunkám megfelel az eredeti célkitűzéseknek, és sikerül átadnom valamennyit a lelkesedésből, ami a megírását kísérte.

Köszönöm mindazok segítségét, észrevételeit, akik bármilyen formában hozzájárultak a diplomamunkám, illetve a TDK-dolgozatom elkészültéhez. Külön szeretném megköszönni Dr. Van Leeuwen-Polner Mónika türelmét és bátorítását, aki témavezetőként részletes útmutatásaival, tanácsaival segített engem a dolgozatok készítése során. Köszönettel tartozom Somogyi Anikónak is, hasznos megjegyzéseiért.

Hálás vagyok a családomnak, a vőlegényemnek, Gergőnek és a barátaimnak azért, hogy bátorítottak és mindenben támogattak.

Szeged, 2014. 05. 15.

Vörös Anett

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. VEM – absztrakt megfogalmazás	3
1.1. A VEM lépései	3
1.2. A diszkretizáció lépései	4
1.2.1. A végeselem-tér felépítése	4
1.2.2. VEM egy dimenzióban	5
1.2.3. VEM magasabb dimenziókban	8
2. Másodrendű parciális differenciálegyenletek	10
2.1. Elliptikus problémák	10
2.1.1. A megoldás létezése és unicitása	10
2.1.2. Variációs probléma megfogalmazása	13
2.1.3. Példa: A Poisson-egyenlet	20
2.2. Parabolikus problémák	28
2.2.1. Példa: A hővezetés egyenlete	28
2.3. Hiperbolikus problémák	32
2.3.1. Példa: hullámgörbe	32
3. Alkalmazások	37
3.1. Navier-egyenlet	37
3.1.1. A megoldás időben állandó része	37
3.1.2. A megoldás nemstacionárius része	43
4. Összefoglalás, kitekintés	47
A Matematikai kiegészítés	48

Ábrák jegyzéke	51
Irodalomjegyzék	52

Bevezetés

Diplomamunkám tárgyául egy differenciálegyenletek megoldására széles körben alkalmazott numerikus módszert, a véges elemek módszerét választottam. De miért is van szükségünk numerikus módszerekre? Milyen megoldási módszereink vannak parciális differenciálegyenletekre? Miért alkalmazunk numerikus eljárásokat olyan egyenletekre is, amelyeknek ismerjük az analitikus megoldását? Miben különbözik a véges elemes módszer a többi numerikus eljárástól? Milyen típusú feladatokra célszerű a véges elemek módszerét alkalmazni? Mely tudományterületeken fordulhatnak elő ilyen megoldandó feladatok? Ezen kérdések némelyikére próbáltunk választ adni.

Számos területről származó modellprobléma numerikus megoldására alkalmazunk véges elemes módszert. Ilyen például a szilárd és folyadékmechanika, elektromágnesesség, populációdinamika, gazdasági modellek, mérnöki számítások. Tipikus modellproblémák, amelyeken a végeselem-módszert vizsgáljuk: a hővezetés egyenlete Dirichlet-típusú, Neumann-, és Robin-peremfeltételekkel, a Poisson-egyenlet, a hullámegyenlet egy és több dimenzióban.

A véges elemek módszerének több fajtája létezik, például a nemfolytonos Galjorkin-módszer [5, 7], a standard Galjorkin [1, 5, 6, 7], a klasszikus diffúzió, az áramvonal-diffúzió módszer, peremelem-módszerek [5], kevert végeselem-módszerek, a multigríd módszer [1]. Két különböző megközelítés fűződik Walther Ritz, és Borisz Galjorkin nevéhez, mi a dolgozatban az utóbbi szemléletet követjük. Azon belül is az ún. folytonos Galjorkin-módszert.

A különböző végeselem-módszerek alkalmassága függ az adott problémától. Például a megoldás „gyors” változásának kezelésére alkalmazhatóak ún. adaptív végeselem-módszerek, például "shock" megoldások kezelésére. Az elemtartomány, a véges dimenziós függvényter, a szabadsági fokok megválasztása mind a végeselem-analízis része. Itt megemlíthetjük a Lagrange-, Argyris-, Hermite-, vagy akár a nemkonform, izoparametrikus, nemfolytonos [1] véges elemeket. Az elemtartománynak akkor van jelentősége, ha magasabb dimenzióban vagyunk. Két dimenzióban szokásos elemtartományok a három-

szög és a négyzet, három dimenzióban a tetraéder és a kocka.

Mit tudunk mondani a közelítő megoldás létezéséről, egyértelműségéről, stabilitásáról? Milyen közel van az egzakt megoldáshoz, és hogyan lehet őket szemléletesen összehasonlítani? A véges elemes megoldás egzisztenciáját és unicitását a Lax–Milgram-tétel biztosítja, a hibabecslés pedig a Céa-lemma alapján történik.

A diplomamunkámban a véges elemek módszerét differenciálegyenletek numerikus megoldására alkalmazzuk.

A dolgozat felépítése a következő. Először absztrakt formában áttekintjük a numerikus módszer főbb lépéseit.

A második fejezetben a végeelem-módszer másodrendű parciális differenciálegyenletekre történő alkalmazását mutatjuk be. Egy elliptikus modellproblémára felírjuk a variációs egyenletet általános peremfeltételek mellett. Áttekintjük a módszer matematikai hátterét, azon belül bemutatjuk a Lax–Milgram-tétel és a Céa-lemma bizonyítását. Vázoljuk a végeelem-tér szokásos konstrukcióit, majd a VEM használatát egy, illetve két dimenzióban. A másodrendű parciális differenciálegyenletek mindhárom típusára tekintünk egy-egy példát, nevezetesen a Poisson-egyenletet, a hővezetés egyenletét, valamint a hullámegyenletet.

A harmadik fejezetben a Navier-egyenletet vizsgáljuk a végeelem-módszer segítségével.

Az egyes feladatok esetében az általunk kidolgozott VEM implementálására, a számítások elvégzéséhez, valamint az eredmények szemléltetésére a MATLAB programnyelvét használtuk.

A dolgozat zárásaként áttekintjük az elért eredményeket az ide vonatkozó szakirodalom tükrében, valamint – továbblépésként – vázoljuk az alkalmazott közelítő eljárások javításának lehetőségét.

Első fejezet

VEM – absztrakt megfogalmazás

1.1. A VEM lépései

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ egy korlátos, nyílt tartomány, $\partial\Omega$ az Ω határa (pereme). Tekintsünk egy, az Ω tartományon definiált peremérték-problémát, amelynek keressük a véges elemes megoldását. Legyen V Hilbert-tér. Jelöljük a V tér duálisát, avagy a V -n folytonos lineáris funkcionálok terét V' -vel.

Azt mondjuk, hogy $a(\cdot, \cdot)$ V -elliptikus (V -ben pozitív definit vagy koercitív), ha

$$\exists \alpha > 0 : \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

A véges elemes módszert az alábbi lépésekből konstruáljuk:

1. A peremérték-problémára felírjuk a variációs egyenletet (gyenge alak). Ez a következőkből tevődik össze:

A differenciálegyenletet megszorozzuk egy $v \in V$ ún. *tesztfüggvénnyel*, majd integráljuk az Ω tartományon. Parciálisan integrálunk, majd beírjuk az egyenletbe a peremfeltételeket. Az így kapott egyenlet a következő alakú:

$$a(u, v) = l(v),$$

ahol $u \in V$ az ún. *próbafüggvény*.

Az $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ V -elliptikus, korlátos bilineáris forma, $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionál. A variációs egyenlet: olyan $u \in V$ elemet keresünk, amelyre teljesül, hogy

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V.$$

Ha a fenti $a(\cdot, \cdot)$ -ra és $l(\cdot)$ -re adott korlátossági és koercivitási feltételek teljesülnek, akkor a Lax – Milgram-tétel szerint a variációs egyenletnek létezik pontosan egy ilyen u megoldása, és az stabil.

2. Elemekre bontjuk a megoldási tartományt (dimenzióinak megfelelően).
3. Kiválasztjuk a megfelelő $V_h \subset V$ végelem-teret, amellyel a végtelen dimenziós V teret közelítjük (a bázisfüggvények legyenek kis tartójúak, elemei legyenek szakaszonként sima függvények). A Lax – Milgram-tétel itt is érvényes, így a véges dimenziós probléma ekkor a következőre redukálódik: keressünk olyan $u_h \in V_h$ -t, hogy

$$a(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in V_h,$$

ahol a és l ugyanazok az operátorok, mint végtelen dimenzióban. Becslést adunk a hibára a Céa-lemma segítségével.

4. Felírjuk a véges dimenziójú tér variációs feladatával ekvivalens lineáris egyenletrendszert. Meghatározzuk az elemi merevségi mátrixot.
5. Az egyenletrendszert átírjuk mátrixegyenlet-alakba. Összeállítjuk a *merevségi mátrixot* és a *terhelési vektort*.
6. Megoldjuk az eredendő egyenletrendszert.
7. Szemléltetjük a megoldást.
8. Ha az analitikus megoldás rendelkezésre áll, akkor összehasonlítjuk a numerikus megoldással.

1.2. A diszkretizáció lépései

Megadjuk a végelem-tér általános konstrukcióját, majd bemutatjuk egy illetve több dimenzióban.

1.2.1. A végelem-tér felépítése

Az $a(u, v) = l(v)$, $\forall v \in V$ variációs probléma megoldásának közelítéséhez meg kell konstruálnunk a V függvényternek egy véges dimenziós alterét. Ehhez először tisztáznunk kell, mit is értünk „véges elem” alatt. Legyen

- (i) $K \subseteq \mathbb{R}^d$ nemüres belsejű, korlátos, zárt halmaz szakaszonként sima peremmel (K az *elemtartomány*),
- (ii) $\mathcal{P}$ véges dimenziós függvénytér K -n (az *alakfüggvények tere*), és
- (iii) $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ bázisa $\mathcal{P}'$ -nek (a *csomóponti változók* vagy *szabadsági fokok* halmaza).

Ekkor a $(K, \mathcal{P}, \mathcal{L})$ hármast *véges elemnek* nevezzük.¹

Legyen $(K, \mathcal{P}, \mathcal{L})$ véges elem. Ekkor $\mathcal{P}$ -nek azt a $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ bázisát, amely duális $\mathcal{L}$ -hez (azaz $L_i(\phi_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$), $\mathcal{P}$ *csomóponti bázisának* nevezzük. Ha v olyan függvény, amelyre minden $L_i \in \mathcal{L}$, $i = 1, 2, \dots, n$ értelmezve van, akkor a *lokális interpolációs függvény*:

$$\mathcal{I}_K v \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n L_i(v) \phi_i.$$

Az Ω tartomány egy *felosztásának* nevezzük K_i elemtartományok egy olyan összességét, amelyre

- (1) $\text{int}K_i \cap \text{int}K_j = \emptyset$, ha $i \neq j$, és
- (2) $\bigcup K_i = \bar{\Omega}$.

Legyen $\mathcal{T}$ az Ω tartomány egy felosztása. Tegyük fel, hogy az egyes K elemtartományok mindegyikéhez tartozik megfelelő alakfüggvények $\mathcal{P}$ halmaza, illetve csomóponti változók $\mathcal{L}$ halmaza úgy, hogy $(K, \mathcal{P}, \mathcal{L})$ véges elemet alkot. Legyen m a csomóponti változóknál előforduló legmagasabb rendű parciális derivált rendje. Adott $f \in C^m(\bar{\Omega})$ függvény *globális interpolációs polinomja*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}} f|_{K_i} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I}_{K_i} f$$

minden $K_i \in \mathcal{T}$ -re.

A V_h függvénytér megválasztásakor a következő feltétel teljesülésére kell ügyelnünk:

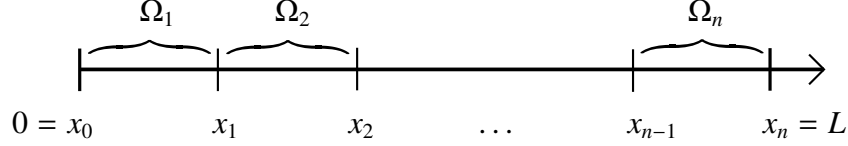
$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(V \cap C^m(\Omega)) \subset V_h \subset V.$$

1.2.2. VEM egy dimenzióban

Ebben a szakaszban bemutatjuk, hogyan működik a végeselem-módszer egy dimenzióban lineáris bázisfüggvények esetén.

¹ Ciarlet definíciója, 1978.

Legyen $L \in \mathbb{R}$, tekintsük az $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$ tartományt. A tartomány lezártját jelöljük $\bar{\Omega}$ -val: $\bar{\Omega} = [0, L]$. Osszuk fel Ω -t n darab diszjunkt intervallumra. Legyenek a rácspontok $0 = x_0, x_1, \dots, x_n = L$, az i -edik elem $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$, lezártja $\bar{\Omega}_i = [x_{i-1}, x_i]$.



1.1. ábra. Az Ω intervallum felosztása n részintervallumra

Mi most az interpolációhoz lineáris polinomokat szeretnénk használni, így jelöljük $P^1(\bar{\Omega}_i)$ -vel az $\bar{\Omega}_i$ -n elsőrendű polinomok vektorterét, valamint V_h -val az $\bar{\Omega}$ -on folytonos, szakaszonként lineáris függvények terét:

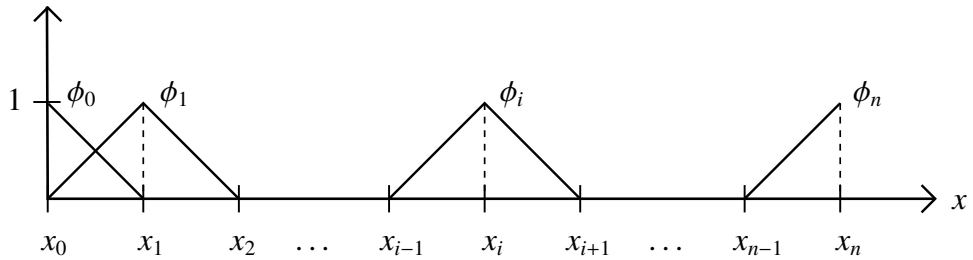
$$P^1(\bar{\Omega}_i) = \left\{ v : v(x) = c_0 + c_1 x, x \in \bar{\Omega}_i, c_0, c_1 \in \mathbb{R} \right\}, i = 1, \dots, n,$$

$$V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}), v|_{\bar{\Omega}_i} \in P^1(\bar{\Omega}_i), i = 1, \dots, n \right\}.$$

A $P^1(\bar{\Omega}_i)$ vektortér egyik bázisa az $\{1, x\}$, mivel tetszőleges $v \in P^1(\bar{\Omega}_i)$ egyértelműen felírható 1 és x lineáris kombinációjaként $c_0 + c_1 x$ alakban. Nyilvánvaló azonban, hogy $v \in P^1(\bar{\Omega}_i)$ -t a rácspontokban felvett értékei is egyértelműen meghatározzák. Utóbbi hasonlóan igaz $v \in V_h$ -ra is. Ebből a megfontolásból vezetjük be V_h alábbi bázisát (ld. 1.2. ábra).

Legyenek a *globális bázisfüggvények*: $\phi_i(x) \in V_h$, $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, N$, ahol δ_{ij} a Kronecker-delta, azaz

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = x_i, \\ 0, & \text{ha } x = x_j, i \neq j. \end{cases}$$



1.2. ábra. A globális bázisfüggvények

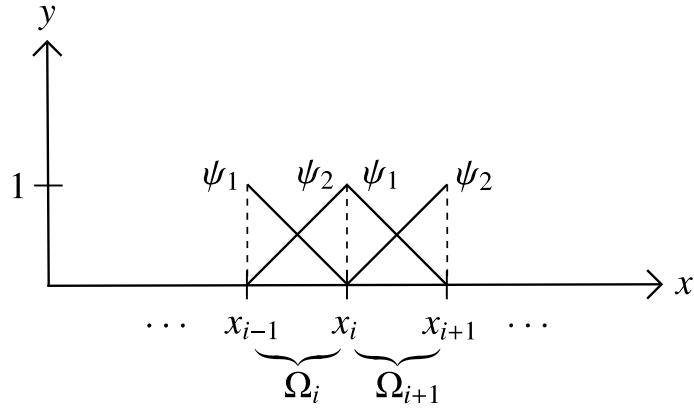
Mint hogy a ϕ_i -k folytonosak és szakaszonként lineárisak, explicit módon a következőképpen fejezhetők ki:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & \text{ha } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & \text{ha } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Definiáljuk az egyes elemekre vonatkozó bázisfüggvényeket. Legyenek az *elemi bázisfüggvények* $\bar{\Omega}_i = [x_{i-1}, x_i]$ -n:

$$\psi_1(x) = \phi_{i-1}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}},$$

$$\psi_2(x) = \phi_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$



1.3. ábra. Az elemi bázisfüggvények

Legyen $\hat{K} = (-1,1)$ a referenciaelem. Vezessük be a lokális ξ változót, és definiáljuk az alábbi leképezéseket minden $\bar{\Omega}_i$ -re:

$$F_{\bar{\Omega}_i} : (-1,1) \rightarrow (x_{i-1}, x_i), \quad \xi \mapsto x = x_{i-1} \frac{1-\xi}{2} + x_i \frac{1+\xi}{2}.$$

Ebből ξ -t kifejezve kapjuk, hogy

$$\xi = F_{\bar{\Omega}_i}^{-1}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{2x - h_i}{h_i}, \quad \xi \in (-1,1),$$

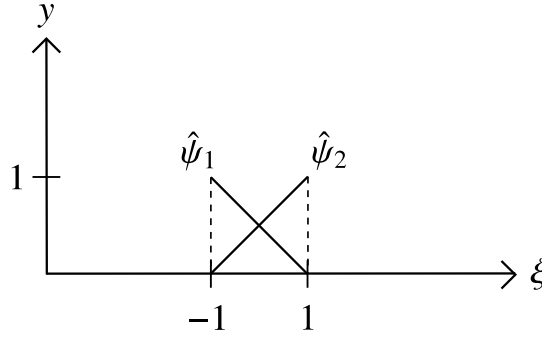
ahol $h_i = x_i - x_{i-1}$. Ez alapján definiálhatjuk a lokális $\hat{\psi}_1(\xi)$, $\hat{\psi}_2(\xi)$ bázisfüggvényeket (ld. 1.4. ábra):

$$\hat{\psi}_1(\xi) = \psi_1(x) = \psi_1(F_{\bar{\Omega}_i}(\xi)) = \frac{1 - \xi}{2}.$$

$$\hat{\psi}_2(\xi) = \psi_2(x) = \psi_2(F_{\bar{\Omega}_i}(\xi)) = \frac{1 + \xi}{2}.$$

A közelítő megoldást felírhatjuk a bázisfüggvények lineáris kombinációjaként:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^n u_j \phi_j(x), \text{ ahol } u_i = u(x_i).$$

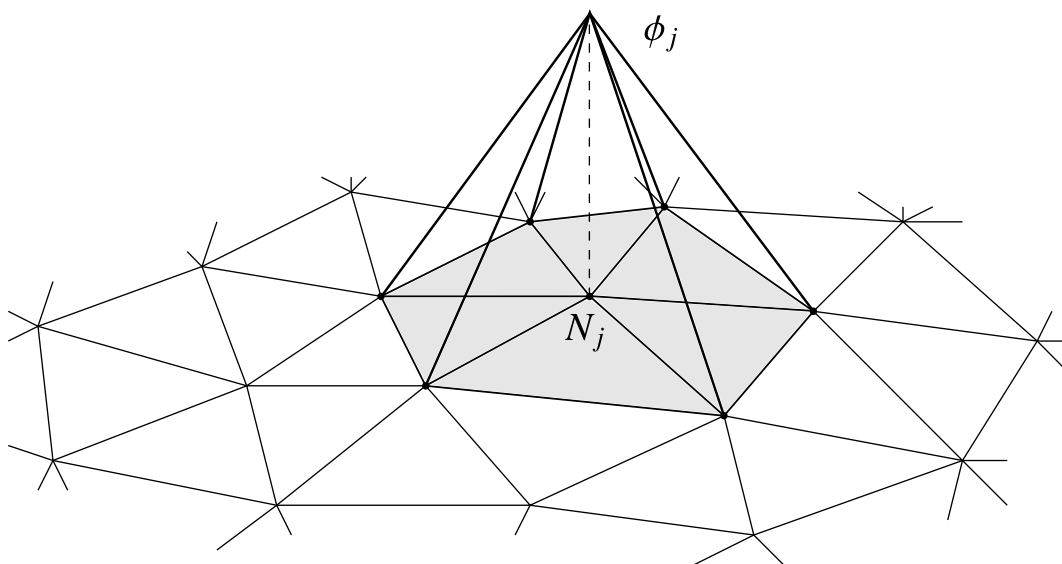


1.4. ábra. A lokális bázisfüggvények

1.2.3. VEM magasabb dimenziókban

Az elemtartomány alakjának megválasztása aszerint történik, hogy milyen problémára szeretnénk alkalmazni a módszert. Ennek megfelelően K lehet háromszög, tetraéder, négyszög, hasáb, téglatest stb. A háromszög, illetve a tetraéder választásának előnye, hogy ívelt peremű tartományokat is elő tudunk velük állítani, ellenben a négyszög, téglatest elemtartományokkal implementáláskor könnyebb dolgunk van. Hasábokat általában akkor használunk, ha a feladat hengeres tartományon adott. A feladattól függően a tartományt különböző alakú elemtartományokra is feloszthatjuk. Mi a továbbiakban – az egyszerűség kedvéért – a háromszög alakkal foglalkozunk (az 1.5. ábrán egy lineáris bázisfüggvény látható).

Egy poligonális Ω tartomány *triangularizációja* Ω egy olyan $\mathcal{T}$ felosztása, ami olyan háromszögekből áll, melyek csúcsai közül egy sem fekszik egy másik háromszög élének belsejében.



1.5. ábra. Egy „kalapfüggvény” két dimenzióban

Második fejezet

Másodrendű parciális differenciálegyenletek

Ebben a fejezetben a másodrendű parciális differenciálegyenletek három fő típusát (elliptikus, parabolikus és hiperbolikus) vizsgáljuk numerikusan a végelelem-módszerrel. Az elliptikus eset vizsgálatán keresztül áttekintjük a módszer matematikai hátterét, és mindhárom esetben megoldunk egy konkrét feladatot a VEM segítségével.

2.1. Elliptikus problémák

A fejezet első részében bizonyítjuk a végelelem-módszer elméletének két legfontosabb lemmáját. Egy elliptikus modellproblémára felírjuk a gyenge alakot, ez után belátjuk a Lax – Milgram- és a Céa-lemmában szereplő feltételek teljesülését. Végül egy konkrét példán, a Poisson-egyenleten mutatjuk be a véges elemes módszer lépéseit.

2.1.1. A megoldás létezése és unicitása

Megmutatjuk, hogy a variációs egyenletnek létezik egyértelmű megoldása, és ez a megoldás stabil. Továbbá becslést adunk a közelítési hiba nagyságára.

2.1.1. Tétel (Lax – Milgram). *Legyen V Hilbert-tér, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, V -elliptikus bilineáris forma, és $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionál. Ekkor létezik pontosan egy $u \in V$ úgy, hogy*

$$a(u, v) = l(v) \tag{2.1.1}$$

minden $v \in V$ esetén. Továbbá u -ra teljesül, hogy $\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{V'}$.

Bizonyítás. Legyen $u \in V$ tetszőleges. Definiáljunk egy A_u funkcionált:

$$A_u : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto a(u, v).$$

Az A_u nyilván lineáris, hiszen

$$\begin{aligned} A_u(\alpha v_1 + \beta v_2) &= a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2) \\ &= \alpha A_u(v_1) + \beta A_u(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Felhasználva $a(\cdot, \cdot)$ folytonosságának definíciójában szereplő C konstanst, arra jutunk, hogy A_u folytonos is, mert minden $v \in V$ -re $|A_u(v)| = |a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$, így $A_u \in V'$.

A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint minden $\phi \in V'$ -hez létezik pontosan egy $\tau\phi \in V$ úgy, hogy ϕ előáll a $\tau\phi$ szerinti belső szorzásként: $\phi(v) = (\tau\phi, v)$ minden $v \in V$ esetén. Olyan egyértelmű $u \in V$ -t keresünk, amelyre $\forall v \in V$ esetén teljesül, hogy

$$A_u(v) = l(v).$$

Ez azzal ekvivalens, hogy találjunk pontosan egy olyan u -t, hogy $A_u = l$ legyen V' -ben; ekkor – Riesz Frigyes tételét használva – teljesülnie kell $\tau A_u = \tau l$ -nek V -ben, minthogy $\tau : V' \rightarrow V$ bijekció.

A bizonyítás befejezéséhez az A.0.1. lemmát fogjuk használni. Legyen $\rho \neq 0$ ismeretlen, $T : V \rightarrow V$ kontrakció úgy, hogy $v \in V$ -re

$$Tv = v - \rho(\tau A_v - \tau l).$$

Ekkor a lemma szerint létezik pontosan egy $u \in V$, amelyre

$$Tu = u - \rho(\tau A_u - \tau l) = u.$$

Ez nyilván akkor teljesül, ha $\tau A_u = \tau l$.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy létezik ilyen ρ . Legyenek $v_1, v_2 \in V$ tetszőlegesek,

jelöljük különbségüket $v = v_1 - v_2$ -vel. Ekkor

$$\begin{aligned}
 \|Tv_1 - Tv_2\|^2 &= \|v_1 - v_2 - \rho(\tau A_{v_1} - \tau A_{v_2})\|^2 \\
 &= \|v - \rho(\tau A_v)\|^2 \\
 &= \|v\|^2 - 2\rho(\tau A_v, v) + \rho^2 \|\tau A_v\|^2 \\
 &= \|v\|^2 - 2\rho(A_v(v)) + \rho^2 A_v(\tau A_v) \\
 &= \|v\|^2 - 2\rho a(v, v) + \rho^2 a(v, \tau A_v) \\
 &\leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha \|v\|^2 + \rho^2 C \|v\| \|\tau A_v\| \\
 &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2) \|v\|^2 \\
 &= (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2) \|v_1 - v_2\|^2 \\
 &= M^2 \|v_1 - v_2\|^2,
 \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk τ és A linearitását, definícióikat, a koercivitását és folytonosságát, A korlátosságát, valamint azt, hogy τ izometrikus leképezés. Azt kaptuk a kontrakcióhoz tartozó konstansra, hogy $M^2 = (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)$, így olyan ρ -t keresünk, amelyre

$$\begin{aligned}
 (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2) &< 1 \\
 \rho(\rho C^2 - 2\alpha) &< 0.
 \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségnek akkor van megoldása, ha $\rho > 0$, mégpedig $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$. Ekkor T valóban kontraktív leképezés, így (2.1.1)-nak létezik megoldása, és ez a megoldás egyértelmű.

Végül legyen $u \in V$ az (2.1.1) megoldása. Ekkor – mivel a koercitív, és l korlátos – fennáll az is, hogy

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = l(u) \leq \|l\| \|u\|_V.$$

□

2.1.2. Lemma (Céa). *Legyen V Hilbert-tér, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, V -elliptikus bilineáris forma, és $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionál. Tegyük fel, hogy $u \in V$ olyan, hogy (2.1.1) teljesül minden $v \in V$ esetén. Ekkor a véges elemes variációs feladat u_h megoldására fennáll az*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C_a}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V \quad (2.1.2)$$

egyenlőtlenség, ahol C_a az $a(\cdot, \cdot)$ -hoz tartozó folytonossági, α pedig a V -ellipticitási konstans.

Bizonyítás. Minthogy $a(u, v) = l(v)$, $\forall v \in V$ és $a(u_h, v) = l(v)$, $\forall v \in V_h$ fennáll, így

$$a(u - u_h, v) = a(u, v) - a(u_h, v) = l(v) - l(v) = 0, \quad \forall v \in V_h. \quad (2.1.3)$$

A koercitivitást, $a(\cdot, \cdot)$ linearitását és folytonosságát, valamint (2.1.3)-et felhasználva minden $v \in V_h$ esetén teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, v - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) \\ &\leq C_a \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V. \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenséget átrendezve

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C_a}{\alpha} \|u - v\|_V \quad \forall v \in V_h.$$

Mivel V_h zárt altér V -ben, így az is igaz, hogy

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \frac{C_a}{\alpha} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V \\ &= \frac{C_a}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V. \end{aligned}$$

□

2.1.2. Variációs probléma megfogalmazása

Legyen Ω korlátos és nyílt halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, elegendően sima $\partial\Omega$ peremmel. Jelöljük $\bar{\Omega}$ -sal az Ω lezártját: $\bar{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \cup \partial\Omega$. Tekintsük az alábbi peremérték-problémát:

$$Lu = f, \quad x \in \Omega, \quad (2.1.4a)$$

$$Bu = \kappa(u - g_D) - g_N, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.1.4b)$$

ahol $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen, $u = u(x)$; az $f \in C(\bar{\Omega})$, $\kappa, g_D, g_N \in L^2(\partial\Omega)$ függvények adottak, $\kappa \geq 0$. Az L másodrendű, a B elsőrendű lineáris parciális differenciáloperátort jelöl:

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = -\nabla \cdot (a^T \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu, \quad (2.1.5)$$

$$Bu \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{i,j=1}^d \nu_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\nu \cdot (a^T \nabla u), \quad (2.1.6)$$

ahol az $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b_i \in C(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \dots, d$, $c \in C(\bar{\Omega})$ függvények adottak, $a = (a_{ij})$, $b = (b_i)$, a $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d)$ a $\partial\Omega$ -ra merőleges, egységnyi hosszú, kifelé mutató normálvektor. Továbbá, L *uniform elliptikus*, ha a *uniform elliptikus*, azaz létezik $\theta > 0$ úgy, hogy

$$\xi \cdot (a\xi) \geq \theta |\xi|^2 \quad (2.1.7)$$

teljesül minden $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, $x \in \bar{\Omega}$ esetén.

A (2.1.4b) peremfeltétel leírja, hogyan kell viselkednie az u függvénynek a tartomány peremén. Az alkalmazásokban rendszerint a peremfeltételek három típusával találkozhatunk.

A *Dirichlet-féle*, más néven *első* vagy *erős/lényeges peremfeltétel* a megoldás peremen felvett értékét írja elő:

$$u|_{\partial\Omega} = g_D,$$

ahol $g_D : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Például egy dimenzióban a hővezetési probléma esetén – fizikai szempontból – azt jelenti, hogy a rúd végpontjait egy előírt g_D hőmérséklet szerint melegítjük/hűtjük.

A *Neumann-, második* vagy *természetes peremfeltétel* a peremre ható külső hatást modellezi:

$$Bu|_{\partial\Omega} = -g_N.$$

A stacionárius hővezetés példájánál maradva, a Neumann-feltétel a fluxus nagyságát írja elő. Speciálisan az $u'(0) = 0$ azt jelenti, hogy a rúd $x_0 = 0$ bal végpontja a környezet hőjétől elszigetelt.

A *Robin- vagy harmadik típusú peremfeltétel* a Dirichlet- és a Neumann-feltétel keveréke:

$$Bu|_{\partial\Omega} = \kappa(u - g_D).$$

Egydimenziós hővezetési feladatban gyakran előfordul az $u'(0) = u(0) - g_D$ feltétel, ami az alkalmazások szempontjából sokszor a legjobban tükrözi a valóságot, ugyanis teljesülése esetén a fluxus egyenesen arányos a rúd és a környezet hőmérséklete közötti különbséggel.

A (2.1.4b) általánosított Robin-feltételt használhatjuk a Dirichlet- és Neumann-típusúak közelítésére. A $\kappa = 0$ választással Neumann-feltételhez jutunk, míg ha $\kappa \rightarrow \infty$, akkor a peremfeltétel Dirichlet-típusú lesz.

A továbbiakban a (2.1.4) probléma gyenge alakját fogjuk felírni. Vezessünk be néhány jelölést. Tekintsük a $W_2^1(\Omega)$ Szoboljev-teret, vagy más jelöléssel

$$H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega),$$

amelyen a belső szorzat

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx,$$

és a norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

meghatározott. A dolgozat további részében legyen $V \stackrel{\text{def}}{=} H^1(\Omega)$. Szorozzuk meg a (2.1.4a) differenciálegyenletet egy tetszőleges $v \in V$ tesztfüggvénnyel, integráljuk Ω -n, és használjuk fel a Green-formulát:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v \, dx &= \int_{\Omega} -\nabla \cdot (a^T \nabla u) v + b \cdot \nabla uv + cuv \, dx \\ &= \int_{\Omega} (a^T \nabla u) \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} v \cdot (a^T \nabla u) v \, ds + \int_{\Omega} b \cdot \nabla uv \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx \\ &= \int_{\Omega} (a^T \nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} (\kappa(u - g_D) - g_N) v \, ds + \int_{\Omega} b \cdot \nabla uv \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

ahol $-v \cdot (a^T \nabla u)$ helyére behelyettesítettük $(\kappa(u - g_D) - g_N)$ -et a (2.1.4b) peremfeltételnek megfelelően. Az egyenlet átrendezésével a (2.1.4) probléma *variációs megfogalmazását*, más néven *gyenge alakját* kapjuk: keressünk olyan $u \in V$ függvényt, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (a^T \nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} b \cdot \nabla uv \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx + \int_{\partial\Omega} \kappa uv \, ds \\ = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} (\kappa g_D + g_N) v \, ds, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} a(u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} (a^T \nabla u, \nabla v) + (b \cdot \nabla u + cu, v) + (\kappa u, v)_{\partial\Omega} \\ &= \int_{\Omega} (a^T \nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} b \cdot \nabla uv \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx + \int_{\partial\Omega} \kappa uv \, ds, \end{aligned} \quad (2.1.10a)$$

$$l(v) \stackrel{\text{def}}{=} (f, v) + (\kappa g_D + g_N, v)_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} (\kappa g_D + g_N) v \, ds. \quad (2.1.10b)$$

Ezek segítségével azonosíthatjuk a tagokat az absztrakt megfogalmazással, így a (2.1.9) gyenge alak: olyan $u \in V$ függvényt keresünk, amire

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V. \quad (2.1.11)$$

A fent bevezetett jelöléseket tekintve megállapíthatjuk, hogy $l \in V'$ lineáris forma és $a(\cdot, \cdot)$ bilineáris forma.

2.1.3. Lemma. *A (2.1.10b)-ben adott $l(\cdot)$ lineáris funkcionál folytonos (ami ekvivalens azzal, hogy korlátos) V -n, azaz*

$$\exists C_l < \infty : \quad |l(v)| \leq C_l \|v\|_V, \quad \forall v \in V. \quad (2.1.12)$$

Bizonyítás. A lemma állítását könnyen beláthatjuk a háromszög- és a Cauchy – Schwartz-egyenlőtlenség, a $\|v\|_{L^2} \leq \|v\|_V$, $v \in V$, valamint az (??) egyenlőtlenség felhasználásával: $\exists c_t \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq |(f, v)_{L^2}| + |(\kappa g_D + g_N, v)_{L^2(\partial\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\kappa g_D + g_N\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_V + c_t \|\kappa g_D + g_N\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_V. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

A $C_l := \|f\|_{L^2} + c_t \|\kappa g_D + g_N\|_{L^2(\partial\Omega)}$ választással ez éppen $l(\cdot)$ folytonosságát igazolja.

□

2.1.4. Lemma. *A (2.1.10a)-ban adott $a(\cdot, \cdot)$ bilineáris forma folytonos (korlátos) V -n, azaz*

$$\exists C_a < \infty : \quad |a(v, w)| \leq C_a \|v\|_V \|w\|_V, \quad \forall v, w \in V. \quad (2.1.14)$$

Bizonyítás. Az $a(\cdot, \cdot)$ folytonosságának bizonyításához szintén a háromszög- és a Cauchy – Schwartz-egyenlőtlenségre, a $\|v\|_{L^2} \leq \|v\|_V$, $v \in V$ -re, valamint az A.0.2. lemmára lesz szükségünk: $\exists c_t \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &\leq \left| (a^T \nabla v, \nabla w)_{L^2} \right| + |(b \cdot \nabla v + cv, w)_{L^2}| + |(\kappa v, w)_{L^2(\partial\Omega)}| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^d \max_{x \in \bar{\Omega}} |a_{ij}| \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_j} \right)_{L^2} \right| + \sum_{i=1}^d \max_{x \in \bar{\Omega}} |b_i| \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}, w \right)_{L^2} \right| \\ &\quad + \max_{x \in \bar{\Omega}} |c| |(v, w)_{L^2}| + \max_{x \in \partial\Omega} \kappa |(v, w)_{L^2(\partial\Omega)}| \\ &\leq c_1 \left(\sum_{i,j=1}^d \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_j} \right)_{L^2} \right| + \sum_{i=1}^d \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}, w \right)_{L^2} \right| + |(v, w)_{L^2}| \right) + \max_{x \in \partial\Omega} \kappa |(v, w)_{L^2(\partial\Omega)}| \\ &\leq c_1 \left(\sum_{i,j=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\|_{L^2} + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \|w\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \right) \\ &\quad + \max_{x \in \partial\Omega} \kappa \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \|w\|_{L^2(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_1 \left(\sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \right) \left(\sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\|_{L^2} + \|w\|_{L^2} \right) + c_2 \|v\|_V \|w\|_V \\
&\leq (d+1)c_1 \left(\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\nabla w\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c_2 \|v\|_V \|w\|_V \\
&= (d+1)c_1 \|v\|_V \|w\|_V + c_2 \|v\|_V \|w\|_V,
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

ahol

$$c_1 = \max \left\{ \max_{1 \leq i, j \leq d} \max_{x \in \bar{\Omega}} |a_{ij}|, \max_{1 \leq i \leq d} \max_{x \in \bar{\Omega}} |b_i|, \max_{x \in \bar{\Omega}} |c| \right\}.$$

Ha $C_a = (d+1)c_1 + c_2$, akkor ezzel pontosan a (2.1.14) állítást kaptuk.

□

2.1.5. Lemma. Tekintsük az alábbi peremérték-problémát Dirichlet-peremfeltétellel:

$$Lu = f, \quad x \in \Omega, \tag{2.1.16a}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2.1.16b}$$

ahol $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen, $u = u(x)$; az $f \in C(\bar{\Omega})$ függvény adott, Lu (2.1.5)-ban meghatározott. Tegyük fel továbbá, hogy a (2.1.5)-ban szereplő együtthatókra: $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b_i \in C^1(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \dots, d$, $c \in C(\bar{\Omega})$, valamint

$$c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{2.1.17}$$

és legyen L uniform elliptikus. Ekkor az $a(\cdot, \cdot)$ bilineáris forma

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= (a^T \nabla u, \nabla v) + (b \cdot \nabla u + cu, v) \\
&= \int_{\Omega} (a^T \nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} b \cdot \nabla u v \, dx + \int_{\Omega} cu v \, dx
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

V -elliptikus (V -ben pozitív definit vagy koercitív), azaz

$$\exists \alpha > 0 : \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Bizonyítás. Az állítás igazolásához felhasználjuk a (2.1.7) uniform ellipticitást, valamint azt, hogy a Dirichlet-peremfeltétel miatt a v tesztfüggvényre:

$$v \in V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V : v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Parciálisan integrálunk, és így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 a(v, v) &= (a^T \nabla v, \nabla v)_{L^2} + (b \cdot \nabla v + cv, v)_{L^2} \\
 &= \int_{\Omega} (a^T \nabla v) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} b \cdot \nabla v v \, dx + \int_{\Omega} cv^2 \, dx \\
 &\geq \theta \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{2} b \cdot \nabla v^2 \, dx + \int_{\Omega} cv^2 \, dx \\
 &= \theta \|\nabla v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} v^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} (b \cdot \nu) v^2 \, ds + \int_{\Omega} cv^2 \, dx \\
 &= \theta \|\nabla v\|^2 + \int_{\Omega} \left(c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right) v^2 \, dx.
 \end{aligned}$$

A (2.1.17) feltevés miatt ekkor

$$a(v, v) \geq \theta \|\nabla v\|^2. \quad (2.1.19)$$

Továbbá az A.0.4. Poincaré-egyenlőtlenség miatt

$$c_P a(v, v) \geq \theta \|v\|^2. \quad (2.1.20)$$

Ekkor (2.1.19) és (2.1.20) felhasználásával

$$a(v, v) \geq \alpha (\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2), \quad (2.1.21)$$

ahol $\alpha = \frac{\theta}{1+c_P}$. Ezzel a lemma állítását beláttuk.

□

2.1.6. Lemma. *Tegyük fel, hogy (2.1.4a)-ben L uniform elliptikus. Ekkor érvényes a*

$$\int_{\Omega} (a^T \nabla v) \cdot \nabla v \, dx \geq \theta |v|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (2.1.22)$$

egyenlőtlenség, ahol θ az uniform ellipticitási konstans.

Bizonyítás. Az állítás igazolásához tekintsük az uniform ellipticitás feltételét:

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta \sum_{i=1}^d \xi_i^2.$$

Legyen $v \in H^1(\Omega)$ tetszőleges, $\xi_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$, $\xi_j = \frac{\partial v}{\partial x_j}$, és integráljunk Ω -n:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx &\geq \theta \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx, \\ \int_{\Omega} (a^T \nabla v) \cdot \nabla v dx &\geq \theta |v|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

ami éppen a lemma állítása.

□

2.1.7. Tétel (Gårding-egyenlőtlenség). *Tegyük fel, hogy az a mátrix uniform elliptikus a $\theta > 0$ konstanssal, $b_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, d$, $c \in L^\infty(\Omega)$, és $\kappa \in L^2(\partial\Omega)$, $\kappa \geq 0$. Legyen $a(u, v)$ a (2.1.10a)-ban meghatározott. Ekkor létezik $K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy*

$$a(v, v) + K \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{\theta}{2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Bizonyítás. Az uniform ellipticitás miatt alkalmazhatjuk a 2.1.6. lemmát:

$$\begin{aligned} a(v, v) + K \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (a^T \nabla v, \nabla v) + (b \cdot \nabla v + cv, v) + (\kappa v, v)_{\partial\Omega} + K \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \int_{\Omega} (a^T \nabla v) \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b \cdot \nabla v v dx + \int_{\Omega} cv^2 dx + \int_{\partial\Omega} \kappa v^2 ds + K \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \theta |v|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} cv^2 dx + K \|v\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Az A.0.3. Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} v dx \right| &\leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d |b_i| \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| |v| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^d \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| |v| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^d \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq B |v|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

ahol

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^d \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}^2.$$

A fentiekből következik, hogy

$$\begin{aligned} & a(v, v) + K \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \geq \theta |v|_{H^1(\Omega)}^2 - B |v|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} cv^2 \, dx + K \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \geq \theta |v|_{H^1(\Omega)}^2 - B |v|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + (\beta + K) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

ahol $\beta = \text{ess inf } \{c(x) : x \in \Omega\}$. Az A.0.5. lemma (számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség) miatt

$$B |v|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq B \frac{\theta}{2B} |v|_{H^1(\Omega)}^2 + B \frac{B}{2\theta} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$a(v, v) + K \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{\theta}{2} (|v|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2),$$

feltéve, hogy $K \geq \frac{\theta}{2} + \frac{B^2}{2\theta} - \beta$. A tételben szereplő egyenlőtlenséget igazoltuk.

□

Ha kijelöltük a megfelelő véges dimenziós alteret, akkor (2.1.9) alapján olyan $u_h \in V_h$ függvényt keresünk, hogy

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (a^T \nabla u_h) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} b \cdot \nabla u_h v \, dx + \int_{\Omega} c u_h v \, dx + \int_{\partial\Omega} \kappa u_h v \, ds \\ & = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} (\kappa g_D + g_N) v \, ds, \quad \forall v \in V_h. \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

2.1.3. Példa: A Poisson-egyenlet

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány $\partial\Omega$ peremmel és ν kifelé mutató egységvektorral.

Emlékeztető: A divergenciatétel szerint

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_i \, ds, \quad i = 1, 2,$$

ahol v_i az v normálvektor i -edik komponense. Az $f = hg$ választással a parciális integrálás formulájához jutunk:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x_i} g \, dx = - \int_{\Omega} h \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} h g v_i \, ds, \quad i = 1, 2.$$

Legyen $h = w_i$ és $g = v$, ekkor $w = (w_1, w_2)$ -re

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot w) v \, dx = - \int_{\Omega} w \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} (w \cdot v) v \, ds,$$

ahol $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$, ∇v pedig a v gradiensvektora.

A $w = -\nabla u$ választással kapjuk a Green-formulát:

$$\int_{\Omega} -\Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} v \cdot \nabla u v \, ds, \quad (2.1.24)$$

itt $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ a Laplace-operátor.

Tekintsük a Poisson-egyenletet Dirichlet-peremfeltétellel:

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega, \quad (2.1.25a)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.1.25b)$$

ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a nyílt egységgörle és $f \in L^2(\Omega)$ adott függvény. Az u jelölhet például hőmérsékletet vagy elektrosztatikus potenciált, előbbi esetben a Poisson-egyenlet a stacionárius hővezetést, míg utóbbiban a stacionárius töltéseloszlást (potenciálegyenlet) írja le [12].

Legyen V a korábbiakban meghatározott, $V_0 = \{v \in V : v|_{\partial\Omega} = 0\}$ függvényter. Szorozzuk be (2.1.25a)-t egy $v \in V_0$ tesztfüggvénnyel, és integráljuk Ω -n. Felhasználva a Green-formulát, azt kapjuk, hogy

$$\int_{\Omega} f v \, dx = - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \quad (2.1.26)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} v \cdot \nabla u v \, ds = \quad (2.1.27)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \quad (2.1.28)$$

Keresünk olyan $u \in V_0$ -t, hogy

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in V_0. \quad (2.1.29)$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\partial\Omega$ poligonális görbe. A véges elemes diszkretizációhoz bontsuk fel Ω -t m darab háromszög uniójára úgy, hogy Ω egy triangularizációját kapjuk.

Jelöljük V_h -val a Ω -n folytonos és K_i -n lineáris polinomok terét, $i = 1, 2, \dots, m$. A Dirichlet-peremfeltétel miatt legyen $V_{h,0} = \{v \in V_h : v|_{\partial\Omega} = 0\}$. Olyan $u_h \in V_{h,0}$ -t keresünk, amelyre

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in V_{h,0}. \quad (2.1.30)$$

Fölírjuk $V_{h,0}$ egy bázisát. A bázis- vagy kalapfüggvények (1.5.ábra) legyenek K_i -n lineárisak, $i = 1, 2, \dots, m$, továbbá

$$\phi_i(N_j) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, n_b,$$

ahol N_j a trianguláció j -edik csomópontja, n_b pedig a belső csomópontok száma.

Ebben a bázisban az u_h felírása legyen $u_h = \sum_{j=1}^{n_b} \xi_j \phi_j$. Minthogy a bázisfüggvények kifeszítik a $V_{h,0}$ alteret, (2.1.30) az alábbi problémával ekvivalens:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \phi_i \, dx &= \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \phi_i \, dx = \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{j=1}^{n_b} \xi_j \phi_j \right) \cdot \nabla \phi_i \, dx = \\ &= \sum_{j=1}^{n_b} \xi_j \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_b. \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_b, \quad (2.1.32)$$

$$b_i = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_b. \quad (2.1.33)$$

Ezeket behelyettesítve (2.1.31)-be, adódik, hogy

$$b_i = \sum_{j=1}^{n_b} \xi_j A_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n_b,$$

ami mátrix alakban $b = A\xi$.

Az $A (n_b) \times (n_b)$ -s mátrix neve *merevségi mátrix*, a b vektoré pedig *terhelési vektor*. Az A^K lokális elemi merevségi mátrix elemei:

$$A_{ij}^K = \int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.1.34)$$

Tekintsük a K háromszöget, amelynek csomópontjai $N_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, $i = 1, 2, 3$. Az egyes csúcsokhoz tartozó bázisfüggvények $\phi_i = a_i + b_i x_1 + c_i x_2$ alakúak, ahol az együtthatók meghatározhatók $\phi_i(N_j)$ definíciójából:

$$a_i = \frac{x_1^{(j)} x_2^{(k)} - x_1^{(k)} x_2^{(j)}}{2|K|}, \quad b_i = \frac{x_2^{(j)} - x_2^{(k)}}{2|K|}, \quad c_i = \frac{x_1^{(k)} - x_1^{(j)}}{2|K|},$$

ahol $|K|$ a háromszög területe.

Minthogy $\nabla \phi_i = \begin{pmatrix} b_i \\ c_i \end{pmatrix}$, így

$$\begin{aligned} A_{ij}^K &= \int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx = \\ &= (b_i b_j + c_i c_j) \int_K 1 \, dx = \\ &= (b_i b_j + c_i c_j) |K|, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

ahol $|K|$ a K elem területe.

A lokális elemi tehervektor elemei:

$$b_i^K = \int_K f \phi_i \, dx \approx \frac{1}{3} f(N_i) |K|, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1.36)$$

Ez esetben a csomópont-kvadraturát alkalmaztuk az integrálok közelítésére.

Tehát a (2.1.25) peremérték-problémához tartozó eredendő lineáris egyenletrendszer $A\xi = b$, amelynek ξ megoldása lesz a Poisson-egyenlet egy véges elemes közelítő megoldása.

Feladat: Oldjuk meg a következő peremérték-problémát:

$$-\Delta u = xy^2, \quad x \in \Omega, \quad (2.1.37a)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.1.37b)$$

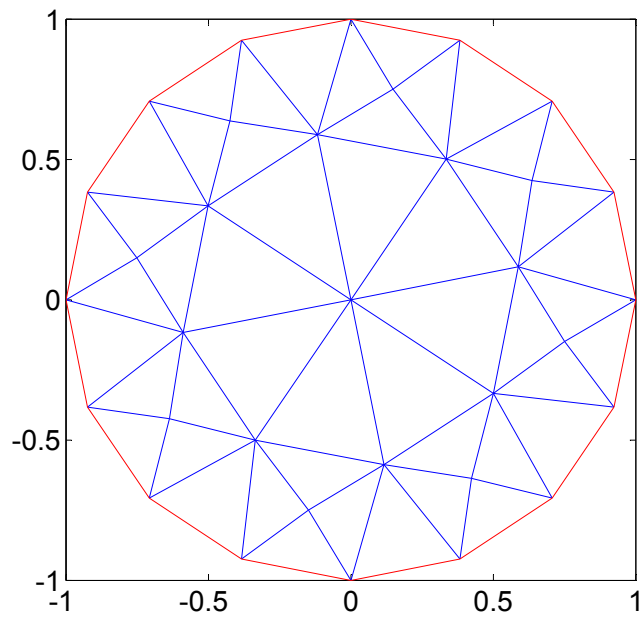
ahol Ω a 0 körüli egységnyi sugarú körlap (ld. 2.1., 2.2. ábrák).

Feladat: Oldjuk meg a következő peremérték-problémát:

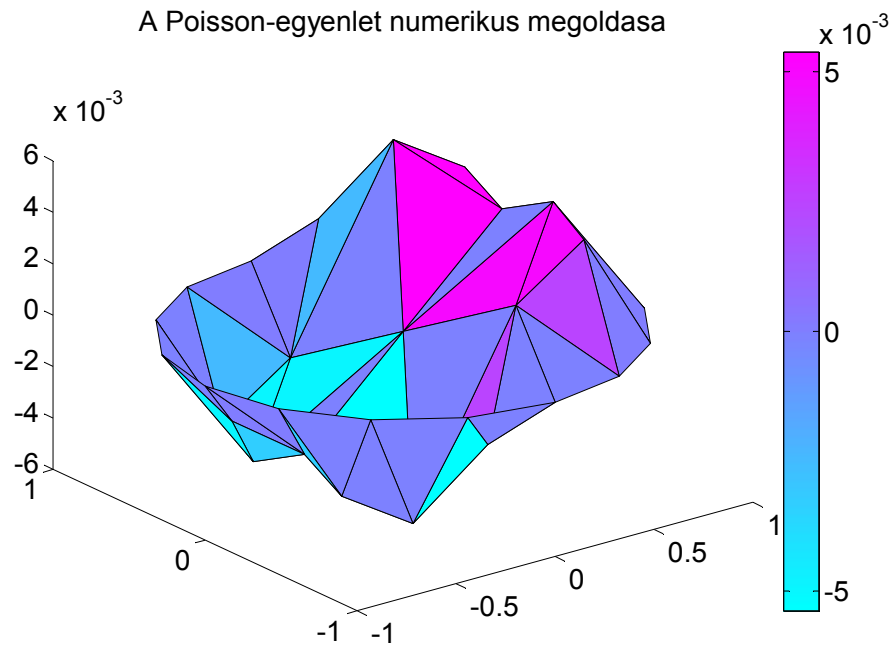
$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.1.38a)$$

$$u = \phi, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.1.38b)$$

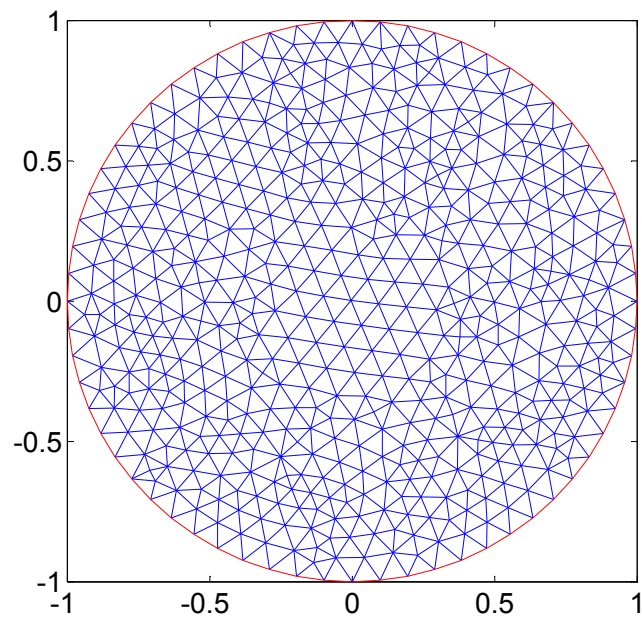
ahol Ω a 0 körüli egységnyi sugarú körlap, $x_1 = \cos \phi$, $x_2 = \sin \phi$, $-\pi \leq \phi \leq \pi$ (ld. 2.3. ábra).



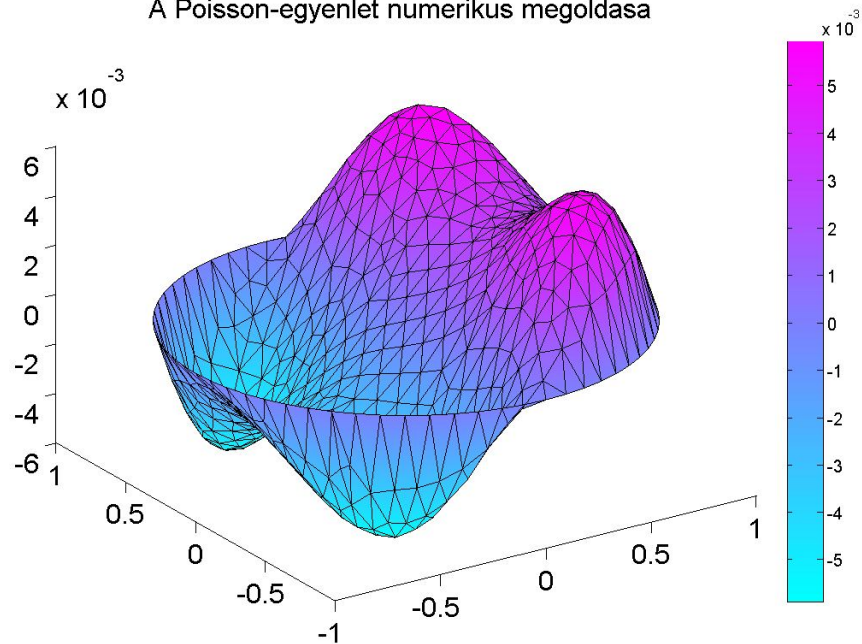
A Poisson-egyenlet numerikus megoldása



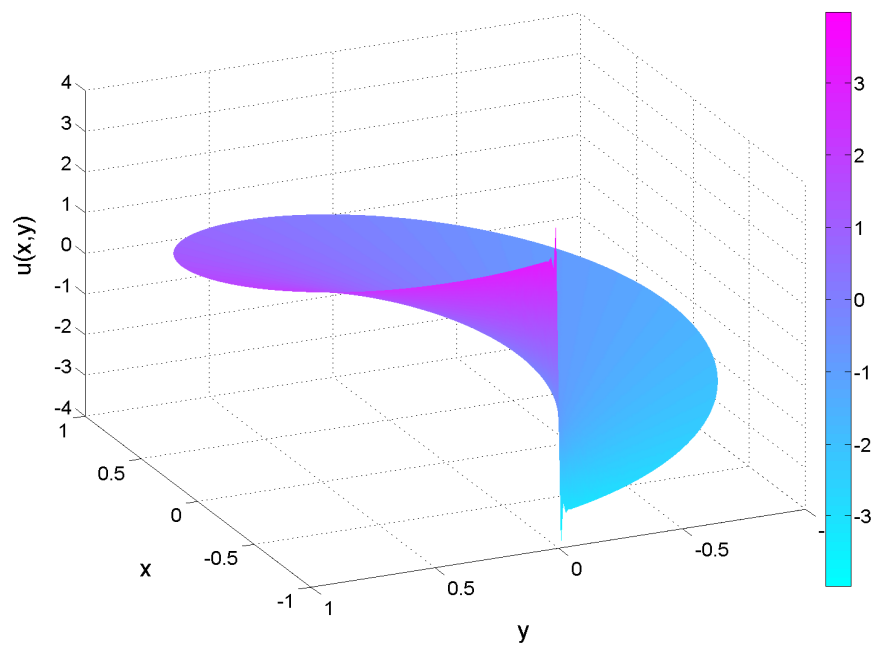
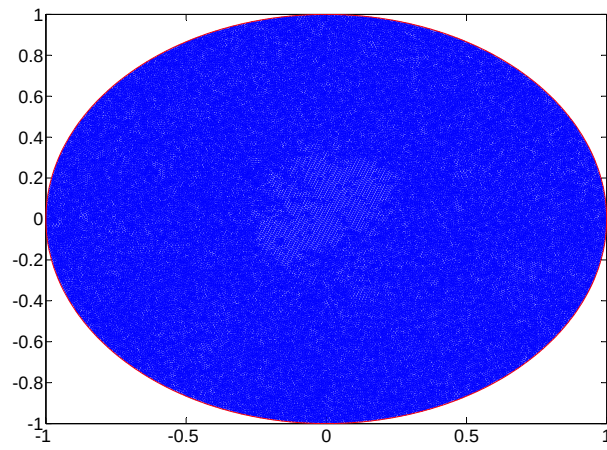
2.1. ábra. Az egységnyi sugarú körlap egy triangulációja és a Poisson-egyenlet véges elemes megoldása



A Poisson-egyenlet numerikus megoldása



2.2. ábra. Az egységnyi sugarú körlap egy triangulációja és a Poisson-egyenlet véges elemes megoldása



2.3. ábra. Az egységnyi sugarú körlap egy triangulációja és a Laplace-egyenlet véges elemes megoldása

2.2. Parabolikus problémák

Ebben a részben egy parabolikus másodrendű differenciálegyenletnek, mégpedig a hővezetés egyenletének véges elemes numerikus megoldását vezetjük le.

2.2.1. Példa: A hővezetés egyenlete

Tekintsük az alábbi problémát:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \quad (2.2.1a)$$

$$au'(0, t) = \kappa_0 (u(0, t) - g_{D,0}) + g_{N,0}, \quad (2.2.1b)$$

$$-au'(L, t) = \kappa_L (u(L, t) - g_{D,L}) - g_{N,L}, \quad (2.2.1c)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2.2.1d)$$

ahol $u = u(x, t)$ a megoldás, $a = a(x) \geq a_0 > 0$ adott pozitív függvény, $f = f(x, t)$ adott forrásfüggvény és $u_0(x)$ adott kezdeti feltétel. Először adjuk meg a variációs egyenletet. Szorozzuk meg (2.2.1a)-t egy $v \in V$ tesztfüggvénnyel, ahol V a szokásos függvénytér, majd integráljuk $(0, L)$ -en:

$$\begin{aligned} \int_0^L f v \, dx &= \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) v \, dx \\ &= \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx - a \frac{\partial}{\partial x} u(L, t) v(L, t) + a \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) v(0, t) + \int_0^L a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \\ &= \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx + (\kappa_L (u(L, t) - g_{D,L}) - g_{N,L}) v(L, t) + (\kappa_0 (u(0, t) - g_{D,0}) + g_{N,0}) v(0, t) \\ &\quad + \int_0^L a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

A (2.2.2) egyenlet átrendezésével kapjuk a variációs formulát: olyan $u \in V$ -t keresünk, amelyre

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx + \kappa_L u(L, t) v(L, t) + \kappa_0 u(0, t) v(0, t) + \int_0^L a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \\ &= \int_0^L f v \, dx + g_{N,L} v(L, t) - g_{N,0} v(0, t) + \kappa_L g_{D,L} v(L, t) + \kappa_0 g_{D,0} v(0, t), \quad \forall v \in V, \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Mivel u x -től és t -től is függ, elsőként x szerint diszkrétizálunk. Osszuk fel az $\Omega = [0, L]$ intervallumot: $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = L$, és legyen $V_h \subset V$ szakaszonként lineáris függvények tere. Keresünk u_h -t úgy, hogy minden rögzített t esetén, $u_h \in V_h$ és

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{\partial u_h}{\partial t} v \, dx + \kappa_L u_h(L, t) v(L, t) + \kappa_0 u_h(0, t) v(0, t) + \int_0^L a \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \\ &= \int_0^L f v \, dx + g_{N,L} v(L, t) - g_{N,0} v(0, t) + \kappa_L g_{D,L} v(L, t) + \kappa_0 g_{D,0} v(0, t), \quad \forall v \in V_h, \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Ez azonban ekvivalens a következővel: olyan $u \in V_h$ -t keresünk, amelyre minden rögzített t esetén teljesül, hogy

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{\partial u_h}{\partial t} \phi_i \, dx + \kappa_L u_h(L, t) \phi_i(L) + \kappa_0 u_h(0, t) \phi_i(0) + \int_0^L a \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \, dx \\ &= \int_0^L f \phi_i \, dx + g_{N,L} \phi_i(L) - g_{N,0} \phi_i(0) + \kappa_L g_{D,L} \phi_i(L) + \kappa_0 g_{D,0} \phi_i(0), \\ & \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

ahol ϕ_i , $i = 0, 1, \dots, n$ a szokásos bázisfüggvényei V_h -nak. Az u_h előállításához bevezetjük a $\xi(t)$ vektort:

$$u_h(x, t) = \sum_{j=0}^n \xi_j(t) \phi_j(x),$$

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_0(t) \\ \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_h(x_0, t) \\ u_h(x_1, t) \\ \vdots \\ u_h(x_n, t) \end{pmatrix},$$

majd be is helyettesítünk:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^n \frac{\partial \xi_j}{\partial t} \int_0^L \phi_j \phi_i \, dx + \kappa_L \xi_n(t) \phi_j(L) \phi_i(L) + \kappa_0 \xi_0(t) \phi_j(0) \phi_i(0) + \sum_{j=0}^n \xi_j \int_0^L a \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \, dx \\
 &= \int_0^L f \phi_i \, dx + g_{N,L} \phi_i(L) - g_{N,0} \phi_i(0) + \kappa_L g_{D,L} \phi_i(L) + \kappa_0 g_{D,0} \phi_i(0), \\
 & \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < t < T.
 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

A tömegmátrix, merevségi mátrix, terhelési vektor rendre az alábbiak:

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= \int_0^L \phi_j \phi_i \, dx, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n, \\
 A_{ij} &= \int_0^L a \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \, dx + \kappa_L \phi_j(L) \phi_i(L) + \kappa_0 \phi_j(0) \phi_i(0), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n, \\
 b_i(t) &= \int_0^L f(t) \phi_i \, dx + g_{N,L} \phi_i(L) - g_{N,0} \phi_i(0) + \kappa_L g_{D,L} \phi_i(L) + \kappa_0 g_{D,0} \phi_i(0), \\
 & \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < t < T.
 \end{aligned}$$

A (2.2.6) egyenlet a most bevezetett jelölésekkel, illetve mátrix alakban:

$$\sum_{j=0}^n M_{ij} \frac{\partial \xi_j(t)}{\partial t} + \sum_{j=0}^n A_{ij} \xi_j(t) = b_i(t), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < t < T, \tag{2.2.7}$$

$$M \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} + A \xi(t) = b(t), \quad 0 < t < T. \tag{2.2.8}$$

Ezzel megkaptuk a variációs formula szemidiszkrét alakját, ami egy közönséges differenciálegyenlet-rendszer. A továbbiakban t szerint diszkretizálunk. Osszuk fel $[0, T]$ -t m darab részintervallumra: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$, jelöljük az egyes időközöket $k_l = t_l - t_{l-1}$, $l = 1, 2, \dots, m$, valamint legyen ξ_l a $\xi(t_l)$ közelítése. A fenti (2.2.8) egyenletrendszer $\xi(t)$ megoldásának közelítésére a hátralépő Euler-módszert fogjuk alkalmazni [5]. A $\frac{\partial \xi(t_l)}{\partial t}$ -t helyettesítjük a $\frac{\xi(t_l) - \xi(t_{l-1})}{k_l}$ differenciahányadossal, a diszkretizálás hibája $O(k_l)$.

Tekintsük tehát az alábbi problémát:

$$M \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} + A \xi(t) = b(t), \quad 0 < t < T, \tag{2.2.9a}$$

$$\xi(0) = \xi_0. \tag{2.2.9b}$$

Integráljuk az (2.2.9a) egyenletrendszert (t_{l-1}, t_l) -en:

$$\begin{aligned} \int_{t_{l-1}}^{t_l} b(t) \, dt &= \int_{t_{l-1}}^{t_l} M \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \, dt + \int_{t_{l-1}}^{t_l} A \xi(t) \, dt \\ &= M (\xi(t_l) - \xi(t_{l-1})) + A \int_{t_{l-1}}^{t_l} \xi(t) \, dt. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

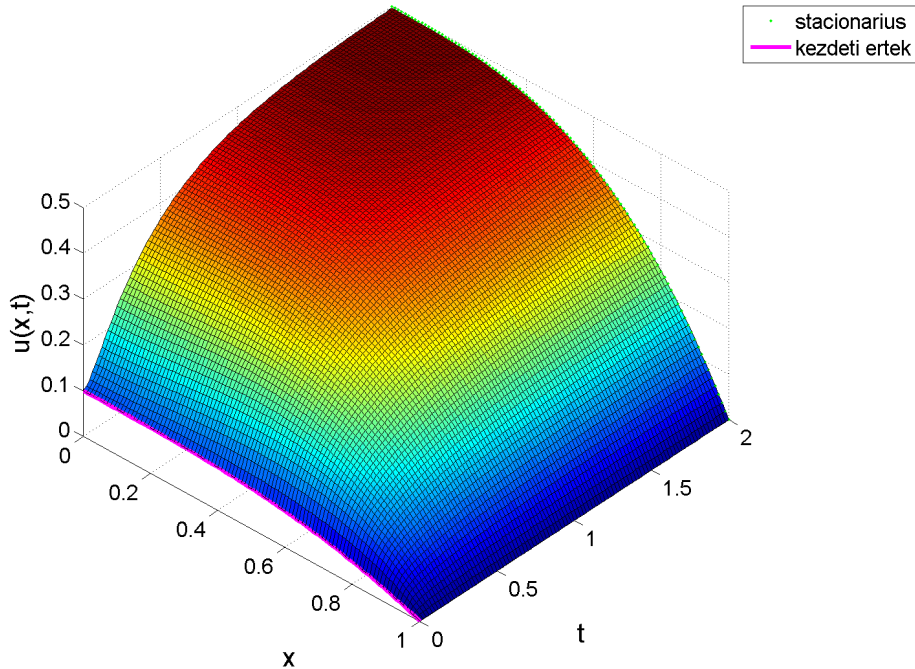
Az integrálok közelítéséhez használjuk a jobbvégpont-kvadraturát (az approximáció hibája $O(k_l)$):

$$k_l b_l = M (\xi_l - \xi_{l-1}) + k_l A \xi_l,$$

amiből

$$(M + k_l A) \xi_l = M \xi_{l-1} + k_l b_l.$$

Mint hogy ξ_0 adott (ez esetben $u_0(x)$ lineáris interpoláltja), nincs más dolgunk, mint megoldani a kapott egyenletrendszert. Az így nyert ξ megoldás a (2.1.25a) differenciálegyenlet numerikus megoldása az (x_j, t_l) , $j = 0, 1, \dots, n$, $l = 0, 1, \dots, m$ pontokban.



2.4. ábra. A hővezetés egyenlete, numerikus megoldás, $\Delta x = 0,01$, $\Delta t = 0,02$.

Feladat: Oldjuk meg a következő problémát (ld. 2.4. ábra):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3x, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,2), \quad (2.2.11a)$$

$$u'(0, t) = 0, \quad (2.2.11b)$$

$$u(1, t) = 0, \quad (2.2.11c)$$

$$u(x, 0) = -0,1x^3 + 0,1. \quad (2.2.11d)$$

2.3. Hiperbolikus problémák

2.3.1. Példa: hullámegyenlet

Tekintsük az alábbi problémát:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \quad (2.3.1a)$$

$$c^2 u_x(0, t) = \kappa_0 (u(0, t) - g_{D,0}) + g_{N,0}, \quad (2.3.1b)$$

$$-c^2 u_x(L, t) = \kappa_L (u(L, t) - g_{D,L}) - g_{N,L}, \quad (2.3.1c)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2.3.1d)$$

$$u_t(x, 0) = v_0(x). \quad (2.3.1e)$$

ahol $u = u(x, t)$ a megoldás, c^2 adott paraméter, $f = f(x, t)$ adott forrásfüggvény és $u_0(x), v_0(x)$ adott kezdeti feltételek.

Szorozzuk meg (2.3.1a)-t egy $v \in V$ tesztfüggvénnyel, ahol V a szokásos függvény-tér, majd integráljuk $(0, L)$ -en:

$$\begin{aligned} \int_0^L f v \, dx &= \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v \, dx - c^2 \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \, dx \\ &= \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v \, dx - c^2 \frac{\partial}{\partial x} u(L, t) v(L, t) + c^2 \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) v(0, t) + c^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \\ &= \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v \, dx + (\kappa_L (u(L, t) - g_{D,L}) - g_{N,L}) v(L, t) \\ &\quad + (\kappa_0 (u(0, t) - g_{D,0}) + g_{N,0}) v(0, t) + c^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Így az egyenlet gyenge alakja:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v \, dx + \kappa_L u(L, t) v(L, t) + \kappa_0 u(0, t) v(0, t) + c^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \\ &= \int_0^L f v \, dx + g_{N,L} v(L, t) - g_{N,0} v(0, t) + \kappa_L g_{D,L} v(L, t) + \kappa_0 g_{D,0} v(0, t), \quad \forall v \in V, \, 0 < t < T. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Hasonlóan a parabolikus esethez, először x szerint diszkrétizálunk. Osszuk fel az $\Omega = [0, L]$ intervallumot: $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = L$, és legyen $V_h \subset V$ szakaszonként lineáris függvények tere. Keresünk u_h -t úgy, hogy minden rögzített t esetén, $u_h \in V_h$ és

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} v \, dx + \kappa_L u_h(L, t) v(L, t) + \kappa_0 u_h(0, t) v(0, t) + c^2 \int_0^L \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \\ &= \int_0^L f v \, dx + g_{N,L} v(L, t) - g_{N,0} v(0, t) + \kappa_L g_{D,L} v(L, t) + \kappa_0 g_{D,0} v(0, t), \quad \forall v \in V_h, \, 0 < t < T. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} \phi_i \, dx + \kappa_L u_h(L, t) \phi_i(L) + \kappa_0 u_h(0, t) \phi_i(0) + c^2 \int_0^L \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \, dx \\ &= \int_0^L f \phi_i \, dx + g_{N,L} \phi_i(L) - g_{N,0} \phi_i(0) + \kappa_L g_{D,L} \phi_i(L) + \kappa_0 g_{D,0} \phi_i(0), \quad i = 0, 1, \dots, n, \, 0 < t < T, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

ahol ϕ_i , $i = 0, 1, \dots, n$ a szokásos bázisfüggvényei V_h -nak.

$$u_h(x, t) = \sum_{j=0}^n \xi_j(t) \phi_j(x)$$

Az egyenlet gyenge alakjába u_h -t behelyettesítjük:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} \int_0^L \phi_j \phi_i \, dx + \kappa_L \xi_n(t) \phi_j(L) \phi_i(L) + \kappa_0 \xi_0(t) \phi_j(0) \phi_i(0) + c^2 \sum_{j=0}^n \xi_j \int_0^L \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \, dx \\ &= \int_0^L f \phi_i \, dx + g_{N,L} \phi_i(L) - g_{N,0} \phi_i(0) + \kappa_L g_{D,L} \phi_i(L) + \kappa_0 g_{D,0} \phi_i(0), \\ & \quad i = 0, 1, \dots, n, \, 0 < t < T. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

A tömegmátrix, a merevségi mátrix, valamint a terhelési vektor:

$$M_{ij} = \int_0^L \phi_j \phi_i \, dx, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$A_{ij} = c^2 \int_0^L \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \, dx + \kappa_L \phi_j(L) \phi_i(L) + \kappa_0 \phi_j(0) \phi_i(0), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$b_i(t) = \int_0^L f(t) \phi_i \, dx + g_{N,L} \phi_i(L) - g_{N,0} \phi_i(0) + \kappa_L g_{D,L} \phi_i(L) + \kappa_0 g_{D,0} \phi_i(0),$$

$$i = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < t < T.$$

A (2.3.6) egyenlet mátrix formában:

$$\sum_{j=0}^n M_{ij} \frac{\partial^2 \xi_j(t)}{\partial t^2} + \sum_{j=0}^n A_{ij} \xi_j(t) = b_i(t), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < t < T, \quad (2.3.7)$$

$$M \frac{\partial^2 \xi(t)}{\partial t^2} + A \xi(t) = b(t), \quad 0 < t < T. \quad (2.3.8)$$

A szemidiszkrét problémát, ami egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer, t szerint is diszkrétizáljuk. Mivel az általunk használni kívánt numerikus sé-mákat elsőrendű egyenletekhez használjuk, bevezetjük az $\eta = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ változót. Ekkor (2.3.8) ekvivalens az alábbi elsőrendű rendszerrel:

$$M \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} = M \eta(t), \quad (2.3.9a)$$

$$M \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} + A \xi(t) = b(t). \quad (2.3.9b)$$

Osszuk fel $[0, T]$ -t m darab részintervallumra: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$, jelöljük az egyes időközöket $k_l = t_l - t_{l-1}$, $l = 1, 2, \dots, m$, valamint legyen a ξ_l a $\xi(t_l)$, az η_l az $\eta(t_l)$ közelítése. A fenti (2.3.9) egyenletrendszerre a Crank – Nicolson-módszert fogjuk alkalmazni [5], ugyanis nemcsak pontosabb az Euler-módszerekénél, de az energiamegmaradás teljesülését is biztosítja [6]. A $\left(\frac{\partial \xi(t_l)}{\partial t} + \frac{\partial \xi(t_{l-1})}{\partial t} \right) / 2$ -t helyettesítjük a $\frac{\xi(t_l) - \xi(t_{l-1})}{k_l}$ differenciahányadossal, a diszkrétizálás hibája $O(k_l^2)$.

Tekintsük tehát az alábbi problémát:

$$M \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} = M \eta(t), \quad 0 < t < T, \quad (2.3.10a)$$

$$M \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} + A \xi(t) = b(t), \quad 0 < t < T, \quad (2.3.10b)$$

$$\xi(0) = \xi_0, \quad (2.3.10c)$$

$$\eta(0) = \eta_0. \quad (2.3.10d)$$

Integráljuk az (2.3.10a), (2.3.10b) egyenletrendszereket (t_{l-1}, t_l) -en:

$$\int_{t_{l-1}}^{t_l} M \eta(t) dt = \int_{t_{l-1}}^{t_l} M \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} dt = M (\xi(t_l) - \xi(t_{l-1})), \quad (2.3.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_{l-1}}^{t_l} b(t) dt &= \int_{t_{l-1}}^{t_l} M \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} dt + \int_{t_{l-1}}^{t_l} A \xi(t) dt \\ &= M (\eta(t_l) - \eta(t_{l-1})) + A \int_{t_{l-1}}^{t_l} \xi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Az integrálközelítésnél ezúttal a trapézszabályt alkalmazzuk (amelynek hibája $O(k_l^2)$):

$$M \frac{\xi_l - \xi_{l-1}}{k_l} = M \frac{\eta_l + \eta_{l-1}}{2}, \quad (2.3.13a)$$

$$M \frac{\eta_l - \eta_{l-1}}{k_l} + A \frac{\xi_l + \xi_{l-1}}{2} = \frac{b_l + b_{l-1}}{2}. \quad (2.3.13b)$$

A (2.3.13) egyenletrendszert tömör, blokkmátrix alakban is felírhatjuk:

$$\begin{pmatrix} M & -\frac{k_l}{2}M \\ \frac{k_l}{2}A & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_l \\ \eta_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & \frac{k_l}{2}M \\ -\frac{k_l}{2}A & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{l-1} \\ \eta_{l-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_l}{2}(b_l + b_{l-1}) \end{pmatrix}. \quad (2.3.14)$$

Míthogy ξ_0 és η_0 adott (u_0 és v_0 lineáris interpolációs polinomjai), nincs más dolgunk, mint megoldani a kapott egyenletrendszert. Az így nyert ξ megoldás a (2.3.15) feladat numerikus megoldása az (x_j, t_l) , $j = 0, 1, \dots, n$, $l = 0, 1, \dots, m$ pontokban.

Feladat: Oldjuk meg a következő problémát (ld. 2.5. ábra):

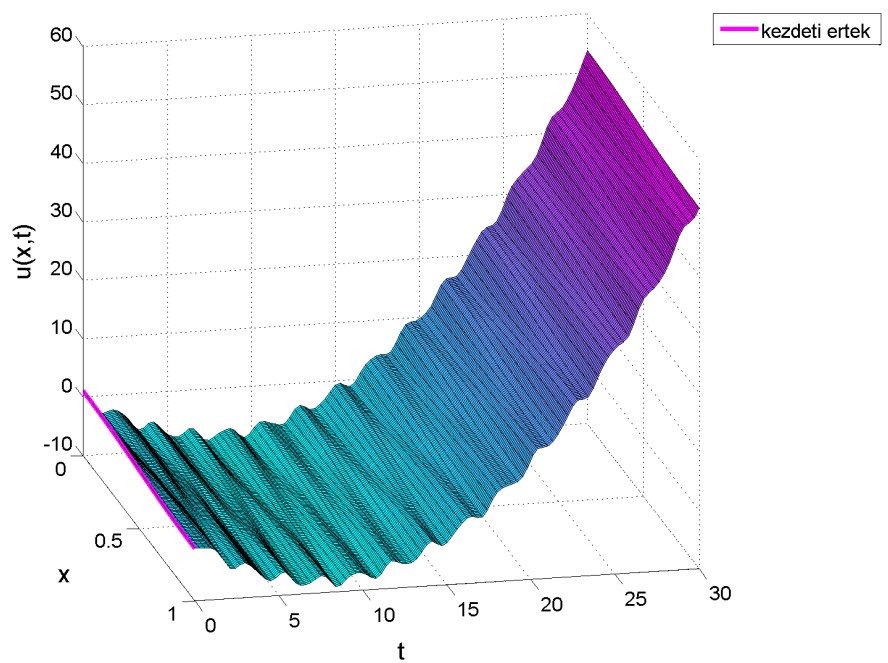
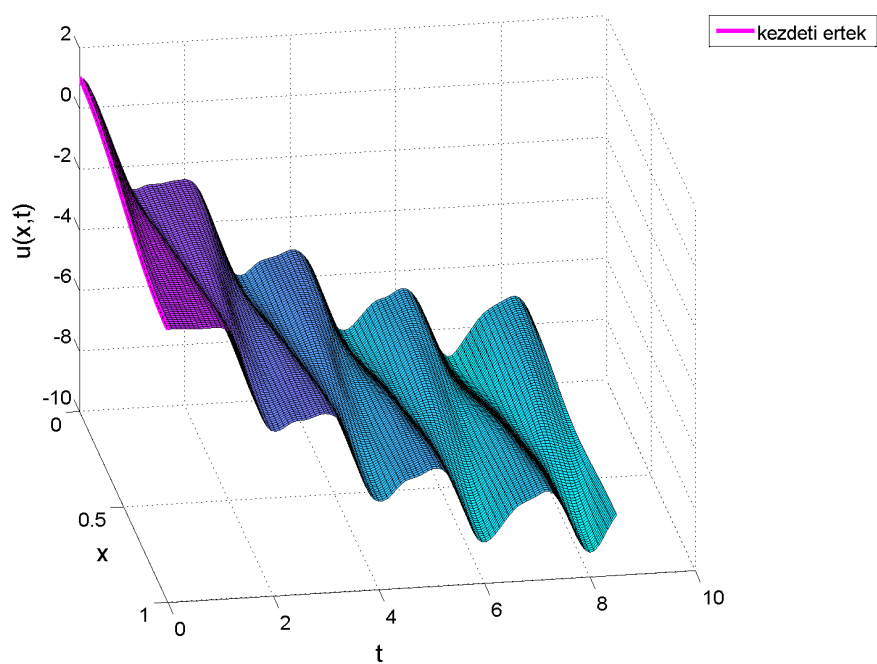
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos(\pi x) + x^3, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \quad (2.3.15a)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad (2.3.15b)$$

$$u_x(L, t) = 0, \quad (2.3.15c)$$

$$u(x, 0) = \cos \pi x, \quad (2.3.15d)$$

$$u_t(x, 0) = -\pi \sin \pi x. \quad (2.3.15e)$$



2.5. ábra. Hullámegyenlet, numerikus megoldás, $\Delta x = 0,01$, $\Delta t = 0,085$ (felső ábra),
 $\Delta t = 0,3$ (alsó ábra).

Harmadik fejezet

Alkalmazások

3.1. Navier-egyenlet

Tekintsünk egy véges L hosszúságú közetréteget, amelynek sűrűsége ρ . A gravitáció hatása $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a légköri nyomás $p_a = 0.1 \text{ MPa}$. A közetréteget rugalmas, szilárd közegként kezelve a $w(z, t)$ függőleges kimozdulására felírhatjuk a Navier-egyenletet, és így az alábbi peremérték-problémához jutunk [13]:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \rho g, \quad z \in \Omega = (0, L), \quad t \geq 0, \quad (3.1.1a)$$

$$w(0, t) = A \cos \sigma t, \quad t \geq 0, \quad (3.1.1b)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z}(L, t) = p_a, \quad t \geq 0, \quad (3.1.1c)$$

ahol z a függőleges koordináta, t az idő, A amplitúdó, σ körfrekvencia, λ és μ pedig a Lamé-állandók.

3.1.1. A megoldás időben állandó része

Írjuk fel w -t $w(z, t) = \bar{w}(z) + \hat{w}(z, t)$ összeg alakban, ahol $\bar{w}(z)$ időben állandó, és $\hat{w}(z, t)$ az időfüggő komponens.

Mivel $\bar{w}$ nem függ t -től, így $\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0$, $z \in \Omega$; valamint $A \cos \sigma t$ csak t -től függ, ezért $\bar{w}(0) = 0$.

Ezeket beírva (3.1.1)-be, az alábbi peremérték-problémához jutunk:

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) - \rho g, \quad z \in \Omega, \quad (3.1.2a)$$

$$\bar{w}(0) = 0, \quad (3.1.2b)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}(L) = p_a. \quad (3.1.2c)$$

ahol (3.1.2a) konstans együtthatós másodrendű közönséges differenciálegyenlet.

A következőkben a (3.1.2) peremérték-problémának kiszámítjuk az analitikus megoldását, hogy a későbbiekben összehasonlíthassuk a numerikus megoldással. A (3.1.2a) megoldása:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) - \rho g, & z \in \Omega = (0, L), \\ 0 &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - \rho g, \\ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} &= \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}, \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} z + d_1, \\ \bar{w} &= \frac{\rho g}{2(\lambda + 2\mu)} z^2 + d_1 z + d_2. \end{aligned}$$

A peremfeltételek miatt $d_2 = \bar{w}(0) = 0$, és

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}(L) &= p_a, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho g}{2(\lambda + 2\mu)} z^2 + d_1 z \right) &= p_a, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\rho g}{2(\lambda + 2\mu)} 2z + (\lambda + 2\mu) d_1 &= p_a, \\ d_1 &= \frac{p_a - \rho g L}{\lambda + 2\mu}. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Így az analitikus megoldás:

$$\bar{w}(z) = \frac{\rho g}{2(\lambda + 2\mu)} z^2 + \frac{p_a - \rho g L}{\lambda + 2\mu} z. \quad (3.1.4)$$

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban vezessük be az $a(z) = \lambda + 2\mu$ jelölést. Ezek után felírjuk a stacionárius részre a véges elemes módszert. Legyen V a szokásos, a V_0 függvényter pedig olyan, hogy $V_0 = \{v \in V : v(0) = 0\}$. Az (3.1.2a) egyenletet tetszőleges

$v \in V_0$ tesztfüggvénnyel megszorozzuk, $[0, L]$ -en integráljuk, majd átrendezés és parciális integrálás után – felhasználva az (3.1.2c) peremfeltételt és V_0 definícióját – kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho g v \, dz &= \int_0^L v \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + v a \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \, dz = \\ &= \int_0^L v \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \left(a \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial a}{\partial z} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \, dz + \left[v a \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right]_0^L = \\ &= \int_0^L -a \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \, dz + v(L) p_a. \end{aligned}$$

Ezt átrendezve, megkapjuk a (3.1.2) probléma gyenge alakját: keressünk $\bar{w} \in V_0$ -t úgy, hogy

$$\int_0^L a \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \, dz = v(L) p_a - \rho g \int_0^L v \, dz, \quad \forall v \in V_0. \quad (3.1.5)$$

Mivel $\bar{w}$ kétszer differenciálható, és teljesíti az (3.1.2b) peremfeltételt, így nyilván $\bar{w} \in V_0$. Tehát olyan $\bar{w} \in V_0$ próbafüggvényt keresünk, hogy minden $v \in V_0$ tesztfüggvényre (3.1.5) teljesüljön.

Szeretnénk folytonos, szakaszonként lineáris függvényekkel közelíteni $\bar{w}$ -t. Ehhez osszuk fel Ω -t n diszjunkt intervallumra, legyen V_h a folytonos, szakaszonként lineáris függvények tere, illetve legyenek a globális, elemi és lokális bázisfüggvények az előző 1.2.2 szakasznak megfelelőek. Minthogy a teszt- és próbafüggvények is eltűnnek $z = 0$ -ban, célszerű bevezetnünk V_h egy alterét:

$$V_{h,0} = \{v : v \in V_h, v(0) = 0\} \subset V_h.$$

Mivel a V_h függvénytér bázisa $\{\phi_i\}_{i=0}^n$ volt, így $V_{h,0}$ bázisa $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ lesz. Az approximációhoz a V_0 tér helyett a $V_{h,0} \subset V_0$ alterét tekintjük. A próba-, illetve a tesztfüggvények alakja a $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ bázisban felírva a következő:

$$\bar{w}_h(z) = \sum_{i=1}^n \bar{w}_i \phi_i(z) \in V_{h,0}, \quad (3.1.6)$$

$$v_h(z) = \sum_{i=1}^n v_i \phi_i(z) \in V_{h,0}. \quad (3.1.7)$$

A feladat tehát az, hogy keressünk olyan $\bar{w}_h \in V_{h,0}$ -t, hogy minden $v_h \in V_{h,0}$ -ra

$$\int_0^L a \frac{\partial v_h}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}_h}{\partial z} \, dz = v_h(L) p_a - \rho g \int_0^L v_h \, dz. \quad (3.1.8)$$

Legyen speciálisan $v_h(z) = \phi_j(z)$, $j = 1, \dots, n$. Ezek a kalap alakú $\phi_j(z)$ függvények lineárisan függetlenek, és kifeszítik a $V_{h,0}$ teret. Beírjuk (3.1.8)-ba $v_h = \phi_j$ -t, illetve (3.1.6)-ot. Ekkor a gyenge alak numerikus diszkrétizációja:

$$\begin{aligned} \int_0^L a \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{i=1}^n \bar{w}_i \phi_i \right) dz &= \phi_j(L) p_a - \rho g \int_0^L \phi_j dz, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n \bar{w}_i \int_0^L a \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} dz &= \phi_j(L) p_a - \rho g \int_0^L \phi_j dz, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

A fenti (3.1.9) probléma (3.1.8)-val ekvivalens, mivel ha az (3.1.9)-beli egyenlet teljesül minden ϕ_j globális bázisfüggvényre, akkor teljesül azok lineáris kombinációira is. Az (3.1.9)-beli egyenletrendszer n darab lineárisan független egyenletről áll. Ezt megoldjuk a $\bar{w}_i$ -kre, majd a $\bar{w}_i$ együtthatókat beírva (3.1.6)-ba, kapjuk $\bar{w}$ szakaszonként lineáris közelítését. Az (3.1.9) egyenletrendszere átírható mátrix alakba:

$$A \bar{w}_h = b, \quad (3.1.10)$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a merevségi mátrix, $\bar{w}_h \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ a véges elemes megoldás, $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ a terhelési vektor, és az egyes elemek:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_0^L a \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} dz, \\ b_j &= \phi_j(L) p_a - \rho g \int_0^L \phi_j dz = \begin{cases} p_a - \rho g \frac{z_n - z_{n-1}}{2}, & \text{ha } j = n, \\ -\rho g \frac{z_{j+1} - z_{j-1}}{2} & \text{különben.} \end{cases} \end{aligned}$$

Felhasználva a $h_i = z_i - z_{i-1}$ jelölést, a terhelési vektor:

$$b = \begin{pmatrix} -\rho g \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} \right) \\ -\rho g \left(\frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} \right) \\ \vdots \\ -\rho g \left(\frac{h_{n-1}}{2} + \frac{h_n}{2} \right) \\ p_a - \rho g \frac{h_n}{2} \end{pmatrix}.$$

A merevségi mátrix elemeinek kiszámításához először írjuk fel a bázisfüggvények deriváltjait:

$$\begin{aligned} \Omega_i &= (z_{i-1}, z_i), \quad i = 1, \dots, n : & \frac{\partial \phi_i}{\partial z} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{2}{h_i} = \frac{1}{h_i}, \\ \Omega_{i+1} &= (z_i, z_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1 : & \frac{\partial \phi_i}{\partial z} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{2}{h_{i+1}} = -\frac{1}{h_{i+1}}. \end{aligned}$$

A deriváltak felhasználásával már felírhatjuk a mátrix egyes elemeit. Attól függően, hogy hol vannak a főátlóban, annak elemei az alábbiak:

$$\begin{aligned}
 i \neq n : \quad A_{ii} &= \int_0^L a(z) \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 dz = \int_{z_{i-1}}^{z_i} a(z) \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 dz + \int_{z_i}^{z_{i+1}} a(z) \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 dz = \\
 &= \int_{-1}^1 a(z(\xi)) \frac{1}{h_i^2} \frac{h_i}{2} d\xi + \int_{-1}^1 a(z(\xi)) \frac{1}{h_{i+1}^2} \frac{h_{i+1}}{2} d\xi = \\
 &= \int_{-1}^1 a(z(\xi)) \left(\frac{1}{2h_i} + \frac{1}{2h_{i+1}} \right) d\xi \approx \\
 &\approx \left(\frac{1}{2h_i} + \frac{1}{2h_{i+1}} \right) [a(z(-\sqrt{1/3})) + a(z(\sqrt{1/3}))],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i = n : \quad A_{nn} &= \int_0^L a(z) \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial z} \right)^2 dz = \int_{z_{n-1}}^{z_n} a(z) \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial z} \right)^2 dz = \\
 &= \int_{-1}^1 a(z(\xi)) \frac{1}{h_n^2} \frac{h_n}{2} d\xi = \\
 &= \int_{-1}^1 a(z(\xi)) \frac{1}{2h_n} d\xi \approx \\
 &\approx \frac{1}{2h_n} [a(z(-\sqrt{1/3})) + a(z(\sqrt{1/3}))].
 \end{aligned}$$

A főátló alatt és felett álló elemek a következők lesznek:

$$\begin{aligned}
 A_{i+1,i} = A_{i,i+1} &= \int_0^L a \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial z} dz = \int_{z_i}^{z_{i+1}} a \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial z} dz = \\
 &= \int_{-1}^1 a(z(\xi)) \frac{-1}{h_{i+1}} \frac{1}{h_{i+1}} \frac{h_{i+1}}{2} d\xi = \\
 &= \int_{-1}^1 a(z(\xi)) \frac{-1}{2h_{i+1}} d\xi \approx \\
 &\approx \frac{-1}{2h_{i+1}} [a(z(-\sqrt{1/3})) + a(z(\sqrt{1/3}))].
 \end{aligned}$$

A merevségi mátrix többi eleme 0 lesz, merthogy az azokban megjelenő $\frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z}$ szorzatokban minden Ω_k ($k = 1, \dots, n$) elemen legalább az egyik tényező 0. A közelítéskor felhasználtuk a kétpontos Gauss–Legendre-kvadratúrát:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$

Legyenek speciálisan $\lambda(z) \equiv \lambda$, $\mu(z) \equiv \mu$, így $a(z) \equiv \lambda + 2\mu = a$. Ekkor a mátrix nemzérus elemei:

$$\begin{aligned} i \neq n : \quad A_{ii} &= a \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right), \\ i = n : \quad A_{nn} &= a \frac{1}{h_n}, \\ A_{i+1 i} &= A_{i i+1} = a \frac{-1}{h_{i+1}}. \end{aligned}$$

A globális merevségi mátrix tehát tridiagonális lesz, és felírható lokális merevségi mátrixok összegeként:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{23} & A_{33} & A_{34} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{n-2 n-1} & A_{n-1 n-1} & A_{n-1 n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n-1 n} & A_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a}{h_1} + \frac{a}{h_2} & \frac{-a}{h_2} & & & & \\ & \frac{-a}{h_2} & \frac{a}{h_2} + \frac{a}{h_3} & \frac{-a}{h_3} & & \\ & & \frac{-a}{h_3} & \frac{a}{h_3} + \frac{a}{h_4} & \frac{-a}{h_4} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \frac{-a}{h_{n-1}} & \frac{a}{h_{n-1}} + \frac{a}{h_n} & \frac{-a}{h_n} \\ & & & & & \frac{-a}{h_n} & \frac{a}{h_n} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda + 2\mu}{h_1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} + \frac{\lambda + 2\mu}{h_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 1 & \\ & & \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{\lambda + 2\mu}{h_3} \begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ & -1 & 1 \\ & & \end{pmatrix} + \dots + \frac{\lambda + 2\mu}{h_n} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

A (3.1.10) egyenletrendszer megoldását numerikus eszközökkel könnyen kiszámíthatjuk. Az így kapott $\bar{w}$ a (3.1.2) probléma véges elemes közelítő megoldása, amelyet összehasonlíthatunk a feladat (3.1.4) analitikus megoldásával (ld. 3.1. ábra).

A paramétereknek adjuk a következő értékeket:

$$\rho = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad L = 3000 \text{ m}, \quad \lambda = 1.85 \cdot 10^4 \text{ MPa}, \quad \mu = 1.3 \cdot 10^4 \text{ MPa}.$$

3.1.2. A megoldás nemstacionárius része

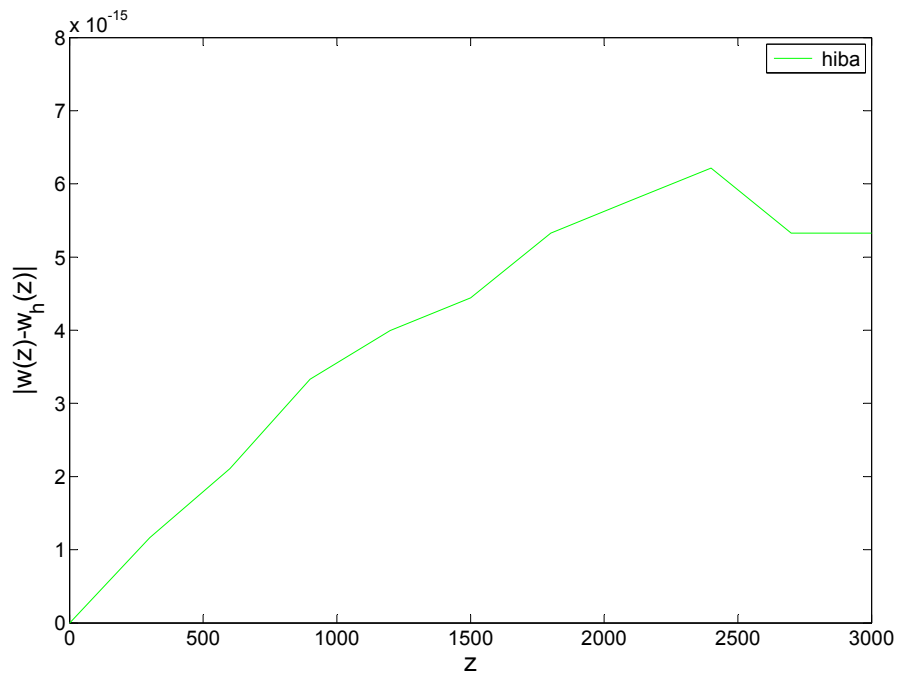
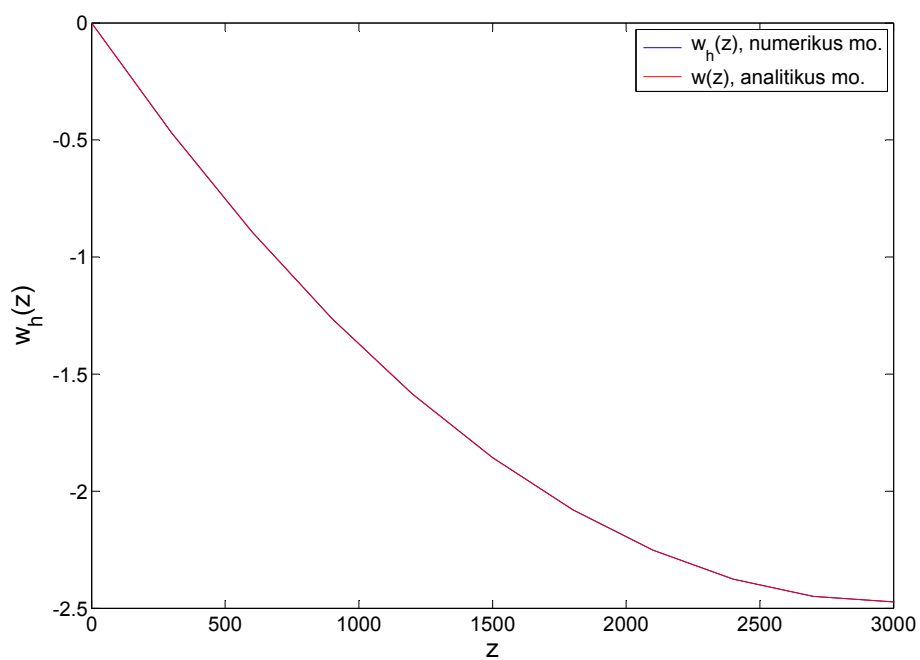
Az időfüggő részre azt kapjuk, hogy

$$\rho \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} \right), \quad z \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.1.11a)$$

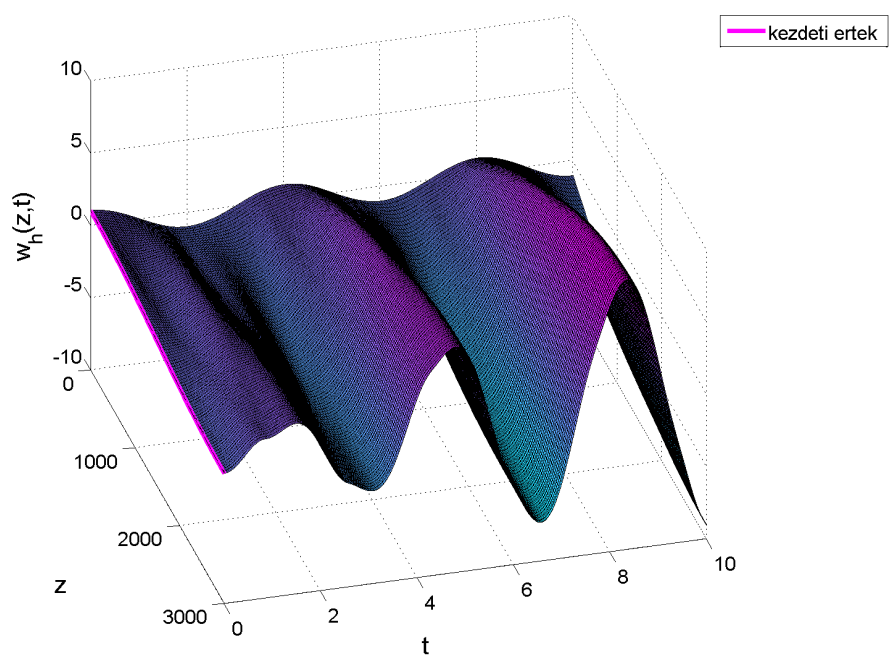
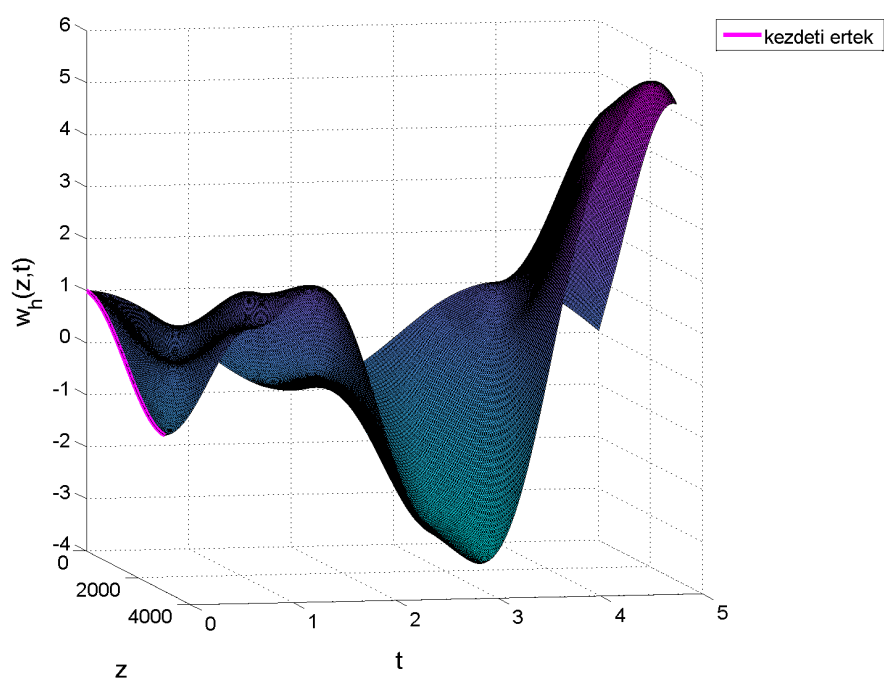
$$\hat{w}(0, t) = A \cos \sigma t, \quad t \geq 0, \quad (3.1.11b)$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial z}(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.1.11c)$$

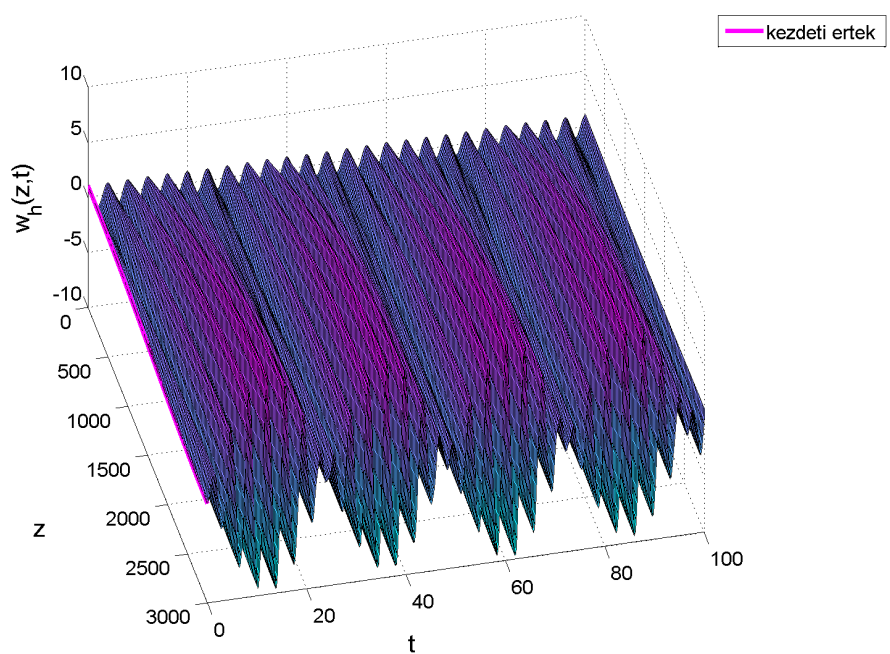
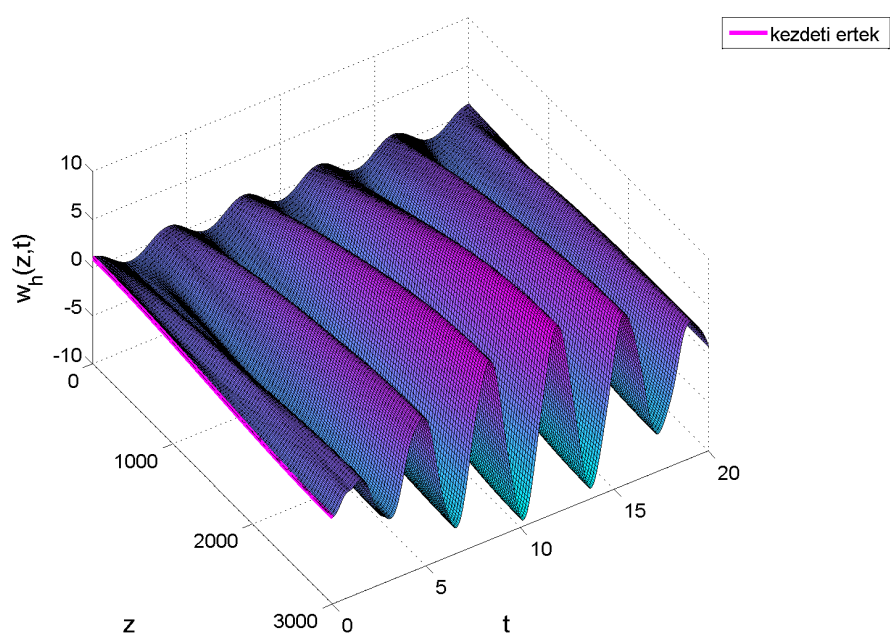
ahol (3.1.11a) hullámgyenlet. Minthogy ennek véges elemes megoldását már bemutattuk az általános esetben, elegendő implementálnunk a megfelelő paramétereket ($\sigma = \pi/2, A = 1$), kezdeti és peremfeltételeket (legyen $\hat{w}(x, 0) = \cos(\pi x/3000)$, ld. 3.2, 3.3. ábrák).



3.1. ábra. Navier-egyenlet. Az időben állandó $\bar{w}$ közelítése a véges elemek módszerével: az egzakt és a numerikus megoldás, a hiba 10^{-15} nagyságrendű, $\Delta z = 300$ a lépésköz.



3.2. ábra. Navier-egyenlet. Az időben nem állandó $\hat{w}$ közelítése VEM-mel, $\Delta z = 30$, $\Delta t = 0,01$ (felső ábra), $\Delta t = 0,02$ (alsó ábra).



3.3. ábra. Navier-egyenlet. Az időben nem állandó $\hat{w}$ közelítése VEM-mel,
 $\Delta z = 30$, $\Delta t = 0,04$ (felső ábra), $\Delta t = 0,2$ (alsó ábra).

Negyedik fejezet

Összefoglalás, kitekintés

A dolgozatban az ún. folytonos Galjorkin-módszert mutattuk be. Rendszerint peremérték-feladatok esetében használatos [2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11], erre adtunk példákat másodrendű differenciálegyenletek esetén. Megjegyezzük, hogy kidolgoztuk a módszert a fordított inga kezdetiérték-problémájára, amire TDK-dolgozat épül [14].

Először absztrakt formában fogalmaztuk meg a végeselem-módszert. Megkonstruáltuk a végeselem-teret, bemutattuk egy és több dimenziós használatát.

Elliptikus egyenletekre áttekintettük a matematikai alapokat, bebizonyítottuk a két legfontosabb lemmát, kitértünk a peremfeltételek fajtáira. Felírtuk a variációs problémát, és a numerikus megoldást ábrázoltuk.

Parabolikus és hiperbolikus egyenletekre is tekintettünk egy-egy példát. Végül a Navier-egyenletre alkalmaztuk a bemutatottakat.

A számítások elvégzéséhez és a megoldások ábrázolásához a módszert lefordítottuk a MATLAB programnyelvére és implementáltuk.

Eljárásunkon javíthatunk: egyfelől az intervallumok sűrűbb beosztásával, másfelől, a bázisfüggvények megválasztásakor a lineáris helyett magasabb fokú függvényeket is vehetünk [1]. Utóbbi feladat vizsgálata akár további kutatómunka célkitűzése is lehet.

Az időbeli diszkretizáció további véges elemes kezelésére adhat lehetőséget a nem-folytonos Galjorkin-módszer [7]. Előnye, hogy használhatunk nem folytonos elemeket, továbbá vehetünk különböző foksámú polinomokat a különböző elemeken, például magasabb foksámút, ahol szükséges.

A függelék

Matematikai kiegészítés

A.0.1. Lemma (Banach-féle kontrakciós elv). *Legyen V Banach-tér, $T : V \rightarrow V$ kontrakatív leképezés (kontrakció), vagyis $\exists M \in [0,1)$ úgy, hogy*

$$\|Tv_1 - Tv_2\| \leq M \|v_1 - v_2\|$$

teljesül minden $v_1, v_2 \in V$ esetén. Ekkor T -nek pontosan egy $u \in V$ fixpontja van.

Bizonyítás. Elsőként a létezést látjuk be. Legyen $v_0 \in V$ tetszőleges, és legyenek $v_1 = Tv_0, v_2 = Tv_1, \dots, v_{k+1} = Tv_k, \dots$. Megmutatjuk, hogy $\{v_n\}$ Cauchy-sorozat, amiből V teljessége miatt $\{v_n\}$ konvergenciája következik.

Mivel $\|v_k - v_{k-1}\| = \|Tv_{k-1} - Tv_{k-2}\| \leq M \|v_{k-1} - v_{k-2}\|$, ha $k \geq 2$, így $\|v_k - v_{k-1}\| \leq M^{k-1} \|v_1 - v_0\|$, $k \geq 1$. Ezt felhasználva, tetszőleges $N > n$ esetén igaz, hogy

$$\begin{aligned} \|v_N - v_n\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^N v_k - v_{k-1} \right\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^N \|v_k - v_{k-1}\| \\ &\leq \|v_1 - v_0\| \sum_{k=n+1}^N M^{k-1} \\ &\leq \frac{M^n}{1-M} \|v_1 - v_0\| \\ &= \frac{M^n}{1-M} \|Tv_0 - v_0\| \rightarrow 0, \quad N, n \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{A.0.1}$$

Tehát $\{v_n\}$ konvergens, legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$. Ekkor – felhasználva T folytonosságát – a

határértékre a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} v &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T v_n \\ &= T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right) \\ &= T v, \end{aligned}$$

tehát T -nek létezik fixpontja.

Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy v_1 és v_2 is fixpont. A kontrakciós tulajdonság miatt létezik olyan $0 \leq M < 1$, hogy

$$\|T v_1 - T v_2\| \leq M \|v_1 - v_2\|.$$

Mivel v_1 és v_2 fixpontok, az is igaz, hogy

$$\|v_1 - v_2\| \leq M \|v_1 - v_2\|.$$

Ez pedig csak akkor teljesülhet, ha $\|v_1 - v_2\| = 0$. Azt kaptuk, hogy $v_1 = v_2$, ezzel az állítást beláttuk.

□

A.0.2. Lemma (Nyomtétel). *Legyen $\Omega \in \mathbb{R}^d$ korlátos, nyílt halmaz $\partial\Omega$ C^1 -sima peremmel. Ekkor létezik olyan C konstans, hogy*

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Az egyenlőtlenség bizonyítása szerepel például a [3] könyvben.

A.0.3. Lemma (Hölder-egyenlőtlenség). *Legyenek $1 \geq p, q \geq \infty$ olyanok, hogy $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Ha $f \in L^p(\Omega)$ és $g \in L^q(\Omega)$, akkor $fg \in L^1(\Omega)$, és*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

A.0.4. Lemma (Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenség). *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ korlátos, nyílt halmaz elegendően sima $\partial\Omega$ peremmel, és legyen $u \in H_0^1(\Omega)$. Ekkor létezik egy $c_P(\Omega)$ úgy, hogy*

$$\int_{\Omega} |u|^2 \, dx \leq c_P \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \, dx.$$

A Poincaré – Friedrichs-egyenlőtlenség bizonyítása megtalálható többek között az [1, 11] könyvekben.

A.0.5. Lemma. *Legyenek $a, b, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Ekkor*

$$ab \leq \frac{\delta}{2}a^2 + \frac{1}{2\delta}b^2.$$

Bizonyítás. Jól ismert a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség: bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Felírva ezt ϵa -ra és $\frac{b}{\epsilon}$ -ra:

$$\epsilon a \frac{b}{\epsilon} \leq \frac{1}{2} \left((\epsilon a)^2 + \left(\frac{b}{\epsilon} \right)^2 \right).$$

Legyen $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon^2$:

$$ab \leq \frac{\delta}{2}a^2 + \frac{1}{2\delta}b^2,$$

éppen ezt kellett belátnunk.

Ábrák jegyzéke

1.1. Az Ω intervallum felosztása n részintervallumra	6
1.2. A globális bázisfüggvények	6
1.3. Az elemi bázisfüggvények	7
1.4. A lokális bázisfüggvények	8
1.5. Egy „kalapfüggvény” két dimenzióban	9
2.1. Az egységnyi sugarú körlap egy triangulációja és a Poisson-egyenlet véges elemes megoldása	25
2.2. Az egységnyi sugarú körlap egy triangulációja és a Poisson-egyenlet véges elemes megoldása	26
2.3. Az egységnyi sugarú körlap egy triangulációja és a Laplace-egyenlet véges elemes megoldása	27
2.4. A hővezetés egyenlete, numerikus megoldás, $\Delta x = 0,01$, $\Delta t = 0,02$	31
2.5. Hullámeqyenlet, numerikus megoldás, $\Delta x = 0,01$, $\Delta t = 0,085$ (felső ábra), $\Delta t = 0,3$ (alsó ábra).	36
3.1. Navier-egyenlet. Az időben állandó $\bar{w}$ közelítése a véges elemek módszerével: az egzakt és a numerikus megoldás, a hiba 10^{-15} nagyságrendű, $\Delta z = 300$ a lépésköz.	44
3.2. Navier-egyenlet. Az időben nem állandó $\hat{w}$ közelítése VEM-mel, $\Delta z = 30$, $\Delta t = 0,01$ (felső ábra), $\Delta t = 0,02$ (alsó ábra).	45
3.3. Navier-egyenlet. Az időben nem állandó $\hat{w}$ közelítése VEM-mel, $\Delta z = 30$, $\Delta t = 0,04$ (felső ábra), $\Delta t = 0,2$ (alsó ábra).	46

Irodalomjegyzék

- [1] Susanne C. Brenner, L. Ridgway Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, 2008.
- [2] Jeffery Cooper, *Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB*, Birkhauser, 1998.
- [3] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Math Society, 1998.
- [4] Horváth Róbert, *Numerikus módszerek 2. előadásvázlat*, BME Matematika Intézet, 2012.
- [5] Claes Johnson, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, 1987.
- [6] Mats G. Larson, Fredrik Bengzon, *The Finite Element Method: Theory, Implementation and Practice*, Springer, 2010.
- [7] Ben Q. Li, *Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer*, Springer-Verlag, 2006.
- [8] Stoyan Gisbert (szerk.), *MATLAB*, TypoTeX, 2011.
- [9] Stoyan Gisbert, Takó Galina, *Numerikus módszerek II.*, TypoTeX, 1995.
- [10] Stoyan Gisbert, Takó Galina, *Numerikus módszerek III.*, TypoTeX, 1997.
- [11] Endre Süli, *Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations*, Mathematical Institute, University of Oxford, 2012.
- [12] Tóth János, Simon L. Péter, *Differenciálegyenletek*, TypoTeX, 2009.
- [13] J. J. W. van der Vegt, O. Bokhove, *Finite Element Methods for Partial Differential Equations*, Lecture notes, 2009.

- [14] Vörös Anett, *A fordított inga dinamikájának vizsgálata a végeelem-módszerrel*, TDK-dolgozat, SZTE Bolyai Intézet, 2014.

Nyilatkozat

Alulírott Vörös Anett, Alkalmazott matematikus MSc szakos hallgató, kijelentem, hogy a diplomamunkában foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2014. 05. 15.

Vörös Anett