

Eloszlásfüggvények alkalmazása az építészetben

Kisfaludi-Bak Zsombor – Takács Petra-Renáta

1. Bevezetés

Kutatásunk témája és egyben első stádiumának tananyaga a világszintű újítások egyik alappillére, a normális eloszlás sűrűségfüggvényének (Gauss-függvény) megismerése és tulajdonságaiban való elmélyülés, valamint az eddigi matematikai alkalmazásainak tanulmányozása volt. Ezeknek vizsgálata közben rájöttünk, hogy a függvény felhasználható olyan folyamatok optimalizálására, amelyekben ha matematikai grafikonokat használunk a modellezéshez, egyenetlen, szélsőséges változásokat találunk. Ilyen szélsőséges változásokat találtunk az építészeti tervezésben, azon belül pedig a hidrotechnikai építészetben. Ezek megoldása érdekében írtunk egy Gauss-függvényre alapozott programot, és terveztünk egy új struktúrát.

A normális eloszlás, legfőképpen a standard normális eloszlás az orvos-, illetve a természettudományban is gyakran megfigyelhető jelenség. Szándékunkban állt ezt igazolni, így a Bostoni Tudományos Múzeumban (Museum of Science, Boston) megfigyeltek alapján terveztünk és megépítettünk egy saját kísérleti szerkezetet, amely tükrözi a normális eloszlás jelenségét.

A dolgozat négy részből, vagyis bevezetésből és három különálló fejezetből épül fel.

Az első fejezetben a normális eloszlás sűrűségfüggvényének tulajdonságait vizsgáltuk. Továbbá a két-, illetve többdimenziós normális eloszlás elméletében mélyedtünk el, és ebbe a fejezetbe foglaltuk bele a normális eloszlás kísérleti szemléltetésének leírását is.

A második fejezet a Gauss-függvény eddigi matematikai alkalmazásainak ad helyet, amely számos szakágban nyert területet.

A harmadik fejezet pedig a Gauss-függvényelmélet általunk kitalált új felhasználási pontjait foglalja magába. Ezeknél az alkalmazásoknál a Gauss-függvény „optimalizálási tulajdonságát” használtuk fel elsősorban.

2. Általánosan a Gauss-függvényről

A normális eloszlást, amely a statisztikában a legfontosabb és leggyakrabban alkalmazott eloszlás, a matematikus-csillagász Karl Friedrich Gaussról nevezték el, aki elsőként alkalmazta az égitestek mozgására, bár többen úgy vélik, hogy Pierre-Simon Laplace hozzájárulása a normális eloszlás tulajdonságainak tisztázásához jelentősebb volt.¹



1. ábra: Karl Friedrich Gauss

1989-ben a Német Szövetségi Bank olyan 10 márkás bankjegyet bocsátott ki, amelyen Gauss képe mellett a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének grafikonja és képlete is látható. Ez a bankjegy 2001-ig volt forgalomban. Emellett Németország három, Gaussról megemlékező bélyeget is kibocsátott. A lenti képen látható 725-ös bélyeget 1955-ben, halálának 100. évfordulója alkalmából bocsátották ki.



2. ábra. Gauszt ábrázoló 10 márkás bankjegy és bélyeg

2.1. Normális eloszlás

Egy X valószínűségi változó $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó, ha sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

ahol μ a várható érték (középérték) és σ a szórás.

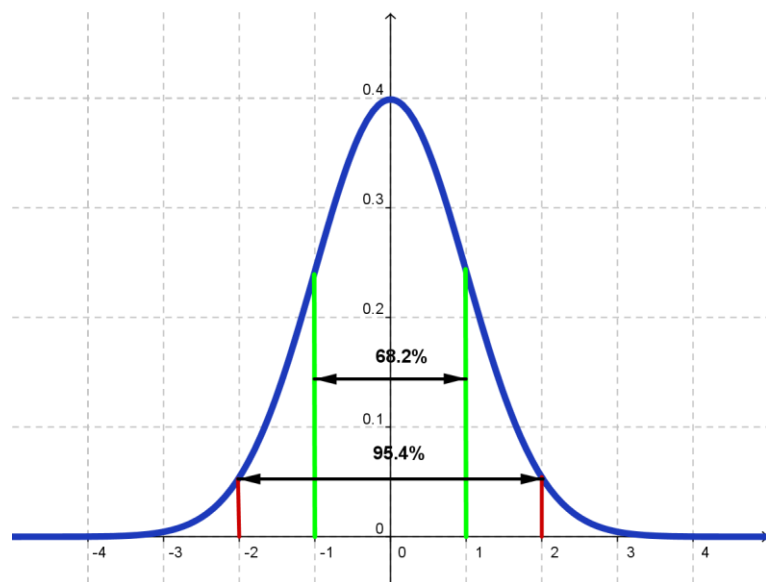
A normális eloszlás eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Jelölése: $N(\mu, \sigma)$.

Kivételes esetben, ha $\mu = 0$ és $\sigma = 1$, akkor standard normális eloszlásról beszélünk.

A standard normális eloszlás esetében az adatok 68,2 százaléka a várható értéktől a $-\sigma$ és $+\sigma$ távolságon belül helyezkedik el, vagyis az adatok a várható érték körül tömörülnek. További jellegzetessége az eloszlásnak, hogy az adatok 95,4%- százaléka a $\mu - 2\sigma$ és $\mu + 2\sigma$ értékek közt van, és az adatok 4,6 százaléka helyezkedik el ezen távolságokon kívül. Ezt a következő ábra is szemlélteti:

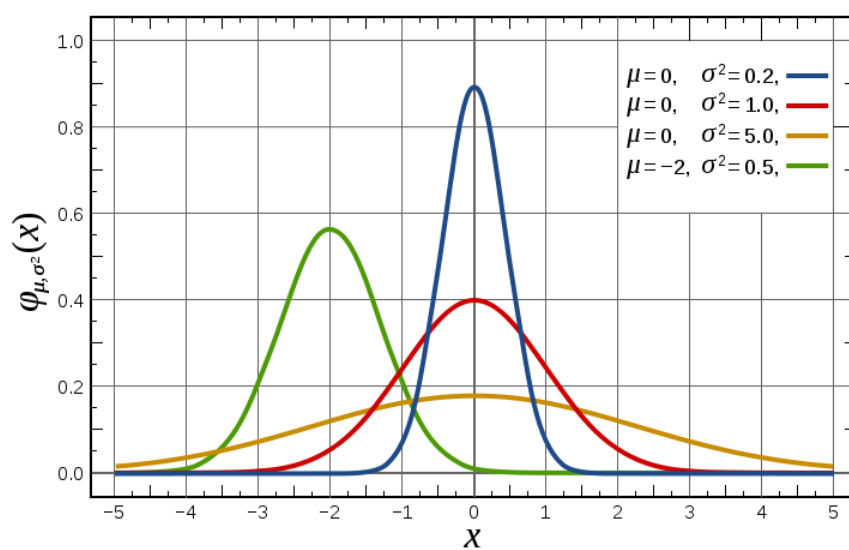


2. ábra. A standard normális eloszlás jellegzetességei

Tulajdonságok:

Tétel 2.1 Az f függvény grafikonja az ún. haranggörbe (Gauss-görbe).

Tétel 2.2 Az f függvény folytonos és μ -re vonatkozóan szimmetrikus.



4. ábra. A normális eloszlás sűrűségfüggvényének grafikonja

Tétel 2.3 Minden x valós szám esetén $f(x) > 0$.

Tétel 2.4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Tétel 2.5 Érvényes a következő egyenlőség: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Tétel 2.6 Az f függvény szigorúan növekvő a $(-\infty, \mu]$ intervallumon és szigorúan csökkenő a $[\mu, \infty)$ intervallumon.

Tétel 2.7 [5] A f függvénynek $(\mu \pm \sigma)$ pontokban inflexiós pontja van.

Tétel 2.8 [5] A f függvény maximuma $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, melyet μ -ben (középérték) vesz fel.

2.2. Kétdimenziós normális eloszlás

Kétdimenziós normális eloszlásról akkor beszélünk, ha egy kétdimenziós folytonos valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye a következő:

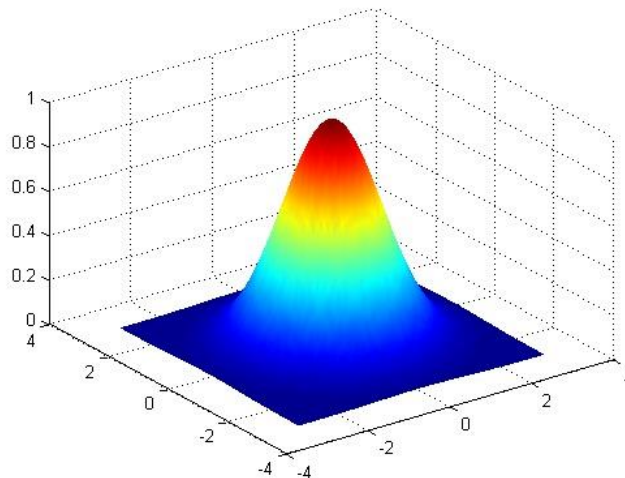
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]},$$

ahol $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+, |r| < 1$.

Jelölés: $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1, \sigma_2; r)$.

Tétel 2.2.1² A kétdimenziós normális eloszlás peremeloszlásai is normális eloszlások.

Pontosabban: ha (ξ, η) eloszlása $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1, \sigma_2; r)$, akkor ξ eloszlása $N(\mu_1, \sigma_1)$, η eloszlása pedig $N(\mu_2, \sigma_2)$.



5. ábra. A kétváltozós Gauss-függvény grafikus képe

2.3 Többdimenziós normális eloszlás

2.3.1 A többdimenziós standard normális eloszlás

A $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ valószínűségi vektorváltozót n -dimenziós standard normális eloszlásúnak nevezzük, ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók.

Jelölés: $\xi \sim N(0, I)$. Ha a dimenzióra is utalni akarunk, akkor $\xi \sim N_n(0, I)$.

2.3.1. Állítás A $\xi \sim N(0, I)$ sűrűségfüggvénye a következő:

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}x^T x},$$

ahol $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ egy n -dimenziós sorvektor.

2.3.2. A többdimenziós normális eloszlás szemléltetése

Legyen $\mu \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_{n \times n}$ és $\xi \sim N(0, I)$. Ekkor $\eta = A\xi + \mu$ -t n -dimenziós normális eloszlásúnak nevezzük.

Az $\eta_1, \dots, \eta_n$ valószínűségi változókat együttesen normális eloszlásúnak nevezzük, ha $(\eta_1, \dots, \eta_n)^T$ n -dimenziós normális eloszlású.

Jelölés: $\eta \sim N(\mu, D)$ vagy $\eta \sim N(\mu, D)$, ahol μ a várható érték, mely egy n -dimenziós vektor, $D = AA^T$ pedig a szórás, mely egy $n \times n$ -es mátrix.

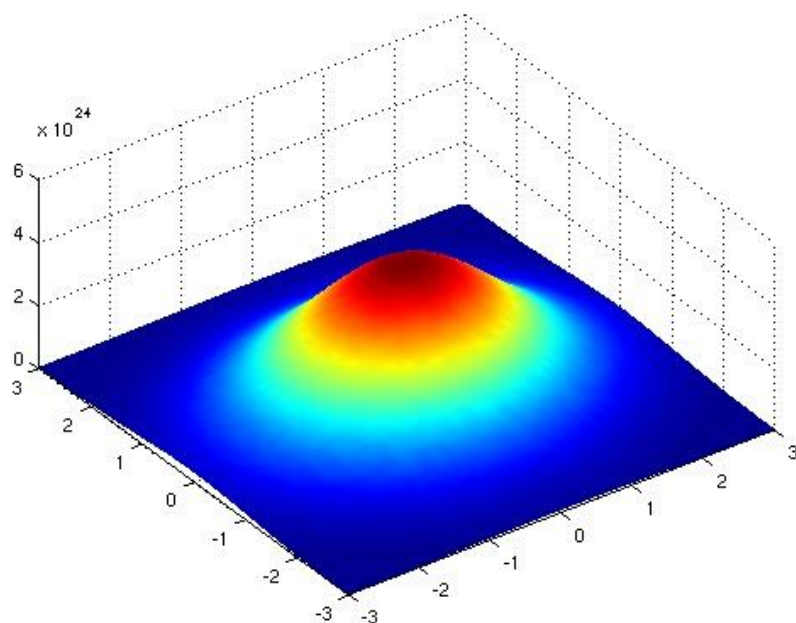
A $\eta \sim N(\mu, D)$ -nek akkor és csakis akkor van sűrűségfüggvénye, ha D invertálható. Ekkor η sűrűségfüggvénye a következő:³

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det D)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T D^{-1}(x-\mu)}.$$

Ha D nem invertálható, $\eta \sim N(\mu, D)$ -t elfajult n -dimenziós normális eloszlásúnak nevezzük.

Amint az előbb is láttuk, a kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényének képe egy harang alakú felület.

Általában az $\eta \sim N_2(\mu, D)$ nem elfajult kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye a fenti harang „eltorzítottja”. Középpontja μ -ben van, szintvonalai pedig ellipszisek. Egy-egy ilyen ellipszis középpontja μ -ben van, tengelyei pedig s_1 és s_2 irányúak, és hosszuk $\sqrt{\lambda_1}$ illetve $\sqrt{\lambda_2}$ -vel arányos, ahol s_1 és s_2 a D mátrix λ_1 , illetve λ_2 sajátértékekhez tartozó sajátvektorai.



6. ábra. Az elliptikus Gauss-függvény grafikonja

2.4. A normális eloszlás kísérleti szemléltetése

A Bostoni Tudományos Múzeumban (Museum of Science, Boston) megfigyeltünk egy szerkezetet amely a normális eloszlás jelenségét tükrözi. Ez alapján terveztünk egy saját kísérleti eszközt, amely hasonló a Bostoni Tudományos Múzeumban látottakhoz, de mivel a 10 négyzetméteres szerkezetből egy másfél négyzetméterest szerkesztettünk, így ugyanazokkal a problémákkal találkoztunk, mint a múzeumban dolgozó tervezők. A szerkezet működési elve azon alapszik, hogy ha egy gömb formájú testet szabadon esni engedünk egy vízszintes alkotójú hengerre úgy, hogy a súlypontjaik egy közös függőleges egyenesen helyezkedjenek el, akkor a gömb formájú test megközelítőleg az esetek felében jobbra, másik felében pedig balra fog továbbhaladni (akárcsak a pénzérme, amely feldobáskor az esetek közel felében fejre, másik felében írásra esik). Továbbá, ha több sor hengert helyezünk el, a legvalószínűbb, hogy a gömbtest átlagosan egyszer jobbra, egyszer balra esik, így tehát a hengerek alá érve éppen a kiindulási pont alatt helyezkedik majd el. A legvalószínűtlenebb, hogy a gömbtest minden esetben balra, vagy minden esetben jobbra essék. Összefoglalva, a vízszintes távolság növekedésével csökken a gömbtest odaérkezésének valószínűsége.

A tervezés legnehezebb szakaszaiban a gömbtestek és a hengerek átmérőit, valamint a hengerek közötti távolságot számoltuk ki.

A kidolgozott terveket egy magas pontosságú építészeti laboratóriumban kiviteleztek, az eredmény pedig a következőképpen néz ki:



7. ábra. A Gauss-görbe szemléltetése kísérleti eszközzel

3. Eddigi felhasználások

Az orvostudomány évszázadok óta gyűjti az adatokat az egyének magasságával, vérnyomásával és súlyával kapcsolatban. Az eddigi rengeteg adatból kikövetkeztethető egy természetes viselkedés, azaz egy várható (normális) érték. Innen ered a kifejezés, hogy ezek a paraméterek leírhatók normális eloszlással.

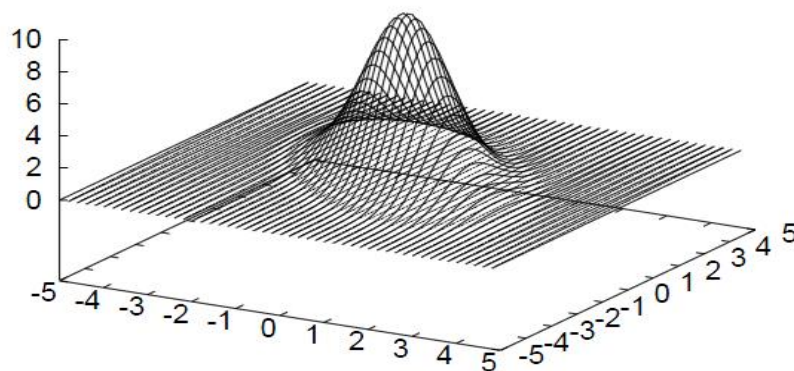
A Gauss-eloszlást nemcsak az orvostudományban és a természettudományokban, de a műszaki tudományokban is alkalmazzák. Az építőanyagok tulajdonságaival kapcsolatos mérések kimutatták, hogy a Gauss-féle szabályos eloszlásból kiragadott mintasorozatnak felelnek meg.⁴

A normális eloszlásra alapozva számos elmélet bontakozott ki, mint például a Gauss által 1821-ban bevezetett „átlag hibája” fogalom. Ezt a *Theoria combinationis observationum*

erroribus minimis obnoxiae (*Theory of the combination of observations least subject to error*) című munkájában tanulmányozta, amelyet értékelésekben, szűrésekben és vizsgálóprogramokban használnak.

Az élkeresés az aktuális képfeldolgozás egyik legalapvetőbb része. Ezt a folyamatot nehezítik az úgynevezett zajos, zajosabb képek, amelyeknél a szűrés segíthet. Ezekre használatos a Gauss-szűrés, amely a kétdimenziós Gauss-függvénnyel való konvolúciót jelent.

A csillagászatban a csillagkeresési algoritmusoknál figyelhetünk fel a Gauss-függvény egy újabb alkalmazására. A csillagok ponteloszlás függvényét egy elliptikus Gauss-függvénnyel közelítik, amelynek meghatározott szigma értéket adnak.



8. ábra. Az elliptikus Gauss-függvény grafikonja

Az ismert görbe formájához hasonló épületi formákat találhatunk számos európai építész terveiben: többnyire az épületek külalakját kívánják jellegzetessé tenni, ezzel viszont csökkentik a beltér kihasználtságát. Ilyen például a berni Paul Klee Múzeum:



9. ábra. A berni Paul Klee Múzeum

4. A Gauss-függvényelmélet új felhasználási pontjai

4.1. Hidrotechnikai felhasználás

Az előbbieken a Gauss-függvény optimalizálási tulajdonságából indultunk ki. Olyan problémákat kerestünk, amelyek matematikailag ábrázolva szélsőséges változásokat tartalmazó grafikonokat eredményeznek annak ellenére, hogy folytonos képet igényelnek. Ilyen esetet találtunk a hidrotechnikai építkezés területén. Mint ismeretes, egy folyó keresztmetszetén, ha ábrázoljuk a sebességvektorokat, egy Gauss-függvény által leírt görbét kapunk. Ha a görbe nem követi a Gauss-féle görbe alakját, akkor a víz zavart, eredményképpen gyengébb minőségű lesz. Másrészt ha egy folyó sebességét függőlegesen vizsgáljuk, észrevesszük, hogy a sebesség a felszínen a legnagyobb, a mederben közelít a nulla értékhez, és a két pont között a sebességvektorok grafikonja egy folytonos, a Gauss-görbéhez hasonlatos görbét ír le.

Ezzel ellentétben a gyűjtőgátak vizének részleges leeresztésekor aránytalanul kevés alapi csapot nyitnak ki, tehát kevés csapot közel teljes mértékben nyitnak meg. Például ha adott a kiürítendő hozammennyiség, a mostani eljárás alapján kiszámolják, hány teljes csap megnyitására van szükség, és legfeljebb három-négy csapot használnak. Ezáltal nemcsak közvetlenül az igénybe vett csapok mögötti terület sérül nagyobb mértékben, de a művelet

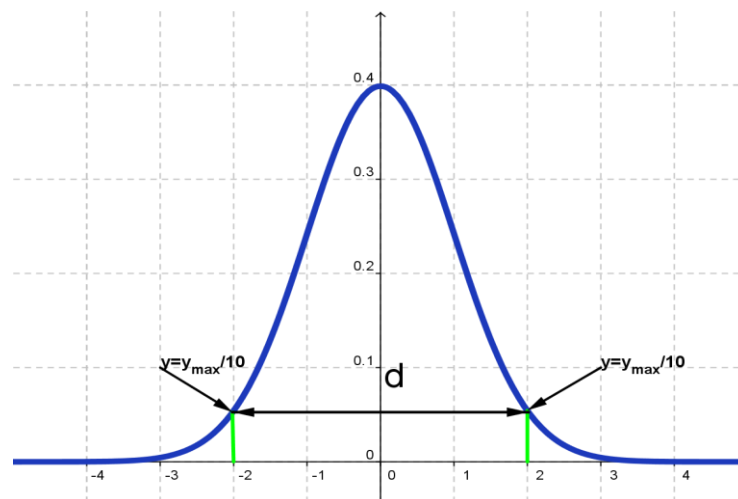
révén a folyó lassabban is áll vissza a normál sebességgörbéjébe, ami növeli a hordalékanyag (szemcsék) hozamát. A probléma megoldására terveztünk egy programot, amely azon alapszik, hogy bizonyos mértékben az összes csap kinyílik, melyek nyílásszögük alapján normál eloszlásúak, vagyis értékeiket grafikonra helyezve követik a Gauss-görbe ívét. Tehát bizonyos hozam elérése érdekében a középső csap nyitása lesz a legnagyobb szögű, valamint a szélső csapok nyitása lesz a minimális, így nemcsak a vízgyűjtő gát közvetlen területe károsodik kevésbé, hanem a folyó is lényegesen gyorsabban nyeri vissza eredeti folyását.

Az alapképlet, amelyből kiindultunk:

$$Q = S \cdot V,$$

azaz a hozam egyenlő a terület (akár átmérő) és a sebesség szorzatával. Feladatunk, hogy egy megadott hozamot érjünk el. Az előbbiből következik, hogy $S = \frac{Q}{V}$. Ez alapján S lesz az az összterület, amelyet a csapok nyitásával kell elérjünk.

Másrészt: A Gauss-függvény grafikus képének csak azon részét használjuk, ahol $y_i \geq \frac{y_{\max}}{10}$.



10. ábra. A Gauss-görbe számításokban felhasznált része

Két esetünk van:

1. ha páratlan a csapok száma: $y_{\max} = y_{\frac{n+1}{2}}$

2. ha páros számú csappal rendelkezünk, akkor két maximumértékünk lesz:

$$y_{\max} = y_{\frac{n}{2}}, y_{\max} = y_{\frac{n}{2}+1}$$

Minden csapnak megfeleltetünk egy állandót, amely az adott csap és a középső csap nyitási területeinek hányadosa:

$$k_i = \frac{y_i}{y_{\max}},$$

így az összállandó:

$$K = \sum_{i=1}^n k_i.$$

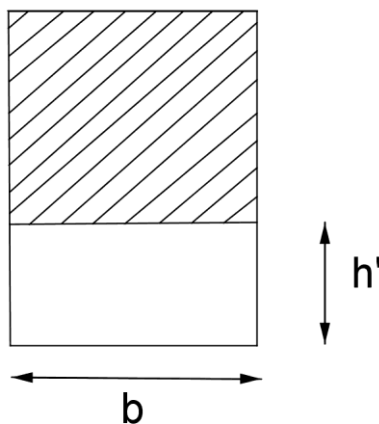
Ezek alapján a középső csap nyitási területe:

$$S_{\max} = \frac{Q}{V \cdot K},$$

valamint az egyes csapok nyitása:

$$S_i = S_{\max} \cdot k_i.$$

A csapok formája és nyitási módozata változó. A leghasználtabbak a téglalap (vagy akár négyzet) alakú csapok:



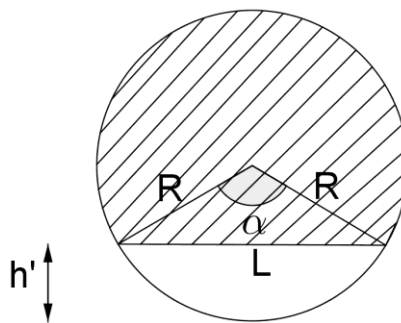
11. ábra. Téglalap keresztmetszetű alapi csap

Ekkor

$$h' = \frac{S}{b}.$$

Lehetnek kör keresztmetszetűek is, amelyek háromféleképpen nyílnak:

1. függőleges irányú nyílás;



12. ábra. Giotin típusú nyílás

Ekkor két esetet tárgyalunk:

- a) $h' < R$, azaz a nyitási magasság kisebb a kör sugaránál.

Ekkor $h' = R - R \cos \frac{\alpha}{2}$. Ahhoz, hogy h' -t meghatározhassuk, szükségünk van az

α szög mértékére. Ezt a következőképpen kapjuk meg:

$h' < R$, ami azt jelenti, hogy $S \leq \frac{\pi R^2}{2}$.

$$\text{Ekkor } S = \frac{\alpha}{2} R^2 - \frac{L \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}}{2}.$$

De $L = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$, s ezt behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$S = \frac{\alpha}{2} R^2 - R \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Ebben az egyenletben S , R ismert, tehát az α szög kifejezhető, s így megkapjuk a nyitási magasságot.

b) $h' > R$, azaz a nyitási magasság nagyobb a kör sugaránál.

$$\text{Ekkor } h' = R + R \cos \frac{2\pi - \alpha}{2}.$$

Ebben az esetben az előzőhöz hasonlóan járunk el.

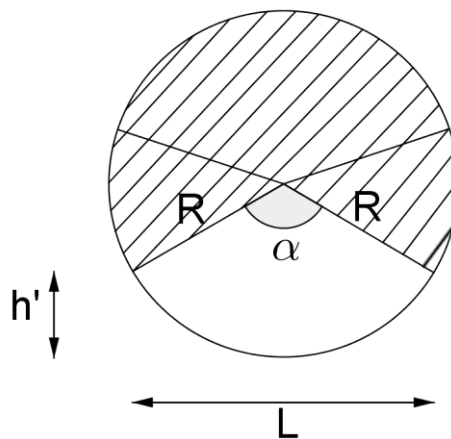
$$\text{Mivel } h' > R, \text{ következik, hogy } S > \frac{\pi R^2}{2}.$$

Ekkor a következőt kapjuk:

$$S = \frac{\alpha}{2} R^2 - R \sin \frac{2\pi - \alpha}{2} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \frac{2\pi - \alpha}{2}},$$

ahonnan az α szög kifejezhető, ami a nyitási magasság meghatározásához vezet.

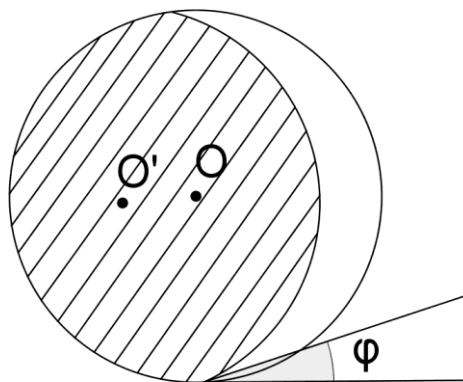
2. a kör középpontja körül nyílnak;



13. ábra. Középpontú szögnyitás

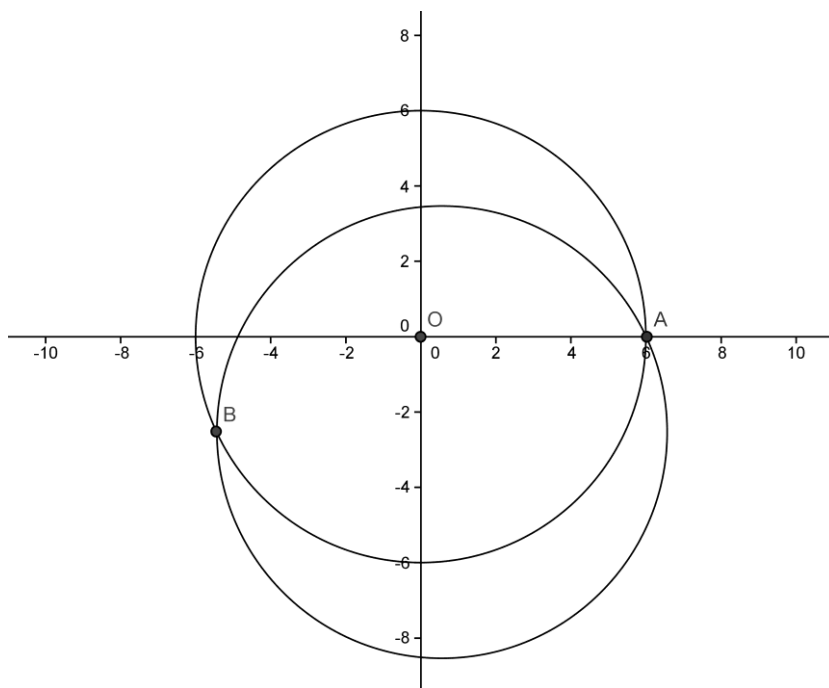
$$\text{Ebben az esetben } S = \frac{\alpha}{2} R^2, \text{ ahonnan } \alpha = \frac{2S}{R^2}.$$

3. egy rögzített pont körül nyílnak;



14. ábra. Perempont körüli nyitás

Ebben az esetben van két körünk: az O és O' középpontú körök. Tekintsük a 15. ábrát.



15. ábra. Perempont körüli nyitás részletrajza

A mi esetünkben az O középpont megegyezik az origóval. Jelöljük az O középpontú, r sugarú kört $C(O,r)$ -rel. A kör egyenlete a következő: $x^2 + y^2 = r^2$. Ekkor

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

tehát

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Legyen

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Amint a fenti ábrán is látható, az A pont koordinátái r és 0 . Meghatározzuk a B pont koordinátáit. Tudjuk, hogy egy tetszőleges φ szöggel egy tetszőleges $A(x_0, y_0)$ pont körüli forgatás egyenlete a következő:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

A mi esetünkben $x_0 = r$ és $y_0 = 0$, tehát:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x - r \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Elvégezve a műveleteket, megkapjuk az új kör parametrikus egyenletét:

$$\begin{cases} x' = (x - r) \cos \varphi - y \sin \varphi + r \\ y' = (x - r) \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{cases}$$

tehát

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi - r \cos \varphi + r \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi - r \sin \varphi. \end{cases}$$

Jelöljük az elforgatott kört C' -tel. Ennek a körnek a sugara szintén r , így az egyenlete az alábbi módon néz ki:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2,$$

ahol x_1 és y_1 , a kör középpontjának koordinátái ismeretlenek. $x = y = 0$ esetén a

következőt kapjuk:

$$\begin{cases} x_1 = -r \cos \varphi + r \\ y_1 = -r \sin \varphi. \end{cases}$$

Ezt visszahelyettesítjük a kör egyenletébe:

$$(x - r + r \cos \varphi)^2 + (y + r \sin \varphi)^2 = r^2.$$

Amint az ábra is mutatja, $C' \cap C = \{A, B\}$. Tehát vizsgáljuk a következő egyenletrendszer megoldását:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ (x - r + r \cos \varphi)^2 + (y + r \sin \varphi)^2 = r^2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ (x - r)^2 + 2r(x - r) \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + y^2 + 2ry \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x^2 + y^2 - 2xr + r^2 + 2r(x - r) \cos \varphi + 2ry \sin \varphi + r^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = r^2. \end{cases}$$

A második egyenlőségbe az $x^2 + y^2$ helyébe beírjuk az r^2 -t, illetve az egyenlőség mindkét oldalából kivonunk r^2 -et:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ 2r^2 - 2xr + 2xr \cos \varphi - 2r^2 \cos \varphi + 2ry \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ 2r^2(1 - \cos \varphi) + 2xr(\cos \varphi - 1) + 2ry \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

A második egyenlőség mindkét oldalát elosztjuk $2r$ -rel.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ r(1 - \cos \varphi) + x(\cos \varphi - 1) + y \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ (r - x)(1 - \cos \varphi) = -y \sin \varphi. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \frac{(x - r)(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi} = y. \end{cases}$$

Az $y = \frac{(x - r)(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi}$ -t behelyettesítjük az első egyenlőségbe:

$$x^2 + y^2 = x^2 + \frac{(x - r)^2 (1 - \cos \varphi)^2}{\sin^2 \varphi} = \frac{x^2 \sin^2 \varphi + (x - r)^2 (1 - \cos \varphi)^2}{\sin^2 \varphi} = r^2.$$

$$\Leftrightarrow x^2 \sin^2 \varphi + (x - r)^2 (1 - \cos \varphi)^2 = r^2 \sin^2 \varphi.$$

$$\Leftrightarrow x^2 \sin^2 \varphi + (x^2 - 2xr + r^2)(1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) = r^2 \sin^2 \varphi.$$

$$\Leftrightarrow x^2 \sin^2 \varphi + x^2 - 2xr + r^2 - 2x^2 \cos \varphi + 4xr \cos \varphi - 2r^2 \cos \varphi + x^2 \cos^2 \varphi - \\ - 2xr \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi = r^2 \sin^2 \varphi.$$

Csoportosítva a tagokat a következőt kapjuk:

$$(x^2 + x^2 \cos^2 \varphi + x^2 \sin^2 \varphi - 2x^2 \cos \varphi) - 2xr + 4xr \cos \varphi - \\ - 2xr \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + r^2(1 - 2 \cos \varphi) = r^2 \sin^2 \varphi.$$

$$\Leftrightarrow 2x^2(1 - \cos \varphi) - 2xr(1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) + r^2(1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0.$$

Tehát a következő másodfokú egyenlethez jutunk:

$$2x^2(1 - \cos \varphi) - 2xr(1 - \cos \varphi)^2 + r^2(2 \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi) = 0.$$

$$\Delta_x = 4r^2(1 - \cos \varphi)^4 - 4 \cdot 2(1 - \cos \varphi)r^2(2 \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi) =$$

$$= 4r^2[(1 - \cos \varphi)^4 - 4(1 - \cos \varphi) \cos \varphi(\cos \varphi - 1)] =$$

$$= 4r^2(1 - \cos \varphi)^2[(1 - \cos \varphi)^2 + 4 \cos \varphi] =$$

$$= 4r^2(1 - \cos \varphi)^2(1 + \cos \varphi)^2 = 4r^2(1 - \cos^2 \varphi)^2.$$

Innen

$$x_{1,2} = \frac{2r(1 - \cos \varphi)^2 \pm \sqrt{\Delta_x}}{4(1 - \cos \varphi)}.$$

Ebből tehát megkapjuk az x_B -t.

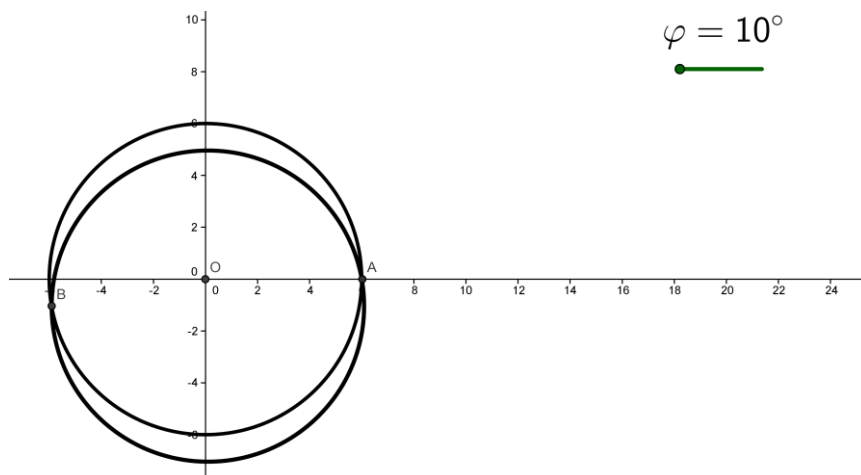
Legyen

$$g(x) = \sqrt{r^2 - (x - r + r \cos \varphi)^2} - r \sin \varphi.$$

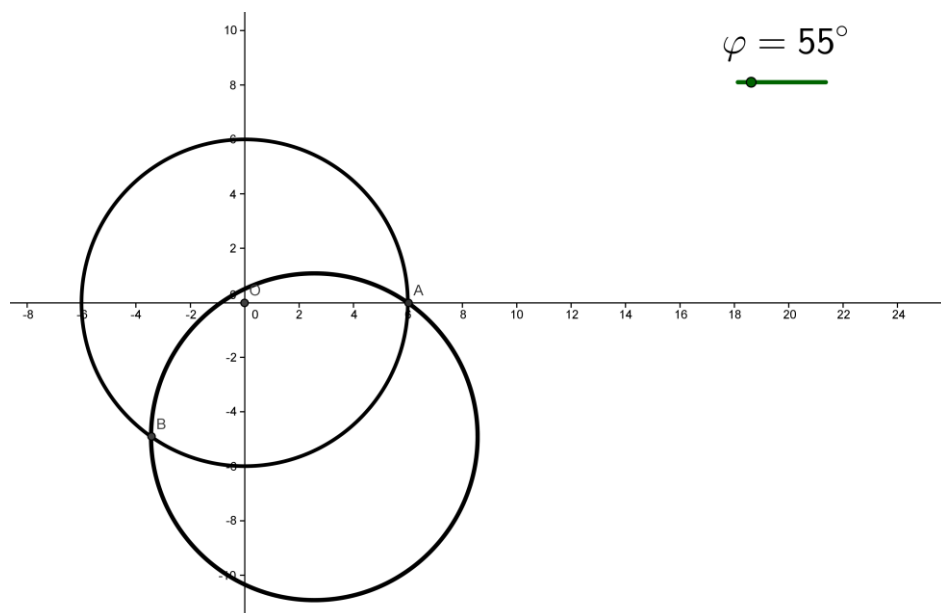
Ekkor

$$S = \int_{x_B}^r |f(x) - g(x)| dx.$$

Miután elvégezzük a számításokat, kapunk egy kifejezést, ahonnan a φ szög kifejezhető.



16. ábra. Az „A” pont körüli 10 fokos elforgatás



17. ábra. Az „A” pont körüli 55 fokos elforgatás

4.2. Műépítészeti alkalmazás

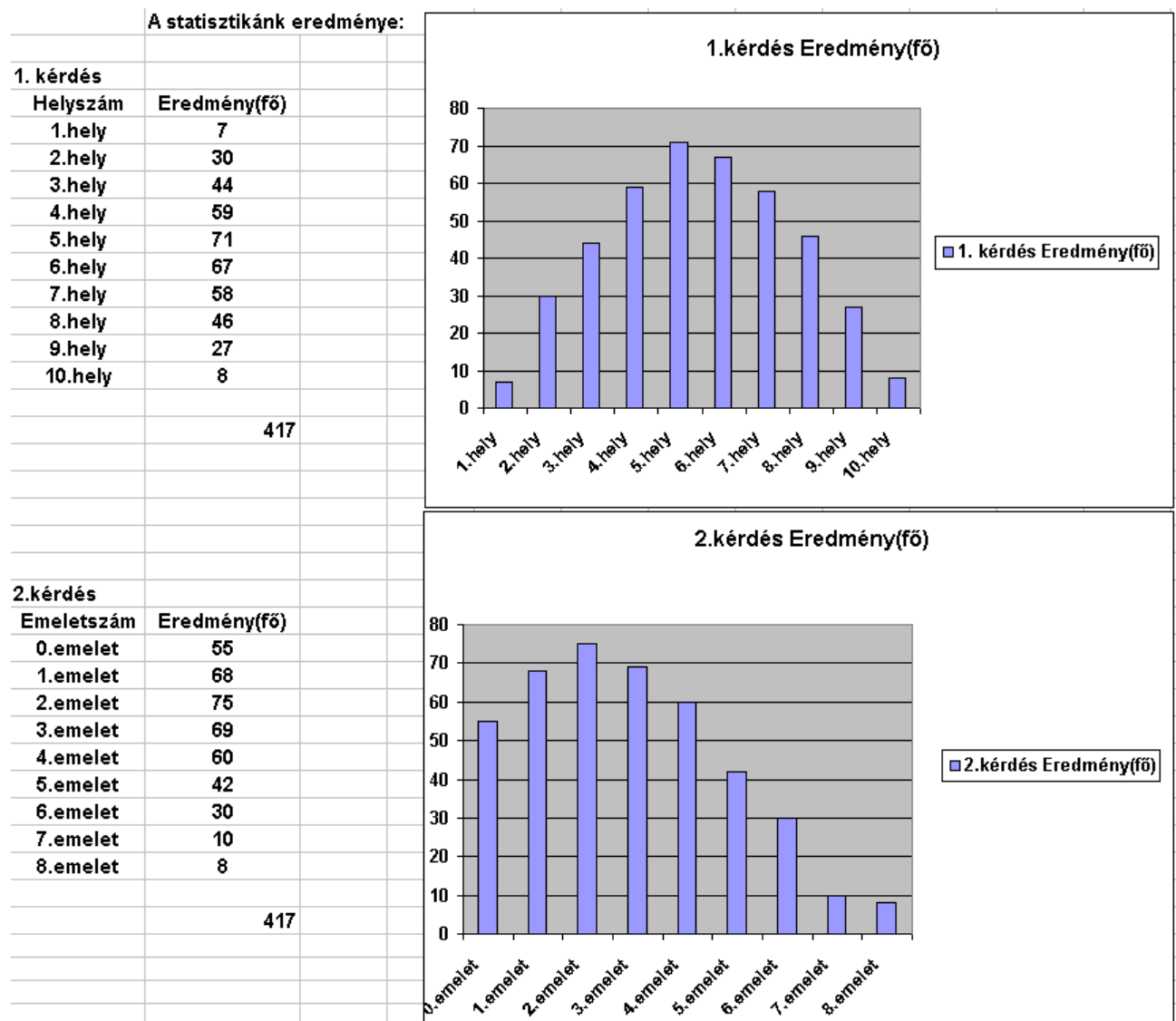
Amint említettük, az építészetben már használták a függvény grafikus alakját, de csak az épületek formáját tették jellegzetessé, így viszont csökkent a hasznos beltér. A mi építészeti alkalmazásunk révén a függvénnyel nyerjük a legkihasználhatóbb belterű formát.

Ezen alkalmazásunk statisztikákon alapul. Az első statisztika arra vonatkozik, hogy az egyének saját bevallásuk szerint hol foglalnának helyet egy sor széken. A feldolgozott eredmények alapján ebben az esetben is érvényes a haranggörbe, vagyis legtöbben középen szeretnek ülni, míg csak páran foglalnának helyet a szélső üléseken.

A második felmérés ugyanezt vizsgálta, csak a függőleges térben. Az eredmény leírható egy nem teljes haranggörbével, amelynek a középértéke a második-harmadik emeletnél található, és csökken a magassággal.

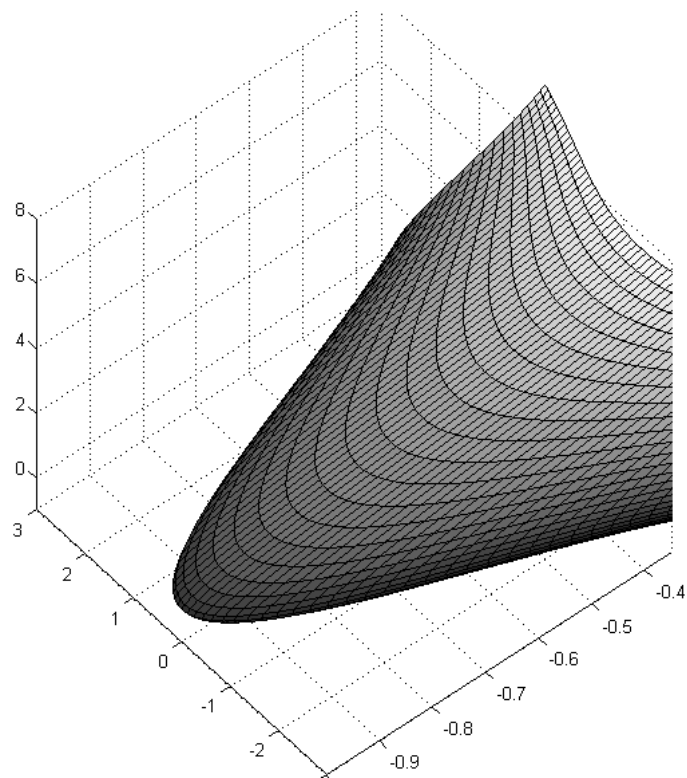
A kérdőív tehát a következőképpen nézett ki:

1. Hova ülne egy színpad előtti, tíz székből álló sorban?
2. Hányadik emeleten foglalna helyet egy 8 szintes színházban?

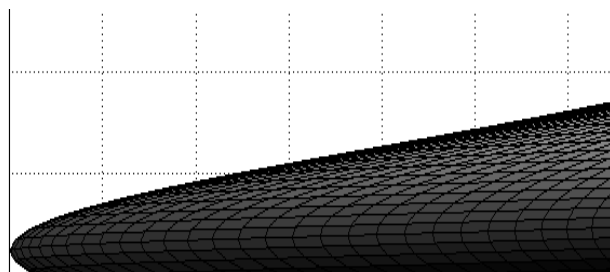


18. ábra. Statisztika

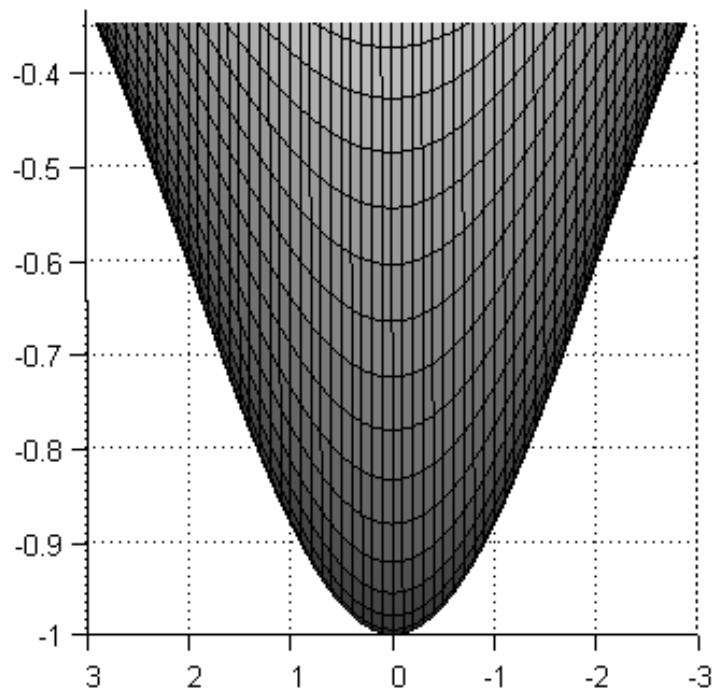
A két felmérés alapján megterveztük az Ideális Nézőterű Színházat, amely az átlagközönség igényeinek a legjobban megfelelne. Ez természetesen csak egy szélsőséges eset, de világviszonylatban megfigyelhető számos építmény struktúrájának rokonjellege. Gazdasági szempontból ellenben nem előnyös, hiszen a színházak számára a legfontosabb végérték az ülések (tehát az eladható jegyek) száma. Több férőhelyet oly módon érnek el, hogy a hátsó sorokban és a felső emeletek soraiban is több széket helyeznek el. Ezekben az esetekben a normális eloszlás a színház karbantartásában és tisztításában segít, például kimutathatjuk az ülészsorozat cserélésének szükségességi idejét a színház bármely pontjában, emellett a jegyek árának meghatározásában is felhasználhatjuk.



19. ábra. Az igényekhez mért Ideális Nézőterű Színház



20. ábra. Oldalnézet



21. ábra. Felülnézet

Felhasznált irodalom

- Bauer, H. 1996. *Probability Theory*. Berlin – New York, Walter de Gruyter.
- Fazekas I. 2000. *Valószínűesszámítás*. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen.
- Kempelen Farkas Digitális Tankönyvtár (KFDT)
- Soós A. 2001. *A valószínűesszámítás elemei*. Egyetemi Kiadó, Kolozsvár.
- Stigler, S. M. 1986. *The history of statistics: the measurement of uncertainty before 1900*. Belknap Series. Cambridge, Mass., Harvard University Press.
- Tóth Z. 1991. *Építőanyagok I–II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 19–375.

¹ Lásd a Kempelen Farkas Digitális Tankönyvtárt (KFDT).

² Fazekas, 2000.

³ Bauer, 1996; Fazekas, 2000.

⁴ Lásd Tóth,1991.