

Szegedi Tudományegyetem

Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

**Újrafelhasznált játékok és az Erdős-Selfridge tétel
kiterjesztése a lassított játékokra**

Készítette: Vrbáski Iván
Matematika BSc

Témavezető: Pluhár András

2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Pozíciós játékról általában	4
2.1. Példák pozíciós játékokra	5
2.1.1. Tic-Tac-Toe	5
2.1.2. Amőba	5
2.1.3. Shannon-féle kapcsoló játék	5
3. Stratégiák és alapvető eredmények	6
3.1. Alapvető módszerek	6
3.1.1. Stratégia lopás	6
3.1.2. Párosítások	6
3.1.3. Súlyfüggvények és az Erdős-Selfridge tétel	7
3.2. Box játék	8
4. Játékok lassítása és az Erdős-Selfridge típusú tételek	11
5. Újrafelhasznált játékok	17
6. Újrafelhasznált Box játék	18
7. Összegzés	22
Irodalomjegyzék	23

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozat során megismertetem az olvasót a pozíciós játékok területével, és a területhez kapcsolódó módszerekkel és fontosabb tételekkel. Továbbiakban definiálom az újrafelhasznált játékok fogalmát, amely fogalmat a mindennapokban jól ismert malom játék motivált. Ennek a játéknak az első részében a játékosok egyesével elhelyezik a táblán az elemeiket, majd ez után a második részben egy adott szabály szerint helyezhetik át az elemeiket a táblán.

Később vizsgálni fogom, hogy mi történik, ha a játékot *lassítjuk*, vagyis a játékosok megváltoztathatják lépésük szerkezetét. Ahelyett, hogy egy kavicsot (ezen túl így nevezem az elemeket) raknának le, ők félbe törhetik azt vagy $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$, de akár $\frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \dots - \frac{1}{k}$ nagyságú kis kavicsokat is elhelyezhetnek a táblán.

Lehetséges az is, hogy nem szabjuk meg a játékosoknak, hány részre darabolják a kavicsaikat. Tehát a kavicsunkat akár végtelen sok kis darabra is vághatjuk. Ekkor juttunk el az úgynevezett "homok"-hoz. Amire tekinthetünk úgy, hogy a játékosaink lépésenként nem negatív valós értékű súlyokat tesznek a tábla szabad mezőire.

A játék nyerési szabályai megmaradnak, így a kérdés, amit vizsgálunk az, hogy kedvez-e valamelyik játékosnak ez a fajta lassítás. Tud-e az adott játékos számára gyengébb feltételek mellett nyerni?

Végül pedig bemutatom Dan Hefetz, Michael Krivelevich, Miloš Stojaković és Szabó Tibor [2] által definiált folytonos Box játék újrafelhasznált típusának megoldását, és hogy milyen észrevételt vonhattunk le, ha megpróbáljuk az Erdős-Selfridge tételt kiterjeszteni a lassított játékokra.

2. fejezet

Pozíciós játékról általában

Pozíciós játékokat az emberek már évszázadok óta játszanak. Ilyen játékok például az amőba vagy a malom játék. Ez okból a játékok széles körét soroljuk a pozíciós játékok családjába. Azt az alaptulajdonságot szoktuk megkövetelni, hogy a játékosok célja egy alakzat elérése vagy elkerülése legyen. Formálisan a következőképpen fogalmazhatjuk meg a pozíciós játékok vagy hipergráf játékok fogalmát.

Legyen $\mathcal{F} = (X, \mathcal{H})$ hipergráf, ahol $\mathcal{H} \subset 2^X$. Ebben az esetben az X elemei képzik a táblát, míg a $\mathcal{H}$ halmaz pedig az úgynevezett nyerő halmazokat fogja tartalmazni.

Két játékos (I vagy kezdő és a II vagy második) esetén az egyik akkor nyer, ha elsőnek elfoglalja egy tetszőleges nyerő halmaz összes elemét. Ha mindkét játékos a tökéletes stratégiáját játszva az eredmény döntetlen (Egyik játékos sem foglalja el egy tetszőleges nyerő halmaz összes elemét) akkor a játékot döntetlennek nevezzük. Ezekben a játékokban a mindkét játékos építőként játszik, mivel a céljuk egy tetszőleges nyerő halmaz elfoglalása. (Az angol szakirodalomban Maker-Maker játékok néven lelhetők fel.)

E témakörbe tartozó véges méretű táblán játszódó játékokról a következő tételek születtek:

2.1. Tétel. (Zermelo-Neumann) [3] *Egy teljes információs, véges, kétszemélyes játékot vagy az egyik játékos nyeri vagy a játék döntetlen.*

2.2. Tétel. (Hales-Jewett) [4] *Bármely $(X, \mathcal{H})$ hipergráf játékban vagy a kezdő nyer, vagy döntetlen az eredmény.*

A dolgozatban az előbb tárgyalt típusnak egy módosított változatát fogjuk vizsgálni, amit építő-romboló játéknak nevezünk. Ezekben a játékokban az építő célja egy nyerő halmaz elfoglalása, míg a rombolónak ennek a megakadályozása.

Természetesen minden pozíciós játékot módosíthatunk úgy, hogy megengedjük az egyik (vagy mindkettő) játékosnak, hogy lépésenként egytől több elemet válasszon ki a tábláról. Vagyis tekinthetjük úgy, hogy az első játékos q elemet, míg a második játékos

p elemet foglal el az X tábláról lépésenként. Ha $p = q$, akkor a játékot *felgyorsított* játéknak míg, ha $p \neq q$, akkor *elfogult* játéknak nevezzük.

2.1. Példák pozíciós játékokra

2.1.1. Tic-Tac-Toe

Az egyik legegyszerűbb pozíciós játék, ahol két játékos felváltva jelölnek ki egy mezőt a 3×3 elemű négyzetrácsról. Az nyer, aki előbb elfoglal egy teljes sort, oszlopot vagy főátlót. A Tic-Tac-Toe három dimenziós változatát szoktuk Tic-Toc-Tac-Toe-nak nevezni, aminek táblája egy $4 \times 4 \times 4$ elemű kocka. A nyerő halmazok a sorok, oszlopok, lap- és a test főátlók.

2.1.2. Amóba

Másik nevén 5-in-a-row-nak nevezzük. A játékszabályai hasonlóak, mint az előbb definiált játéknak. A végtelen négyzetrácson helyeznek el jeleket a játékosok. Az a játékos nyer, aki előbb tud elfoglalni öt egymás követő mezőt vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan.

2.1.3. Shannon-féle kapcsoló játék

A Shannon-féle kapcsoló játékokra összekötős játékként lehet gondolni. Itt a játékosok a G gráf éleit választják ki. Mivel pontosan tudjuk, hogy valamelyik fél nyerni fog a játék végén, ezért érhetőnek tűnnek, ha építő-romboló játékként gondolunk rá. Az építő célja a G gráf egy tetszőleges feszítőfájának összes élének elfoglalása, míg a rombolónak az, hogy megakadályozza az építőt a céljának elérésében.

Átvezetésként a következő fejezetben ismertetném egy egyszerű feltételét az építő nyerésének az előbb említett Shannon-féle kapcsoló játékban.

2.3. Tétel. (Alfred Lehman) [5] *Tegyük fel, hogy a romboló kezdi a Shannon-féle kapcsoló játékot. Egy adott n -pontú G gráfban az építő pontosan akkor nyer, ha G -ben van két diszjunkt feszítőfa, F_1 és F_2 .*

3. fejezet

Stratégiák és alapvető eredmények

3.1. Alapvető módszerek

3.1.1. Stratégia lopás

A stratégia lopás módszerének ismertetését és hasznosságát az első fejezetben ismertetett Hales-Jewett tétel bizonyításával mutatom meg. A tétel maga a következő volt:

3.1. Tétel. (Hales-Jewett) [4] *Bármely $(X, \mathcal{H})$ hipergráf játékban vagy a kezdő nyer, vagy döntetlen az eredmény.*

Bizonyítás. A bizonyítás alapgondolata a már említett stratégia lopáson alapszik. A gondolat pedig az, hogy ha második játékos nyerne, vagyis van nyerő stratégiája, akkor a kezdő játékos is használhatná ezt a stratégiát. A kezdő játékos eddigi lépése nem gátolják a nyerő stratégia használatát. Vagyis a kezdő játékos elfelejtheti az első lépését, de ha a nyerő stratégia azt a lépését kérné, akkor úgy tehet, mintha azt lépné, de helyette egy tetszőlegeset lép. □

3.1.2. Párosítások

A párosítás hasznos módszernek bizonyult a pozíciós játékokban, de még magában a játékelméletben is. Nagyon könnyen készíthető játék, melyen a kezdő játékosnak a nyerő stratégiája a párosítás. Például, ha a két játékos érméket tesz le felváltva a köralakú asztalra, akkor az veszít, aki nem tud már elemet letenni. Ebben az esetben a kezdő játékos elhelyezzi első elemét az asztal közepére, ezután pedig a második játékosnak lépését a középpontra tükrözi. A pozíciós játékok területén Albert Jewett és Robert Hales vezette be a párosítás módszerét [4].

3.1.3. Súlyfüggvények és az Erdős-Selfridge tétel

A súlyfüggvényeket a pozíciós játékok területére Erdős Pál és John Selfridge vezették be. A következő tételt azóta is sok eredménynél használták fel.

3.2. Tétel. (Erdős-Selfridge, 1973) [7] Legyen $\mathcal{F} = (X, \mathcal{H})$ hipergráf játék építő-romboló változata és az építő kezd. Ha $\mathcal{H}$ n -uniform hipergráf, és $\sum_{A \in \mathcal{H}} 2^{-n+1} = |\mathcal{H}| 2^{-n+1} < 1$, akkor romboló nyer.

Bizonyítás. Legyen az építő i -edik lépése x_i , míg a rombolóé y_i , $X_i = \{x_1, \dots, x_i\}$, $Y_i = \{y_1, \dots, y_i\}$ és $A_i(I) = |A \cap X_i|$, illetve $A_i(II) = |A \cap Y_i|$.

Tetszőleges $A \in \mathcal{H}$ nyerőhalmaz súlya alatt az i -edik lépésben a következőt értjük:

$$w_i(A) = \begin{cases} 2^{-|A|+A_i(I)}, & \text{ha } A_i(II) = 0 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Így definiálhatjuk egy $x \in X$ elem súlyát, ami $w_i(x) = w_{x \in A} w_i(A)$, és a potenciált, ami $w_i = \sum_{A \in \mathcal{H}} w_i(A)$.

A romboló stratégiája pedig az úgynevezett mohó algoritmushoz hasonlít. Mivel azt a $v \in X \setminus (X_i \cup Y_{i-1})$ elemet választja az i -edik lépésben, amelyre a $w_i(v)$ érték maximális. Ebből a $w_i \geq w_{i+1}$ egyenlőtlenséget kapjuk minden i -re.

Mivel, $w_{i+1} \leq w_i - w_i(y_i) + w_{i+1}(x_{i+1})$, mert a romboló i -edik lépése $w_i(y_i)$ -vel fogja csökkenteni, míg az építő $i + 1$ -edik lépése legfeljebb $w_i(x_{i+1})$ -vel tudja növelni az addigi potenciált. Hisz a súlyfüggvény definíciója alapján pontosan azokat az x_{i+1} -et tartalmazó halmazok súlyát duplázza meg, amelyeknek nem eleme y_i . A mohó algoritmusból következik a $w_i(y_i) \geq w_i(x_{i+1})$ egyenlőtlenség. Így adódik a potenciál monotonitása. Azt tudjuk, hogy $w_1 \leq 2w_0$, mivel x_1 azon halmazok súlyát duplázza, amelyek tartalmazzák.

A tételben kimondott feltétel miatt $w_1 \leq 2w_0 = \sum_{A \in \mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$. Tegyük fel, hogy az építő megnyeri a játékot, például a k -edik lépésben. Ez azt jelenti, hogy van olyan $A^* \in \mathcal{H}$, amelyre $|A^*| = A_k^*(I)$, így

$$1 > w_1 \geq w_k = \sum_{A \in \mathcal{H}} w_k(A) = 2^{-|A^*|+A_k^*(I)} = 2^0 = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy a tétel feltétele mellett az építő nem nyerhet. Ellenkező esetben az állításunk ellentmondásra vezet. $\square$

A tétellel kapcsolatosan azt vehetjük észre, hogy akár sűrű, de legfeljebb exponenciális méretű hipergráfokra adhat eredményt. Ezen kívül azt figyelhetjük meg, hogy maga a tétel éles, mivel vannak olyan $\mathcal{F}$ hipergráf játékok, melyre $\sum_{A \in \mathcal{H}} 2^{-|A|+1} = 1$, és az építő nyer. Például legyen a T_n egy n -szintes bináris fa, $X = V(T_n)$ és $A \in \mathcal{H}$, ahol az A a gyökér

és a levél közti út pontjait tartalmazza. (Azt láthatjuk, hogy ha az építő kezd, ő elfoglalja a gyökeret, és ez után az előző lépésében elfoglalt csúcs azon fiát választja, amelyet a romboló nem foglalt el.) Ezzel a játékkal még a későbbi fejezetben foglalkozni fogunk, hogy miként változik a játék kimenetele és menete, ha megváltoztatjuk a játék szabályait.

Azt már láthattuk, hogy Lehmann tétele alapján a sűrű gráfok esetén a Shannon-féle kapcsoló játék nem túlságosan érdekes. Azonban könnyen érdekessé tehetjük, még hozzá úgy, hogy vesszük az elfoglalt változatát, vagyis adjunk nagyobb hatalmat a rombolónak (mondjuk b élet vehet el egyszerre). Ha a K_n -en (n -pontú teljes gráfon) játszunk, akkor létezik b_0 töréspont azaz, ha $b > b_0$, akkor a romboló nyer, ha pedig $b < b_0$, akkor meg az építő győz. Ez a töréspont $b_0 \approx \frac{n}{\log n}$, vagyis az építőnek akkor sikerül feszítőfát létrehoznia, ha a romboló ennél kevesebb élet tesz le lépésenként.

Ilyen típusú játékok esetén Beck Józsefnek sikerült általánosítania az előbbi tételt. Maga a $(X, \mathcal{H}, p, q)$ hipergráf játék szabályai megegyeznek a $\mathcal{F} = (X, \mathcal{H})$ játék szabályaival, annyi változtatással, hogy az egyik fél p , míg a másik pedig q elemet tehet le fordulóként.

3.3. Tétel. (Erdős-Selfridge-Beck) [6] *A $(X, \mathcal{H}, p, q)$ hipergráf játék építő-romboló változatában, ha $\sum_{A \in \mathcal{H}} (1 + q)^{1 - \frac{|A|}{p}} < 1$, akkor a romboló nyer.*

Hasonlóan (súlyfüggvényekkel) lehet igazolni, mint az előbbi tételt. A tétellel kapcsolatosan szintén el lehet mondani, hogy éles, vagyis a feltételben szereplő egyenlőtlenség jelet egyenlőre írva már nem lesz igaz. A véletlen módszerek jelen vannak a pozíciós játék területén. Erre példa a **véletlen heurisztika** elve, ami így hangzik:

Cseréljük ki a két tökéletesen játékos játékost két teljesen véletlenül játszóra. Nagyjából ugyanaz lesz a végeredmény.

Azt meg kell jegyeznünk, hogy ez csak elv. Vannak esetek mikor érvényes, de vannak esetek mikor nem. Mindig érdemes megnézni, hogy mit jósol, de már véletlenül játszani, csak ritkán érdemes.

3.2. Box játék

A hagyományos *Box* pozíciós játékot Vasek Chvátal és Erdős Pál vezették be még 1978-ban [8]. A játékot akkor segédjátéknak definiálták a teljes gráfon játszott Shannon-féle kapcsoló játékhoz, ahol az építő célja egy feszítőfa elérése a gráfon.

Vegyünk n diszjunkt halmaz, jelöljük őket $1, 2, \dots, n$ -vel. A játékon belül ezeket a halmazokat nevezzük dobozoknak (box-nak). Minden $1 \leq i \leq n$ -re jelöljük a dobozok elemszámát (nagyságát) a_i -vel. Az építő és a romboló lépésenként a még szabad elemeket foglalják el a dobozokból, míg el nem foglalják az összes elemet mindegyik dobozból.

Minden lépésben az építő m elemet és ezt követően a romboló egy elemet foglalhat el a még szabad elemek közül. Az építő célja egy teljes doboz elfoglalása, míg a rombolónak, hogy ezt megakadályozza. Ezt a játékot nevezzük a továbbiakban $Box(m, a_1, a_2, \dots, a_n)$ -nak. Észrevehetjük, hogy miután a romboló elfoglalt egy elemet egy tetszőleges dobozból, az építő nem foglalhatja el a doboz összes elemét, szóval ez a doboz feleslegessé válik a játék további részében. Ez okból, ha a romboló elfoglal egy elemet egy dobozból, akkor azt a dobozt onnantól kezdve *halott* doboznak hívjuk. Tetszőleges állásában a játéknak, *élő* doboznak nevezzük azokat a dobozokat, melyek nem halottak.

Mivel Vasek Chvátal és Erdős Pál segédjátékként definiálták [8] cikkben a Box játékot, ezért nem az volt a fő céljuk, hogy teljes pontossággal leírják a játékosok nyerő stratégiáit. Ezeknek leírását tetszőleges Box játék esetére később Hamidoune és Las Vergnas adták meg a [9]-ban.

Pár évvel ezelőtt Dan Hefetz és társai definiálták [2] a folytonos Box játékot ($CBox$). Itt az építő nem kötelezően egész értékű súlyokat tesz a dobozokba, hanem már nem negatív valós értékűek is megengedettek. A dolgozatban hasonló módon, mint Box játékot fogjuk jelölni a folytonos $CBox$ -t ($CBox(m, a_1, a_2, \dots, a_n)$) és feltesszük, hogy mindig az építő kezd. A romboló és az építő stratégiáinak bemutatása előtt, megfigyeljük rendelkezik-e az építő egy általános feltétellel, mely ha teljesül a $CBox$ játékokra, akkor mindig nyer. Ez mellett még átgondoljuk, milyen kapcsolat van a Box és a $CBox$ viselkedése között.

Minden pozitív i egész számra jelöljük az i -dik *harmonikus* számot H_i -vel. Vagyis $H_0 = 0$ és $H_i = \sum_{j=1}^i \frac{1}{j}$ minden $i \geq 1$ -re. Vezessük be tetszőleges $m, a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számokra

$$A_{i,j} = \max \{a_i, mH_j\},$$

ahol $1 \leq i \leq n$ és $j \in \mathbb{N}$.

3.4. Tétel. [2] *Tetszőleges $m, a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számokra, a $CBox(m, a_1, a_2, \dots, a_n)$ -ban akkor és csak akkor nyer az építő, ha $\sum_{i=1}^t (A_{i,t-i} - mH_{t-i}) \leq tm$ érvényes tetszőleges $1 \leq t \leq n$ -re.*

Azt láthatjuk, hogy ha m és a dobozok mérete egész szám és a rombolónak van nyerő stratégiája a $CBox$ -ban, akkor ugyanezekkel az értékekkel játszott Box játékban is van. Míg fordított esetben a következő tétel igaz.

3.5. Tétel. *Legyen $m, a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív egész szám. Ha az építőnek van nyerő stratégiája $CBox(m, a_1, a_2, \dots, a_n)$, akkor szintén rendelkezik nyerő stratégiával a $Box(m+1, a_1, a_2, \dots, a_n)$ -ban.*

Az előbbiek alapján azt tapasztalhatjuk, hogy a hagyományos Box játék és a folytonos $CBox$ játék hasonlóan viselkedik.

Az újrafelhasznált Box játék című fejezetben található tétel belátásához szükséges bemutatnom az építő stratégiájának egy családját a $CBox(m, a_1, a_2, \dots, a_n)$ -ban, amely a [2]-ből származik. A játék kezdete előtt az építő eldönti, hogy hány lépésben szeretne nyerni. Mondjuk ez legyen t , és ezután csak az $1, \dots, t$ -vel jelölt dobozokba fogja a súlyait pakolni (A dobozok méretük(szabad elemek száma) szerint nagyság szerint vannak rendezve). A játék folyamán az építő ennek a t doboznak a méretét próbálja egyensúlyban tartani.

Jelöljük $Balance(t)$ -vel az előbbiekben ismertetett stratégiát. A stratégiában az építő veszi az első t legkisebb méretű dobozt, vagyis a $a_1, a_2, \dots, a_t$ méretűeket (A többi dobozhoz nem is fog hozzányúlni). Az építő minden lépése szétbontható több kisebb lépésre. Először akkora valós súlyt pakol a legnagyobb méretű t -dik dobozba, hogy annak a mérete megegyezzen a második legnagyobb doboz méretével. Ez a $t - 1$ -edik doboz. Ezek után, akkora súlyokat pakol a két legnagyobb méretű dobozba, hogy azoknak a mérete megegyezzen a harmadik legnagyobb méretű dobozéval, és így tovább. Addig lép ezen gondolatmenet szerint, amíg el nem fogy a kezéből az összes lehető súly (ebben az esetben m). Bármikor, ha a romboló kiiktat a t legkisebb méretű dobozból egyet, akkor az építő ezt a dobozt a továbbiakba figyelmen kívül hagyja, vagyis a romboló lépését túlélő dobozokra folytatja a stratégiáját.

A $Balance(t)$ stratégia leírásából az alábbi tulajdonságok következnek:

1. A játék során az építő nem érinti a $t + 1 \leq i \leq n$ jelű dobozokat.
2. Legyen $1 \leq i \neq j \leq t$ két élő doboz. Ha az építő érintette a j jelű dobozt, de az i jelűt nem, akkor tudjuk, hogy az i jelű doboz jelenlegi mérete nem nagyobb, mint a j jelű doboz mérete.
3. A játék tetszőleges pillanatában az építő által érintett dobozok mérete megegyezik.

Mielőtt rátérnénk a következő fejezetre az utolsó gondolat a romboló stratégiájának ismertetése lesz. Ez a stratégia nagy vonalakban hasonlít a már említett mohó stratégiához, mert a romboló mindig a számára legveszélyesebb dobozba teszi az elemét. Ha átgondoljuk eléggé ésszerűnek is hangzik, hisz így tudja legjobban lecsökkenteni annak az esélyét, hogy az építő a következő lépésébe elfoglaljon egy teljes dobozt. A stratégia bizonyítható, bizonyítása megtalálható a [2]-ban.

4. fejezet

Játékok lassítása és az Erdős-Selfridge típusú tételek

Az eddigiek során egy $\mathcal{F} = (X, \mathcal{H})$ hipergráf játék építő-romboló változatában úgy játszottunk, hogy a két játékos lépésenként $1 - 1$ egységet tett le (továbbiakban kavicsot) a táblára. Azonban mi történik akkor, ha ezeket a kavicsokat kettőbe vagy háromba, vagy akár k darabra törik szét, vagyis, ha a játékosaink ezeket az $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ vagy $\frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \dots - \frac{1}{k}$ méretű kavicsokat teszik le a tábla mezőire lépésenként?

Ezt a fajta darabolást akár végtelen sokszor megtehetjük, tehát a kavicsunkat akár végtelen sok kis darabra is vághatjuk. Ekkor juttunk el az úgynevezett "homok"-hoz. Ez más szavakkal az jelenti, hogy a játékosaink lépésenként nem-negatív valós értékű súlyokat helyezhetnek el a tábla mezőire.

Könnyen láthatjuk, hogy a lassítás új jelenséget hoz a hipergráf játékok területére. Mivel ha a játékosok már csak két kisebb darabra törik szét a kavicsokat, már megváltoznak a játékosok elérhető stratégiái. Mivel ebben az esetben, ha az építő egy fél mezőt foglalt el, akkor a romboló számára az a legjobb lépés ha ennek a mezőnek a másik felét foglalja el. Míg az alapesetben a rombolónak nem volt lehetősége ilyen fajta lépésre. Az egyszerűség kedvéért az uniform esettel foglalkozunk csak, azaz amikor $|A| = n$ minden $A \in \mathcal{H}$.

Mielőtt megpróbálnánk az Erdős-Selfridge tételt kiterjeszteni erre a témakörre, definiáljuk, hogy mit is nevezünk egy k -lassított játéknak.

4.1. Definíció. Legyen $\mathcal{F} = (X, \mathcal{H})$ hipergráf játék építő-romboló változata. Ha a játékosok k darab $\frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \dots - \frac{1}{k}$ nagyságú kavicsot tesznek le lépésenként, akkor a játékot k -lassított játéknak nevezzük és $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{k})$ -ként jelöljük.

4.2. Megjegyzés. Abban az esetben, ha játékosaink homokkal játszanak, akkor a játékot $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{\infty})$ -val jelöljük.

4.3. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{k})$ lassított játék építő-romboló változata ($\forall k \in \mathbb{N}$), ahol $\forall A \in \mathcal{H}$ esetén $|A| = n$. Ha

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} \binom{kn}{k-1} (1+k)^{1-\frac{|A|}{k}} < 1,$$

akkor a romboló nyer.

Bizonyítás. Elsőként 2-lassított játékokra, vagyis a $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{2})$ fogjuk belátni, ezek után fogjuk tovább gondolni egy adott k -lassított játékokra ($k \leq n$) és végül kiterjesztjük tetszőleges k -lassított játékokra.

Tehát vegyünk a $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{2})$ lassított játékot, ami azt jelenti, hogy az építő és a romboló is $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ méretű kavicsokat helyeznek el a táblán.

A következő módon vizsgáljuk, meg mit tudunk mondani a romboló nyerésének feltételéről az adott lassított játékban. Az X halmaz elemeit bontsuk szét két darabra, ez ésszerűnek is tűnik, hisz a játékosok a játékban lépésenként két fél mezőt tudnak elfoglalni a tábláról. Ekkor kaptunk egy olyan halmazt, melyben a $2n$ darab fél mezőnk van, továbbiakban nevezzük X' -nek. Ekkor vegyük az összes, olyan részhalmazát X' halmaznak, melyekben pontosan egy fél mező nincs benne, aminek számát könnyen ki tudjuk számolni hiszen $\binom{2n}{1}$ lesz. Az előbbieken definiált X' halmazon játszunk azt a felgyorsított játékot, amelyben az építő és a romboló is $2 - 2$ elemet tesz le lépésenként, míg a játékosok céljai megegyeznek a $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{2})$ lassított játékból ismert célokkal.

Az említett játékokra már tudjuk használni az előző fejezetben ismertetett Erdős-Selfridge-Beck tételt, ami azt mondja ki, hogy ha $\sum_{A \in \mathcal{H}} (1+q)^{1-\frac{|A|}{p}} < 1$, akkor a romboló nyeri a játékot. Mivel tudjuk, hogy $p = q = 2$ így a következőképpen néz ki behelyettesítés után az egyenlőtlenség:

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} 2n (1+2)^{1-\frac{2n-1}{2}} < 1$$

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} 2n 3^{-n+\frac{3}{2}} < 1$$

Így kaptunk feltételt a romboló nyerésére, ami nem csak az X' -n játszott felgyorsított játékokra lesz igaz, hanem a $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{2})$ játékokra is. Vagyis 2-lassított játékok esetére a tételt beláttuk.

Hasonló gondolatmenettel fogjuk vizsgálni a k -lassított játékokat is, amikor a $k < n$. Ebben az esetben is vesszünk egy új halmazt, amelybe beletesszük az összes k darabra szét vágott mezőt. Vegyük az így kapott halmaz összes olyan részhalmazát, mely pontosan $k - 1$ elemet nem tartalmaz az egész halmazból, jelöljük szintén X' -val. Az X' számosságát ki tudjuk számolni, hiszen az pontosan annyi lesz, amennyi féleképpen kitudunk választani $k - 1$ elemű részhalmazt az nk nagyságú halmazból, vagyis $\binom{kn}{k-1}$ lesz.

Továbbá definiáljuk a X' halmazon játszott felgyorsított segédjátékunkat, ahol az építő és a romboló $k - k$ elemet foglal el a halmazból lépésenként. Majd alkalmazzunk a segédjátékra az Erdős-Selfridge-Beck tételt. Az adott játék esetén a tétel egyenlőtlensége a következőképpen fog ki nézni:

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} \binom{kn}{k-1} (1+k)^{1-\frac{nk-k+1}{k}} < 1$$

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} \binom{kn}{k-1} (1+k)^{-n+2+\frac{1}{k}} < 1$$

Míg, tetszőleges k -lassított játék esetén is az előzőekben használt gondolatmenettel bebizonyíthatjuk tételünket.

□

Tetszőleges $k < n$ esetén a tétel alapján, megadhatunk egy alsó korlátot a $\mathcal{H}$ nagyságára, amitől kezdve már a romboló nyer. Ennek kiszámítása a következő gondolatmenet szerint történik:

Tegyük fel, hogy a romboló nyeri a $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{k})$ lassított játékot. Ekkor tudjuk, hogy érvényesül a tétel, vagyis

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} \binom{kn}{k-1} (1+k)^{1-\frac{nk-k+1}{k}} < 1$$

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} \binom{kn}{k-1} (1+k)^{-n+2+\frac{1}{k}} < 1$$

Majd használva a $\binom{kn}{k-1} = \frac{(nk)!}{(k-1)!(nk-k+1)!} \approx \left(\frac{enk}{k-1}\right)^k \approx (en)^k$ közelítést kapjuk, hogy

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} (en)^k (1+k)^{1-\frac{nk-k+1}{k}} < 1$$

$\Leftrightarrow$

$$|\mathcal{H}| \leq \frac{(1+k)^{n-2-\frac{1}{k}}}{(en)^k}$$

Összefoglalva az előbbieket kapjuk a következő következményét a tételnek.

4.4. Következmény. Legyen $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{k})$ lassított hipergráf játék építő-romboló változata ($k < n$), ha $|\mathcal{H}| \leq \frac{(1+k)^{n-2-\frac{1}{k}}}{(en)^k}$ akkor a romboló nyer.

Az előző gondolatmenet könnyen átvihető tetszőleges k -ra ($n \leq k$). Csak azt kell észrevennünk, hogy az alsó korlát megadásához a következő maximalizálási feladatot kell megoldani.

$$\max (1+k)^{n-\frac{1}{k}-2} \sum_{A \in \mathcal{H}} (en)^k (1+k)^{-n+2+\frac{1}{k}} < 1$$

Mivel ennek megoldása fogja, adni a romboló szempontjából a legjobb k -t az adott játékban. Vagyis, hogy mennyire darabolja szét az 1 nagyságú kavicsát lépésenként, hogy a legjobb helyzetet teremtsen meg magának. Ennek megoldása pedig $k = (1 - \epsilon)n$, ahol $\epsilon > 0$. Így kaphatjuk az alábbi következményt:

4.5. Következmény. Legyen $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{k})$ lassított hipergráf játék építő-romboló változata ($k \geq n$), ha $|\mathcal{H}| \leq ((1 - \epsilon)n)^n$ ($\epsilon > 0$) akkor a romboló nyer.

Sejtés: Legyen $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{\infty})$ lassított hipergráf játék építő-romboló változata, ha $|\mathcal{H}| \leq (n)^n$ akkor a romboló nyer.

Az előző fejezetekben már láthattuk, hogy az Erdős-Selfridge tétel éles. Ez okból jogosan felmerülhet bennünk a kérdés, hogy éles-e az előbbieken ismertett kiterjesztett Erdős-Selfridge tétel? Ennek vizsgálásához, az előbbi fejezetben már ismertett játékot fogjuk használni. Amely a következő volt:

Legyen T_n egy n -szintes bináris fa, $X = V(T_n)$ és $A \in \mathcal{H}$, ahol A a gyökér és a levél közti út pontjait tartalmazza. Az építő célja egy tetszőleges A elfoglalása, míg a rombolónak ennek megakadályozása. Továbbiakban ennek a játék k -lassított változatát fogjuk használni, ami a következőképpen hangzik:

Legyen T_n egy n szintes bináris fa, $X = V(T_n)$, annyi változtatással, hogy a csúcsokra úgy fogunk tekinteni, mint egység nagyságú kis dobozokra (vagy csészékre). Míg a játékosok lépésenként k darab $\frac{1}{k}$ nagyságú kavicsokat tesznek le. A nyerő halmazokat pedig nem változtatjuk, vagyis $A \in \mathcal{H}$, ahol A a gyökértől a levélig tartó út pontjaiból áll. Az építő célja a továbbiakban is megszerezni egy A nyerő halmazt anélkül, hogy a halmaz tartalmazná a romboló k darab kis kavicsát. A romboló célja változik, mivel számára elég, ha egy nyerő halmazban van k darab kis kavics, ami nem kötelező, hogy egy tetszőleges ponton legyen a nyerő halmazból.

Mielőtt rátérnénk az Erdős-Selfridge tételből származó hipergráf méretére vonatkozó felső korlát vizsgálatára, bemutatjuk, milyen észrevételeket tehetünk, ha megvizsgáljuk a $(V(T_n), \mathcal{H}, \frac{1}{k})$ lassított játékot.

4.6. Állítás. Az $(V(T_n), \mathcal{H}, \frac{1}{k})$ lassított építő-romboló játékban, függetlenül attól, hogy ki kezd a romboló nyer.

Az állításon keresztül láthatjuk, míg egész érték esetben az építő nyerte az említett játékot, addig ebben az esetben a romboló nyer.

Az állítás bizonyítása azon múlik, hogy a romboló annak csúcsnak két fián osztja szét egyenletesen a kis kavicsait, amelyiken az építő a legtöbb egységgel rendelkezik. Ez azt

jelenti ebben a helyzetben, hogy a rombolónak 3 lépés után minden nyerőhalmazban lesz k darab kis kavicsa.

Az állítást könnyen kiterjeszthetjük akár m reguláris fára, de ezekben se változik a végkimenetel, vagyis ezeknél a játékoknál se tud az építő nyerni. Mivel mindig annak a csúcsnak a fiain osztja szét a romboló a kis kavicsait, amelyiken az építőnek a legtöbb eleme van, ezért könnyen megakadályozhatja az építőt a nyeresben.

A kis kitérő után visszatérhetünk az Erdős-Selfridge tétel élességének vizsgálatára lassított játék esetén. Első lépésben a 2-lassított játékon fogjuk megfigyelni, hogy mit mondhatunk a fejezetben belátott tétel élességéről. Azt láthatjuk, hogy míg a tétel következménye alapján azt mondhatjuk, hogy ha $|\mathcal{H}| \leq \frac{(3)^{n-\frac{3}{2}}}{2^n}$ akkor a romboló nyer, addig látni fogjuk, hogy létezik olyan hipergráf játék, mely esetében $|\mathcal{H}| = 3^n$ és az építő nyer. Ez azt jelenti, hogy míg láttuk, hogy egész értékben az Erdős-Selfridge tétel éles, addig már 2-lassított játékok esetén már ez az élesség eltűnik, de azért az értékek nagyságrendben megegyeznek.

Annak belátásához, hogy létezik olyan $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{2})$ lassított játék, amelyben az építő nyer és $|\mathcal{H}| = 3^n$ segítségül fogjuk hívni a fejezetben ismertetett játékot. Mivel a fent említett lassított játékokra tekinthetünk úgy is, mint ha egy n uniform fán játszanánk. Ekkor, ha az építő azt a stratégiát követi, hogy az első lépésében elfoglalja a fa gyökerét, majd ezt követően adott lépésében az előző lépésében általa elfoglalt csúcs fiai közül azt a csúcsot választja ki, melyen a rombolónak nincs eleme. Ebből következik, hogy mivel a romboló egy lépésében legfeljebb két csúcsra pakolhatja a kavicsait, az építőnek már az is elég, ha minden csúcsnak 3 fia van. Így megkaptuk, hogy létezik olyan 2-lassított játék, amelyben 3^n méretű a nyerőhalmaz és az építő nyer.

Hasonló módon láthatjuk az előbb tárgyalt kapcsolatot k -lassított játék ($k < n$) esetén is. Azt tudjuk a tétel következménye alapján, hogy ha $|\mathcal{H}| \leq \frac{(1+k)^{n-2-\frac{1}{k}}}{(en)^k}$, akkor a romboló nyer. De beláthatjuk, hogy létezik olyan k -lassított játék, melyben $|\mathcal{H}| = (k+1)^n$ és az építő nyer. Azt vehetjük észre, hogy itt is az értékek nagyságrendben megegyeznek.

Ennek belátása is hasonlóan történik, mint a 2-lassított játék esetén. Így ha végigkövetjük az ott használt gondolatmenetet, vagyis azonosítsuk a $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{k})$ -lassított játékok egy n -szintes fával. Az építő számára az is elégséges az előbbiekre tárgyalt stratégiájához, ha minden csúcsnak $k+1$ fia van. Így megmutattuk, hogy létezik olyan $(X, \mathcal{H}, \frac{1}{k})$, mely esetén a $|\mathcal{H}| = (k+1)^n$ és az építő tud nyerni.

Természetes e gondolatmenet átvihető tetszőleges k -lassított hipergráf játékok esetére is egy kis módosítással. Azt már tudjuk, a tétel következménye alapján, hogy ha $|\mathcal{H}| \leq ((1-\epsilon)n)^n$ ($\epsilon > 0$) akkor a romboló nyer. De egy észrevétel és az előbbi gondolatmenet segítségével beláthatjuk, hogy létezik az adott k -ra olyan lassított játék, melyen a $|\mathcal{H}| = (n+1)^n$ és az építő nyer. Ennek belátása, ahogy már említettük hasonlóan történ-

nik, mint az előbb. Csak azt kell észrevennünk, hogy egy n -szintes fa esetén, az építőnek az is elég, ha minden csúcsnak $n + 1$ fia van.

Összefoglalva a fejezetben megfigyelhettük, mi történik ha kiterjesztjük az általunk definiált lassított játékok területére az Erdős-Selfridge tételt. Ez mellett megfigyelhettük, hogy ekkor az Erdős-Selfridge tétel élessége eltűnik, de nagyságrendben megegyeznek a két játékos nyerésére meghatározott tulajdonságok.

5. fejezet

Újrafelhasznált játékok

Újrafelhasznált játékokkal már szintén találkozott mindenki, hisz ennek a legnépszerűbb típusa a jól ismert malom játék. Amelyben a játékosok a játék első részében a táblán egyesével helyezik el kavicsukat, majd ez után a második részben pedig egy adott szabály szerint helyezhetik át saját elemüket a táblán [10].

A játékok ezen családját formálisan következő módon definiáljuk.

Legyen egy $\mathcal{F} = (X, \mathcal{H})$ hipergráf játék $k \in \mathbb{N}$ paraméterrel. Az első k lépésben a szokásos módon játszanak a felek, majd utána a már lerakott elemeiket helyezhetik át az X táblán.

Azt láthatjuk, hogy ha egy építő-romboló játékban egy játékosnak van párosítási stratégiája, a játékban az újrafelhasználtság nem hoz újat. Általában az újrafelhasznált játékokról nagyon keveset tudunk. Nyitott kérdés például, hogy az Erdős-Selfridge tétel igaz marad-e? A [10]-ben láthatjuk, milyen eredményeket születtek a *Kaplansky* típusú újrafelhasznált játékokra.

Az eredeti *Kaplansky* játékban a játékosok a $\mathbb{R}^2$ pontjait veszik felváltva, $k \in \mathbb{N}$ rögzített. Az nyer, akinek először k pontja lesz egy olyan ℓ egyenesen, amin az ellenfele nem rendelkezik ponttal. (Az építő-romboló változatban építő akkor nyer, ha lesz olyan l egyenese, amelyen neki k pontja van, míg a rombolónak egy sem).

A $CBox(m, a_1, a_2 \dots a_n)$ játék újrafelhasznált verzióját, amelyben k lépés után kezdődik a második fázis, $C_RBox(m, k, a_1, a_2, \dots, a_n)$ -ként fogjuk a továbbiakban jelölni.

6. fejezet

Újrafelhasznált Box játék

6.1. Tétel. Legyen $C_RBox(m, k, a_1, a_2, \dots, a_n)$. Ha $k > 2(H_n - 1)$, akkor az építő el tud foglalni egy mH_n nagyságú dobozt.

Bizonyítás. Legyen S indexhalmaz, amely az alapjáték élő dobozainak az indexét tartalmazza. Jelöljük c_i -vel, az i -dik dobozban az elfoglalt elemek számát az adott lépésben. A dobozokat minden lépés után a következőképpen rendezzük:

$\{c_i\}_{i \in S^c}$ monoton növekvő sorozat

$\{c_i\}_{i \in S}$ monoton csökkenő sorozat

A romboló a következő stratégiát játsza a C_RBox -ban. Az újrafelhasználás részében, mindig a számára legveszélytelenebb dobozból veszi fel az elemet és a legveszélyesebb dobozba pakolja át.

Az már ismert, hogy az alapjátékban az építő legfeljebb mH_n nagyságú dobozt tud elfoglalni.

A következőkben az építő stratégiáját fogom ismertetni, amellyel a C_RBox -ban elfoglalhatja a kért nagyságú dobozt.

Az első k lépésben ugyanazokat a lépéseket lépjük, amit az alapjátékból ismert Balance(n) stratégia diktál.

Az újrafelhasználásban pedig az építő lépése két részből áll. Először összegyűjti az m egységet a dobozokból, és ezek után leteszi őket a megfelelő dobozokba. Az összegyűjtés elég egyszerűen történik. Elindul a legkisebb $i \in S^c$ -től, melyre $c_i > 0$, és addig növeli az i indexet, míg a dobozok kiürítésével nem lesz a kezében m egység. Ezek után, olyan $i \in S$ indexű dobozokba osztja szét az m egységet, melyre teljesül a lerakás előtt, hogy $c_i > 0$.

A továbbiakban arra a kérdésre adok választ, hogy melyik az a legkisebb k , amire alkalmazható az előbb említett stratégia. Ahhoz, hogy az építő elfoglalja a kért méretű

dobozt, az újrafelhasználás $n - k$ -dik lépése előtt legalább két élő doboznak kellett lennie, amelyekben az elfoglalt elemek száma $mH_n - m$. Tehát a következő feltétel szükséges, hogy teljesüljön $km \geq 2m(H_n - 1)$. Ha nincs ennyi egysége az építőnek a dobozokban, akkor biztos nem tudja elérni a kért állást.

Az, hogy ez elegendő feltétel, következik az előbb leírt stratégiából. Ha egy halott dobozból az építő felszedte az összes elemét, akkor az a doboz feleslegessé válik a játék további részében. Tehát számunkra elég, ha az utolsó lépésben csak a két még élő dobozban vannak az építőnek egységei.

Ezen stratégia alapján megkaptunk a k -ra egy elegendő és szükséges feltételt, amire már az építő el tud foglalni egy mH_n méretű dobozt. $\square$

6.2. Következmény. Legyen $Box_R(m, k, a_1, a_2, \dots, a_n)$ játék, ha $k \leq 2(\lfloor H_n \rfloor - 1)$, akkor az építő el tud foglalni egy $\lfloor mH_n \rfloor$ nagyságú dobozt.

6.3. Tétel. Legyen $C_RBox(m, k, a_1, a_2, \dots, a_n)$ játék. Ha $\forall i \in \mathbb{N}_n$ -re, $a_i > mH_n$, akkor az építő nem tud nyerni.

Bizonyítás. Mivel maga a bizonyítás gondolatmenete nem változik, ha mH_n helyett H_n -t veszünk, ezért arra az esetre bizonyítjuk, amikor az $m = 1$.

A bizonyítás alapgondolatát az adja, hogy pontosan tudjuk milyen stratégiát használ a romboló (mindig a számára legveszélytelenebb dobozból veszi fel az elemet és a számára legveszélyesebb dobozba pakolja át). Vegyük, hogy minden doboz mérete megegyezik és méretük $mH_n + \epsilon$, ($\epsilon > 0$). Abban az esetben veszítünk rombolóként, ha az építő elfoglal egy $mH_n + \epsilon$ nagyságú dobozt (a továbbiakban azt tekintjük a doboz méretének, amennyi egységet az építő elfoglalt és akkor nyert ha van egy $mH_n + \epsilon$ méretű doboza).

Tegyük fel, hogy veszít a romboló, vagyis elfoglalt az építő egy $mH_n + \epsilon$ nagyságú dobozt. Ekkor a romboló utolsó lépése után maradt egy $H_n - 1 + \epsilon$ méretű élő doboz. Mivel a romboló a számára legveszélyesebb dobozba teszi az elemét, így az építő utolsó előtti lépése után két $H_n - 1 - \frac{1}{2} + \epsilon$ méretű doboznak kellett lennie.

Ez előtt viszont kellett, hogy legyen három $mH_n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \epsilon$ méretű élő doboz, amihez az építő $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ -t tett. Ha a romboló az egyik dobozt ki is iktatja akkor is megmarad az előbbieken említett két $H_n - 1 - \frac{1}{2} + \epsilon$ méretű doboz. Így viszont indukcióval megkapható az a tény, hogy ha az építő nyer, akkor $(n - k)$ lépéssel a játék vége előtt $(n - k)$ darab $H_n - H_{n-k} + \epsilon$ méretű doboz volt.

Látni fogjuk, hogy ez az állás csak akkor következhetett be, ha miután a romboló felszabadította a számára legveszélytelenebb dobozt és lefedte a számára legveszélyesebbet, akkor is $(n - k)$ darab $H_n - H_{n-k} + \epsilon$ méretű doboz maradt, vagyis minden doboz legalább $H_n - H_{n-k} + \epsilon$.

Mivel csak akkor történhetne másképp, ha a romboló valamely i -dik lépése után az új fedetlen doboz mérete $H_n - H_i + \epsilon$.

Az előző lehetőséget a következő gondolatmenettel zárjuk ki.

Legyen i az első helyzet, mikor a legnagyobb méretű doboz lefedésére a romboló fel kell, hogy emelje egy olyan saját elemet egy dobozból, ami alatt szintén sok, $H_n - H_i$ egysége van az építőnek (a $H_n - H_i + \epsilon$ méretű dobozra is működik). Ekkor minden fedett doboz mérete $H_n - H_i$, tehát $k + i$ darab $H_n - H_i$ méretű doboz van. Azaz az építő által letett egységek összesen legalább $(k + i)(H_n - H_i)$.

Mivel ez k lépés alatt került bele a dobozokba a

$$(k + i)(H_n - H_i) < k \quad (1)$$

egyenlőtlenségnek teljesülnie kell.

Nyilván csak azt az esetet kell vizsgálnunk mikor $H_n - H_i < 1$. Ekkor tekintsük a következő függvényt:

$$f(k) = (k + i)(H_n - H_i) - k.$$

Azt kell észrevennünk, hogy az általunk definiált f függvény k -ban monoton csökkenő. Ekkor osszuk el az (1) egyenletet k -val. Ebben az esetben az kapjuk, hogy:

$$\left(1 + \frac{i}{k}\right)(H_n - H_i) < 1$$

Azonban tudjuk, hogy $k > H_n$, mivel legalább ennyi egységre van szüksége az építőnek, ha el akar foglalni egy H_n méretű dobozt. Így kapható a következő egyenlőtlenség:

$$\left(1 + \frac{i}{H_n}\right)(H_n - H_i) < 1 \quad (2)$$

Ebben az egyenlőtlenségben azt kell még észrevennünk, hogy tudjuk, hogy $k + i \leq n$, vagyis $i < n - H_n$. Így kapható a (2)-ből a következő:

$$\frac{n}{H_n}(H_n - H_i) < 1 \quad (3)$$

Ezek után használjuk a H_n jól ismert közelítését ($\log(n - 1) \leq H_n \leq \log(n + 1)$) illetve a $\log(1 + x) < x - (1/2)x^2$ egyenlőtlenséget.

$$\frac{n}{\log(n - 1)}(\log(n - 1) - \log(i - 1)) < 1$$

$$\frac{n}{\log(n - 1)}(\log(n - 1) - \log(n - \log(n - 1) - 1)) < 1$$

$$\frac{n}{\log(n - 1)} \log\left(\frac{n - 1}{n - \log(n - 1) - 1}\right) < 1$$

$$\frac{n}{\log(n-1)} \log \left(1 + \frac{\log(n-1)}{n - \log(n-1)} \right) < 1$$

$$\frac{n}{\log(n-1)} \left(\frac{\log(n-1)}{n - \log(n-1) - 1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\log(n-1)}{n - 1 - \log(n-1)} \right)^2 \right) < 1$$

$$\frac{n}{n - \log(n-1) - 1} - \frac{1}{2} \left(\frac{n \log(n-1)}{(n - 1 - \log(n-1))^2} \right) < 1$$

$$1 + \frac{\log(n-1) + 1}{n - \log(n-1) - 1} - \frac{1}{2} \left(\frac{n \log(n-1)}{(n - 1 - \log(n-1))^2} \right) < 1$$

De az utolsó egyenlőtlenség $n > 1$ -től nem teljesül vagyis ellentmondásra jutottunk.

Ezek után visszatérhetünk a fő gondolatmenethez vagyis, ha nyer az építő, akkor létrejön a játék során egy olyan állás, ahol minden doboz mérete legalább $H_n - H_{n-k} + \epsilon$. Ez azt jelenti, hogy összesen az építő egységei a dobozokban legalább $n(H_n - H_{n-k}) + \epsilon$. Másrészt tudjuk, hogy $n \geq k$ -ra

$$n(H_n - H_{n-k}) + \epsilon \geq k,$$

ami, másképp

$$\left(\frac{n}{n-k+1} + \frac{n}{n-k+2} + \cdots + \frac{n}{n} \right) = \sum_{i=1}^k \left(1 + \frac{k-i}{n-k+i} \right) \geq k.$$

Ennek az a jelentése, hogy ehhez az építő számára nyerő helyzet eléréséhez több, mint k egységre van szüksége. Ez pedig nem lehetséges, tehát ellentmondásra jutottunk.

□

7. fejezet

Összegzés

A dolgozatban megismerkedhettünk a pozíciós játékok területével, ezen belül is az építőromboló játékokkal.

Ezt követően megtudtuk mit is jelent az újrafelhasznált játékok fogalma és mit érthetünk a játékok lassításán. Végül az utolsó fejezetben láthattunk nem triviális újrafelhasznált játékot. Ahol kiderült, az eredményekből, hogy az újrafelhasználás nem hoz újat a hagyományos és a folytonos *Box* játék esetén. Jogosan merülhet fel bennünk a kérdés, létezik-e egyáltalán olyan játék, mely esetén változást eredményez az újrafelhasználás. Az említett kérdésre továbbra is keressük a választ.

Ezen kívül láthattunk példát arra is, hogy a játékok lassítása esetén vannak Erdős-Selfridge típusú tételek, de éles feltétel nem kapható egyszerűen; így ez további vizsgálatok tárgya.

Irodalomjegyzék

- [1] J. Beck, *Combinatorial Games: Tic-Tac-Toe Theory*, Cambridge University Press, 2008.
- [2] Dan Hefetz, Michael Krivelevich, Miloš Stojaković, Tibor Szabo, Continuous Box game. kézirat 2011.
- [3] J. Beck, Positional Games. *Combinatorics, Probability and Computing* **14** (2005), 649-696.
- [4] A.W Hales and R.I. Jewett, Regularity and positional games. *Trans Amer. Math. Soc.* **106** (1963) 222-229; M.R. # 1265.
- [5] A. Lehman, A solution of the Shannon switching game. *Siam J.* **12** (1964), 687-725.
- [6] J. Beck, Remarks on positional games. *Acta Math Acad Sci Hungar* **40** (1982), 65-71.
- [7] P. Erdős and J.L. Selfridge, On a combinatorial game. *Journal of Combinatorial Theory Series A* **14** (1973), 298-301.
- [8] V. Chvátal and P. Erdős, Biases positional games. *Annals of Discrete Math.* **2** (1978), 221-228.
- [9] Y.O. Hamidoune and M. Las Vergnas, A solution to the box game, *Discrete Mathematics* **65** (1987), 157-171.
- [10] A. Pluhár, The Recycled Kaplansky's Game. *Acta Cybernetica* **16** no. 3 (2004), 451-458.
- [11] Pluhár András, Pozíciós játékok. *Sigma* **3-4** (2007), 111–130.
- [12] M. Bednarska and T. Luczak, Biased positional games and phase transation. *Random Structures and Algorithms* **18** (2001), no. 2, 141-152.